# RECURSOS DIDÁTICOS EM AULAS DE MATEMÁTICA

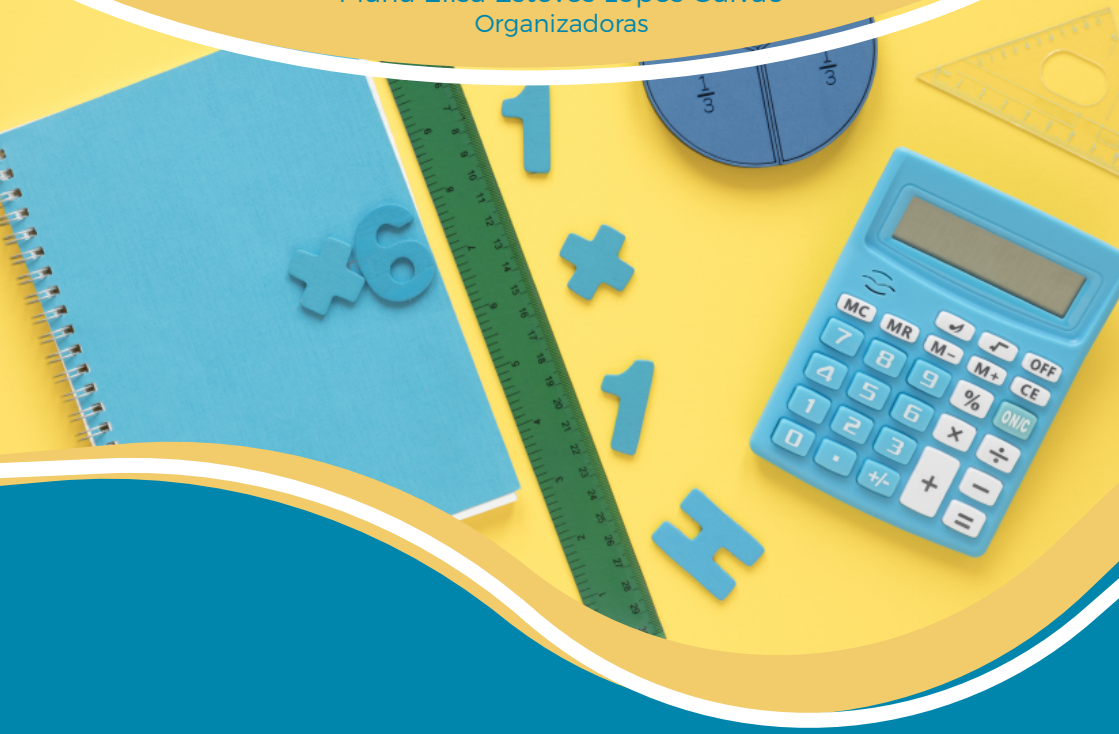
## O proposto pelas pesquisas e o praticado

Maria Lucia Panossian
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
Organizadoras

Biblioteca do Educador
Coleção SBEM
Volume 24

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Maria Lucia Panossian
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
Organizadoras



# RECURSOS DIDÁTICOS EM AULAS DE MATEMÁTICA

## O proposto pelas pesquisas e o praticado

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

2022

Copyright © 2022 Sociedade Brasileia de Educação Matemática. Todos os direitos reservados.

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM
Universidade de Brasília - Campus Darcy Ribeiro
Caia Postal 4332 - AC UNB - CEP 70842-970 - Asa Norte/DF
www.sbembrasil.org.br | sbem@sbembrasil.org.br

**Conselho Editorial:**
Marcelo Almeida Bairral
Geraldo Eustáquio Moreira
Vanessa Franco Neto

**Conselho Editorial Nacional (CEN):**
Alex Jordane de Oliveira
André Luis Trevisan Antonio
Carlos Fonseca Pontes
Carlos Augusto Aguilar Júnior
Clélia Maria Ignatius Nogueira
David Antonio da Costa
Fernanda Malinosky Coelho da Rosa
Gilda Lisbôa Guimarães
Janete Bolite Frant
João Alberto da Silva
Jonei Cerqueira Barbosa
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Milton Rosa
Paulo Afonso Lopes da Silva
Romaro Antonio Silva
Sintria Labres Lautert
Suzi Samá Pinto

**Revisão de texto**
Márcia Aparecida Mariano da Silva Pina

**Projeto Gráfico, Capa e Diagramação**
Janaína Mendes Pereira da Silva

**Imagem utilizada na capa**
Freepik.com

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Recursos didáticos em aulas de matemática [livro eletrônico] : o proposto pelas pesquisas e o praticado / organização Maria Elisa Esteves Lopes Galvão , Maria Lucia Panossian. -- Brasília, DF : SBEM Nacional, 2022.
PDF.

Vários autores.
ISBN 978-65-87305-12-7

1. Aprendizagem - Metodologia 2. Educação 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Práticas educacionais I. Galvão, Maria Elisa Esteves Lopes. II. Panossian, Maria Lucia.

22-102408 CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

**Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

**DIRETORIA NACIONAL EXECUTIVA – DNE**

Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ)
**Presidente**

Fátima Peres Zago de Oliveira (IFC - Campus Rio do Sul)
**Vice-Presidente**

Geraldo Eustáquio Moreira (UnB)
**Primeiro Secretário**

Vanessa Franco Neto (UFMS)
**Segunda Secretária**

Maurício Rosa (UFRGS)
**Terceiro Secretário**

Leandro de Oliveira Souza (UFU)
**Primeiro Tesoureiro**

Ana Virgínia de Almeida Luna (UEFS)
**Segunda Tesoureira**

**Conselho Nacional Fiscal – CNF**
Antonio Carlos de Souza (UNESP - Campus de Guaratinguetá)
Everton José Goldoni Estevam (UNESPAR - Campus de União da Vitória)
Verônica Gitirana (UFPE)
Rhômulo Oliveira Menezes (SEDUC-PA / UFPA)

**Comissão de Avaliação – CA**
Vanessa Franco Neto (UFMS, DNE, Presidente)
Geraldo Eustáquio Moreira (UnB, DNE, Vice-Presidente)
Jonei Cerqueira Barbosa (UFBA, CEN)
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino (UEL, CEN)
Suzi Samá (FURG, CEN)

**Secretária da SBEM**
Larissa Martins Guedes

Obra submetida e aprovada no Edital SBEM-DNE 03/2021.

# SUMÁRIO

**A PRÁTICA E A PESQUISA SOBRE RECURSOS DIDÁTICOS: REFLEXÕES EMERGENTES DE PRODUÇÕES DO ENEM 2019**.....**6**

*Maria Lucia Panossian*

*Maria Elisa Esteves Lopes Galvão*

*Capítulo 1*

**PESQUISA E PRÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR A PARTIR DOS TRABALHOS APRESENTADOS NO XIII ENEM NO EIXO RECURSOS DIDÁTICOS**.....**20**

*Carmen Teresa Kaiber*

*Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

*Capítulo 2*

**O CARÁTER CIENTÍFICO DAS PESQUISAS VOLTADAS PARA O ENSINO MÉDIO NO XIII ENEM**.....**41**

*Gabriela dos Santos Barbosa*

*Felipe de Almeida Costa*

*Capítulo 3*

**O USO DE JOGOS COMO RECURSO PARA ENSINAR MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DE RELATOS DE EXPERIÊNCIA DO XIII ENEM**.....**58**

*Ana Paula Barbosa de Lima*

*Capítulo 4*

**DO CONCRETO AO CONHECIMENTO CONCRETO: O MOVIMENTO DAS ABSTRAÇÕES POTENCIALIZADAS POR RECURSOS DIDÁTICOS**.....**77**

*Lauro Chagas e Sá*

*Maria Lucia Panossian*

*Capítulo 5*

**RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO IDENTIFICADOS NOS TRABALHOS APRESENTADOS NO XIII ENEM**.....**95**

*Maria Elisa Esteves Lopes Galvão*

*Capítulo 6*

**OS RECURSOS DIDÁTICOS NO TRABALHO DOCENTE DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**.....**125**

*Eduardo Mancera Martínez*

**SOBRE OS ORGANIZADORES E AUTORES**.....**148**

# A PRÁTICA E A PESQUISA SOBRE RECURSOS DIDÁTICOS: REFLEXÕES EMERGENTES DE PRODUÇÕES DO ENEM 2019

*Maria Lucia Panossian*
*Maria Elisa Esteves Lopes Galvão*

Em julho de 2019, foi realizado o XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (XIII ENEM), em Cuiabá, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Trata-se de evento relevante por agregar pesquisadores, professores de diferentes níveis de ensino, bem como estudantes de graduação e pós-graduação envolvidos com as ações relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Como um evento nacional, ele atingiu a milhares de pessoas que se inscreveram para apresentação de trabalhos ou simplesmente para participação. No XIII ENEM, em 2019, as submissões realizadas foram divididas em eixos e subeixos, conforme quadro 1.

Chama a atenção a quantidade expressiva de trabalhos encaminhados para o subeixo 4 (Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior), sendo um dos subeixos com mais submissões, representando 16,4 % dos trabalhos do evento, o que revela o interesse em estudos ou pesquisas sobre essa temática. A ementa deste subeixo previa

> Estudos e experiências que abordem o uso de diferentes recursos didáticos na organização e no desenvolvimento do trabalho pedagógico, tais como os jogos, recursos lúdicos, os materiais impressos (por exemplo, o livro didático, o livro paradidático), os materiais manipuláveis, os laboratórios e os demais recursos utilizados no processo de ensino e de

> aprendizagem da matemática por estudantes dos anos finais do ensino fundamental, do ensino médio e do ensino superior. (SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019)

Quadro 1 – Distribuição dos eixos e subeixos ENEM

| | |
|---|---|
| Eixo 1 – Práticas Escolares | 1. Avaliação em Educação Matemática<br>2. Desenvolvimento curricular em Educação Matemática<br>3. Recursos Didáticos para Educação Matemática na Infância<br>4. Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior<br>5. Práticas inclusivas em Educação Matemática<br>6. Educação Matemática de jovens e adultos<br>7. Resolução de problemas e investigações matemáticas<br>8. Modelagem em Educação Matemática<br>9. Etnomatemática<br>10. O papel e o uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem matemática<br>Gestão e Avaliação de Feiras de Matemática |
| Eixo 2 - Pesquisa Em Educação Matemática | 1. Educação Matemática e Diversidade Cultural<br>2. Psicologia da Educação Matemática<br>3. Dimensões filosóficas, sociológicas e políticas na Educação Matemática<br>4. Pesquisas em práticas escolares<br>5. Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de matemática em nível superior<br>6. História da Educação Matemática<br>7. História da Matemática no processo de ensino e de aprendizagem<br>Tecnologias digitais em Educação Matemática |
| Eixo 3 - Formação De Professores | 20. Aprendizagem docente e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática<br>21. Políticas públicas curriculares na formação de professores que ensinam matemática<br>22. Formação inicial de professores que ensinam matemática<br>23. Formação continuada de professores que ensinam matemática<br>24. A parceria universidade e escola na formação de professores que ensinam matemática<br>25. Conhecimento, prática e identidade do professor que ensina matemática |

Fonte: Organizado a partir das informações de https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/index

Dentre os trabalhos apresentados deste subeixo, 27 foram pôsteres, 101 relatos de experiência, 81 comunicações científicas, 40 minicursos, totalizando 249 apresentados.

A hipótese para explicar a alta quantidade de trabalhos enviados é de que este subeixo possibilitou aproximações com a prática dos professores. Ainda que se possa discutir a compreensão de prática e teoria, é marcante que tantos trabalhos tenham sido submetidos a um eixo intitulado recursos didáticos, revelando o interesse expressivo por essa temática.

Por outro lado, ao acompanhar o movimento de pesquisadores vinculados à SBEM e que fazem parte dos Grupos de Trabalho desta sociedade, é possível ressaltar que ainda que todos os Grupos possam discutir a questão dos recursos didáticos, esse não é o foco específico de algum grupo, mas se aproxima da temática do Grupo de Trabalho 2 (GT02):

> O Grupo de Trabalho Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (GT2) tem como foco investigações e debates, no âmbito da Educação Matemática, relacionados aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, abrangendo, também, a Educação de Jovens e Adultos, o Ensino Médio integrado à educação profissional, a Educação do Campo, a Educação Escolar Indígena, a Educação Escolar Quilombola e a Educação das Relações Étnico-Raciais. As investigações relacionam-se a questões teóricas e práticas do ensino e da aprendizagem da Matemática nas diferentes modalidades, bem como questões que envolvem a avaliação. (SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 201?)

A partir dessa observação, alguns pesquisadores do GT02 se reuniram com o objetivo de analisar as produções submetidas ao subeixo 4 do XIII ENEM, procurando compreender o que tais produções revelam sobre o interesse de futuros professores, professores e pesquisadores em relação aos recursos didáticos e à prática educativa.

Nesta apresentação, serão explicitadas as ações metodológicas deste processo e alguns dos resultados quantitativos obtidos a partir dos trabalhos apresentados no evento. Análises qualitativas sobre o material serão detalhadas nos demais capítulos que compõem este *e-book*.

## A organização do material

Como analisar o alto quantitativo de produções representativas de um material bastante heterogêneo, tendo como foco o trabalho com recursos didáticos? Considerando-se a necessidade de "conhecer" o material e realizar uma primeira aproximação, optou-se por elaborar o que foi chamado de "ficha de análise" de forma a ter um conjunto de informações organizadas com dados, considerados relevantes, de cada uma das produções.

Essa ficha, que foi elaborada utilizando o formulário do Google, contava com questões de identificação da produção (Título, Resumo, Autoria etc.) e reconhecimento de informações gerais, mas principalmente questões que exigiam um levantamento prévio (objetivo da produção; fundamentação teórica adotada etc.).

Convém destacar que a elaboração das questões da ficha exigiu análises iniciais e reflexões sobre o material, visto que a própria conceituação do que é considerado "recurso didático" é variável, assim como suas características e possibilidades de utilização. Desse modo, por exemplo, a questão "Sobre o recurso utilizado" exigiu que se colocasse como alternativas "autoria própria", para os casos em que se identificasse que os autores do texto tinham elaborado o material; "reformulado/adaptado", para o caso em que os autores do texto recorreram a recursos que já existiam previamente; "reproduzido de forma integral" para o caso de recursos que não foram modificados; "não fica explícito" para o material que não se enquadrava nos casos anteriores. A ficha utilizada para análise do material está sintetizada no Quadro 2.

O preenchimento da ficha gerou interpretações diferentes entre os pesquisadores do GT, principalmente em questões como o reconhecimento da metodologia de ensino utilizada ou o reconhecimento dos resultados. Para diminuir o que seriam interpretações prévias sobre o material, optou-se por organizar, na ficha, trechos de cada trabalho analisado, considerando que isso possibilitaria a revisão de interpretações e análises posteriores. Além disso, para análises mais aprofundadas, que serão apresentadas nos diferentes capítulos deste *e-book*, os pesquisadores retornaram aos trabalhos completos.

Quadro 2 – Questões da ficha de análise

(continua na próxima página)

| QUESTÃO | FORMATO DA RESPOSTA |
|---|---|
| Nome do pesquisador do GT que está respondendo a este formulário. | Texto de resposta curta |
| Código do trabalho (nome com o qual o arquivo foi salvo) | Texto de resposta curta |
| Título: | Texto de resposta longa |
| Autores: | Texto de resposta longa |
| Modalidade do trabalho (para identificar pode ser acessada a programação do evento em https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/_arquivos/XIII_ENEM_Programacao.pdf) | Múltipla escolha<br>• Relato de experiência<br>• Comunicação científica<br>• Proposta de minicurso<br>Pôster |
| Resumo | Texto de resposta longa |
| Palavras-chave | Texto de resposta curta |
| Objetivo do artigo | Texto de resposta longa |
| Objetivo da proposta com o recurso | Texto de resposta longa |
| Natureza da Instituição proponente da pesquisa | Múltipla escolha<br>• Escola de Educação Básica<br>• Instituição de Ensino Superior<br>•Não especificado |
| Tipo de instituição | Múltipla escolha<br>• Pública<br>• Privada |
| Nome da instituição proponente | Texto de resposta curta |
| Natureza da instituição onde foi desenvolvida a pesquisa | Múltipla escolha<br>• Escola de Educação Básica<br>• Instituição de Ensino Superior<br>• Não especificado |
| Tipo da instituição onde foi desenvolvida a pesquisa | Múltipla escolha<br>• Pública<br>• Privada |
| Cidade onde foi desenvolvida a pesquisa | Texto de resposta curta |
| Unidade federativa onde foi desenvolvida a pesquisa | Múltipla escolha |
| Grupo proponente (caracterização dos sujeitos que propõe a pesquisa) | Texto de resposta longa |
| Grupo pesquisado (caracterização dos sujeitos pesquisados) | Texto de resposta longa |
| Conteúdo matemático que aborda | Texto de resposta curta |

Quadro 2 – Questões da ficha de análise

(conclusão)

| QUESTÃO | FORMATO DA RESPOSTA |
|---|---|
| Etapa escolar<br>Definidas pela ementa do subeixo 4. Trabalhos de Ensino Superior não devem ser analisados, por não serem foco do GT 2. | Múltipla escolha<br>• Anos Finais do Ensino Fundamental<br>• Ensino Médio |
| Que aspectos foram considerados na elaboração de atividades para modalidades específicas de ensino educação profissional, educação indígena, educação inclusiva, etc. | Texto de resposta longa |
| Fundamentação teórica adotada | Texto de resposta longa |
| Como as metodologias de ensino (ou tendências de Educação Matemática) se materializaram no planejamento de atividades e na elaboração do recurso didático? | Texto de resposta longa |
| Tipo de recurso utilizado (São recursos definidos pela ementa do subeixo 4: jogos, recursos lúdicos, materiais impressos, materiais manipuláveis, laboratórios) | Texto de resposta longa |
| Sobre o recurso utilizado | Múltipla escolha:<br>• Autoria própria<br>• Foi reformulado/adaptado<br>• Reproduzido de forma integral<br>• Não fica explícito |
| Descrever ou transcrever (colocando entre aspas e respectiva página) trechos em que se revela a utilização de recurso. | Texto de resposta longa |
| Descrever ou transcrever (colocando entre aspas e respectiva página) os principais resultados ou achados da pesquisa. | Texto de resposta longa |
| Outros comentários/trechos que julgue pertinentes sobre o trabalho e que não tenham sido contemplados. | Texto de resposta longa |

Fonte: Dados organizados pelos pesquisadores do GT02.

Ao final do processo, foram analisadas 229 produções deste eixo. Destas, 101 são relatos de experiência, seguido por 81 comunicações científicas, 35 propostas de minicurso e 12 pôsteres.

## Considerações iniciais sobre o material

A partir das informações contidas nas fichas a respeito dos trabalhos apresentados no XIII ENEM, no subeixo 4, foi possível organizar um mapeamento que retrata, em grandes linhas, os aspectos considerados relevantes no tocante à metodologia e aos recursos adotados. A identificação da natureza da instituição proponente da pesquisa permitiu reconhecer que, em aproximadamente 78% dos trabalhos, o primeiro autor do trabalho está vinculado a instituições de ensino

superior. Os demais trabalhos possuem, como primeiro autor, proponentes vinculados a instituições de ensino básico ou a secretarias de ensino.

Além disso, aproximadamente 86% dos trabalhos foram encaminhados a partir de instituições públicas, mas este número pode ser ainda maior considerando a porcentagem de trabalhos em que não foi possível identificar a origem (7%); aproximadamente 9% dos trabalhos tiveram como proponentes profissionais de instituições privadas de ensino.

Essas produções também indicam registros a partir de intervenções realizadas em escolas de educação básica (49%) ou Instituições de ensino superior (22%). Também prevalece como característica da instituição onde se desenvolve a interação que 64% seja pública e 8% seja privada.

A distribuição dos trabalhos por unidades federativas onde foi desenvolvido o estudo pode ser observada no Quadro 3.

Quadro 3: Distribuição dos trabalhos por unidades federativas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Amazonas | 1 | | Pará | 17 |
| Amapá | 1 | | Paraíba | 3 |
| Acre | 1 | | Paraná | 19 |
| Alagoas | 3 | | Pernambuco | 9 |
| Bahia | 8 | | Rio de Janeiro | 22 |
| Ceará | 5 | | Rio Grande do Norte | 4 |
| Distrito Federal | 5 | | Rio Grande do Sul | 22 |
| Espírito Santo | 5 | | Rondônia | 9 |
| Goiás | 6 | | Santa Catarina | 12 |
| Maranhão | 5 | | São Paulo | 16 |
| Mato Grosso | 23 | | Sergipe | 1 |
| Mato Grosso do Sul | 6 | | Tocantins | 3 |
| Minas Gerais | 12 | | | |

Fonte: Dados organizados pelos pesquisadores do GT02.

Constata-se, nessa distribuição, a representatividade de todos os estados, exceto Roraima; entretanto, destacam-se em quantitativo as contribuições vindas a partir da Região Sul, com 53 trabalhos (23%) e Sudeste, com 55 trabalhos (24%). Verifica-se, ainda, que Mato Grosso e Mato Grosso do Sul encaminharam 29

trabalhos (13%), número expressivo que pode ser explicado pelo fato do evento se realizar nesta Região.

Usando as palavras-chave, registradas nos trabalhos, criou-se a nuvem de palavras representativa dos termos que mais aparecem (Figura 1):

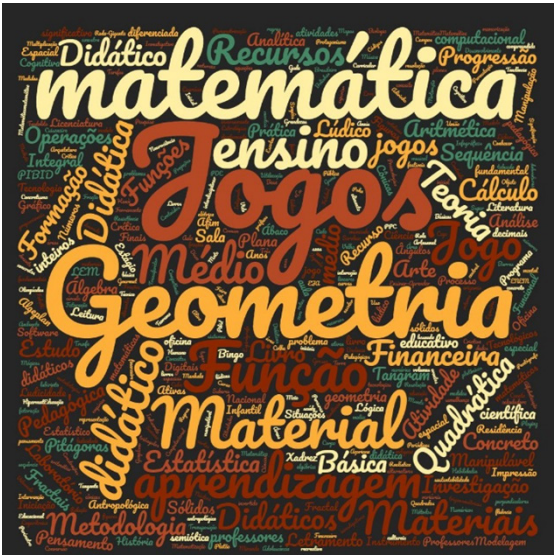



Figura 1: Nuvem de palavras-chave dos trabalhos
Fonte: Dados dos autores.

No processo de elaboração da ficha de análise, considerou-se a necessidade de diferenciar a natureza do trabalho enviado: comunicação, relato, minicurso ou pôster e o objetivo da proposta de uso do recurso didático. Em relação aos objetivos da proposta de uso do recurso didático, destaca-se que há uma multiplicidade de possibilidades que são apresentadas e nem sempre este objetivo fica claro no registro do texto, exigindo dos pesquisadores algumas interpretações, baseadas no conteúdo geral do texto, de modo que permitam fazer algumas inferências.

Se considerarmos como hipótese que a utilização de um recurso didático visa à aprendizagem dos estudantes na medida em que lidam e se apropriam de conceitos, destaca-se que isso foi evidenciado em vários registros na forma de expressões como "proporcionar o desenvolvimento conceitual",

"verificar a compreensão dos estudantes"; "desenvolver conceitos"; "investigar os conhecimentos"; " compreender os principais conceitos"; "promover a construção e revisão de conceitos"; "trabalhar os conceitos"; "buscar novas formas de apresentar conceitos"; "retomar alguns conceitos" entre outras expressões. Nesse sentido, podemos inferir o uso do recurso como "instrumento" para compreender a aprendizagem dos estudantes.

Em várias propostas, também foram usadas as expressões relacionadas ao significado da aprendizagem, no sentido de propiciar que os estudantes "ampliassem e construíssem novos significados"; de "tornar o aprendizado significativo" ou "para uma aprendizagem significativa", ainda que não se defina o que é compreendido como significativo ou como aprendizagem significativa.

Dentre os objetivos das propostas de uso do recurso podem ainda ser considerados aqueles recursos que visam o desenvolvimento de "habilidades" dos estudantes, desenvolvimento esse destacado nas expressões "desenvolver habilidades"; "desenvolver habilidades matemáticas"; "desenvolver habilidades de cálculo mental" "desenvolver autoconfiança, exercitar a concentração do raciocínio lógico"; "desenvolver o raciocínio lógico". De certa forma, tais expressões apresentam indícios do que está sendo também compreendido como "habilidades". Ainda assim, o objetivo da proposta de uso do recurso tem como fim o estudante, seja no "trabalho com os conceitos", visando "aprendizagem significativa" ou no "desenvolvimento de habilidades". Percebe-se, nesse movimento, o trabalho com o recurso visando à modificação da aprendizagem do aluno.

Outras propostas têm o foco no próprio uso do recurso didático e não explicitam a aprendizagem ou o desenvolvimento dos participantes. Nesse sentido, são mais específicas "medir alturas com o uso do teodolito"; "executar atividades gerando familiaridade com a plataforma"; "trabalhar com mapas"; "construção e utilização de uma ferramenta usada para desenho". Assim, o objetivo da proposta com o recurso é o de uma ação sensorial/material do estudante.

Em diferentes trabalhos, procurando identificar o objetivo da proposta com o recurso, também se reconhecem elementos associados ao interesse e à motivação dos estudantes. Por vezes, aparecem diretamente em expressões como "estimular o interesse" ou "de modo que busquem atrair o estudante"; "despertando o interesse"; "tornar a matemática mais atrativa e convidativa". Pode-se considerar que a referência à ludicidade, da forma como aparece em alguns trabalhos, também se relaciona ao interesse e à motivação do estudante e são reconhecidos em expressões, como: "mostrar métodos lúdicos"; "o jogo

como facilitador e lúdico"; "tornar a aprendizagem lúdica e prática", entre outros.

Também se destacam, dentre os objetivos das propostas de uso do recurso, a associação ao contexto cotidiano do estudante, identificada como "relacionar ao contexto social do aluno"; "reconhecer a importância da matemática no cotidiano"; "a partir de aplicações do cotidiano". Entretanto, cumpre notar que nem sempre há referências sobre como isso pode ser apresentado.

Sobre a etapa escolar para a qual se dedicam os trabalhos, destaca-se uma ligeira predominância de anos finais do Ensino Fundamental (90 propostas – 39%) em relação ao ensino médio (71 propostas, o que equivale a 31%), destacando ainda que 19 propostas (aproximadamente 8%) identificam que o trabalho pode ser orientado para a educação básica de forma geral. Nas demais propostas, ou não foi identificada a etapa escolar (25) ou foram propostas direcionadas para o ensino superior (21). Foram identificadas ainda 5 propostas para os anos iniciais que não se referiam ao subeixo.

Nem todos os trabalhos apresentados especificam o conteúdo matemático abordado. Em alguns deles, são apresentadas possibilidades com conteúdos variados, em outros o foco é o material e não se destacam os conteúdos. Do material analisado, foi possível identificar o conteúdo em 166 trabalhos. Aproximando as temáticas, encontram-se: 30 sobre Geometria Plana, que incluem discussões sobre figuras planas, áreas e perímetros, construções de figuras etc.; 27 sobre Álgebra, incluindo mais especificamente discussões sobre equações ou funções; 22 sobre Geometria Espacial; 21 sobre Aritmética, composto por trabalhos sobre sistemas de numeração, operações; 14 sobre Estatística; 07 trabalhos sobre Trigonometria. Além destes, são abordados também outros trabalhos sobre números inteiros, frações, progressões, geometria fractal, matemática financeira com menos de 10 trabalhos para cada conteúdo.

Também foi perceptível que a maioria dos trabalhos não se sustenta sobre uma base teórica previamente definida. Em geral, os elementos teóricos são apresentados no formato de revisão de literatura, com pinceladas de autores que versem sobre a temática. Psicólogos como Vygotsky, Piaget e Ausubel são citados em alguns trabalhos. Há uma prevalência em autores que estudam e pesquisam sobre jogos no ensino da matemática. Os trabalhos de autores, como Dario Fiorentini, Sergio Lorenzato, Ubiratan D'Ambrosio, são encontrados, mas não como sustentação teórica. Propostas curriculares são citadas em vários trabalhos e não é possível identificar se os autores estão as considerando erroneamente como base teórica.

Não se pode afirmar que exista uma tendência teórica guiando os estudos, práticas e pesquisas com o uso de recursos didáticos, mas os fundamentos teóricos são citados por alguns trabalhos ainda que não de forma significativa, entre elas estão Teoria das Situações Didáticas, Teoria dos Campos Conceituais, Atividade Orientadora de Ensino, Teoria Antropológica do Didático, Educação Matemática Crítica, Modelagem Matemática etc.

Se considerarmos a necessidade de relação entre teoria e prática, percebe-se que a sustentação para as ações práticas com recursos didáticos é superficial e fragilizada quando os autores apresentam a teoria em seu texto como uma "tarefa" ou como um item obrigatório da composição do texto acadêmico. Não se percebem as concepções de ensino, de aprendizagem ou de relação com o conhecimento matemático, guiando as ações práticas com os recursos. Mantém-se, no texto, a dicotomia entre teoria e prática.

Destaca-se que não se pretende encontrar um "padrão" nos textos examinados, mas, a partir deles, é possível encontrar indícios que nos revelem o que vem sendo considerado em propostas de ensino e aprendizagem que utilizam recursos didáticos.

A partir desta apresentação prévia do conteúdo do material dos trabalhos analisados, os capítulos seguintes foram organizados de forma a revelar, de maneira mais aprofundada, as análises realizadas pelos membros do GT02 sobre os recursos utilizados, sobre a metodologia de ensino adotada e sobre as condições em que os recursos didáticos foram utilizados nas diferentes práticas de ensino.

Nesse sentido, o capítulo 1, de autoria das pesquisadoras Carmen Teresa Kaiber e Claudia Lisete Oliveira Groenwald, tem por objetivo, a partir das comunicações científicas apresentadas no evento e que tratam do Ensino Fundamental, produzir uma análise que coloque em destaque o que se tem investigado no que se refere a utilização de recursos didáticos no ensino e aprendizagem da Matemática. São considerados como recurso didático todo material utilizado como auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, que o professor tem por objetivo trabalhar com seus estudantes. Assim, são considerados recursos didáticos materiais concretos ou manipulativos, jogos, o uso de um software, vídeos, filmes, músicas, cartazes, o livro didático, entre outros. O foco da discussão está nos recursos didáticos, bem como nas estratégias que são tomadas para sua utilização, buscando captar os referenciais teóricos que dão suporte a sua utilização, os

possíveis desdobramentos em sala de aula e as implicações do que está sendo realizado e as possibilidades, tendências e indicadores para trabalhos futuros.

De autoria de Felipe de Almeida Costa e Gabriela dos Santos Barbosa, o capítulo 2 tem como foco as comunicações científicas, pôsteres, relatos de experiências e minicursos que se voltam para o ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Médio, pretendendo analisar sua cientificidade, isto é, quais são seus objetivos, seus métodos de investigação e quadros teóricos. Por meio da análise textual discursiva, os autores estabeleceram categorias para identificar a tendência em Educação Matemática a que se afiliam, a presença ou ausência de métodos de pesquisa e quadros teóricos e, quando possível, as estratégias de ensino validadas. Nesse sentido, são identificadas em algumas produções a confusão entre os objetivos de uma investigação científica em Educação Matemática e os objetivos didáticos de uma atividade proposta aos estudantes durante uma aula de Matemática, além da ausência de apresentação de métodos e teorias que sustentam as pesquisas, fazendo com que comunicações científicas se assemelhem a relatos de experiência.

No capítulo 3, intitulado "O uso de jogos como recurso para ensinar matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma análise de relatos de experiência do XIII ENEM", são analisados e discutidos relatos de experiência que utilizaram jogos como recursos didáticos para o ensino de conteúdos matemático em turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Esses estudos foram analisados a partir de três distintas perspectivas: "Jogos usados para fixação de conteúdo"; "Jogos usados com foco na ludicidade"; "Jogo para desenvolvimento de um conteúdo matemático", com o objetivo de compreender a intencionalidade matemática a partir do uso dos jogos como ferramenta de ensino.

As relações entre concreto e abstrato a partir de seus diferentes significados é a temática do capítulo 04, de autoria de Lauro Sá e Maria Lucia Panossian. Ainda que este seja um tema explorado há muito tempo, percebe-se que, na prática dos professores, a relação entre concreto e abstrato se mantém associada à lógica formal (no sentido do concreto que leva ao abstrato). A lógica dialética considera que este é um movimento relevante, sendo o concreto material considerado como início do processo de compreensão dos objetos e fenômenos, mas que não deve se encerrar aí, pois este pode ser considerado como um processo de análise, e que também necessita das sínteses. As sínteses revelam o concreto determinado pela multiplicidade de abstrações. A discussão destes conceitos na matemática permanece atual e necessária.

De autoria de Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, o capítulo 5 tem como objetivo identificar os recursos didáticos mobilizados para o ensino de Geometria no Ensino Médio, considerando os trabalhos apresentados como comunicações científicas ou relatos de experiência no XIII ENEM. Adota-se, inicialmente, uma organização dos trabalhos levando em conta as questões curriculares e os conteúdos abordados: Geometria plana ou espacial, Trigonometria e outros. A partir de trabalhos acadêmicos, elencam-se algumas possibilidades de categorização dos tipos e aspectos da utilização dos recursos didáticos que orientarão a análise dos recursos encontrados para o desenvolvimento das atividades relatadas. Identificam-se recursos didáticos manipuláveis ou associados ao uso de tecnologia, direta ou indiretamente relacionados a propostas de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula.

Este *e-book* é finalizado com o capítulo de um convidado internacional, o professor Eduardo Mancera Martinez, Vice-Presidente do Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM). Seu capítulo está relacionado indiretamente à investigação realizada pelos pesquisadores do GT02, ao nos trazer dados sobre o trabalho do docente e as compreensões de Bruner, Dienes e Polya, destacando a necessidade do trabalho contínuo com materiais manipulativos.

Idealizado a partir da necessidade de reconhecer a identidade dos trabalhos realizados pelo GT02, a composição deste *e-book* é a materialização de um processo de mais de um ano de estudo dos pesquisadores deste grupo, a partir de reuniões remotas, realizadas desde abril de 2020, um mês após o início da pandemia da Covid-19 e o início das restrições de circulação em território brasileiro. Se por um lado a necessidade imposta possibilitou que os pesquisadores do GT02 se unissem para reuniões virtuais, o que presencialmente seria inviável, considerando que os pesquisadores são residentes em diversas localidades (Curitiba, São Paulo, Vitória, Porto Alegre, Rio de Janeiro, Recife), não se pode deixar de citar que, no momento de finalização de escrita deste material (junho de 2021), somam-se mais de 510.000 vítimas da doença, sendo que algumas podem ter ocorrido em função de atrasos no processo de vacinação, falta de equipamentos e insumos, dificuldades estruturais das instituições médicas, fruto também do movimento político e de descaso de governantes.

Como ocorreu para muitos professores e pesquisadores brasileiros, os trabalhos não foram interrompidos e, mesmo com a situação pandêmica, o coletivo do GT02 se manteve firme em seus projetos, apesar do enfrentamento de condições pessoais muito adversas. Consideramos importante registrar este

momento para que se possa refletir sobre o investimento necessário aos processos de educação e pesquisa, e a garantia de condições adequadas de trabalho.

Ainda sobre esta pesquisa, é importante destacar que a análise foi realizada sobre trabalhos que contém práticas e processos de ensino realizados na forma presencial; entretanto, esta é uma realidade que muito se alterou, considerando a intensificação de utilização de recursos didáticos para o modelo remoto e virtual.

Os textos agrupados neste *e-book* trazem o conhecimento do produzido em formato presencial, mas, a partir de suas análises, são estabelecidas categorias e considerações que possibilitam também a análise de práticas com recursos didáticos realizadas em formato virtual. Assim, espera-se, com este *e-book*, o traçar de caminhos futuros, identificando temáticas de pesquisas de interesse e/ou que necessitam de maior aprofundamento não só no âmbito do GT02, mas também de outros grupos de estudos e pesquisas.

## Referências

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/schedConf/trackPolicies. Acesso em: 25 jun. de 2021.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** [201?] Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-02. Acesso em: 07 . fev. .2021.

Capítulo 1

# PESQUISA E PRÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR A PARTIR DOS TRABALHOS APRESENTADOS NO XIII ENEM NO EIXO RECURSOS DIDÁTICOS

*Carmen Teresa Kaiber*
*Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

## Introdução

O Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e os encontros promovidos pelas regionais da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) têm se constituído em importantes espaços de discussão e reflexão, onde pesquisadores e professores têm apresentado seus trabalhos de pesquisa, suas práticas e suas trajetórias enquanto professores que ensinam Matemática. No espaço dos encontros promovidos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, palestras, comunicações científicas, relatos de experiência e mini-cursos apresentam uma amostra dos focos de interesse, das preocupações, dos problemas e dos encaminhamentos de soluções que emergem das ações educativas e das pesquisas realizadas. Esses estudos refletem a prática profissional desenvolvida, as pesquisas em sala de aula e os resultados de pesquisa obtidos.

Os trabalhos apresentados no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática poderiam ser inscritos em vinte e cinco diferentes eixos, sendo um desses eixos o de Recursos Didáticos para a Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Ensino Superior. No âmbito do GT2 - Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, o expressivo número de trabalhos inscritos chamou-nos a atenção. Embora o eixo

envolvesse trabalhos desde a Educação Infantil até o Ensino Superior, o número de trabalhos concentrados na área de interesse do GT2 foi significativo (em torno de 300 trabalhos).

Nesse contexto e no âmbito do trabalho que está sendo desenvolvido pelo GT2, no sentido de analisar o que pesquisadores e professores que ensinam Matemática consideram recurso didático e em que perspectiva teórica eles têm fundamentado a utilização de tais recursos, no presente capítulo, o interesse é lançar um olhar para as comunicações científicas apresentadas no XIII ENEM para os anos finais do Ensino Fundamental no eixo Recursos Didáticos.

Assim, partindo dos trabalhos de pesquisa apresentados no evento, busca-se produzir uma análise que coloque em destaque o que se tem investigado no que se refere à utilização de recursos didáticos no ensino e aprendizagem da Matemática. O foco da discussão está nos recursos didáticos, bem como nas estratégias que são tomadas para sua utilização. Assim, busca-se captar elementos de como esse campo de investigação tem se desenvolvido, os referenciais teóricos que dão suporte a sua utilização, os possíveis desdobramentos em sala de aula, as implicações do que está sendo realizado e as possibilidades, tendências e indicadores para trabalhos futuros.

O interesse do presente estudo não foi só conhecer o que está sendo produzido, mas também traçar caminhos futuros, identificando temáticas de pesquisas de interesse e/ou que necessitam de maior aprofundamento no âmbito do GT02.

## Recursos Didáticos – reflexões sobre os achados nas análises realizadas

Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2015), um currículo de Matemática de excelência considera a utilização de recursos didáticos como essencial para a aprendizagem dos estudantes e que tais recursos possibilitam dar sentido às ideias matemáticas, auxiliando os estudantes a raciocinarem matematicamente e a comunicarem seus pensamentos.

Para Moyer (2001), o trabalho de Dienes (1969) convenceu os pesquisadores de que o uso de várias representações de um conceito, ou múltiplas modalidades, era necessário para apoiar a compreensão dos alunos. Cita, também, Piaget (1952), que sugeriu que as crianças não têm maturidade

mental para compreender os conceitos matemáticos abstratos, apresentados apenas em palavras ou símbolos, e precisam de muitas experiências com materiais concretos e desenhos para que a aprendizagem ocorra. Ainda, segundo Moyer, Bruner concluiu que as crianças demonstram seus conhecimentos em três estágios de representação: enativo (sugerindo o papel de objetos físicos), icônico e simbólico. Moyer cita, também, as teorias de Skemp (1987) que apoiam a crença de que as experiências iniciais e interações com objetos físicos formaram a base dos alunos para posterior aprendizagem no nível abstrato. Com base em teorias de cognição e a construção social do conhecimento de Vygotsky (1978), e em pesquisa mais recente de Cobb (1995), discute a complicada relação entre objetos manipulativos e a perspectiva sociocultural. Já nas pesquisas atuais em Educação Matemática, segundo Moyer (2001), os alunos devem ser participantes ativos que constroem seu conhecimento, reorganizando suas maneiras de conhecer e extrair coerência e significado de suas experiências. A autora apoia seus estudos em Glover, Ronning e Bruning (1990), Resnick (1983), Simon (1995), Von Glaserfeld (1990, 1995). Para ela, o impacto de teorias e pesquisas conectando as ações dos alunos em objetos físicos com a aprendizagem matemática teve uma influência importante no surgimento e uso de materiais manipuláveis em salas de aula com estudantes do nível fundamental.

Os materiais manipulativos estruturados constituem-se em materiais didáticos que foram especialmente concebidos para serem manipulados pelos alunos para modelar uma ou mais estruturas matemáticas (HOLE, 2000; NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000). São objetos projetados para representar concretamente as ideias matemáticas que são abstratas. Para Serrazina (1991, p. 37), os materiais manipuláveis são "objetos, instrumentos que podem ajudar os alunos a descobrirem, a entenderem ou consolidarem conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem".

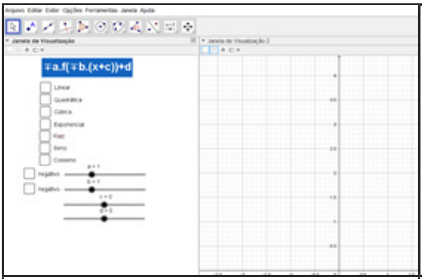
Na perspectiva dos autores referidos, é considerado recurso didático todo material utilizado como auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos que o professor tem por objetivo trabalhar com seus estudantes. Assim, são considerados recursos didáticos materiais concretos ou manipulativos, jogos, o uso de um *software*, vídeos, filmes, músicas, cartazes e o livro didático.

Para Mancera e Basurto (2016), os materiais que se empregam em sala de aula de Matemática são mediadores entre os estudantes e o conhecimento matemático, pois estes recursos permitem aos estudantes perceberem as relações

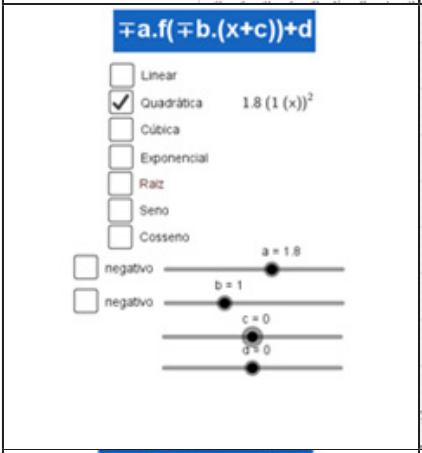
que, depois, se constituem nas bases do conhecimento matemático e simbólico que devem ser desenvolvidos. Porém, os autores destacam que os recursos sem um planejamento didático adequado não possuem sentido; eles salientam que o papel do professor continua sendo muito importante, pois é ele que planeja as atividades e os momentos que são necessários para a construção dos conceitos matemáticos.

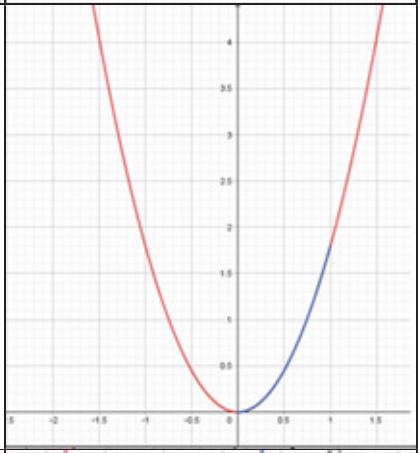
De acordo com o NCTM (2015), para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e as tecnologias são consideradas como indispensáveis nas aulas. Como exemplos de recursos são citados blocos de montar, fichas, blocos para padrões, material dourado, sólidos geométricos, Geoplano, régua, compasso, transferidor, jogo de esquadros, modelos geométricos, calculadoras; além de que quadros interativos, computadores, dispositivos portáteis, *tablets, notebook*, celulares também são considerados recursos tecnológicos. Nesse documento, encontra-se que os exemplos referidos são equipamentos/recursos que podem ajudar aos estudantes a darem sentido à Matemática, a comprometerem-se com o raciocínio matemático e servem para se comunicarem matematicamente. Esta gama de recursos auxiliam os estudantes a explorarem e dar sentido aos conceitos e procedimentos matemáticos e a envolvê-los com o raciocínio matemático (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2015). No documento, são destacados, por exemplo, os *softwares* de Geometria Dinâmica, os quais possibilitam um trabalho em que conjecturas geométricas podem ser realizadas, incluindo aquelas que têm contextos de coordenadas e transformações, auxiliando, também, em processos referentes à visualização.

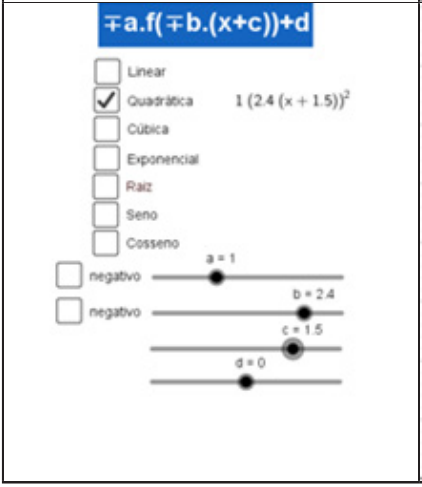
Na Figura 1, apresenta-se um exemplo do uso de um objeto de aprendizagem no *software* GeoGebra. As aplicações gráficas permitem aos estudantes examinar múltiplas representações de funções e de dados, ao construir gráficos, tabelas e expressões simbólicas que estão vinculadas de forma dinâmica.

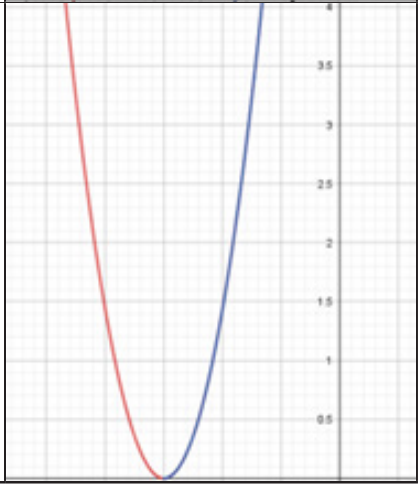


O objeto de aprendizagem interativo permite que o aluno formule hipóteses, teste suas suposições pela interação de forma a generalizar um conceito com o tema abordado. Este objeto de aprendizagem tem por objetivo que o aluno identifique através das suas interações como ocorrem as transformações das funções.





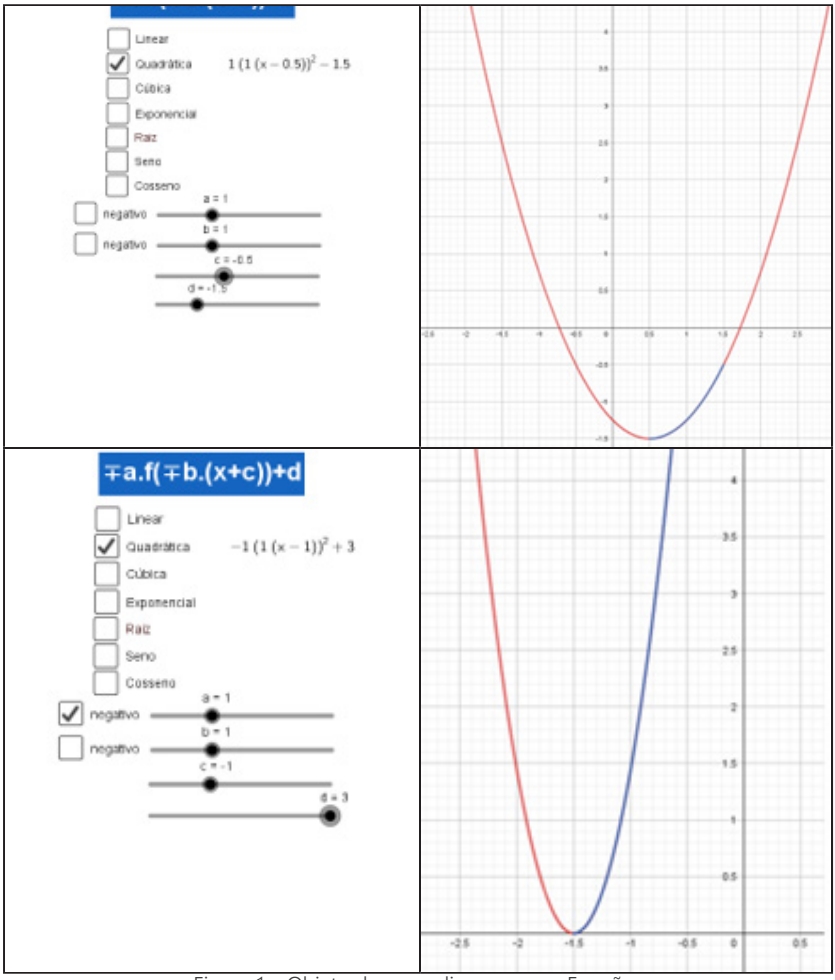



Figura 1 – Objeto de aprendizagem com Funções
Fonte: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

Ainda segundo o NCTM, ter um rol de aplicativos e *softwares* possibilita aos estudantes explorarem situações matemáticas particulares. Por exemplo, um Geoplano, seja físico ou virtual, pode auxiliar aos estudantes a visualizarem e chegarem a generalizações que, sem o auxílio deste recurso, exigiriam maior abstração. Atualmente, existe uma grande variedade de recursos didáticos que

podem ser utilizados no ensino, que vão desde os recursos mais simples aos mais elaborados e tecnológicos, sendo necessário que o educador saiba reconhecer e adequar os recursos à realidade de seus alunos e planeje caminhos didáticos para que sejam alcançados os objetivos propostos.

Nesse contexto, o Livro Didático (LD) se apresenta como um recurso para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, porém é importante que sua utilização seja aliada a diferentes outros recursos e estratégias. Desse modo, o livro didático, material que faz parte de uma política pública que tem potencial para atingir todas as escolas da Educação Básica no Brasil e que tem servido de referência para os professores, pode, enquanto recurso, ter sua utilização potencializada.

É importante que, ao se utilizar os recursos didáticos, estejam definidos os objetivos e como utilizá-los integrados a uma metodologia, estabelecendo quando é possível que os estudantes deixem de utilizar o recurso e passem a utilizar os conceitos de forma generalizada. Assim, o uso de recursos didáticos não se justifica apenas por envolver os alunos e motivá-los à aprendizagem, mas para mobilizá-los a estabelecer relações, observar regularidades e padrões, pensar matematicamente, de forma que leve ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Para Moyer (2001), como e por que os recursos manipuláveis são usados pelos professores é uma questão complexa. Em seus estudos anteriores em que recursos foram utilizados, ela observou como um sinal positivo o mero uso em si. Porém, a autora salienta que simplesmente usar recursos manipuláveis não é suficiente se não se considera como os professores da sala de aula os estão usando. Características individuais do desenvolvimento de uma temática, com o uso de materiais manipuláveis, só podem ser avaliadas como eficazes em termos de como esses materiais se conectam, se relacionam com outros recursos e se encaixam na atividade em geral.

O uso de materiais manipuláveis pelos professores deve estar interligado à estrutura conceitual da Matemática, com questões de conhecimento de conteúdo matemático e a capacidade de desenvolver tais conteúdos se utilizando de uma ampla variedade de representações que levem à compreensão de novas ideias.

Cohen, Raudenbush e Ball (2003) ponderam que os efeitos dos recursos dependem parcialmente do conhecimento. Os melhores materiais podem ser de pouca utilidade se os professores não podem aproveitá-los em tarefas de

enquadramento (tarefas que estejam integradas aos recursos) ou se os alunos não os utilizam para se envolverem na resolução das tarefas propostas.

Segundo o NCTM (2015), todos os educandos deveriam ter acesso a recursos didáticos, incluindo o acesso às tecnologias, porém seu uso eficaz requer um planejamento cuidadoso e isto exige que os professores tenham um desenvolvimento profissional adequado para aprender a utilizá-los com eficácia, de modo que os integrem a sua prática de sala de aula. Nesse contexto, entende-se que a análise realizada nas comunicações científicas apresentadas no XIII ENEM é relevante para um levantamento sobre quais são e como estão sendo utilizados os recursos didáticos (ferramentas) no planejamento didático dos professores de Matemática.

No Quadro 1, apresentam-se os recursos que foram utilizados nos trabalhos analisados.

Quadro 1 – Recursos utilizados nas Comunicações Científicas nos anos Finais do Ensino Fundamental

(continua na próxima página)

| Nº de trabalhos | Recurso | Utilização |
|---|---|---|
| 1 | Relógio Solar | Atividade interdisciplinar integrando Matemática e Geografia. |
| 1 | Pantógrafo | Oficina para uso deste recurso e desenvolvimento de conceitos geométricos. |
| 3 | Geoplano | Atividades didáticas com este recurso. |
| 1 | Origami | Construção de figuras. |
| 1 | Formas Geométricas | Construção das figuras espaciais com canudos. |
| 1 | Material Dourado | Atividades didáticas com este recurso. |
| 1 | Tangram | Atividades didáticas com o recurso. |
| 1 | Sequência didática (SD) com Números Decimais | Construção da SD com atividades envolvendo compras em um supermercado. |
| 4 | Livro Didático (LD) | Análise do Livro Didático. |
| 1 | Método Chinês para o algoritmo da multiplicação | Atividades para o uso do recurso. |
| .7 | Jogos | Uso do jogo com estudantes. |

Quadro 1 – Recursos utilizados nas Comunicações Científicas nos anos Finais do Ensino Fundamental

(conclusão)

| Nº de trabalhos | Recurso | Utilização |
|---|---|---|
| 1 | Fichas para estudo dos conceitos Estatísticos | Fichas para estudo de tabelas e gráficos |
| 1 | Fractais | Construção de Fractais. |
| 2 | *Software* GeoGebra | Construção de Fractais e atividades de Isometria e Homotetias. |
| 1 | Calculadora | Atividades com Educação Financeira. |
| 1 | Glossário geométrico | Construção do recurso com leitura da história da Geometria envolvendo vocabulário geométrico e imagens. |

Fonte: Trabalhos apresentados no XII ENEM.

Observa-se que a análise do Livro Didático continua sendo objeto de estudos e considera-se que é pertinente, pois se trata de um recurso que todas as escolas e estudantes têm acesso nos anos finais do Ensino Fundamental, por meio do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Um dos trabalhos tratava da análise de um livro paradidático com a temática Estatística e as outras três comunicações científicas desenvolveram análises sobre as temáticas: Grandezas e Medidas; Produtos Notáveis; Sólidos Geométricos.

Outro recurso que se observa muito utilizado nos anos finais do Ensino Fundamental, objeto das investigações analisadas, são os Jogos. Segundo Timm e Groenwald (2000, p. 21), "Os jogos, se convenientemente planejados, são um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático. Referimo-nos àqueles que implicam conhecimentos matemáticos". Para as autoras, as atividades com jogos devem ser integradas, aparecendo de maneira sistemática nos programas escolares e não devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produzem na atividade escolar diária.

Os jogos desenvolvidos junto aos estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental foram: Jogo com as quatro operações no conjunto dos Números Naturais; Jogo de tabuleiro de origem africana Mancala *Colhe 3*; Jogo para estimular o cálculo mental com a temática multiplicação. Os jogos trabalhados com os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental foram: Jogo com Expressões Numéricas; Trilha da Radiciação; Jogo de Memória Pitagórico; Jogo

com uma trilha com a temática Números Pitagóricos. E, ainda, o Jogo do Xadrez, indicado para todos os anos letivos do Ensino Fundamental. Os jogos não foram construídos pelos estudantes, e sim utilizados no âmbito do desenvolvimento de uma atividade de sala de aula.

Três dos trabalhos apresentados utilizaram o recurso didático Geoplano. Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), citados por Ventura (2013), a aprendizagem da Geometria é realizada baseando-se em experiências concretas, que evoluem para processos mais formais e conduzem ao desenvolvimento de capacidade de organização lógica do pensamento, remetendo para a utilização de experiências concretas, com uma diversidade de objetos geométricos. Para Ventura (2013), ao ensino da Geometria, estão associados materiais manipuláveis, onde os alunos podem experienciar e concretizar os diversos conceitos geométricos, para que, em uma fase posterior, possam tirar conclusões, no sentido de uma melhor compreensão dos conceitos e um dos recursos é o Geoplano. Os tipos de Geoplano são os apresentados na Figura 3. A autora salienta, ainda, que "O modelo do Geoplano, simulado no computador, tem como características tornar o Geoplano mais flexível e rápido e, consequentemente, mais variado e diria até mais criativo, aumentando o potencial do Geoplano enquanto objeto físico" (VENTURA, 2013, p. 25).

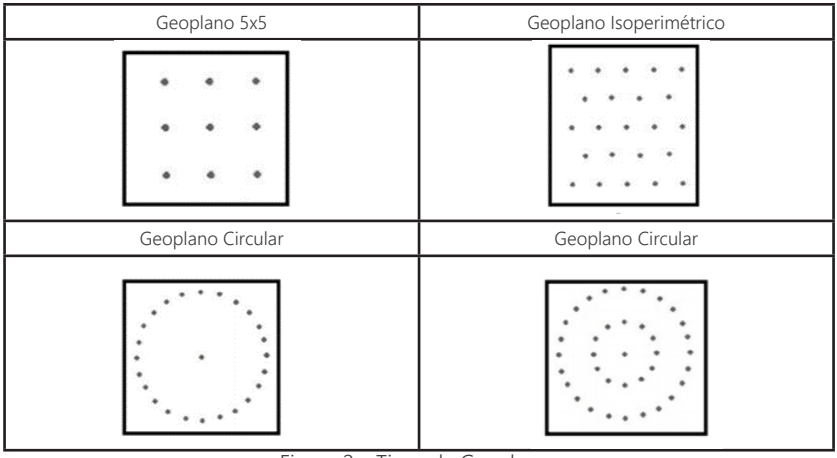



Figura 2 – Tipos de Geoplanos
Fonte: Adaptado de Ventura (2013).

Destaca-se a construção de uma sequência didática com o tema Números Decimais, para o 6º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo que os estudantes ampliassem e construíssem novos significados para a utilização desses números. As atividades foram escolhidas e organizadas na sequência didática, utilizando como tarefa compras em um supermercado, com estudantes matriculados na disciplina de Estágio Supervisionado de um Curso de Matemática.

Observa-se que a construção de um glossário com a linguagem geométrica e imagens é um recurso pertinente, considerando que o uso da linguagem natural sempre é considerado importante para que os estudantes possam comunicar-se e discutir as ideias matemáticas. Além disso, considera-se importante que essa atividade coloca os estudantes como protagonistas, bem como os meios utilizados foram pertinentes: dicionário, livros didáticos e pesquisa na internet.

A comunicação científica da construção do Pantógrafo, indicada para qualquer ano letivo do 6º ao 9º ano, teve como objetivo investigar e propor uma abordagem de ensino de conceitos geométricos com o uso da ferramenta de desenho, o Pantógrafo. Trata-se de um recorte de um Mestrado Profissional e um dos resultados alcaçados foi que a ferramenta pode auxiliar estudantes a compreenderem algumas propriedades geométricas.

## Perspectivas teóricas e metodológicas que fundamentaram os trabalhos analisados

Os referenciais teóricos, que serviram de base para o desenvolvimento das investigações analisadas, evidenciam uma diversidade de abordagens teóricas. Além da identificação de utilização de teorias advindas das chamadas Teorias de Aprendizagem (Aprendizagem Significativa, Teoria Histórico-Cultural), da Didática da Matemática Francesa (Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático, Registros de Representação Semiótica), trabalhos com base na Educação Matemática Crítica, na Educação Matemática Realística e na Etnomatemática também se fizeram presentes.

Entretanto, um significativo conjunto de trabalhos apresentou referenciais que foram colocados em uma categoria denominada "Ensino e Aprendizagem da Matemática", pois os elementos teóricos apresentados se organizavam a partir de autores e investigadores da área de Educação Matemática que, de modo

geral, destacam aspectos relacionados aos processos de ensinar e aprender em Matemática, sem se filiarem a teorias específicas. Tais trabalhos se organizaram em torno do ensino e aprendizagem de um objeto matemático específico, análise e aplicação de atividades propostas em livros didáticos, atividades utilizando jogos e materiais concretos e sequências didáticas.

No Quadro 2 se destacam os referenciais identificados e o número de trabalhos desenvolvidos a partir deles.

Quadro 2 – Abordagens teóricas que fundamentaram os trabalhos analisados

| Referenciais Teóricos | Nº de trabalhos |
|---|---|
| Didática da Matemática Francesa(Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Teoria Antropológica do Didático, Teoria das Situações Didáticas) | 5 |
| Teoria Histórico-Cultural (Atividade Orientada de Ensino, análise considerando a ZDP) | 3 |
| Teoria da Aprendizagem Significativa | 2 |
| Análises produzidas com base nos aportes filosóficos de Wittgenstein | 1 |
| Etnomatemática | 1 |
| Educação Matemática Crítica | 1 |
| Educação Matemática Realística | 1 |
| Ensino e Aprendizagem da Matemática | 16 |

Fonte: Anais XIII ENEM.

A referência à Didática da Matemática Francesa se fez presente a partir de trabalhos que tomaram a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986, 2008) para a organização e aplicação de sequências didáticas, as quais envolveram o estudo de objetos da Geometria e de Números e seguiram as fases destacadas na teoria. Porém, em um dos trabalhos, a TSD foi tomada para investigar a devolução e a dimensão adidática de situações envolvendo um jogo. Além disso, com relação à Didática da Matemática Francesa, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995, 2003) foi tomada como referência na análise de dificuldades na aprendizagem em Geometria, identificados a partir de relatos em artigos científicos. Nesse caso, a teoria foi utilizada para a análise e indicação de possíveis formas de enfrentamento das dificuldades identificadas e, em relação aos recursos, a utilização do Geogebra foi destacada como pertinente.

Já a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1992) foi tomada para análise de objetos geométricos em uma coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos, articulada ao modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, buscando identificar se, na organização praxeológica dos objetos, existe articulação entre os campos da Matemática (Aritmética, Álgebra e Geometria).

No que se refere à utilização das chamadas Teorias de Aprendizagem, três trabalhos tomaram aspectos da Teoria Histórico Cultural como referência. Um dos trabalhos envolveu a análise de um livro paradidático, buscando identificar situações de aprendizagem de Estatística e tomou como referência a Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 2016, 2017) e a Análise Didática (ROMERO, 2016). O processo, considerando as distintas bases teóricas-metodológicas, permitiu o foco tanto no processo de análise como em aspectos referentes à organização do trabalho pedagógico do professor.

Outros dois trabalhos que fizeram referência a Teoria Histórico Cultural, destacando trabalhos de Vygotsky (2007, 2008). Um desses trabalhos, que produziu análise em um livro didático do 6º ano do Ensino Fundamental com relação ao desenvolvimentos dos conceitos de grandezas e Medidas, apesar de trazer argumentos em torno do referido autor, teve a análise proposta centrada na comparação entre o que apresentavam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). O outro trabalho, referente ao desenvolvimento de uma atividade interdisciplinar que envolvia Geografia e Matemática, baseou-se em Vygotsky (2007, 2008) nos argumentos apresentados para o desenvolvimento da atividade de ensino proposta sem, contudo, produzir uma análise fundamentada no autor.

Ainda no âmbito das Teorias de Aprendizagem, a Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1973) foi utilizada como referência para estruturar duas investigações que envolveram o ensino da Geometria. Um desses trabalhos desenvolveu uma unidade de ensino potencialmente significativa, sendo realizadas construções geométricas para ativar subsunçores relacionados a conhecimentos prévios em Geometria. Além de investigar o desenvolvimento dos estudantes considerando a unidade de ensino, foi realizada uma reflexão sobre o potencial da teoria utilizada como embasamento teórico para as ações dos professores. A outra investigação, apoiada nos constructos da Aprendizagem Significativa (MOREIRA, 2011), desenvolveu um trabalho enfatizando não só aspectos geométricos, mas também aritméticos e algébricos, envolvendo o estudo das

diagonais de um polígono convexo, utilizando como recurso o multiplano circular, que foi assumido como material manipulável.

Quatro das comunicações apresentadas se utilizaram de diferentes constructos teóricos, como a filosofia de Wittgenstein (WITTGENSTEIN, 1999), a Etnomatemática (D'AMBROSIO, 2005, 2008, 2012), a Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2000, 2001) e a Educação Matemática Realística (FREUDENTHAL, 1994). Essas investigações tiveram como foco trabalhos com temáticas específicas, como no caso da utilização da filosofia de Wittgenstein em pesquisa com o objetivo investigar como as habilidades, consideradas essenciais para o aprendizado em Matemática, tais como a memorização, o domínio de estratégia, domínios de regras, concentração e raciocínio lógico, podem ser desenvolvidas pela prática de jogos de regras (particularmente o xadrez), relacionando-as a habilidades apontadas pelo filósofo.

A Educação Matemática Crítica subsidiou um trabalho envolvendo a Matemática Financeira Escolar. A Etnomatemática foi tomada como referência para um estudo que teve como finalidade investigar se as representações mentais – culturais – dos educandos podem ser usadas como ferramentas no processo de ensino-aprendizagem de Matemática e, em um outro que teve foco na História da Matemática, a partir da contação de histórias como recurso didático para o esnino da Matemática. Porém, em alguns trabalhos, como os que se utilizaram dos constructos da Educação Matemática Realística e da Aprendizagem Significativa, o foco da investigação, além de aspectos do ensino e das aprendizagens dos estudantes, considerando as estratégias e os recursos utilizados no trabalho desenvolvido, esteve voltado aos próprios constructos da teoria, ou seja, a investigação buscou destacar a importância da base teórica utilizada e como o trabalho desenvolvido, tomando a mesma como referência, se revelou adequado.

No entanto, um significativo número de trabalhos apresentou um referencial teórico que envolvia argumentos que estão na base dos referencias da Educação Matemática, como a importância do protagonismo do aluno, com foco na sua participação ativa nas aprendizagens, o desenvolvimento de um trabalho com a Matemática que valorize as diferentes manifestações culturais dos estudantes e esteja interligado com a realidade, incluindo trabalhos que apontavam como base teórica "teorias cognitivistas", mas que, em seu desenvolvimento, se utilizavam de um conjunto de autores com trabalhos em uma perspectiva similar ao apresentado.

As estratégias e os recursos utilizados foram subsidiados por referenciais vinculados aos mesmos, considerando autores que, em seus trabalhos, os utilizam ou defendem. Por exemplo, se o trabalho envolvia a utilização de materiais concretos e manipuláveis, entre outros, eram utilizados como referência autores como Lorenzato (2006, 2010), Fiorentini e Miorim (1990), Fiorentini e Lorenzato (2012). Já quando o foco foi a utilização de jogos, os autores citados foram Grando (2000), Smole, Diniz e Milani (2007), Borin (1995). As referências às investigações em sala de aula (PONTE, 2005), à organização de sequências didáticas (ZABALA,1998), à resolução de problemas (ONUCHIC, 1999, ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) e à análise de erros (LOPES, 2010; PINTO, 2000) também se fizeram presentes.

Boa parte desses trabalhos trouxe, em seu arcabouço teórico, documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2007) e o Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2016). Argumenta-se que, embora tais documentos possam, ou devam, ser considerados no desenvolvimento de trabalhos de pesquisa, não se constituem em referencial teórico e a sua utilização deve se ater ao que documentos dessa natureza propõem.

Nesses trabalhos, foram utilizados, também, referenciais relacionados aos objetos em estudo, os quais foram articulados a outros referenciais. Por exemplo, uma investigação que tomou como referência a Aprendizagem Significativa, mas que envolvia o aprendizado de objetos geométricos, articulou aos constructos da teoria os autores que tratam do trabalho com a Geometria, o mesmo ocorrendo com Álgebra, Matemática Financeira, Operações, entre outros.

Destaca-se que, na quase totalidade dos trabalhos, os referencias apontados foram tomados como referenciais teóricos-metodológicos. Nos textos apresentados, embora não declarado, na maioria das vezes, foi possível perceber orientações metodológicas de base qualitativa. Ao apresentar e descrever a metodologia, em grande parte, essa se referia à metodologia de trabalho junto aos estudantes ao aplicar, desenvolver o conjunto de atividades ou sequência didática realizadas, caracterizando o local e sujeitos participantes da investigação e como as atividades tinham sido organizadas, aplicadas e analisadas. A análise de conteúdo (BARDIN, 2006) foi mencionada em um dos trabalhos.

Pondera-se que a não distinção entre metodologia de investigação e o que se pode chamar de metodologia de trabalho, ou seja, a organização das atividades, estratégias e os recursos utilizadas no trabalho junto aos estudantes

e a avaliação realizada (foco da quase totalidade dos trabalhos), possa estar relacionada ao espaço de páginas destinada à comunicação científica, o que leva os autores a dar destaque à chamada metodologia de trabalho, em detrimento da metodologia de investigação, nos moldes que ela é entendida na pesquisa.

Sobre os trinta trabalhos de investigação realizados e analisados, destaca-se que os desenvolvidos em turmas regulares do Ensino Fundamental (vinte e três trabalhos) ocorreram de forma equitativa nos diferentes anos e se desenvolveram ou tiveram origem em instituições públicas (vinte e nove trabalhos).

Ao se observar os objetos de conhecimento, focos da investigação, a Geometria se destaca com doze trabalhos voltados para aspectos da Geometria Plana, Geometria Espacial, Fractais e Transformações no Plano (Isometrias e Homotetias), esses dois últimos com um trabalho cada. Há, também, dois outros estudos que articularam o desenvolvimento de aspectos geométricos, algébricos e aritméticos, o que indica a Geometria presente em quatorze trabalhos (praticamente a metade dos trabalhos analisados). Números e Operações foram temas em sete trabalhos, Probabilidade e Estatísca, três, Álgebra, dois, seguidos de Grandezas e Medidas e Matemática Financeira com um trabalho cada. Outros dois trabalhos não apresentaram foco em objetos de conhecimentos, sendo que um investigou o desenvolvimento de habilidades (trabalho envolvendo o jogo de Xadrês) e outro apresentou a defesa da utilização de recursos nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

## Desdobramentos para a sala de aula e suas implicações

O que emerge das investigações, sendo apontados como recursos didáticos, são o livro didático, os jogos, os materiais concretos (material dourado, geoplano, tangram, origami), os softwares, a calculadora, as sequências didáticas, o uso de fichas para estudo de um tema matemático e a construção de recursos, pelos estudantes, para auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, como construção de um pantógrafo, de um relógio solar, de fractais e de um glossário geométrico.

É possível perceber, a partir desses trabalhos, que os autores tomam não somente os recursos didáticos e buscam analisar como utilizá-los para que situações de aprendizagem ocorram, mas também tomam análises teóricas de ou sobre objetos matemáticos como um recurso que subsidia ações e estratégias

para auxiliar na aprendizagem dos estudantes. Percebe-se, assim, a presença de uma análise didática como caminho prévio para a utilização de uma tarefa matemática, um jogo e mesmo o livro didático como recurso didático.

Entende-se que a diversidade de referenciais, tomados nas investigações aos quais se articula a utilização de também diversos recursos, reflete o extenso campo teórico presente e em desenvolvimento na Educação Matemática. Esses referenciais dizem respeito, também, à articulação aos referenciais que não têm sua origem na Educação Matemática, como a Aprendizagem Significativa, o aporte filosófico de Wittgenstein e a Teoria Histórico Cultural que são tomados na perspectiva da Educação Matemática.

Este considerável número de trabalhos, apresentados no sub-eixo analisado do XIII ENEM, evidencia um interesse tanto de professores quanto de pesquisadores que indicam a busca de recursos, estratégias e metodologias para a ação em sala de aula, relacionados ao protagonismo dos estudantes e com a responsabilidade destes com sua aprendizagem, em que o estudante é o centro do processo. Tal interesse dos docentes e pesquisadores aponta para a importância de pesquisas futuras integrando referenciais teóricos e metodologias didáticas que tenham como meta o desenvolvimento de um aluno mais autônomo, mais comprometido com sua aprendizagem e com o desenvolvimento integral do cidadão.

## Referências


ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M (Org.), **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p.35-52.

AUSUBEL, D. P. Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. In: ELAM, S. **La educacion y la estructrura del conocimiento**. Buenos Aires: El Ateneo, 1973. p. 211-238.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2006.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME – USP, 1995.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático**. Brasília, DF: MEC, 2016. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/component/k2/item/8813-guia-pnld-2017. Acesso em: 08 abr. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF. 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF. 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCCAPRESENTACAO.pdf.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. R**echerches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992, p. 173-112.

COHEN, D. K.; RAUDENBUSH, S. W.; BALL, D. L. Resources, Instruction, and Research. **Educational Evaluation na Policy Aalysis Summer**, [s. l.], v. 25, n. 2, p.119-142, 2003.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Uma reflexão sobre o uso de materiais e concretos jogos no ensino da matemática. **Boletim SBEM** - SP, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2012.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. 2 ed. Netherlands: Kluwer Academic, 1994.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HOLE, V. **Como ensinar matemática no ensino básico e no secundário**. Lisboa: Livros Horizonte, 2000.

LEONTIEV, A. N. O homem e a cultura. In: LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes Ltda, 1978.

LOPES, C. E. Discutindo Ações Avaliativas para as aulas de Matemática. In: LOPES, C. E.; MUNIZ, I. S. (Org.). **O Processo de Avaliação nas aulas de Matemática**. São Paulo: Mercado de Letras, 2010. p. 135-149.

LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. 3.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MANCERA, E. M.; BASURTO, E. H. **Matebloquemática** – La forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos. Colección Formación de docentes de Matemáticas. SIRVE S.A. de C.V., México, DF, 2016.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOURA, M. O de. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. 2.ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2016.

MOURA, M. O de. **Educação Escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

MOYER, P. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], 47, p.175-196, 2001.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, Va: NCTM, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **De los principios a la acción – para garantizar el éxito matemático de todos.** Trad. por CIAEM. México, D. F., 2015.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática:** Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000.

ROMERO, L. R. Matemáticas y análisis didáctico. In: ROMERO, L. R.; LUPIANEZ, J L; MOLINA, M. **Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria**. Madri: Pirâmide, 2016.

SERRAZINA, L. Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização de materiais. **Noesis**, [s. l.], n. 21, 1991.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica:** a questão da democracia. 5.ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

TIMM, U.; GROENWALD, C. L. O. Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. **Revista Educação Matemática em Revista** – RS, n. 2, ano II, 2000.

VENTURA, S. R. R. **O Geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro:** um estudo no 2.º Ciclo do ensino básico. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Lisboa, 2013. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10243/1/ulfpie044879_tm.pdf. Acesso em: abril 2021.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **Mind in Society:** The Development of Higher Psychological Processes. Cambridge MA, Hardward University Press, 1978.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** São Paulo: Editora Nova Cultura, 1999.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

## Capítulo 2

# O CARÁTER CIENTÍFICO DAS PESQUISAS VOLTADAS PARA O ENSINO MÉDIO NO XIII ENEM

*Gabriela dos Santos Barbosa*
*Felipe de Almeida Costa*

## Introdução

O presente trabalho tem como objetivo expor alguns resultados de uma pesquisa em andamento sobre os trabalhos apresentados no eixo temático Recursos Didáticos para a Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e no Superior do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (XIII ENEM) e sua relevância para as pesquisas em Educação Matemática no Brasil.

No Brasil, o campo de pesquisa da Educação Matemática começou a se formar na década de 1960, tendo se desenvolvido no final dos anos 1970 e durante os anos 1980, quando foram criados os primeiros programas de pós-graduação e a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Foi, então, nos anos 1990, que houve um aumento significativo na produção de dissertações, teses e artigos científicos na área.

Balacheff *et al.* (1998) expõem duas finalidades principais para a pesquisa em Educação Matemática: uma, voltada para a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de ensino; e a outra, voltada para a produção de conhecimento científico rigoroso sobre esses aspectos. Tais finalidades também estiveram e ainda estão presentes na Educação Matemática

brasileira e cabe ressaltar que, embora distintas, estão imbricadas. A observação e a intervenção na sala de aula de Matemática favorecem a produção do conhecimento científico e essa produção, por sua vez, implica na revisão e no redimensionamento das práticas.

É nessa direção que podemos perceber a importância de se investigar a cientificidade das pesquisas atuais. Para Minayo (2017):

> A cientificidade da pesquisa qualitativa se comprova, teoricamente, pelos fundamentos de sua abordagem. Tomando como referência o desenvolvimento da ciência moderna, essa discussão atravessa duzentos anos e tem como berço o pensamento hermenêutico, fenomenológico, histórico e dialético alemão. (MINAYO, 2017, p.1)

No estudo que ora apresentamos, tendo como foco os 96 trabalhos (comunicações científicas, pôsteres, relatos de experiências e minicursos) publicados nos anais do XIII ENEM que se voltam para o ensino e aprendizagem da matemática no Ensino Médio, pretendemos analisar sua cientificidade, isto é, quais são seus objetivos, seus métodos de investigação e quadros teóricos. Realizamos a leitura dos trabalhos e, por meio da análise textual discursiva, criamos categorias para identificar a tendência em Educação Matemática a que se afiliam, a presença ou ausência de métodos de pesquisa e quadros teóricos e, quando possível, as estratégias de ensino validadas.

Para efeitos de organização das ideias, na próxima seção, retomamos as reflexões sobre a Educação Matemática enquanto área de pesquisa e descrevemos suas principais tendências. Na sequência, trazemos nossos procedimentos metodológicos. E, dando continuidade, apresentamos e analisamos os dados e tecemos nossas considerações finais.

## A Educação Matemática como área de pesquisa

No Brasil, a maioria das pesquisas em Educação Matemática se desenvolve em programas de pós-graduação ligados à Educação ou à Matemática. No entanto, é importante destacar que, como afirmam Fiorentini e Lorenzato (2006), a Educação Matemática é um campo de pesquisa com saberes próprios. O debate atual, em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, aqueles acerca do papel da linguagem, das práticas socioculturais e das tecnologias de informação

e comunicação nos processos de ensino e aprendizagem ou na construção de subjetividades, tem influenciado as pesquisas em Educação Matemática e esta, por sua vez, encontra nesses elementos possibilidades para a produção de mais pesquisas e para o alargamento de novas perspectivas epistemológicas e metodológicas.

Bicudo (2014) busca compreender os aspectos ontológicos, epistemológicos e axiológicos que permeiam os modos de conceber a Matemática, a Educação e a Educação Matemática e nos chama a atenção para a complexidade das atividades pedagógicas e investigativas da área da Educação Matemática. A autora faz uma análise das concepções que sustentam a prática pedagógica e o conhecimento em Educação Matemática, levando à reflexão de que o trabalho do pesquisador, na referida área, deve considerar a perspectiva da realidade que se manifesta na esfera do "entre" a Educação e a Matemática, constituindo a Educação Matemática.

O campo da pesquisa em Educação Matemática, atualmente, está consolidado tanto nacional quanto internacionalmente, o que se verifica facilmente pelo expressivo número de trabalhos na área. Entretanto, o quadro atual é consequência de um processo histórico. De acordo com Valente (2014), o pesquisador, no papel de historiador, produz fatos históricos e apresenta-os em forma de uma narrativa. Assim, a história da Educação Matemática é considerada como uma produção de uma representação sobre o passado da Educação Matemática. No Brasil, esse é um passado marcado pelo esforço permanente de constituir-se e legitimar-se uma área de pesquisa específica, que pode ser exemplificado pela criação, em 1999, na 22ª reunião anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), do Grupo de Trabalho 19 (GT 19), que representa um importante fórum para exposição e debate de parte significativa da produção científica na área de Educação Matemática do país.

Sendo assim, a Educação Matemática (EM) possui uma problemática específica com questões de pesquisa e saberes próprios. Entre as principais questões, Fiorentini e Lorenzato (2006) elencam:

- Qual é a identidade da EM?
- Quais são os domínios e fronteiras da EM?
- O que é ser um educador matemático?
- Há necessidade de investigação em EM?

> • Quais são os objetivos das pesquisas em EM?
>
> • Quais são os principais campos da pesquisa em EM?
>
> • Onde institucionalmente se devem desenvolver as pesquisas em EM?
>
> • Como pesquisar em EM? (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.4-5).

Essas questões vão ao encontro das ideias de Kilpatrick (1996) quando afirma que é necessário que a Educação Matemática aborde diversas perspectivas para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem de matemática e que essa diversidade favoreça o crescimento da área.

Com relação às metodologias empregadas, Fiorentini e Lorenzato (2006) asseguram, ainda, que os pesquisadores da Educação Matemática utilizam:

> Métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 4)

Perpassando os métodos sinalizados pelos autores, as pesquisas que analisamos eram todas qualitativas. Segundo Bogdan e Biklen (1994), nesse modelo:

> A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...]. Os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. Além do mais, os materiais registrados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47)

Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 110) acrescentam, ainda, que a abordagem qualitativa "busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural" e classificam a pesquisa qualitativa em Educação Matemática de acordo com os objetivos de investigação e com os processos de coleta de dados. No primeiro grupo, estão as pesquisas exploratórias, descritivas ou explicativas. No segundo, estão as pesquisas bibliográficas, experimentais ou de campo.

Cabe ressaltar que, assim como em outras áreas, os métodos se ajustam às questões de pesquisa e estas, por sua vez, podem ser agrupadas, sendo cada grupo representante de uma tendência em Educação Matemática. O esforço para captar essas tendências foi realizado por autores como Campos e Nunes (1994), Bicudo (1999) e Fiorentini e Lorenzato (2006). Entre as principais tendências, destacamos aqui aquelas que direta ou indiretamente se fizeram presentes nos trabalhos que analisamos. São elas: o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação no processo de ensino e aprendizagem, a Modelagem, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática e a História da Matemática.

Em relação às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), entendemos que o recente avanço na disponibilidade e acesso às tecnologias da informação, tem favorecido o crescimento de seu uso pelos estudantes da educação básica em todos os seus níveis, não só como utilizadores, mas também como protagonistas nas construções digitais como recurso de aprendizagem. Concordamos com Borba e Penteado (2001, p. 43) quando consideram que a informática é uma nova mídia que "[...] abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento".

A criação de novas maneiras de pensar, mediadas pelas tecnologias da informação, deve ser empregada e observada pela escola e pelos seus professores. Autores como Borba e Penteado (2001) e Borba, Malheiros e Zulatto (2008) defendem a utilização das tecnologias informáticas na educação, em geral, por constituírem uma área em expansão, cada vez mais presente no cotidiano dos alunos e que pode promover a inserção da tecnologia e melhorias, em particular, no ensino de Matemática. Nesse sentido, de acordo com Borba, Malheiros e Zulatto (2008), o:

> Acesso à informática em geral, e à internet em particular, tem se tornado algo tão importante quanto garantir lápis, papel e livros para todas as crianças. [...] Não se trata de propor que o acesso à internet resolverá os problemas de desigualdade que se acumulam em países como Brasil há séculos, ou há décadas, dependendo da ótica que se queira tomar, mas, sim, de entender que ele é análogo ao que representou o acesso à escola no passado, e ainda hoje representa quando se pensa no ingresso à escola de qualidade. (BORBA; MALHEIROS; ZULATTO, 2008, p.17)

Hoje, em meio à pandemia do novo coronavírus, mais do que nunca, precisamos compreender a importância do uso de tecnologias para o ensino de Matemática. Elas, além de constituírem uma tendência, em muitos casos, associam-se a outras tendências, como acontece, por exemplo, em pesquisas que envolvem modelagem e fazem uso de tecnologias.

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento destes, sendo empregada em diversos campos de estudo, tais como física, química, biologia, economia e engenharias. Além disso, a modelagem matemática pode ser utilizada para o ensino de Matemática e, nesse sentido, ela é concebida como uma estratégia de ensino. Autores como Barbosa (2001), Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2009) argumentam em favor dessa estratégia, alegando que ela desenvolve habilidades gerais de exploração, criatividade e resolução de problemas; habilita os estudantes a reconhecer, compreender, analisar e avaliar exemplos de usos da Matemática na sociedade e os prepara para utilizar a Matemática em diferentes áreas. Em resumo, ela promove a motivação e destaca a relevância para o envolvimento e a aprendizagem dos estudantes nas aulas de Matemática. Por fim, a modelagem ainda permite uma inversão do "modelo comum" de ensino, visto que, por meio dela, selecionam-se, primeiramente, os problemas e deles emergem os conteúdos matemáticos, de modo a resolvê-los.

No sentido de inverter ideias comuns sobre o ensino de matemática, a resolução de problemas, também, é outra tendência de ensino e de pesquisa em Educação Matemática. Como Allevato e Onuchic (2014) e Damaceno (2011) afirmam, a resolução de problemas deixa de ser a finalidade do ensino de Matemática e passa a ser o método. O estudante não só aprende matemática para resolver problemas, como também, resolvendo problemas, constrói conceitos matemáticos. Trata-se de um processo que não ocorre isoladamente e que, para ser efetivo, assim como na modelagem, é preciso levar em consideração as situações para as quais os estudantes produzem significados, que lhes são desafiadoras e interessantes. Nessa direção, é fundamental que o professor escute os estudantes. Somente dessa forma, conseguirá reconhecer tais situações e conhecer as estratégias de resolução empregadas por eles.

Embora voltada para a tendência da Etnomatemática, Domite (2006) reforça a importância da alteridade e da escuta nas aulas de Matemática. Para

D'Ambrosio (1998), a Etnomatemática é um programa de ensino no qual o professor deve procurar caminhos que valorizem os desejos, a cultura e o meio social dos estudantes e, então, é nesse contexto que a autora afirma:

> Com efeito, entre outras particulares, os estudos etnomatemáticos têm a ver com a afirmação essencial do professor como um ouvinte: a) das perguntas, opiniões e curiosidades dos alunos, assim como ideias expressas em modo próprio de comunicação; b) do conhecimento primeiro da aluna e do aluno em sua/sua próprio estado de ser, como um filtro para um novo conhecimento; c) da continuidade do processo de reconhecimento, que é parte do processo de conhecimento e, d) da capacidade do aluno de compreender e comunicar o que está sendo compreendido. (DOMITE, 2016, p. 31)

Podemos perceber que essa tendência rompe com a noção de que a Matemática é uma ciência neutra e que não sofre transformações. Como D'Ambrosio (1998) assegura:

> [...] na tentativa de explicar o mundo em que vivem, os vários grupos culturais desenvolveram e desenvolvem processos de contagem, de medida, de classificação, de ordenação e de inferência. Isto nos leva a crer que o conhecimento matemático foi se desenvolvendo ao longo do tempo, a partir das necessidades e das características de cada cultura. (D'AMBROSIO, 1998, p. 8)

Em outras palavras, assim como a língua, o artesanato, a religião e demais elementos, a Matemática é uma produção cultural. Cada cultura produziu e, como o mundo está sempre se transformando, produz a sua Matemática.

Ao apresentar a Etnomatemática, D'Ambrosio (1998) destaca, ainda, que ela se aproxima da Psicologia, da Antropologia e da História e, assim, afirma que cada grupo constrói a história das suas Matemáticas. A História da Matemática é vista, há muito tempo, como elemento importante para os processos de ensino-aprendizagem de Matemática, bem como para a formação dos professores que lecionam esta disciplina. Este consenso se deu a partir da década de 1970, mas, na década de 1920 Euclides Roxo, já apresentava diversas notas históricas, defendendo aspectos da História da Matemática para o seu ensino (SOUTO, 2003).

Entendemos que a História da Matemática é um "recurso" didático que pode contribuir para o desenvolvimento do ensino de Matemática. Isto se deve ao

fato de que sua inserção possibilita uma compreensão substantiva e epistemológica dos aspectos conceituais, das regras e dos processos intrinsecamente ligados ao conteúdo.

Colaborando com o ensino de matemática e utilizando a História da Matemática, Shulman (1986) nos traz que o conhecimento não deve ser restrito aos conceitos oriundos da disciplina, pois os estudantes devem compreender os seus processos de formação e de validação, isto é, como os conceitos se desenvolveram. Nesse sentido, seu estudo reforça a importância de se articular o ensino com a História da Matemática.

É fundamental salientar que, além dessas, podemos encontrar outras tendências na pesquisa em Educação Matemática. Há, por exemplo, aquelas que aplicam conceitos da Psicologia, da Filosofia e da Sociologia à Educação Matemática. No âmbito da Psicologia, podemos identificar as pesquisas que procuram desvelar o processo de aprendizagem e destacam os jogos e outras atividades lúdicas como importante recurso nesse processo (GRANDO, 2000; KISHIMOTO, 1996). Destacam-se, também, as pesquisas que se voltam para a alfabetização matemática, para a materacia (D'AMBROSIO, 2005) e para o letramento estatístico (CAZORLA; CASTRO, 2008). São pesquisas que buscam compreender como se dá a aquisição de conceitos básicos da matemática e da estatística e o desenvolvimento de modos de lidar e produzir conhecimentos nessas áreas a partir dos seus usos sociais. Essas pesquisas, por sua vez, estão em consonância com aquelas que aplicam elementos da Filosofia e da Sociologia à Educação Matemática.

Verifica-se, facilmente, que a preocupação com a função social e política da Matemática e da Educação Matemática é crescente. Exemplos oportunos podem ser encontrados em pesquisas fundamentadas na Educação Matemática Crítica (EMC). Skovsmose (1996), ao definir a EMC, considera que os estudantes necessitam envolver-se no processo educacional, assumindo o controle de sua aprendizagem e, assim, desenvolvendo a competência crítica. Entretanto, essa abordagem requer novas atitudes dos professores, isto é, exige que os professores adotem posturas bem distintas das adotadas no ensino tradicional. É nessa direção que encontramos as pesquisas sobre a formação inicial e continuada dos professores que ensinam matemática e aí merecem destaque as pesquisas que investigam os saberes e práticas docentes, as questões relacionadas à insubordinação criativa dos professores, entre outros.

Em síntese, associados às tendências, podemos identificar quadros teóricos bastante consistentes. Reconhecemos, também, o quanto é importante teorizar sobre as práticas, ao mesmo tempo em que se validar ou refutar teorias com base em experiências práticas pode contribuir para a área da Educação Matemática e para a formação de professores de matemática (MAZETTO, 1998; PONTE, 2003). Na desarticulação entre teoria e prática, todos perdem. Perdem os teóricos da Educação Matemática, que ficam com menos argumentos para discutir e avançar em suas investigações. Perdem os estudantes e professores da educação básica, uma vez que a falta de teorização sobre a prática implica na exploração restrita de suas potencialidades. É com base nessas ideias que justificamos a investigação que ora apresentamos. É preciso conhecer o que vem sendo produzido na área para que se possa enriquecer os debates, sugerir ações futuras e fortalecer ainda mais a Educação Matemática no Brasil. Não podemos deixar de mencionar, também, que as discussões atuais sobre a implementação do Novo Ensino Médio (BRASIL, 2021) foram decisivas para que enfocássemos, aqui, as pesquisas voltadas para esse nível.

## Método de investigação

Para a realização deste trabalho, fez-se uso da análise textual discursiva que, segundo Moraes (2003) pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do corpus, a unitarização; o estabelecimento de relações entre os elementos unitários, a categorização; o captar do novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada.

A análise do corpus da pesquisa se deu utilizando os pressupostos da Análise Textual Discursiva (ATD), que, de acordo com as orientações de Moraes e Galiazzi (2016), envolve as etapas de unitarização, categorização e comunicação. Para Moraes e Galiazzi (2016), a ATD consiste em um processo rigoroso, sistemático e não neutro, em que a interpretação realizada pelos pesquisadores carrega em si uma subjetividade, a qual envolve as concepções do investigador, suas alusões, discursos e ideias que são ampliadas e reelaboradas durante o processo de construção do conhecimento. Sua organização pode ser compreendida em três etapas:

> i) Unitarização – é realizada por meio de uma leitura detalhada em torno do corpus - conjunto de informações que irão compor a pesquisa - o qual é analisado parte a parte, de modo que os textos ou produções são fragmentados, ou seja, são selecionados elementos que podem representar o sentido das partes analisadas e, são definidas como: "unidades de sentido".
>
> ii) Categorização – nesta etapa, busca-se estabelecer "ordens ao caos" em que se tem como exercício o estabelecimento de relações semânticas entre as "unidades de sentido", organizando-as em categorias. Para tal exercício, os pesquisadores estarão balizados em seus referenciais, sejam eles definidos "a priori" ou no seguimento da pesquisa, de modo que o argumento da análise é fundamental na legitimação do processo.
>
> iii) Metatexto /comunicação – segundo os autores, a terceira etapa da análise consiste na expressão das relações tecidas pelo pesquisador nas categorias informação, as quais possibilitam ao pesquisador apresentar as ideias presentes nos conjuntos de informações, as quais se manifestam por meio da solidez das relações estabelecidas entre as "unidades de sentido" e, também, pela fidedignidade à essência dos referenciais teóricos. (MILLI; SOLINO; GEHLEN, 2018, p. 205)

Moraes e Galiazzi (2016) acreditam que o processo da ATD se constitui no esforço para expressar o entendimento que foi atingindo a partir da análise intensa dos dados/corpus da pesquisa. Para os autores, esse processo se finaliza com o que eles chamam de "metatexto", que pode ser entendido como a descrição e interpretação das análises do pesquisador.

Mais especificamente, nesta investigação, objetivamos identificar a cientificidade dos estudos voltados para o Ensino Médio, que foram apresentados no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, realizado em 2019, na cidade de Cuiabá. Desse modo, empregamos a ATD ao longo da leitura de 96 trabalhos. A partir de uma tabulação prévia, feita pelo Grupo de Trabalho 2 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, grupo que privilegia a Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, reconhecemos que, no referido evento, foram apresentados 96 trabalhos voltados para o Ensino Médio, dos quais 30 eram comunicações científicas, 7 eram pôsteres, 15 eram minicursos e 44 eram relatos de experiência. Na próxima seção, procedemos à análise propriamente dita.

## Análise de dados

Para darmos amostras de dados coletados em nossa análise da cientificidade dos trabalhos, relataremos, nesta última seção, um breve resumo a respeito das tendências em Educação Matemática dos 96 trabalhos selecionados, de sua estruturação teórica e metodológica e das estratégias de ensino abordadas, visto que o espaço reduzido e o curto tempo transcorrido desde a publicação dos anais do evento não nos permitiriam analisar as especificidades dos objetivos e suas imbricações com quadros teóricos e metodologias. No entanto, podemos salientar que as pesquisas em Educação Matemática, ali apresentadas, que têm foco no Ensino Médio, ainda possuem um longo caminho a ser trilhado: o de aprofundar os conhecimentos a respeito da diferença entre os objetivos de uma investigação científica e os objetivos de uma atividade didática que constitui a metodologia dessa investigação.

A quase totalidade das pesquisas apresentava uma ou mais atividades didáticas que foram colocadas em prática com a participação de estudantes do Ensino Médio, mas, por diversas vezes, apresentava como objetivo da investigação os objetivos das atividades. Por exemplo, em determinado trabalho, os autores descreviam a aplicação de jogos matemáticos que favoreceram a aprendizagem de probabilidade. Ao apresentarem o objetivo da investigação não se remetiam a tal aprendizagem e elencavam os objetivos dos jogos em si.

Não tendo objetivos bem definidos, muitas pesquisas também demonstraram fragilidade na definição de metodologias e quadros teóricos. Uma quantidade considerável de pesquisas foi classificada pelos próprios autores como qualitativa, mas não especificava qual entre tantos modelos desse tipo de pesquisa era empregado. Já com relação a quadro teórico, 41% dos trabalhos não fizeram alusão a qualquer referencial teórico que os fundamentasse. É sabido que os 96 trabalhos se distribuíam entre comunicações científicas, relatos de experiência e minicursos e que essas duas últimas modalidades são bastante flexíveis no que concerne à fundamentação teórica, no entanto, esperávamos encontrar algum referencial no qual os autores fortalecessem minimamente seus resultados e conclusões, o que não ocorreu.

Os 59% que mencionaram referencial teórico se dividem da seguinte maneira: 3% utilizam quadros relacionados às tecnologias de informação e comunicação (TICs), 4%, 7% e 16% se afiliam, respectivamente, ao letramento estatístico, à resolução de problemas e a correntes cognitivistas que justificam

o uso do jogo como recurso didático. E 29%, que classificamos como outros, utilizam a história da matemática e da educação matemática, a enculturação matemática, a etnomatemática, a educação matemática crítica, a insubordinação criativa, a aprendizagem colaborativa, a teoria das situações didáticas, a teoria da transposição didática e a teoria antropológica do didático. Nos dados que compõem a categoria outros, chamou nossa atenção especialmente a influência da didática francesa, representada pelas três últimas teorias citadas e o crescente interesse pelos aspectos socio-culturais e políticos que perpassam o ensino e a aprendizagem de matemática, representado pelas primeiras.

Por serem experiências com foco no Ensino Médio, ainda merece comentário o número expressivo de pesquisas que relataram a utilização de jogos e o letramento estatístico. Esperávamos encontrar e não encontramos preocupações relativas à motivação dos estudantes desse segmento para o jogo. Em que medida o jogo está adaptado à realidade social e cognitiva dos estudantes que eram sujeitos das pesquisas? Gostaríamos de verificar, mas não verificamos a maturidade científica de colocar em debate teórico a utilização de jogos de modo a reconhecer, assim como Grando (2000), que o jogo é uma ferramenta para o ensino-aprendizagem que não implica só em vantagens, mas também em desvantagens: o jogo em sala de aula, mal utilizado, faz com que o estudante jogue apenas por jogar; a constante interferência do professor durante o jogo faz com que o estudante perca o prazer em jogar e a exigência de atividades com jogos por parte do professor destrói a ação voluntária dos estudantes em jogar. Além, evidentemente, da possibilidade de os estudantes se sentirem inferiorizados, uma vez que tradicionalmente jogos e atividades lúdicas são prioridades na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. No entanto, encontramos apenas o enaltecimento do uso de jogos em sala de aula.

Se, por um lado, sinalizamos a necessidade de um amadurecimento no debate teórico, por outro lado, precisamos destacar a criatividade dos autores das pesquisas analisadas. Das 96, apenas 15 não especificaram a utilização de algum instrumento (jogos, sequências didáticas, materiais manipuláveis etc.). Entre as demais, 28 apresentaram instrumentos de autoria própria, 33 reformularam instrumentos já existentes e apenas 19 os reproduziram integralmente. Inferimos que esse potencial criativo, se aliado ao aprofundamento do debate teórico, pode levar ao aprimoramento das análises de resultados. Não foram raros os casos nos quais verificamos que os autores não se davam conta da riqueza e do real alcance dos resultados que obtinham, restringindo-se a relatar que as atividades

descritas despertaram o interesse dos estudantes que as vivenciaram. Aspectos relacionados à construção de conceitos e à reformulação da concepção do que seja a Matemática pelos estudantes, no sentido dado por Bicudo (1999), passaram, muitas vezes, despercebidos.

Sobre o letramento estatístico, foi possível identificar o reconhecimento de que esse processo, cuja abordagem é sugerida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), ainda vem ocorrendo tardiamente. Em todas as pesquisas que se voltam para esse tema, os sujeitos, embora sendo estudantes do Ensino Médio, estavam tendo suas primeiras experiências com os conceitos envolvidos no letramento estatístico. Constatamos, também, que tais experiências reproduziam situações do cotidiano dos estudantes.

Trazer as situações cotidianas para discussão e resolução de problemas foi uma estratégia de ensino defendida em 23% das pesquisas estudadas e ilustra uma preocupação geral de propor aos estudantes situações para as quais produzissem algum significado. Com esse propósito, os jogos e as reflexões com base no uso de tecnologias de informação e comunicação também foram abordados e correspondem às estratégias de ensino de, respectivamente, 19% e 6% das pesquisas. 14% das pesquisas integravam mais de uma estratégia, por exemplo, propostas que integravam jogos com tecnologia ou jogos ou tecnologia e resolução de problemas cotidianos, e 38% não se referiam diretamente ao processo de ensino e aprendizagem, portanto não conseguimos identificar alguma estratégia de ensino. Esses dados nos revelam que, embora muitos autores não façam referência a teorias em seus textos, as práticas apresentadas se filiam às tendências em Educação Matemática atuais.

## Considerações finais

Neste estudo, tivemos como objetivo investigar a cientificidade dos trabalhos voltados para o Ensino Médio, que foram publicados nos anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Analisamos 96 trabalhos, utilizando a Análise Textual Discursiva e concluímos que há autores que ainda confundem os objetivos de uma investigação científica em Educação Matemática com os objetivos didáticos de uma atividade proposta aos estudantes durante uma aula de Matemática. Verificamos também que boa parte dos trabalhos não apresentam

os métodos e as teorias que empregaram em suas investigações.

Essas constatações nos permitem inferir que parte dos estudos analisados poderia ainda considerar os aspectos científicos que florescem na experiência prática. A consideração desses aspectos contribui em, pelo menos, três frentes: a da legitimação do saber específico do professor que ensina matemática, a da sala de aula e a da Educação Matemática como campo de pesquisa. Os estudantes e professores da educação básica ganham com a teorização sobre a prática, uma vez que ela implica numa exploração mais abrangente das potencialidades dos recursos didáticos, intervenções de ensino e argumentações. Já a Educação Matemática se consolida ainda mais como campo de pesquisa, uma vez que, com o exercício de teorização, há a ampliação do quadro de pesquisadores e o aprofundamento de um número maior de investigações.

Os dados analisados nos levam a reconhecer que esse avanço na qualidade da Educação Matemática brasileira é viável, pois a maioria dos trabalhos se destaca pela criatividade na elaboração de práticas e estratégias de ensino e, ainda que seus autores não mencionem ou reconheçam, essas práticas se filiam às tendências em Educação Matemática atuais.

## Referências


ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Org). **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ARAÚJO, J. L. Uma abordagem sociocrítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p.55-68, 2009.

BALACHEFF, N. Eclairage didactique sur les EIAH. In: COLLOQUE ANNUEL DE LA SOCIÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES DU QUÉBEC. 1998, Québec, **Actes** [...]. Québec, 1998.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED. 2001, Caxambu. Rio de Janeiro. **Anais Eletrônicos do ANPED**, Caxambu. Rio de Janeiro 2001. 1 CD-Rom.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BICUDO, M. A. V. Metaanálise: seu significado para a pesquisa qualitativa. Revemat: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, [s. l.], v. 9, p. 7-20, 2014.

BICUDO, M. A. V. Ensino de matemática e educação matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, Rio Claro, n. 13, p. 1-11, 1999.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN. N. **Modelagem Matemática no ensino**-In: 5º ed. São Paulo: Contexto. 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** São Paulo: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; ZULATTO R. B. A. **Educação a Distância on-line**. São Paulo: Autêntica, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF: MEC, 2018.

CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T. Tendências atuais do ensino e aprendizagem da matemática. **Em Aberto,** Brasília, ano 14, n. 62, p. 3-7, 1994.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F. C. O papel da Estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. Publicatio UEPG. **Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Lingüística, Letras e Artes,** v. 16, p. 45-53, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática.** Editora Ática. 1998.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa** (USP), São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores associados, 2006.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2000.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 5, p. 99 - 120, jan./jun. 1996.

KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1996.

MASETTO, M. T. Professor universitário: um profissional da educação na atividade docente. In: MASETTO, M. T. (org.). **Docência na universidade**. Campinas, SP, Papirus, 1998.

MILLI, J. C. L.; SOLINO, A. P.; GEHLEN, S.T. Análise Textual Discursiva na Investigação do Tema Gerador: por onde e como começar? **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 23, p. 200-229, 2018.

MINAYO, M. C. S. Cientificidade, generalização e divulgação de estudos qualitativos. **Ciência & Saúde Coletiva**. Rio de Janeiro, v. 22, n. 1, p. 16. 17, 2017.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. A**nálise Textual Discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí, 2016.

PONTE, J. P. da. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. Educação matemática em revista. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo, n. 11a (abr.), p. 3-8, 2002.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher, Washington**, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev, 1986.

SKOVSMOSE, O. Critical mathematics education: some philosophical remarks. In: **INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICS EDUCATION.** Selected lectures. Sevilha: S. A. E. M., p. 413 - 425, 1996.

SOUTO, R. M. A. **História e ensino da Matemática:** um estudo sobre as concepções do professor do Ensino Fundamental. 1997, 152 p. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Unesp, Rio Claro, 1997.

VALENTE, W. R. **História da educação matemática.** Problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas. São Paulo: Livraria Editora da Física, 2014.

Capítulo 3

# O USO DE JOGOS COMO RECURSO PARA ENSINAR MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DE RELATOS DE EXPERIÊNCIA DO XIII ENEM

*Ana Paula Barbosa de Lima*

## Introdução

Neste capítulo, são apresentados relatos de experiência, publicados no subeixo 4 dos anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado na cidade de Cuiabá – MT no ano de 2019. O objetivo é investigar como os jogos têm sido usados como recurso didático nas aulas de Matemática e entender qual a intencionalidade matemática no processo de ensino e de aprendizagem neste campo do conhecimento. De modo particular, busca-se compreender se os jogos utilizados têm como intenção a construção dos conceitos a serem vivenciados ou se são usados de forma lúdica para treino e fixação dos conteúdos previamente trabalhados com os alunos.

Os recursos didáticos, segundo Grando (2019, p. 394), são "entendidos como modelos concretos ou não, que possam contribuir e facilitar a aprendizagem matemática dos alunos das escolas". Quando se fala em recursos didáticos para ensinar Matemática, com muita frequência, os professores remetem ao uso de jogos para reforçar conteúdos que foram trabalhados em sala de aula ou mesmo para explorar um novo conteúdo.

O trabalho com jogos em sala de aula é recomendado desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998). De acordo com o documento, os

jogos são uma forma interessante de se propor situações-problema aos alunos, pois se acredita que o modo lúdico favorece que o aluno elabore estratégias na busca de soluções que resolvam os problemas propostos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018, p. 274) reforça a importância deste, e de outros recursos, para a "compreensão e utilização de noções matemáticas", mas alerta que estes recursos precisam estar "integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização".

Sobre o uso de recursos didáticos para o ensino, ou aprofundamento, de conceitos matemáticos, Ribeiro (2021, p. 11-12) destaca que "é essencial pensarmos no uso intencional dos recursos que possam ser empregados para desenvolver o entendimento matemático dos alunos, pois, sem essa intencionalidade matemática, dificilmente poderemos efetuar discussões de modo a que os alunos entendam". Em especial, sobre o uso de jogos como recurso ao ensino da Matemática, faz-se necessário um conhecimento especializado do professor no tocante ao conteúdo que está sendo atrelado ao recurso para que o jogo não seja entendido pelos alunos como sendo apenas um momento de diversão durante as aulas.

Esse conhecimento especializado do professor, de acordo com o modelo teórico e analítico do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (CARRILLO *et al*., 2018), considera tanto o conhecimento do professor relacionado ao conteúdo matemático, quanto o conhecimento pedagógico do conteúdo, que se refere aos "processos de ensino e aprendizagem de cada conteúdo matemático a ser trabalhado nas diferentes etapas escolares" (ALMEIDA; RIBEIRO, 2021, p. 6). Assim, além do conhecimento referente aos conceitos, propriedades, classificações, significados e demonstrações, que podem ser explorados por meio de jogos, o conhecimento especializado do professor que ensina Matemática oferece suporte à prática "na implementação de tarefas matemáticas com os alunos, e às tomadas de decisão didático-pedagógicas no ambiente escolar" (RIBEIRO *et al*., 2018, p. 5).

Segundo Smole, Diniz e Milani (2007, p. 15), o trabalho com jogos envolve "o planejamento de uma sequência didática. Exige uma série de intervenções do professor para que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem". Assim, de acordo com as autoras, é preciso pensar, então, sobre o momento e a forma de propor o jogo e levantar as possíveis explorações que poderão promover a aprendizagem dos alunos. Dessa forma, o conhecimento especializado do professor permite que ele possa antecipar e tirar dúvidas dos alunos, pensar em

perguntas que podem ser feitas aos estudantes de modo que eles compreendam, além das regras do jogo, conceitos matemáticos necessários à construção do jogo ou à elaboração de estratégias para se vencer uma partida ou resolver um problema proposto como desafio.

Para Gitirana *et al*. (2013, p. 11) são muitas as funções que o jogo pode assumir num contexto de aprendizagem da Matemática, como promover a introdução de conceitos, aprofundar conhecimentos, treinar estratégias, desenvolver e agilizar novas e velhas estratégias, além de desenvolver atitudes de trabalho colaborativo entre os pares. Grando (2019) acredita que há duas possibilidades de explorar o jogo como recurso para o ensino de Matemática em sala de aula. Uma dessas possibilidades é por meio da criação de um jogo ou adaptação de um jogo pré-existente, com a intencionalidade de explorar os conteúdos matemáticos a serem estudados. A outra possibilidade é o uso de jogos que foram criados, muitas vezes com características de entretenimento, para explorar conteúdos que já foram trabalhados em sala de aula.

## Percurso metodológico

A metodologia aqui utilizada faz parte do projeto desenvolvido entre os pesquisadores do GT02, que tem como objetivo analisar como os recursos didáticos são abordados em pesquisas que foram apresentadas e publicadas no subeixo 4, que trata de Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Médio e no Superior do XIII ENEM, ocorrido no ano de 2019 no estado do Mato Grosso. Especificamente, este capítulo investiga como tem sido a abordagem dos jogos para o ensino de diferentes conteúdos matemáticos, se há foco no desenvolvimento dos conceitos ou caracterizam-se apenas por seu uso lúdico na retomada de conceitos já trabalhados em sala de aula.

Dos 230 trabalhos analisados pelos pesquisadores do GT02, 101 produções eram referentes a relatos de experiência com recursos didáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Para este Capítulo, optou-se por analisar e discutir apenas os trabalhos voltados para os relatos de experiência voltados para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Foram excluídos, também, aqueles trabalhos que apresentavam o jogo como um recurso a ser trabalhado em duas das etapas da Educação Básica, do 6º ano ao 3º ano do Ensino Médio,

pois se acredita que os objetivos devem ser distintos ao se trabalhar em cada uma das etapas de ensino da Educação Básica.

## Resultados

Em uma análise inicial, após o levantamento feito por integrantes do GT02, dos 230 textos que foram publicados no subeixo 4, que trata de Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Médio e no Superior, percebe-se que o recurso mais citado/utilizado nos textos publicados foi o jogo, com 78 menções. (Figura 1).

Figura 1 - Menção da palavra jogo na planilha geral de análise do GT02
Fonte: Planilha de dados do GT02.

A partir dos relatos de experiência, foi feita uma triagem com o objetivo de levantar os trabalhos identificados que tinham como recurso principal o jogo para o trabalho com a Matemática em sala de aula. Após a triagem, foram identificados 17 relatos de experiência em turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental e 14 relatos de experiência em turmas do Ensino Médio regular ou profissional, ou seja, das produções em formato de relato de experiência, aproximadamente 30% dos relatos apresentaram algum jogo em suas experiências.

Após a leitura dos relatos de experiência, que tinham o jogo como recurso para o ensino da Matemática nas turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, foi possível observar alguns aspectos relacionados às experiências descritas nos textos. Um deles está relacionado aos conteúdos que foram abordados nos textos. A maioria dos relatos apresentados tem como foco o ensino e a aprendizagem dos números e operações e de conceitos geométricos, conforme mostra a Figura 2. Porém, nenhum dos trabalhos com jogos envolveu os conceitos de Estatística e Probabilidade e poucos abordam o trabalho com conceitos algébricos.

Figura 2 - Conteúdos abordados nos textos que utilizaram jogo como recurso
Fonte: dados do levantamento.

Sobre o ano escolar dos trabalhos apresentados, a maioria dos trabalhos publicados foi realizada nas turmas do 6º ano ou é aplicável em turmas do 6º ao 9º ano, ou de 6º e 8º ano – usando recursos distintos. Em relação aos jogos apresentados, percebe-se uma variedade de recursos, uma vez que há, também, uma variedade de conceitos matemáticos que foram abordados nos relatos de experiência. Mesmo com uma quantidade diversificada de jogos, não há menção à utilização de jogos eletrônicos; esta ausência pode ser justificada, pois há um subeixo sobre o papel e o uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática e relatos de experiência desta natureza talvez tenham sido publicados neste outro subeixo.

Nas próximas seções, serão discutidos como os jogos foram abordados nos relatos de experiência no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. O intuito é verificar se eles permitem apenas uma revisão do que foi trabalhado em sala de aula, usando o jogo de forma lúdica, ou se foi possível iniciar o estudo de um novo tópico a partir da exploração de jogos criados ou adaptados.

## Jogos usados para fixação de conteúdo

Nesta seção, serão discutidos os relatos de experiência em que os jogos foram indicados para a fixação de conteúdos matemáticos que foram trabalhados ou revisados por professores ou por pesquisadores e professores em formação inicial. No Quadro 1, são apresentados os jogos utilizados e os respectivos conteúdos matemáticos que foram abordados pelos autores em seus relatos de experiência.

O jogo bingo foi o recurso utilizado por 3 dos 15 trabalhos, analisados nesta seção, e foram utilizados em turmas de 7º, 8º e 9º ano. Os conteúdos abordados foram a *Equação do 1º Grau,* na turma do 7º ano; *Operações fundamentais, potenciação e radiciação,* na turma do 8º ano; *e Função polinomial do 1º grau* para a turma do 9º ano. Os textos relatam que, antes da aplicação do jogo, todos os alunos passaram por uma revisão dos conteúdos que seriam cobrados no Bingo.

Quadro 1 - Jogos usados para fixação de conteúdos apresentados nos relatos de experiência dos Anos Finais do Ensino Fundamental

| RECURSOS UTILIZADOS | TEMAS | ANO ESCOLAR | AUTORES |
|---|---|---|---|
| Bingo | Equação do 1º Grau | 7º ano | MEDEIROS; LÜBECK; LINS; ANDRETTI |
| Bingo com as operações com Números Naturais | Operações fundamentais, potenciação e radiciação | 8º ano | SANTOS; SANTOS; BARROS |
| Bingo Gráfico das Funções Afins | Função polinomial do 1º grau | 9º ano | SYPNIEVSKI; OLIVEIRA; SANTOS |
| Tangram | Geometria: conceitos de área, perímetro, proporcionalidade | 6º e 7º ano | FERRUGINE; SANTOS; KOCHHANN |
| Jogo de tabuleiro | Radiciação e Potenciação | 9º ano | ROBAINA; SILVA; RIBEIRO; ROSÁRIO |
| Adivinho indiscreto | Potências | 9º ano | OLIVEIRA |
| Dominó da potenciação; a corrida algébrica | Potência, números inteiros, expressões algébricas | 6º e 8º ano | PINHO; MACHADO E KAIBER |
| *MATIX ou Dama dos* Sinais; Vai e Vem; Círculo Zero; Sobe-Desce; UNO dos números inteiros; Diagonal Zero. | Números inteiros; | 7º ano | BIDA; BRANT |
| Jogo da Memória com Números Ordinais; Jogo dos Cartões de Polinômios | Números ordinais e polinômios | 6º e 8º ano | SOUZA, SANTANA E SANTOS |
| Compra maluca | Porcentagem | 7º ano | VIEIRA; TRINDADE; MUNHOZ |

Fonte: Anais do subeixo 4 do ENEM.

O trabalho de Medeiros, Lübeck, Lins e Andretti (2019) apresentou a proposta de resolução de situações-problema para marcação de respostas no Bingo. Os pesquisadores perceberam uma interação entre os estudantes que apresentavam diferentes estratégias de resolução e até questionavam caminhos escolhidos pelos colegas. Mesmo os alunos mais tímidos acabavam se envolvendo na atividade devido ao entusiasmo dos outros colegas. Em Santos, Santos e Barros (2019), as peças do bingo tinham duas representações diferentes. Podiam ser números nos quais os alunos deveriam identificar as expressões correspondentes em suas cartelas ou podiam ser expressões às quais os alunos precisariam resolver para identificar o número em sua cartela. O foco do trabalho

foi a revisão dos conteúdos abordados e, mesmo com o diferencial de ter nas cartelas duas representações diferentes, não aparenta uma exploração em relação às dúvidas dos alunos referentes ao conteúdo temático do bingo.

Em Sypnievski, Oliveira e Santos (2019), as cartelas do bingo apresentado aos alunos continham números positivos e negativos, além de uma lei de formação de uma função do 1º grau, na qual os alunos deveriam substituir a incógnita pelo número sorteado, resolver a função, marcar o valor encontrado na cartela; caso tivesse, anotar os pares ordenados e depois traçar o gráfico da função. Como o jogo foi aplicado em duplas, as dúvidas que iam surgindo eram discutidas entre as duplas. Além disso, a atividade proporcionou a retomada de "regras básicas de operações entre os números, como regra de sinais entre multiplicação e divisão e a noção de subtração de um número negativo maior que um número positivo" (SYPNIEVSKI; OLIVEIRA; SANTOS, 2019, p. 8).

No estudo de Ferrugine, Santos e Kochhann (2019), o tangram aparece como recurso para a retomada de conceitos geométricos. Após uma revisão de conceitos da Geometria Plana, com foco nas figuras geométricas planas, foi solicitado que os alunos fizessem uma descrição das figuras que compõem o tangram. Para os autores, "a nomenclatura e descrição da forma do mesmo foi a parte mais difícil dos alunos reconhecerem" (FERRUGINE; SANTOS; KOCHHANN, 2019, p. 9). No entanto, não há maiores detalhes sobre como as discussões matemáticas se deram durante a aplicação da atividade.

Robaina, Silva, Ribeiro e Rosário (2019) apresentaram resultados de uma experiência usando um jogo do tipo trilha. Antes do jogo, foi feita uma revisão dos conceitos de radiciação e potenciação e suas propriedades e a relação entre estes dois conceitos por meio de uma sequência didática. O jogo utilizado era do tipo trilha com cartas com situações-problema para que os alunos resolvessem as questões. Apesar de os objetivos do texto indicarem a exploração dos conceitos por meio do jogo, o que se observou, no texto, foi uma adaptação das cartas de um jogo para situações-problema em que o aluno respondesse o que era pedido e avançasse, ou não, nas casas do jogo. O que se observa é uma ênfase referente à parte competitiva e lúdica que o jogo proporciona aos alunos. As cartas do jogo poderiam ser utilizadas em uma ficha de revisão/fixação do conteúdo trabalhado previamente em sala de aula.

Oliveira (2019) também abordou o conceito de potências por meio do jogo *Adivinho Indiscreto*. A atividade foi desenvolvida quando o conteúdo de potência e suas propriedades estavam sendo retomados. Inicialmente, o jogo foi

apresentado aos alunos apenas para familiarização e para que eles entendessem o seu funcionamento. Assim, os alunos foram motivados a descobrir o segredo do jogo. As regras foram sendo introduzidas aos poucos, ao mesmo tempo em que os alunos eram questionados sobre o motivo dos cálculos envolvidos no jogo. Apresentado dessa forma, o jogo permite a exploração do conceito de potência de modo prático e com significado para os alunos.

No estudo de Pinho, Machado e Kaiber (2019) foi utilizado o jogo de dominó para explorar o conceito de potenciação, retomando cálculos básicos de aplicação das propriedades da potenciação com alunos do 6º ano que apresentavam dificuldades com o conceito. Já o jogo "corrida algébrica" foi trabalhado em uma turma do 8º ano. O objetivo explorar o cálculo mental, explorar a resolução de operações com números inteiros e o cálculo de expressões algébricas. O que se percebe é um jogo lúdico de reforço e memorização, porém não apresenta mais detalhes que possam levar o leitor a explorar as dúvidas dos alunos em relação aos conceitos.

Os números inteiros também foram foco no trabalho desenvolvido por Bida e Brandt (2019). Com a intenção de proporcionar um momento diferenciado de revisão dos conceitos de números inteiros, foi organizada por licenciandos em Matemática uma oficina com diferentes jogos para retomada deste conteúdo. Os jogos utilizados foram: *MATIX ou Dama dos Sinais, Vai e vem, círculo zero, sobedesce, Uno dos números inteiros, diagonal zero*. O texto traz a exploração, por parte dos autores, de perguntas feitas pelos alunos que foram surgindo no decorrer dos jogos e que podem levar a reflexão dos participantes quanto ao entendimento do sentido dos números inteiros. Além disso, os jogos proporcionaram aos estudantes a oportunidade de pensar em estratégias mentais para a resolução dos desafios propostos com os jogos e de, também, esclarecer dúvidas sobre o conteúdo, que foram surgindo durante a realização dos jogos propostos.

Souza, Santana e Santos (2019) usaram o jogo da memória com números ordinais, aplicado ao 6º ano, e o jogo de cartões de polinômios, aplicado na turma de 8º ano. O jogo da memória foi mais voltado para reforçar o conteúdo já trabalhado em aulas anteriores. Enquanto isso, no jogo de cartões de polinômios, além das explicações sobre o jogo, também foi feita uma discussão dos conceitos abordados, na qual os alunos eram desafiados, também, a fazer representações geométricas e a fazer a simplificação dos polinômios utilizados. A proposta de atividade com o jogo de cartões de polinômios permite, além da retomada dos

conceitos, um aprofundamento do estudo de polinômios por tratar do conteúdo usando diferentes representações.

No estudo de Vieira, Trindade e Munhoz (2019), o jogo trabalhado foi intitulado "Compra maluca", no qual os alunos puderam vivenciar, na prática, a aplicação do conteúdo de porcentagem. O jogo foi aplicado posteriormente às aulas que os alunos tiveram sobre porcentagem em sua turma regular, tema este sugerido pela professora supervisora do colégio, onde ocorreu o projeto, que indicou que os alunos da turma tinham dificuldade com o referido conteúdo. Os aspectos matemáticos e de Educação Financeira poderiam ter sido mais explorados no texto, mas é um bom indicativo de como o trabalho com jogos deve ser desenvolvido nas aulas de Matemática.

Outros jogos, mesmo apontados como resgate de conhecimentos, apresentam características metodológicas que deram ênfase à parte lúdica na hora da apresentação do uso desse tipo de recurso no texto escrito. Estes trabalhos são apresentados na seção seguinte.

## Jogos usados com foco na ludicidade

Alguns trabalhos, mesmo apresentando o foco dos jogos na revisão de conteúdo, com o intuito de superar dificuldades de alunos, deram ênfase à parte lúdica do jogo, deixando de lado, no texto, a discussão do trabalho com a Matemática. No Quadro 2, é apresentada uma síntese de jogos e respectivos temas e ano escolar em que eles foram trabalhados. A maioria dos jogos, apresentados nesta seção, foi apresentada em seus respectivos relatos de experiência como aqueles que podem ser aplicados em turmas do 6º ao 9º ano, uma vez que há flexibilização quanto ao conceito matemático que pode ser abordado com o jogo.

Quadro 2 – Jogos com foco na ludicidade que foram apresentados como relatos de experiência

| RECURSOS UTILIZADOS | TEMAS | ANO ESCOLAR | AUTORES |
|---|---|---|---|
| Jogos diversos. | Diversos | 6º ao 9º ano | SCHLAGENHAUFER; MUNHOZ; SACURAE |
| Jogos – trilha do conhecimento matemático | Quatro operações, potenciação, expressões numéricas, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, frações e números decimais; | 6º ao 9º ano | FERREIRA |
| Jogo torta na cara, batalha naval e quiz | Conteúdos variados | 6º ao 9º ano | ROCHA |
| jogos de bolinhas de gude (*bolitas*). | Adição e subtração | 6º ano | CORRÊA; RIBEIRO |

Fonte: Anais do subeixo 4 do ENEM.

O estudo de Schlagenhaufer, Munhoz, Sacurae (2019) usou o tangram e a torre de Hanói como jogos atrativos para inserir os alunos no clube da Matemática e os familiarizar com o espaço do laboratório de Matemática. Só após esse movimento é que jogos que exigem algum tipo de conhecimento matemático são implementados no grupo. Os jogos mencionados, neste estudo, foram o Quebra-cabeça da Tabuada e Triângulo da Multiplicação. Porém, no trabalho não há relatos de como os conteúdos matemáticos são abordados ou retomados com estes jogos. Ao final do semestre, quando os alunos já jogaram diferentes jogos existentes no laboratório, era solicitado que eles desenvolvessem ou adaptassem seus próprios jogos e regras. De uma forma geral, o trabalho busca apresentar a inserção de alunos em um clube com o atrativo de jogos de raciocínio e a construção de novos jogos, mas sem especificar como a Matemática é trabalhada nesse contexto.

Ferreira (2019), em seu estudo, desenvolveu uma atividade no período de férias escolares com alunos selecionados por professores e equipe gestores dentro de um programa de reforço escolar, que ocorreu, incialmente, com aulas expositivas dos conteúdos envolvendo os conteúdos das operações fundamentais, potenciação, expressões numéricas, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, frações e números decimais. Após as aulas, os alunos participaram de uma competição em que o jogo envolvido foi chamado de trilha do conhecimento matemático com perguntas de múltipla escolha. A competição em si torna

apenas mais lúdica a forma de se fazer exercícios que exigem memorização de procedimentos e não abre espaço para a discussão de dúvidas dos conceitos trabalhados.

O estudo de Rocha (2019) abordou o uso dos jogos *torta na cara e batalha naval*, no contexto de uma olimpíada de Matemática, interna ao colégio no qual os estudantes do 6º ao 9º ano estavam matriculados. Os jogos foram escolhidos no intuito de fixar conteúdos que foram trabalhados em anos anteriores ao ano escolar dos estudantes e tinham por objetivo desenvolver o raciocínio lógico e incentivar o estudo da Matemática, o que poderia acarretar um melhor rendimento dos alunos nesta disciplina. A competição foi realizada em três fases. Na primeira fase, os alunos respondiam a um questionário com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Na segunda fase, participavam de um *quiz* envolvendo problemas de lógica e em seguida participavam do jogo Torta na cara. Na última fase, os alunos participavam do jogo de *Batalha naval* e de mais um jogo *Torta na cara* para definir as primeiras colocações. Percebe-se, nestes jogos, no formato de olímpiada, o incentivo ao estudo da Matemática e o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático de uma forma lúdica, porém sem muito espaço para intervenções por parte do professor.

No estudo de Corrêia e Ribeiro (2019), é apresentado o jogo com *Bolitas*, também conhecido em outras partes do Brasil como bolinhas de gude, que fazem parte das brincadeiras das crianças. Durante uma partida de *Bolitas*, vivenciada pelos estudantes, os autores chamam atenção para os conceitos geométricos presentes na brincadeira dos alunos e de como estes elementos aparecem na produção textual feita pelos alunos sobre esta brincadeira. Em seguida, os conceitos de adição e subtração foram abordados em uma ficha contendo situações-problema em que o contexto principal eram as *Bolitas*.

Mesmo definindo alguns conteúdos matemáticos para serem trabalhados, os trabalhos apresentados nesta seção têm uma orientação mais voltada para a diversão, ou seja, o trabalho lúdico e o incentivo ao desenvolvimento do raciocínio lógico e o interesse pelo estudo da Matemática.

## Jogo para desenvolvimento de um conteúdo matemático

Dos 17 trabalhos aqui analisados, em quatro deles foi possível perceber o uso, ou construção junto aos alunos, de jogos já existentes com o objetivo de explorar um conteúdo matemático em sala de aula e promover discussões entre os estudantes, buscando desenvolver aprendizagens de acordo com o tema tratado. No Quadro 3, é mostrada uma síntese dos recursos utilizados, os conteúdos abordados e o ano escolar em que os jogos foram trabalhados.

Quadro 3 - Jogos usados para exploração inicial de conteúdos apresentados nos relatos de experiência dos Anos Finais do Ensino Fundamental

| RECURSOS UTILIZADOS | TEMAS | ANO ESCOLAR | AUTORES |
|---|---|---|---|
| Laboratório de Informática; jogos construídos coletivamente | Tabuada | 6º ano | SALEH; PONDÉ |
| Cinco em Fila, Alquerque, Combinando cores, quebracabeça e o ASMD. | Raciocínio Lógico, Área, Análise Combinatória e as quatro operações básicas da matemática: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão | 6º ano | MEDEIROS; FARIAS; LIMA; SANTOS |
| Jogo da velha e o jogo de damas. | Multiplicação usando a Gelosia e Divisão Americana | 6º ano | BARBOSA; BRITTES |
| *Algeplan* | Produtos notáveis, fatoração e expressões algébricas | 8º ano | MANKOWSKI; MELLO; PRESTES; RETZLAFF |

Fonte: subeixo 4 dos anais do ENEM.

Saleh e Pondé (2019) apresentam um movimento de criação da *tabuada de Pitágoras*, aliada com pesquisas envolvendo o contexto histórico do autor. Os alunos vivenciaram a construção da tabela de modo a entender o significado das tabuadas de multiplicação e divisão. Por fim, puderam aplicar os conhecimentos na construção de jogos e na participação em jogos virtuais para exercitar as aprendizagens adquiridas durante o processo de construção da tabuada e de Pitágoras.

Em Medeiros, Farias, Lima e Santos (2019), foi feito um levantamento sobre os conteúdos a serem trabalhados no semestre e o desempenho dos alunos em Matemática e, só então, escolheram os jogos que seriam utilizados durante

as aulas do projeto de formação continuada para professores do município. Os jogos utilizados foram *Cinco em Fila, Alquerque, Combinando cores, quebra-cabeça e o ASMD* (Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão). Cada um dos jogos escolhidos atendia a um objetivo de acordo com o conteúdo a ser revisto. Uma das propostas dos jogos era "promover a compreensão dos conceitos de Área, Análise Combinatória e as quatro operações básicas da matemática: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão" (MEDEIROS; FARIAS; LIMA; SANTOS, 2019, p. 4). Sobre o jogo que envolvia o conceito de área, os autores afirmam "A medida que as dificuldades apareciam, discutia-se várias possibilidades de resolver a composição dos quadrados, desta forma, perceberam que existia diversos caminhos para obtenção da situação proposta" (MEDEIROS; FARIAS; LIMA; SANTOS, 2019, p. 6).

No estudo apresentado por Barbosa e Brittes (2019), o jogo da velha e *o jogo de damas* foram utilizados para estimular o desenvolvimento do raciocínio cartesiano dos alunos. Após a exploração dos dois jogos, foram introduzidos os conteúdos de multiplicação, usando a técnica da Gelosia, e de divisão, por meio do método da Divisão Americana, pois os autores acreditam que a aprendizagem é favorecida por esse raciocínio cartesiano. Segundos eles, além de aprenderem novas ferramentas para multiplicar e dividir, os alunos desenvolveram as habilidades para efetuar as operações usando os algoritmos usuais dos referidos conceitos.

O jogo *Algeplan*, abordado no estudo de Mankowski, Mello, Prestes, Retzlaff (2019), foi semelhante ao empregado por Souza, Santana e Santos (2019) na revisão sobre polinômio; a diferença entre os dois trabalhos está no uso que foi dado ao material. Enquanto Souza, Santana e Santos (2019) usaram o jogo para revisão dos conteúdos, no estudo de Mankowski, Mello, Prestes, Retzlaff (2019), o jogo foi apresentado aos alunos durante uma revisão sobre simplificação de expressões algébricas e, em seguida, foi utilizado para resolução de multiplicação de polinômios, produtos notáveis e fatoração, tudo isso envolto de suas representações algébricas e geométricas. Percebe-se então que, no estudo de Mankowski, Mello, Prestes, Retzlaff (2019), o recurso foi utilizado como uma ferramenta geométrica para explorar, de forma visual, o conteúdo algébrico que estava sendo trabalhado, visto que o uso do recurso geométrico auxilia no desenvolvimento dos conceitos algébricos por trabalhar duas representações distintas (algébrica e geométrica) concomitantemente.

## Considerações acerca dos estudos apresentados

Este estudo analisou o uso de jogos trabalhados em sala de aula, a partir de relatos de experiência, apresentados no subeixo 4 do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, com o intuito de entender qual a intencionalidade dos jogos vivenciados para o ensino e aprendizagem da Matemática na etapa dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A partir dos trabalhos analisados, foi possível classificá-los em três diferentes categorias: jogos para reforçar conceitos anteriormente estudados, jogos com alto teor de ludicidade e jogos que proporcionaram o desenvolvimento de alguns conteúdos matemáticos em sala de aula.

O que se percebe sobre a utilização dos jogos como reforço para conteúdos já trabalhados em sala de aula, mas que ainda deixam alunos com dúvidas, é o mero reforço destes conteúdos, por meio de jogos sem que haja uma intencionalidade matemática, ou seja, não há a exploração dos conceitos a partir das regras do jogo, mesmo quando os objetivos de alguns desses trabalhos têm uma inclinação para explorar a Matemática nesse viés. Diante disso, fica a reflexão, será que se estas atividades tivessem sido aplicadas em uma ficha com situações-problema o resultado seria diferente? Será que a ludicidade na cartela de um bingo, nas cartas de um jogo da memória ou trilha, por si só, é capaz de levar o aluno a desenvolver um pensamento matemático sobre o conteúdo abordado?

Uma possibilidade de uso do jogo do bingo, por exemplo, com intencionalidade matemática, pode ser a exploração de conteúdos envolvendo os conceitos de Probabilidade e Estatística. Na Probabilidade, por exemplo, poderia se calcular a chance de cada número sair ou a probabilidade de uma cartela ser a premiada. Na Estatística, poderia se trabalhar a construção de gráficos e o cálculo de porcentagens. Dessa forma, o professor poderia explorar os conceitos de chance e possibilidades, porcentagens e elaboração de gráficos. O mesmo procedimento poderia ser explorado em outros jogos de cartas. Para os conteúdos geométricos, jogos como o tangram poderiam ultrapassar a ideia de identificação de figuras geométricas planas e explorar conceitos de área, perímetro e planificação de sólidos geométricos.

Mesmo em trabalhos que abordaram os jogos com a intenção de retomar conteúdos, percebe-se uma grande aproximação apenas com o teor lúdico dos jogos em questão. Talvez os textos não tenham apresentado como foram sanadas as dúvidas dos estudantes no decorrer da vivência dos jogos, tampouco

há indicações de que dúvidas podem surgir e nem possíveis soluções que os professores podem adotar para sanar as dúvidas apresentadas pelos alunos. O fator lúdico em si não é ruim para o processo de aprendizagem. Segundo Gitirana *et al*. (2013, p. 12), do ponto de vista pedagógico, o aspecto interativo que é proporcionado pela experiência com jogos, como o desenvolvimento de estratégias para se vencer o jogo ou solucionar um problema, é essencial e "tal atitude é extremamente positiva para a aprendizagem das ideias matemáticas subjacentes aos jogos".

Sobre os estudos que usaram jogos com a intenção de explorar novos conteúdos, Gitirana *et al*. (2013, p. 11) afirmam que "muitos jogos incluem ideias matemáticas que podem ser aproveitadas como ponto de partida par a o ensino" e que o momento de elaboração de um jogo de tabuleiro, por exemplo, além de lidar com figuras geométricas planas, como o quadrado, pode acarretar discussões matemáticas relativas aos tópicos de paralelismo e perpendicularismo de segmentos de reta. Assim, é possível explorar novos conteúdos matemáticos com intencionalidade, seja por meio da manipulação do jogo ou da elaboração do material por parte do professor, ou mesmo com a ajuda dos alunos.

## Referências


ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Potencialidades de uma tarefa para promover o conhecimento especializado do professor no tópico frações. **Acervo – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, São Paulo, v. 3, p. 1-18, 2021.

BARBOSA, A. M.; BRITTES, E. C. Uma experiência motivadora numa turma de 6º ano do Ensino Fundamental com o estudo da Gelosia e da Divisão Americana. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

BIDA, L. T.; BRANDT, C. F. O trabalho com os números inteiros por meio de jogos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEB, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

CARRILLO, J. *et al*. The mathematicsteacher'sspecialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, Reston, p. 236 - 256, 2018.

CORRÊA, E. A.; RIBEIRO, E. S. Trabalhando adição e subtração com jogos de bolinhas de gude (*bolitas*) no 6º ano do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

FERREIRA, R. J. Intervenção pedagógica: ensino e aprendizagem de Matemática básica na escola Hipólito da Costa no povoado de Lagoa Grande. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

FERRUGINE, S. S; SANTOS, A. S.; KOCHHANN, M. E. Relato de experiência sobre o uso do tangram como recurso geométrico nas aulas de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

GITIRANA, V.; TELES R.; BELLEMAIN, P.; CASTRO, A.; CAMPOS, I; LIMA, P.; BELLEMAIN, F. (Org.). **Jogos com sucata na Educação Matemática**. Projeto Rede. Recife: NEMAT: Ed. Universitária da UFPE, 2013.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica.** v. 05, n. 02, p. 393-416, outubro, 2019.

MANKOWSKI, F.; MELLO, N. F.; PRESTES, R. F; RETZLAFF, E. Educação Matemática: o algeplan como recurso didático no ensino da álgebra na Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

MEDEIROS, L. T.; FARIAS, D. L.; LIMA, M. D.; SANTOS, P. S. Jogos matemáticos: estratégias mediadoras de aprendizagem para discentes do 6º ano do Ensino Fundamental por meio da ludicidade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

MEDEIROS, J.; LÜBECK, M.; LINS, G. S.; ANDRETTI, F. L. Bingo! Instrumento educativo nas aulas de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

PINHO, J. M.; MACHADO, J. F.; KAIBER, C. T. Oficinas de Matemática: ações do sub-projeto Matemática PIBID/ULBRA na escola Santos Dumont. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

OLIVEIRA, S. C. O uso do jogo adivinho indiscreto como recurso para o ensino de Matemática em turmas de 9º ano. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

RIBEIRO, M. Abordagens matematicamente potentes para desenvolver o entendimento dos sentidos da adição. Coleção CIEspMat – Formação. 2021.

RIBEIRO, M.; POLICASTRO, M.; ALMEIDA, A. R.; CALDATTO, M.; MERLLONE, M. Conhecimento interpretativo e especializado do professor de e que ensina Matemática – uma discussão articulada em contextos de formação. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu, 2018.

ROBAINA, Y. M.; SILVA, S. N.; RIBEIRO, A. C.; ROSÁRIO, J. S. Um relato da inserção de um jogo de tabuleiro no ensino e na aprendizagem de radiciação. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

ROCHA, M. F. Olimpíada interna de Matemática – Olimática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

SALEH, S. A; PONDÉ, G. L. Programa União Faz a Vida: a metodologia que faz da tabuada uma aprendizagem divertida e significativa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

SANTOS, F. S; SANTOS, R. C.; BARROS, O. S. Bingo das operações: atividade de aritmética para revisão de conteúdos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

SCHLAGENHAUFER, C.; MUNHOZ, R. H.; SACURAE, F. Clube de Matemática na escola: experiências de um projeto de extensão. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Jogos de matemática:** [recurso eletrônico] 6º a 9º ano. Série cadernos do Mathema – Ensino Fundamental. Porto Alegre, Artmed, 2007.

SOUZA, J. S.; SANTANA, J. B.; SANTOS, D. B. Ludicidade no PIBID: contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

SYPNIEVSKI, M. D.; OLIVEIRA, A. Z.; SANTOS, D. M. Bingo de funções: uma abordagem lúdica do conceito de função afim e do estudo de seu gráfico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

VIEIRA, A. M.; TRINDADE, I. J.; MUNHOZ, R. H. Compra maluca: aprendendo porcentagem com um jogo educativo matemático. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá, **Anais** [...]. Cuiabá, 2019.

Capítulo 4

# DO CONCRETO AO CONHECIMENTO CONCRETO: O MOVIMENTO DAS ABSTRAÇÕES POTENCIALIZADAS POR RECURSOS DIDÁTICOS

*Lauro Chagas e Sá*
*Maria Lucia Panossian*

## Introdução

Nas últimas décadas, parece ter crescido entre os professores que ensinam Matemática um discurso que enaltece a importância de se trabalhar com o denominado "concreto" para se ensinar Matemática. Concreto este que pode assumir outras nomenclaturas, como material manipulável, material manipulativo e recurso didático - podendo ser sinônimos ou não, dependendo de como os definimos. Talvez por esse discurso em voga, o subeixo 4 do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, direcionado a esta temática, tenha sido o que recebeu maior número de submissões e, por consequência, maior quantidade de trabalhos apresentados. Foram, ao todo, 81 comunicações científicas, 101 relatos de experiência, 27 pôsteres e 40 minicursos que representam, juntos, aproximadamente 16,4% das apresentações de trabalho do XIII ENEM.

Sob o título Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Médio e no Superior, o subeixo 4 do XIII ENEM procurou reunir estudos e experiências que abordem o uso de diferentes recursos didáticos na organização e no desenvolvimento do trabalho pedagógico, tais como os jogos, os recursos lúdicos, os materiais impressos (por exemplo, o

livro didático, o livro paradidático), os materiais manipuláveis, os laboratórios e os demais recursos utilizados no processo de ensino e de aprendizagem da matemática por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e do Ensino Superior. Mas com qual finalidade esses recursos foram empregados em sala de aula? Qual o espaço do concreto e qual o momento do abstrato nessas atividades? Que compreensões os autores destes trabalhos possuem sobre os termos "concreto" e "abstrato"?

A partir dessas inquietações, manifestadas em algumas das reuniões do GT-02 da SBEM, realizamos este estudo que buscou refletir sobre o significado atribuído aos termos "concreto" e "abstrato" e sua relação com o uso de recursos didáticos no contexto dos trabalhos publicados no subeixo 4 dos anais do XIII ENEM.

Inicialmente, recorremos à tabulação realizada pelo GT-02 e sintetizada no primeiro capítulo deste livro. Entretanto, optamos por retornar ao conjunto de textos do subeixo para ampliar o corpus de análise. Nesse processo, inspirados no caminho metodológico adotado em Sá (2021), utilizamos a ferramenta de busca do Explorador de Arquivos do Windows, inserindo as palavras "concreto" e "abstrato". Sobre esta etapa, reconhecemos que outros termos como "manipulável" poderiam ser adotados, mas optamos por buscar somente os dois que compõem o binômio concreto-abstrato, seguindo a perspectiva dialógica que acreditamos, a qual nós detalharemos nas seções seguintes.

A busca pelo explorador de arquivos possibilitou uma varredura não só no título e no resumo dos artigos, como também no corpo dos textos. Dessa forma, identificamos os arquivos que continham pelo menos um dos descritores mencionados, realizamos a leitura diretamente no contexto em que os descritores foram empregados e selecionamos os artigos que apresentavam propostas ou experiências didáticas que abordavam os "materiais concretos" e o conhecimento abstrato. Ao final, definimos um conjunto de 86 textos, um terço dos trabalhos do subeixo 4, distribuídos da seguinte forma:

Tabela 1 - Distribuição dos textos selecionados para leitura

| Descritor | Comunicação Científica | Relato de Experiência | Pôster | Minicurso | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Uso apenas do termo concreto** | 16 | 11 | 9 | 11 | **47** |
| **Uso apenas do termo abstrato** | 2 | 3 | 2 | 1 | **8** |
| **Uso dos termos concreto e abstrato** | 7 | 18 | 3 | 3 | **31** |
| **Total** | **25** | **32** | **14** | **15** | **86** |

Fonte: Elaborado pelos autores a partir do levantamento do GT02.

Conforme indicado por Nacarato (2006), quando nos propusemos a entender o que está por trás da apologia ao uso dos "materiais concretos", descobrimos que, na verdade, esse termo refere-se ao uso de materiais manipuláveis. Por outro lado, também reconhecemos outro discurso, pautado na pouca ou nenhuma valorização dos recursos, sendo tal uso considerado até mesmo "como perda de tempo" (NACARATO, 2006, p. 1). Dessas discussões entre as afirmações pró-recursos e antirrecursos, reconhecemos algumas regularidades que também se materializaram em textos do XIII ENEM e as organizamos em quatro grupos.

Orientados pela perspectiva dialógica concreto-abstrato-concreto, organizamos este capítulo em três seções, a saber: (i) o concreto: na qual olhamos para o cenário atual e dialogamos com as experiências do XIII ENEM; (ii) o abstrato: para além do que é apresentado nos textos do XIII ENEM, algumas reflexões teóricas sobre o significado dos termos "concreto" e "abstrato" e o uso dos recursos didáticos nesse movimento; e (iii) de volta para o concreto: seção na qual retomamos os textos do XIII ENEM e indicamos possíveis lacunas para a pesquisa em Educação Matemática com foco no uso de recursos didáticos. Ao final, ainda, ampliamos as discussões, reforçamos as limitações deste estudo e consideramos a possibilidade de que outros pesquisadores continuem essa discussão.

## O concreto: o que revelam as experiências do XIII ENEM sobre concreto e abstrato?

Na impossibilidade de apresentar os 86 trabalhos que fazem referência aos termos "concreto" e "abstrato", optamos por apresentar ao leitor alguns dos relatos de experiência e das comunicações científicas, organizados previamente em quatro grupos, conforme análise prévia. Assim, os dois primeiros grupos apresentam o concreto e o abstrato de forma dicotômica e os últimos dois grupos consideram, de alguma forma, a articulação entre abstrato e concreto. Foram priorizados os trabalhos que apresentam algum detalhamento da prática pedagógica com estudantes e a possibilidade de reconhecer a compreensão dos termos "concreto" ou "abstrato" da forma como foram significados nos trabalhos. Assim, neste momento, a intenção é apresentar ao leitor o conteúdo concreto de alguns destes trabalhos para conhecimento.

## Enunciados do grupo 1

Dentre os trabalhos do grupo 1, escolhemos para apresentação os de Anjos, Cavalcanti e Rodrigues (2019), realizado em Pernambuco, e de Cavalcanti, Lucas e Silva (2019), na Paraíba. Anjos, Cavalcanti e Rodrigues (2019), alunos de um curso técnico de Pernambuco, relataram uma experiência de manipulação de materiais concretos construídos com recicláveis por alunos do Ensino Médio. Para a construção dos artefatos, foram utilizados materiais reutilizados, como marcadores para quadro branco, embalagens de produtos para cabelo, papelão e outros.

O primeiro momento (M1) consistiu na construção de estruturas de poliedros, de modo que as bolas de isopor representam os vértices e os marcadores, as arestas. Nesse caso, a unidade de comprimento das arestas foi definida pelo número de marcadores utilizados, unidos uns aos outros com cola quente e, posteriormente, envoltos em papel adesivo. Além das arestas, também foram construídos a altura e os apótemas da base e da pirâmide, a fim de evidenciar as relações matemáticas entre esses segmentos.

Figura 1 - Construção do tetraedro no LEM
Fonte: Anjos, Cavalcanti e Rodrigues (2019, p. 8).

Após a construção dos artefatos concretos, Anjos, Cavalcanti e Rodrigues (2019) procederam com o segundo momento (M2), no qual os alunos manuseiam os materiais e debatem sobre suas observações. Segundo os autores, "Esta etapa favorece a estruturação de ações mentais à execução de tarefas elaboradas nesta situação didática: números de vértices, faces, arestas, vista superior" (Anjos; Cavalcanti; Rodrigues, 2019, p. 9). Por último, no terceiro momento (M3), os sólidos geométricos construídos foram apresentados em exposições.

Por sua vez, o trabalho de Cavalcante, Lucas e Silva (2019, p. 1) teve como objetivo "evidenciar a produção de materiais didáticos produzidos por alunos do 1º ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Edificações". Os autores identificam que estes materiais podem ser concretos ou tecnológicos, mas têm a intenção de diversificar o ensino de função quadrática.

A proposta pedagógica foi dividida em três momentos: escolha dos materiais a serem produzidos, orientações de produção dos materiais didáticos e apresentação dos materiais para os grupos. Conforme destacam os autores, "Os recursos didáticos escolhidos foram: Mangá, Histórias em Quadrinhos (HQ), Quadriculum (inspirado no Algeplan), Broken Graphics e um Site. Os critérios avaliativos definidos foram: domínio de conteúdo, criatividade, originalidade, organização e estética do material e integração do grupo" (CAVALCANTE; LUCAS; SILVA, 2019, p.6). Percebe-se o foco de atenção direcionado à construção do material didático que, de alguma forma, contemple o conteúdo definindo a função quadrática, e os autores destacam que o uso de materiais concretos, desde o seu processo de produção, possibilita reflexões sobre a construção do conhecimento matemático, ainda que não tenham especificado de que forma isso acontece.

## Enunciados do grupo 2

Os enunciados deste grupo serão representados pela experiência de Matuoka *et al*. (2019) na região da Grande Dourados, no Mato Grosso do Sul. A atividade compartilhada por Matuoka e seus colaboradores (2019) buscou auxiliar os alunos na compreensão e na identificação de arestas, faces e vértices, construindo o seu próprio sólido geométrico com o auxílio de bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid). Já no resumo, os autores justificam a utilização do concreto pela dificuldade com o abstrato:

> Nessa perspectiva, a atividade foi elaborada **devido à dificuldade que os alunos tinham em imaginar** figuras no espaço e entender os conceitos. [...] Os resultados permitem inferir que a **utilização de materiais manipuláveis pode** [...] **contribuir significativamente para a construção do conhecimento**. (MATUOKA *et al*., 2019, p. 3, grifos nossos)

Nesse contexto de dificuldades, os sólidos geométricos, representantes do concreto, ganharam espaço e passaram a ser percebidos como uma solução para esse quadro, uma vez que foram capazes de tornar o abstrato mais compreensível e, assim, de facilitar a aprendizagem:

> Portanto, trabalhar com esse material, pretendemos **facilitar** a assimilação dos conceitos e **tornando mais compreensível** os assuntos com o intuito de **trabalhar o abstrato do tema, podendo apresentar mais compreensibilidade**, pois poderão ter uma base sólida sobre o mesmo. (MATUOKA *et al*., 2019, p. 3, grifos nossos)

É interessante observar que, nestes movimentos compartilhados pelos enunciados dos grupos 1 e 2, não há uma transição entre concreto e abstrato (ou vice-versa). Na verdade, o movimento usa as limitações como argumento para substituí-lo pelo outro. Essa dicotomia entre concreto e abstrato só será superada a partir do grupo 3, quando teremos a abstração alcançada por meio da manipulação do concreto e o concreto pelo abstrato, conforme o grupo seguinte.

## Enunciados do grupo 3

Para compreender outra abordagem entre abstrato e concreto, vamos considerar a experiência de Oliveira e Andrade (2019), em Campina Grande -

Paraíba, e Guimarães e seus colaboradores (2019), em Belo Horizonte - Minas Gerais. A pesquisa de Oliveira e Andrade (2019) buscou identificar como o uso de materiais didáticos de manipulação, trabalhados em um museu de ciências, pode contribuir com o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos. No decorrer da pesquisa, os autores identificaram diferentes concepções sobre o uso, segundo eles, de Materiais Didáticos de Manipulação (MDM). Em algumas passagens, sobretudo nas discussões finais, os autores apresentam indícios de uma percepção de que o concreto é o ponto de partida para o movimento de abstração:

> Nesse momento é fundamental ressaltar que o uso dos materiais didáticos de manipulação é um recurso muito eficiente, pois, de forma lúdica, introduz os **conceitos** de área e perímetro de uma maneira em que a linha de pensamento do professor e do aluno andem juntos e, como foi discutido anteriormente, é imprescindível **parta do concreto para o abstrato**, tornando compreensível o conhecimento matemático. (OLIVEIRA; ANDRADE, 2019, p. 12-13, grifos nossos)

Em seguida, os autores completam:

> No decorrer da pesquisa concluímos que o uso de material didático de manipulação não deve ser feito de maneira mecânica, nem o MDM por si mesmo é suficiente, pois o aluno precisa da compreensão entre as ações ligadas ao uso dos MDM e às ideias matemáticas representadas **através destes instrumentos** de mediação simbólica. Isso acontecerá a partir do momento em que o professor não atue apenas como um transmissor de conhecimento, mas também como mediador da atividade, usando sempre o pressuposto de partir do concreto para o abstrato.
>
> Notamos que o uso do material didático de manipulação no experimento do geoplano foi usado não com um fim em si mesmo, mas como ferramenta para o ensino-aprendizado de conceitos matemáticos, **partindo do concreto para o abstrato** de uma forma que não foi compreendido apenas fórmulas, mas também conceitos. [...]. (OLIVEIRA; ANDRADE, 2019, p. 13, grifos nossos)

Semelhante à visão de Oliveira e Andrade (2019), temos a de Guimarães e seus colaboradores (2019). O grupo realizou atividades de manipulação de objetos para discussão de conceitos de Geometria em uma turma de segunda série do Ensino Médio. Segundo os próprios autores, "Tal metodologia foi

utilizada com o objetivo de partir do empírico - manipulável **para se chegar à formação de conceitos**" (GUIMARÃES *et al.*, 2019, p. 1, grifos nossos). Com isso, identificamos mais uma experiência que operou na lógica de um pelo outro. Nas próprias palavras dos autores, "os objetivos desta atividade foram: trabalhar as unidades de medidas de comprimento, área e volume; proporcionar uma situação de visualização e **manuseio do concreto para se chegar ao abstrato**; calcular área e volume dos objetos" (GUIMARÃES *et al.*, 2019, p. 3, grifos nossos).

## Enunciados do grupo 4

O último grupo de experiências, que retomamos neste capítulo, foi representado pelas experiências de Moro e Rossatto (2019), em Erechim - Rio Grande do Sul, e de Vilela (2019), em Barra do Garças - Mato Grosso. Moro e Rossatto (2019) apresentam duas atividades desenvolvidas com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental com o objetivo de elaborar representações matemáticas e aplicar a semelhança de triângulos e a trigonometria. Partindo do concreto, os alunos deveriam escolher "algum objeto (árvore, por exemplo) no entorno da escola cuja altura era inacessível e efetuar cálculos para a determinação dessa altura" (MORO; ROSSATTO, 2019, p. 5). Para tanto, poderiam medir a altura de um colega e as sombras do objeto e do estudante para estabelecer a proporcionalidade, conforme a Figura 2, a seguir.

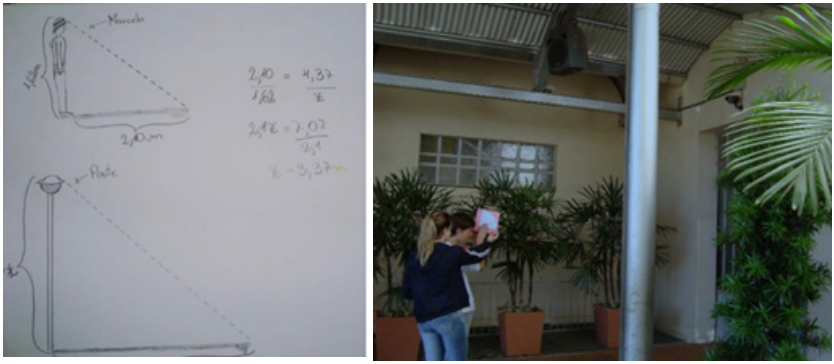



Figura 2 - Registro fotográfico e trecho do relatório
Fonte: Moro e Rossatto (2019, p. 8).

Na segunda atividade, os estudantes foram para o pátio e entorno da escola para realizar novas medições, com auxílio de materiais como trena, calculadora e teodolito artesanal. Alguns grupos optaram por analisar as medidas dos mesmos objetos da atividade inicial. Por fim, no retorno à sala de aula, os estudantes elaboraram um relatório da atividade realizada, incluindo cálculos, desenhos que representem a situação observada, bem como fotos da atividade.

Em outra experiência no Ensino Fundamental, Vilela (2019) defende que vivências que os estudantes trazem do seu ambiente cultural podem se constituir como um caminho para o ensino e a aprendizagem de Matemática. A articulação entre concreto e abstrato, nesse caso, se deu a partir de uma provocação a alunos do sexto ano:

> Em um dado momento, os alunos foram questionados: ao andarem nas ruas, em algum momento pararam para pensar onde está a matemática que vocês estão estudando? Duas alunas responderam, uma delas disse que seria *"pessoas vendendo fio de carregador, frutas e saindo do banco, que às vezes tem que pagar conta*" e conclui "*minha mãe vai pagar conta direto*". A outra aluna respondeu "*o ângulo na hora de virar*".
>
> Sobre esta descrição "o ângulo na hora de virar", os alunos em seguida contaram que foi uma atividade que fizeram com o professor deles, usando o transferidor fizeram o trajeto da entrada da escola até a sala deles [...]. (VILELA, 2019, p. 9, grifos da autora)

Ao longo do texto, Vilela (2019) traz apontamentos sobre os processos mentais dos estudantes durante a construção dos mapas culturais, sínteses do movimento concreto-abstratoconcreto, realizado na atividade. Sobre esse aspecto, a autora conclui que os alunos "desenharam formas que mais se aproximavam das formas geométricas conhecidas de sua cultura, o fator desafiador como um potencial seria compreender como realizar apropriação, sensibilização e orientação desses processos, um conhecimento informal para a matemática formal" (VILELA, 2019, p. 12).

A apresentação destes trabalhos, organizados em quatro grupos, representa o concreto encontrado nas produções do subeixo 4 do ENEM. No próximo item, discutiremos o movimento do concreto-abstrato-concreto, a partir de abstrações elaboradas com base nos estudos teóricos.

## O abstrato: para além do que é apresentado nos textos

De modo geral, o olhar atento sobre algumas das produções do ENEM evidenciou a preocupação dos autores em possibilitar o pensamento abstrato do estudante a partir da manipulação de um recurso didático que se apresenta como concreto. Assim é comum surgirem afirmações, como "manuseio do concreto para chegar ao abstrato", "transição do pensamento concreto para o abstrato"; "conectividade entre concreto e abstrato", entre outras. Muito também já foi discutido na comunidade de educadores matemáticos em relação a esta compreensão do uso de materiais manipuláveis associado ao concreto, no sentido de promover a aprendizagem da matemática.

Nacarato (2006) resgata uma discussão do início dos anos 1990 pela qual Schliemann, Santos e Costa (1992) já procuravam indicar que a forma como o material concreto estava sendo utilizada não contribuía com a aprendizagem matemática, mas mesmo assim, ainda em 2006, os professores continuavam acreditando nos "'milagres' do material concreto" (NACARATO, 2006, p. 1). Considerando os dados obtidos com os anais do ENEM, podemos dizer que, ainda em 2019, há uma tendência a que os professores continuem acreditando nestes milagres, incorporando o discurso que por meio do uso de materiais didáticos, caracterizados como "o concreto" se promove o pensamento abstrato dos estudantes, e é neste movimento que os estudantes aprendem.

Nesse sentido, trazemos para esta discussão a compreensão que se carrega em relação aos termos "concreto" e "abstrato". O abstrato e o concreto serão aqui considerados como categorias da lógica dialética que nos ajudam a compreender o processo de conhecimento.

Na lógica formal, o conhecimento concreto é relacionado ao que é perceptível, aparente, e o conhecimento abstrato é associado ao que pode ser separado, identificando o que há de comum entre objetos e fenômenos. Nesse sentido, o movimento vai do concreto sensível a definições abstratas. Isso pode ser evidenciado em vários registros dos trabalhos do ENEM, em que os autores destacam que o material auxilia o movimento do pensamento do concreto para o abstrato.

Na lógica dialética, se reconhece que o que é perceptível e sensível, a partir da realidade objetiva, são imagens que se refletem em nossa consciência e, por meio das sensações e percepções, os homens captam as propriedades dos objetos e fenômenos:

> A percepção é só o ponto de partida do conhecimento, este não pode terminar nela, já que ela só proporciona um conhecimento concreto, se bem difuso, quer dizer, um todo único, composto de partes e elementos heterogêneos. Na percepção não se descobre a essência do objeto, nem se põe de relevo as leis profundas que regem seu movimento. A imagem sensível reflete, de modo imediato, o objeto em seus aspectos essenciais e não essenciais. A qualidade mais valiosa da percepção sensível e concreta é sua evidência imediata. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 303, tradução nossa)

A dialética materialista considera que o movimento do sensível e concreto para o abstrato ocorre a partir das percepções e reflexos das imagens como uma fase do processo cognitivo. Considera, ainda, que é na prática social humana que são determinados os aspectos do objeto que serão abstraídos e caracterizados como essenciais.

> A abstração é um processo ordenado a um fim. O homem analisa o objeto com um determinado fim, ao destacar uma qualidade do objeto e prescindir de outra. Os fins do pensamento científico não são arbitrários nem puramente subjetivos, mas sim tem um conteúdo objetivo. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 305, tradução nossa)

Nesse sentido, a abstração deve revelar a essência do objeto e não somente separar ou identificar o que é comum. É por meio da abstração que o pensamento se afasta do objeto, mas isso deve ser feito para que ele seja compreendido mais profundamente.

Conforme Rosental e Straks (1960), a matemática não se separa da realidade em função de seu alto grau de abstração, pelo contrário, as abstrações permitem que esta forma de conhecimento permita compreender outros objetos e fenômenos da natureza em sua complexidade. Considera-se, desta forma, a importância deste movimento do conhecimento concreto perceptível, a partir de sua imagem ao conhecimento abstrato, elaborado a partir de análises dos objetos e fenômenos, destacando os elementos essenciais a partir da prática social.

Entretanto, este é um dos movimentos, trata-se de um processo de "análise". É necessário que a este processo de análise se siga um processo de síntese, que conduz ao pensamento concreto como síntese das abstrações.

> Assim, pois, a lógica dialética considera que o concreto é o ponto de partida e de chegada do processo cognitivo. O concreto e sensível é o ponto de partida do conhecimento; o concreto, por sua vez, como síntese e combinação de numerosas abstrações, é a meta do conhecimento e as abstrações separadas constituem um meio para alcançar este fim. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p.314)
>
> O abstrato é a negação do concreto sensível, e o concreto como sínteses de inúmeras abstrações, é a negação do abstrato. Mas isto não significa uma simples volta ao concreto que servia de ponto de partida, mas sim ao concreto elevado a um nível mais alto de desenvolvimento, em que o objeto é captado de modo profundo e multilateral. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p.315)

Este processo de análise e síntese é constituído pelas percepções sobre objetos e fenômenos, abstrações e sínteses elaboradas, em que o concreto que se constitui no processo de conhecimento é infinito.

Mas será que este é o sentido que está sendo atribuído aos termos "concreto" e "abstrato" no ensino de matemática? Será que está sendo considerada a necessidade de processos de análises, que se transformam em abstrações a partir do material concreto, além de um processo de "síntese" de tais abstrações na elaboração de um conhecimento concreto (ou concreto pensado)?

Em 2006, Nacarato indica que, em relação ao uso de materiais concretos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, não pretende responder se devem ou não ser usados. Porém, ela destaca que sua eficácia depende de como será utilizado, indicando a necessidade de discutir "significados do que seja 'trabalhar no concreto' com alunos da Educação Básica, em qualquer de seus níveis" (NACARATO, 2006, p. 6).

A necessidade de discutir o que seja "trabalhar" no concreto se amplia se pensarmos que esta compreensão está sendo considerada para a promoção do chamado "pensamento abstrato". Assim, podemos dizer que há uma modificação no discurso dos professores que já não dizem somente que irão "trabalhar no concreto", mas que irão do concreto ao abstrato, como se essa afirmação também por si só fosse suficiente para justificar o trabalho com o material didático concreto.

Nesse sentido, Jardinetti (1997) alertava para a dicotomia estabelecida entre concreto e abstrato, causando distorções a ambos como momentos do processo de conhecimento. O concreto, em geral apresentado como empírico, é considerado como condutor a um pensamento abstrato, aparentemente inacessível e existente no campo das ideias, muitas vezes associado a sistematizações em

fórmulas.

Algumas considerações neste sentido são necessárias e podem ajudar. A realidade objetiva se apresenta em sua materialidade com uma série de objetos e fenômenos. A partir destes e como um reflexo desta realidade, nossos processos de pensamento se desenvolvem e podemos expressar juízos, noções e conceitos, a partir de processos de abstração e generalização. Nesse processo, enquanto humanidade, geramos novos objetos e fenômenos, que se tornam também concretos em nosso pensamento e, assim, segue o processo de pensamento e conhecimento, neste movimento dialético de concreto sensível, abstrações, concreto pensado.

Um exemplo no campo da matemática e seu ensino pode nos ajudar a entender este ciclo e a importância, defendida aqui, de que o trabalho com o material concreto não se restrinja a só uma face deste movimento (que, em geral, vai do concreto sensível manipulativo para o abstrato), mas que possibilite a dialética concreto-abstrato-concreto pensado em seu movimento. Resgatamos o trabalho com o ábaco. Este material concreto, conhecido por vários educadores, é fruto do processo de abstrações humanas sobre o sistema de numeração. Em sua forma materializada com hastes e argolas que podem ser feitas dos mais diversos materiais, ele objetiva o entendimento de nexos conceituais para a compreensão do sistema de numeração, como a noção de agrupamento, de valor posicional, a importância do zero, entre outras. Assim, apesar de ser apresentado como um "material concreto", ele carrega em si a experiência humana de conceitos e modos de ação, relacionados ao sistema de numeração, isto é, carrega em si o concreto pensado.

Ao ser apresentado às crianças, em um primeiro momento, o ábaco é visto como material concreto, a ser manipulado, e sobre o qual se realiza uma tarefa indicada pelo professor. Se bem direcionadas, estas tarefas possibilitarão às crianças que, no processo de manipulação do ábaco, elaborem abstrações variadas e se apropriem da compreensão do sistema de numeração; entretanto, isso exige a ação intencional do professor para que não se enfatize a manipulação técnica do material, mas sim a compreensão de que junto com esta manipulação se compreende o concreto pensado do sistema de numeração.

O exemplo do ábaco é importante porque, assim como este, vários outros materiais ditos concretos são carregados das abstrações e da materialização de conceitos matemáticos, como materiais montessorianos, por exemplo. Outros materiais concretos não carregam em si a intencionalidade matemática, mas

foram criados para outros fins (por exemplo, tampinhas de garrafa, palitos de sorvete, folhas de papel variadas), que são destituídas, então, do concreto pensado matemático e dependem ainda mais da ação do professor de forma intencional, orientando o processo de abstrações no pensamento de forma que, a partir deles, se compreenda um conceito matemático (concreto pensado). É o caso também de vários jogos que foram criados com outra intencionalidade, mas quando apropriados pelos professores ganham outras possibilidades.

As abstrações aqui elaboradas sobre o próprio movimento dialético concreto-abstrato-concreto pensado e sobre alguns materiais concretos para o ensino de matemática nos permitirão retornar o olhar na forma de concreto pensado sobre a relação abstrato - concreto, que é manifestada nas produções do ENEM.

## O concreto pensado: retomando os grupos de enunciados

Entre as enunciações indicadas na seção do concreto, reconhecemos, inicialmente, dois grupos: o uso pelo uso de uma única categoria (Grupo 1) e o uso baseado na contraposição entre abstrato e concreto (Grupo 2), como se um fosse a solução do outro. Como uma terceira via, não dicotômica, também observamos nos anais do XIII ENEM dois outros discursos que não só admitem a coexistência do concreto e do abstrato na prática pedagógica, como reconhecem a possibilidade de articulação entre essas duas categorias (Grupos 3 e 4). Nos textos dos trabalhos analisados, essas ideias se materializaram em trechos que defendem o "abstrato pelo concreto e o concreto pelo abstrato" (ou seja, um pela via do outro) e, ainda, a dialética concreto-abstrato-concreto.

Observamos que, nos textos do grupo 1, a manipulação dos materiais concretos foi considerada suficiente para a compreensão dos conceitos matemáticos, ainda que de formas diferenciadas. Em ambos os trabalhos, se considerou que a produção e manipulação de materiais, sejam de estruturas de poliedros no caso de Anjos, Cavalcanti e Rodrigues (2019) ou da produção de diferentes recursos (HQ, jogos e site) (Cavalcante, Lucas e Silva), promovem a compreensão do conhecimento matemático, ainda que a discussão específica sobre o conceito matemático não tenha sido evidenciada.

Para além do que se propõem os Enunciados do grupo 1, concordamos com Nacarato (2006, p. 4) ao dizer que o "uso inadequado ou pouco exploratório

de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los".

Já a discussão do concreto versus abstrato, materializada nos enunciados do grupo 2, nos permite retomar dois importantes movimentos do ensino de matemática no Brasil (FIORENTINI, 1995). Estes enunciados estão inseridos em textos que, em geral, apresentam uma contraposição entre abstrato e concreto. Em muitos casos, há um juízo de valor sobre uma das categorias: ou a abstração é tida como um problema para aprendizagem de Matemática ou a materialidade é algo limitado que precisa ser superado. Com isso, concreto e abstrato passam a ser vistos como solução um do outro: se a abstração é um problema, substituímos pelo concreto; se o concreto é finito, promovemos a abstração para superá-lo. Nesse caso, os argumentos dos professores pró-recursos podem ser associados à Tendência Empírico-Ativista dos anos 1920, "decorrente dos ideais escolanovistas que se contrapunham ao modelo tradicional de ensino no qual o professor era tido como elemento central do processo de ensino" (NACARATO, 2006, p. 1). Em oposição aos argumentos pró-recursos, teríamos os antirrecursos, alinhados à Tendência Formalista Moderna, alicerçada nas ideias de abstração, da linguagem formal e do rigor matemático (FIORENTINI, 1995).

Além disso, no exercício de reconhecer os enunciados de alguns autores como ecos da história do ensino de matemática no Brasil, os enunciados do grupo 3 mudam o paradigma dicotômico entre concreto e abstrato e passam a perceber possibilidades entre cada uma dessas categorias. Se nos dois primeiros grupos identificamos uma visão disjunta de concreto e abstrato, o terceiro grupo de enunciados vem considerar a possibilidade de se alcançar um pelo outro. Nesse grupo, em geral, percebemos maior frequência do abstrato obtido pelo concreto. Nesse sentido, se aproximam da Tendência Construtivista, surgida da epistemologia genética piagetiana e que defendia "com auxílio de materiais concretos, à construção das estruturas do pensamento lógico-matemático" (FIORENTINI, 1995, p. 19).

Ao se trabalhar o abstrato pelo concreto, alguns professores utilizam os materiais para "introduzir uma noção, mas, uma vez se chegando a ela (cálculo, propriedade, algoritmo), já não interessa o contexto no qual o material foi utilizado e passa-se a trabalhar apenas no nível abstrato" (NACARATO, 2005, p. 3). Nesse sentido, concordamos com Matos e Serrazina (1996, p. 197-198), citados em Nacarato (2006):

> É como se a situação que serviu para os introduzir funcionasse como um andaime que se retira quando se acaba o prédio. Não queremos com isto dizer que se tenha de estar sempre a trabalhar com materiais, mas que as concretizações que serviram para elaborar as noções matemáticas podem ser situações importantes para os alunos verificarem algumas propriedades ou compreenderem outras. Isto só se consegue se, desde o início, houver uma verdadeira ação por parte da criança e não uma simples reprodução do que foi dito pelo professor.

Já os enunciados apresentados no grupo 4 revelam o movimento de reconhecer um objeto ou fenômeno dito concreto e, a partir deles, realizar abstrações que, inclusive, podem utilizar outros materiais concretos. É o caso, por exemplo, da produção de Vilela (2019) que utilizou mapas culturais e, a partir de questionamentos aos estudantes, orientou a compreensão para a sistematização e formalização de conceitos matemáticos presentes nos mapas e também de Moro e Rossatto (2019) que, com o uso de materiais e, inclusive, um teodolito construído artesanalmente, encaminharam os estudantes ao processo de observação e determinação da altura de um objeto inacessível a partir de conceitos matemáticos.

## Considerações finais

Este capítulo foi elaborado com o objetivo de refletir sobre o significado atribuído aos termos "concreto" e "abstrato" e sua relação com o uso de recursos didáticos no contexto dos trabalhos publicados no subeixo 4 dos anais do XIII ENEM. Considerando o movimento do conhecimento e a dialética concreto-abstrato-concreto pensado, procuramos adotar esta lógica na organização da apresentação. Assim, em um primeiro momento, apresentamos alguns trabalhos previamente organizados em grupos e estes representam o "concreto" nesta investigação, ou seja, o material que se apresenta. O estudo teórico da categoria dialética abstrato-concreto contribui com a elaboração de abstrações sobre o material, inicialmente obtido, e nos permite refletir e retomar o material, analisando-o e elaborando o "concreto pensado" no que se refere à interpretação do que é considerado "concreto" e "abstrato" nas práticas pedagógicas relacionadas ao ensino da Matemática que foram enunciadas.

Observa-se que a compreensão teórica e consciente sobre esta categoria "concreto-abstrato", pode contribuir para que as práticas desenvolvidas avancem em relação à apropriação do conhecimento matemático pelos estudantes. Percebemos, ainda, a limitação de algumas das discussões nos textos analisados que podem ser geradas por vários motivos, incluindo a limitação de páginas de apresentação dos trabalhos; entretanto, muitas vezes, o trabalho com o recurso didático concreto toma o lugar de "fim" do processo, sendo que a observação, a manipulação ou mesmo a produção de determinado material configuram-se como a garantia da aprendizagem. Esta constatação revela, ainda, um desafio para os formadores de professores no sentido de potencializar ações que possibilitem a conscientização sobre a necessidade de práticas que superem o uso do material apenas como o concreto que se observa e sobre o qual não se reflete.

Por outro lado, percebemos o movimento que vem sendo ampliado e, em algumas práticas descritas nos textos, foi possível observar que há o processo de gerar abstrações a partir do concreto e retornar a ele para que se efetive também um processo de síntese. Reconhecemos que este processo de análise-síntese e movimento do abstrato ao concreto é uma constante no movimento de formação e esperamos que, a partir do que aqui foi enunciado e refletido, possamos apontar algumas contribuições nessa direção.

## Referências


ANJOS, T. V.; CAVALCANTI, L. B.; RODRIGUES, M. A. Explorando a geometria espacial com materiais concretos reutilizáveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

CAVALCANTI, M. T. M.; LUCAS, L. M.; SILVA. A. L. Discentes e docente em ação: novas perspectivas no ensino de função quadrática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 1, jan./jun, 1995.

GUIMARÃES, Y. P. B. Q. *et al*. Experiência em Geometria: observações e interpretações de uma atividade de sala de aula. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e o concreto no ensino da matemática: algumas reflexões. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 11, n. 12, 1997.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. de L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Matemática Universidade Aberta, 1996.

MATUOKA, J. M. *et al*. Construção de materiais para o estudo de geometria espacial. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

MORO, F. T.; ROSSATTO, S. A. Vivenciando a matemática: uma proposta para o ensino-aprendizagem da trigonometria e da semelhança de triângulo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, SBEM São Paulo, v. 9, n.9 e 10, p. 1-6, 2006.

OLIVEIRA; S. B. de O.; ANDRADE, S. de A. O uso de materiais didáticos de manipulação em um laboratório de matemática inserido no museu. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, Y. G. M. Categorias del Materialismo Dialectico. México: Grijalbo. 1960.

SÁ, L. C. e. **Educação Matemática na Educação Profissional e Tecnológica:** contribuições para uma formação integral em resistência à precarização do trabalho. 2021. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, RJ, 2021.

VILELA, A. M. C. Diálogo entre cultura e matemática nas representações de tempo, espaço e forma In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – MT: SBEM, 2019.

## Capítulo 5

# RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO IDENTIFICADOS NOS TRABALHOS APRESENTADOS NO XIII ENEM

*Maria Elisa Esteves Lopes Galvão*

## Introdução

Dentre os trabalhos encaminhados para o denominado subeixo 4, do XIII ENEM - Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental no Ensino Médio e no Ensino Superior -, selecionamos para examinar, neste capítulo, as comunicações científicas e relatos de experiência que se referem ao ensino de Geometria no Ensino Médio. Esta análise considera o ponto de vista dos conteúdos abordados e os recursos adotados para o desenvolvimento de propostas de atividades para a sala de aula.

Os conteúdos e recursos para o ensino de Geometria no Ensino Médio que examinaremos foram identificados em 24 dos trabalhos apresentados no XIII ENEM, sendo 9 comunicações científicas e 15 relatos de experiência. Dentre as comunicações científicas, os trabalhos distribuem-se entre os destinados ao ensino de Geometria Plana, Espacial ou Trigonometria, enquanto que nos relatos de experiência, os conteúdos se distribuem quase igualmente entre os destinados ao ensino de Geometria Espacial e Trigonometria, complementados por outros temas voltados a diferentes aspectos relativos aos assuntos tratados no Ensino Médio, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Trabalhos sobre Geometria – Ensino Médio – XIII ENEM

| Conteúdos | Comunicações Científicas | Relatos de Experiência | Totais |
|---|---|---|---|
| **Geometria Plana** | 3 | 2 | 5 |
| **Geometria Espacial** | 2 | 6 | 8 |
| **Trigonometria** | 3 | 5 | 8 |
| **Outros** | 1 | 2 | 3 |
| | **9** | **15** | **24** |

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados do levantamento

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) e as recomendações curriculares, em geral, consideram que, para a construção de uma visão integrada na aprendizagem da Matemática, devem ser desenvolvidas ações na direção de contextualizar conteúdos, de forma a torná-los significativos, selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas e explorar os vários aspectos propiciados por recursos didáticos e tecnológicos. Esses documentos ressaltam, também, que os estudantes devem ser expostos a situações que lhes propiciem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e de resolução de problemas.

Em relação à Geometria, são ressaltados os aspectos relativos às representações de movimento e posição no plano e no espaço, por meio de recursos estáticos como mapas, ou dinâmicos, com o uso de *software* ou ainda recursos tecnológicos. Esses aspectos estão relacionados a tópicos de Geometria Plana que aprofundam os conteúdos previstos para o Ensino Fundamental, elementos de Geometria Espacial métrica e de posição; consideram-se, também, elementos de Geometria que estão presentes no estudo das relações trigonométricas e métricas nos triângulos e na transição das razões para as funções trigonométricas. Observa-se que os conteúdos aprofundam as abordagens adotadas no Ensino Fundamental e visam, conforme a Competência 5:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523)

Os trabalhos apresentados no XIII ENEM, como comunicações científicas ou relatos de experiência relativos ao ensino de Geometria, contemplam as orientações curriculares do ponto de vista do objeto matemático. Consideraremos, para efeito da organização da apresentação nesse capítulo, o agrupamento desses trabalhos em quatro blocos, correspondentes respectivamente aos conteúdos relativos à Geometria Plana, à Geometria Espacial, à Trigonometria e a outros tópicos.

Nos quadros 1 a 4, temos os títulos dos trabalhos e seus respectivos autores a serem considerados em cada um dos blocos, identificados como comunicação científica (CC) ou relato de experiência (RE) para efeito de detalhamento das informações e comentários a serem apresentados posteriormente.

Quadro 1 - Trabalhos relacionados ao ensino de Geometria Plana

| | | |
|---|---|---|
| CC | ENSINO DE ÂNGULOS COM A CANETA 3D | Caroline da Silveira,<br>Rogério de Aguiar,<br>Silvia Teresinha Frizzarini |
| CC | PARABOLÓGRAFO: UM ARTEFATO PARA DESENHAR PARÁBOLAS | Rogério de Aguiar,<br>Elisandra Bar de Figueiredo,<br>Júlio Pedro Marques de Mattos |
| CC | A GEOMETRIA DOS FRACTAIS: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE PUBLICAÇÕES EM ANAIS DE EVENTOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA | Rebeca L. C. Seiscentos,<br>Karine da Silva Macedo,<br>Leonardo Ferreira Zanatta,<br>Mariana Mora, Veridiana Rezende |
| RE | CONSTRUINDO SEU FRACTAL:<br>EXPERIÊNCIAS A PARTIR DE OFICINAS | José Claudinei Ferreira,<br>Rejane Siqueira Julio |
| RE | APRENDIZAGEM COOPERATIVA NA AULA DE GEOMETRIA: LADRILHAMENTO | Elaine de Sousa Teodosio,<br>Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício,<br>Daniel Brandão Menezes |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 2 - Trabalhos relacionados ao ensino de Geometria Espacial

(continua na próxima página)

| | | |
|---|---|---|
| CC | PROBLEMA DELIANO: DUAS PERSPECTIVAS GEOMÉTRICAS | Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli,<br>Rodolfo Masaichi Shintani,<br>Ricardo Scucuglia R.da Silva |
| CC | SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: UMA CONSTRUÇÃO USANDO A IMPRESSÃO 3D | Marcos Manoel da Silva,<br>Júlio Pedro M.de Mattos,<br>Leonardo Filipi A.Buttenbender,<br>Elisandra Bar de Figueiredo |

Quadro 2 - Trabalhos relacionados ao ensino de Geometria Espacial

(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| CC | A GEOMETRIA DE FORMA LÚDICA: UMA EXPERIÊNCIA COM MATERIAIS MANIPULATIVOS EM TURMA DO ENSINO MÉDIO | Willian Colares Destefani, Janacélia A. Lacerda Destefani, Bárbara de Medeiros Marinho |
| CC | CALEIDOSCÓPIO: UM RECURSO DIDÁTICO MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA | Fabio Antunes Brun de Campos |
| RE | O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL A PARTIR DE UM PROJETO DE PESQUISA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JÚNIOR | Fabrício Soares, Helenara Machado de Souza, Cátia Maria Nehring |
| RE | EXPERIÊNCIA EM GEOMETRIA: OBSERVAÇÕES E INTERPRETAÇÕES DE UMA ATIVIDADE EM SALA DE AULA | Yara Patrícia B. de Queiroz Guimarães, Christiano Otávio R. Sena, Clístenes Lopes da Cunha, Fernanda Aparecida Ferreira |
| RE | SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE GEOMETRIA ESPACIAL NOCOLÉGIO MARISTA MEDIANEIRA | Juliane Carla Berlanda |
| RE | CONSTRUÇÃO DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS COM MATERIAIS ALTERNATIVOS | Tânia Patrícia Silva e Silva, Maria José Herculano Macedo, Tiêgo dos Santos Freitas, Luiz Marcos de Sousa Sampaio |
| RE | EXPLORANDO A GEOMETRIA ESPACIAL COM OS MATERIAIS CONCRETOS REUTILIZÁVEIS | Thiago Vinícius dos Anjos, Lialda Bezerra Cavalcanti, Maria Auxiliadora Rodrigues |
| RE | EXPLORANDO CONCEITOS E CÁLCULOS DE ÁREA E VOLUME NA FABRICAÇÃO DE SABÃO | Eduardo Brandl, Gianlucca Devigili |

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados do levantamento GT02.

Quadro 3 - Trabalhos relacionados ao ensino de Trigonometria

| | | |
|---|---|---|
| CC | IDONEIDADE COGNITIVA DE UM PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DE HQ | Danilo Monteiro de Vasconcelos,<br>José Ivanildo F. de Carvalho |
| RE | O ESTUDO DA PERIODICIDADE DE FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA A PARTIR DE UM EXPERIMENTO ENVOLVENDO A RODA GIGANTE | Sandra Regina D' Antonio Verrengia,<br>Vanessa Cristina Rhea,<br>Jessica Suzana Barragan Alves |
| RE | SENO E COSSENO: A TRANSIÇÃO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO AO CICLO TRIGONOMÉTRICO | Elisabete Marcon Mello,<br>Amarildo Aparecido dos Santos |
| RE | ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS | Carlos Carlão Pereira do Nascimento,<br>Maria Madalena Dullius |
| RE | A VALIDAÇÃO DE UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE OFICINA PEDAGÓGICA | Tuane Pacheco,<br>Sonner Arfux de Figueiredo,<br>Sara Araujo Machado |
| RE | O *Software* GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA | Silvino Domingos Neto |

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados do levantamento GT02.

Quadro 4 - Outros trabalhos

| | | |
|---|---|---|
| CC | A GEOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS: UM OLHAR PARA OS DIFERENTES TIPOS DE RACIOCÍNIO | Lucas Carato Mazzi,<br>Rúbia Barcelos Amaral-Schio |
| RE | UTILIZAÇÃO DO JOGO UNO COMO MÉTODO ALTERNATIVO DE ENSINO DE GEOMETRIA | Renato Leandro Lima de Oliveira,<br>Elimara Barros,<br>Gumercindo Mendes,<br>Gisela Maria da Fonseca Pinto |
| RE | ENUNCIADO DO CONCEITO DE RETAS PERPENDICULARES EM GEOMETRIA ANALÍTICA – DIFICULDADES DOS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO | Walter Aparecido Borges,<br>Maria Helena Palma de Oliveira |

Fonte: Elaborado pelo autor a partir dos dados do levantamento GT02.

Esses trabalhos, quase sempre, apresentam propostas de atividades desenvolvidas com o apoio de algum recurso didático. Alguns desses recursos

vêm sendo objeto de estudo de outros autores. Apresentaremos, na sequência, alguns dos aspectos que consideramos relevantes a respeito dos recursos didáticos que se fazem presentes no ensino de Matemática, marcadamente a partir da década de 1950, segundo Fiorentini (1995).

## Recursos didáticos para o ensino de matemática

Em seu trabalho sobre o ensino de Matemática no Brasil, Fiorentini (1995) apresentou categorias descritivas para organizar, cronologicamente, as tendências em Educação Matemática, levando em conta vários aspectos, como a concepção do ensino e aprendizagem de Matemática, os processos de aquisição de conhecimento e as perspectivas de estudo e pesquisa para a Educação Matemática. Com base nessas categorias, o autor identificou seis tendências: a formalista clássica, a empírico-ativista, a formalista moderna; a tecnicista e suas variações, a construtivista e a socioetnoculturalista.

No âmbito dessas tendências, identifica-se a presença do uso de recursos didáticos pedagógicos de caráter manipulável para o ensino de Matemática a partir da década de 1950. Segundo Fiorentini (1995), a chamada concepção empírico ativista inaugura processos e métodos de ensino que consideram o aluno como centro, a descoberta, o "aprender fazendo" e atividades propostas que pressupõem a ação, a manipulação e a experimentação, o uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais. Embora, segundo o autor, diferentes tendências tenham surgido, ao longo do tempo, para o ensino de Matemática, os recursos para o ensino estão sempre presentes, passando-se à discussão da sua importância, das possibilidades e potencialidades de utilização e do papel do professor no processo de utilização desses recursos para o ensino.

Desde a sua concepção, os recursos didáticos pressupõem uma correspondência com objetos ou conceitos matemáticos. Buscaremos trazer algumas observações gerais sobre esses recursos e suas possibilidades de utilização que poderão servir de referências nas considerações que traremos para destacar os aspectos, que nos parecem relevantes nos trabalhos apresentados no ENEM para o ensino de Geometria no Ensino Médio.

Adler (2000) nos dá uma categorização abrangente dos recursos para o ensino a partir dos chamados recursos básicos – material e humano – que contemplam as instalações escolares, docentes e o pessoal de suporte; a autora

passa aos recursos que considera como materiais escolares específicos para o ensino de matemática, além dos próprios objetos matemáticos, dos objetos do cotidiano utilizados para o ensino de matemática e dos recursos tecnológicos. Adler (2000) conclui sua categorização considerando, ainda, como recursos presentes na atividade de ensinar aqueles que ele categoriza como linguagens social e cultural e também o tempo destinado ao ensino.

Em geral, identificaremos nos trabalhos e nas atividades apresentadas a presença dominante de recursos que podemos considerar na segunda das três grandes categorias elencadas por Adler. Mais especialmente, identificaremos os recursos que podemos considerar, em relação à sua utilização, como manipuláveis, concretos ou virtuais, como veremos a seguir.

Moyer (2001), em uma pesquisa sobre o uso de recursos didáticos com a participação de professores, considera que:

> Materiais manipuláveis são objetos destinados a representar explicitamente e concretamente ideias matemáticas que são abstratas. Eles têm um apelo visual e tátil e podem ser manipulados pelos aprendizes por meio de experiências manuais[1]. (MOYER, 2001, tradução nossa).

No entanto, ao analisar as manifestações dos professores e o trabalho em sala de aula, a autora afirma que o papel dos materiais manipuláveis ainda está associado mais à diversão do que à representação dos conceitos matemáticos. Em suas conclusões, ela ressalta a importância de o desenvolvimento profissional dos professores contemplar uma discussão mais aprofundada a respeito dos recursos didáticos, que relacione os aspectos do conhecimento matemático e suas possibilidades de representação, promovendo uma mudança nas crenças dos professores quanto ao uso dos manipulativos enquanto objetos para a aprendizagem.

Por outro lado, Clements (1999) traz diversos pontos de vista sobre a relação entre a efetividade do uso dos materiais manipuláveis e o fato deles serem "concretos", sensoriais, sob o controle das mãos. Para Clements, os materiais manipuláveis são objetos projetados para representar explicitamente e concretamente ideias matemáticas que são abstratas e "bons manipuláveis são aqueles auxiliam os estudantes a construir, ampliar e conectar várias representações

[1] *Manipulative materials are objects designed to represent explicitly andconcretely mathematical ideas that are abstract. They have both visual andtactile appeal and can be manipulated by learners through handson experiences.*

de ideias matemáticas"[2] (CLEMENTS, 1999, p.49, tradução nossa). Observa ainda que o recurso manipulável, quando significativo para o aprendiz, pode promover conexões entre diferentes conhecimentos e adquirir características que espelham ou são consistentes com as estruturas cognitivas e matemáticas. Clements menciona, especialmente, o papel dos computadores como recursos manipuláveis, que promovem representações gerenciáveis individualmente, mais flexíveis ou extensíveis do que enquanto objetos físicos, ou seja, recursos que podem promover manipulações virtuais.

Quanto ao uso dos recursos didáticos, em geral, para Lave e Wenger (1991), o acesso envolve, em uma prática, além da disponibilidade dos recursos ou seus artefatos, as relações sociais entre os participantes do processo. Para Lave e Wenger, o acesso é postulado sobre o conceito de transparência, relacionado ao recurso a ser utilizado e acrescido do que denominaram suas funções duais de visibilidade e invisibilidade (p. 103).

> Transparência em sua forma mais simples pode apenas implicar que o funcionamento interno de um artefato está disponível para o aluno inspeção: a caixa preta pode ser aberta, pode se tornar uma "caixa de vidro."[3] (LAVE; WENGER,1991, p. 102, tradução nossa)

Uma vez que é necessária uma maior compreensão do significado de um recurso para a sua utilização, os autores consideram que podem surgir ou não, na atividade a ser desenvolvida, o que denominaram "níveis de transparência", que dependem do recurso utilizado. No caso de uso de tecnologia, por exemplo, o objeto "computador" é, na prática, "opaco", e a transparência está associada à forma pela qual o uso desse objeto e a compreensão de seu significado interagem para se tornarem um processo de aprendizagem.

Por outro lado, considerando a relação entre o uso e a compreensão do papel do recurso na sua utilização, Lave e Wenger (1991) destacam uma interessante dualidade inerente ao conceito de transparência, que combina características por eles denominadas visibilidade e invisibilidade. A visibilidade ocorre quando o recurso é compreendido e possibilita a extensão do acesso à informação; a invisibilidade ocorre quando o recurso é integrado à atividade de forma a

[2] *Good manipulatives are those that aid students in building, strengthening, and connecting various representations of mathematical ideas.*

[3] *Transparency in its simplest form may just imply that the inner workings of an artifact are available for the learner's inspection: The black box can be opened, it can become a "glass box".*

propiciar uma interpretação não problemática, ou seja, quase "automaticamente". Segundo os autores, a visibilidade do significado e as possibilidades, propiciadas pelo recurso, são necessárias para promover seu uso não problemático, ou seja, a sua invisibilidade. Observam também que a invisibilidade das tecnologias de mediação é necessária para permitir que o foco no processo possa dar ênfase à visibilidade do assunto em questão.

Em resumo, a atenção para o uso de recursos didáticos pode ir além das características do recurso e considerar as formas de utilização pelos estudantes dentro do contexto em que esse uso é proposto, de forma a promover uma mediação significativa para professores e aprendizes. Os recursos manipuláveis, enquanto objetos concretos, não carregam significado ou ideias matemáticas e a construção de significado depende das ações desenvolvidas na prática com eles.

Ao ensinar Geometria, natural e tradicionalmente, nos valemos de recursos que herdamos do ensino tradicionalista clássico, conforme Fiorentini (1995), com características estáticas, como representações figurais ou manipuláveis, como a régua e o compasso, com os quais podemos gerar novas representações figurais igualmente estáticas. A partir da década de 1980, surgiram várias possibilidades de *software*s que propiciaram a dinâmica das construções e se tornaram recursos manipuláveis importantes para o ensino de Geometria e propiciaram uma discussão, num ambiente virtual, bastante diferenciada da tradicional para a relação entre os conceitos geométricos e suas representações.

Como Nacarato (2005), compartilhamos as afirmações de Pais (2000) sobre o caminho pedagógico para o ensino de Geometria:

> O uso de materiais didáticos no ensino de geometria deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica para que, evitando os riscos de permanência em um realismo ingênuo ou de um empirismo, contribua na construção do aspecto racional. Uma compreensão inicial pode induzir um aparente dualismo entre as condições concretas e particulares dos recursos didáticos em oposição às condições abstratas e gerais das noções geométricas. Mas esta dualidade não deve ser vista como pólos isolados do processo de construção conceitual, deve ser superada pela busca de um racionalismo aberto, dialogado e dialetizado. Em suma, devemos sempre estimular um constante vínculo entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno. (PAIS, 2000, p. 14-15 apud NACARATO, 2005)

A reflexão proposta por Pais (2000) é fundamental e corrobora as observações dos demais autores a que nos referimos anteriormente no sentido de que, na utilização dos recursos pedagógicos para o ensino, se atente especialmente à articulação entre os conceitos e as propriedades geométricas e os recursos utilizados na construção dos conhecimentos em Geometria.

Buscaremos destacar, nos trabalhos selecionados para este capítulo, dentre aqueles apresentados no XIII ENEM referentes ao ensino de Geometria, as principais características dos recursos utilizados pelos autores, de forma a explicitar elementos que poderão ser reproduzidos por professores em sala de aula ou mesmo em intervenções para coleta de dados de pesquisas na área. Os recursos apresentados poderão ser caracterizados, segundo Adler, como materiais específicos para o ensino, objetos do cotidiano, recursos tecnológicos ou socioculturais. Quanto a sua utilização, poderão ser manipuláveis concretos ou virtuais. Em ambos os casos, consideraremos a explicitação da correspondência entre o recurso e os elementos do conhecimento matemático e, quando possível, as informações sobre a transparência, visibilidade e invisibilidade, envolvidas na sua utilização, segundo os autores dos trabalhos selecionados.

## Recursos didáticos identificados nos trabalhos apresentados no XIII ENEM relacionados ao ensino de Geometria Plana

Dentre os 6 trabalhos apresentados no XIII ENEM, relacionados ao ensino de Geometria plana, descritos no Quadro 1, identificamos 4 comunicações científicas e 2 relatos de experiência. Uma das comunicações científicas e um relato de experiência trataram de estudos sobre a chamada Geometria dos fractais, abordada sob diferentes aspectos. Em duas das comunicações científicas, foram utilizados recursos tecnológicos com possibilidades de representação 3D para tratar de assuntos relativos à Geometria Plana: uma delas apresentou uma proposta do uso de uma caneta 3D para o trabalho com ângulos voltado para um aluno deficiente visual; outra trouxe possibilidades para desenhar parábolas, a partir de modelagens com o uso de impressora 3D. O segundo relato de experiência tratou de questões referentes ao ladrilhamento, com a utilização de modelos para alguns dos polígonos regulares.

A comunicação científica intitulada "A geometria dos fractais: uma revisão bibliográfica de publicações em anais de eventos da educação matemática"

(SEISCENTOS; MACEDO; ZANATTA; MORA; REZENDE, 2019) traz os resultados de uma pesquisa bibliográfica, realizada por participantes de um programa de Iniciação Científica, realizado em conjunto por duas universidades paranaenses. Foram selecionados e categorizados os resultados de 11 trabalhos de pesquisa sobre o assunto, publicados em anais de eventos científicos como o EBRAPEM e o ENEM no período de 2008 a 2018.

Destacaram-se enquanto categorias de análise, no trabalho: o uso de instrumentos de desenho para representar um fractal; o uso de *software* de Geometria para construção do fractal; o uso de exemplos da natureza para representar um fractal; nenhum dos anteriores. Os pesquisadores constataram que o uso de *software* de Geometria foi frequente enquanto recurso e que o fractal mais abordado foi o Triângulo de Sierpinski, provavelmente por se tratar de uma figura comum, que expõe as características dos fractais de maneira clara, segundo os autores. O recurso utilizado na pesquisa é, essencialmente, o conjunto de trabalhos selecionados para análise e a produção acadêmica resulta em um conjunto de informações relevantes para posteriores trabalhos sobre o assunto ou elaboração de atividades para a sala de aula.

No relato de experiência "Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas" (FERREIRA; JULIO, 2019) encontramos registradas as etapas de elaboração e aplicação da oficina "Construindo seu fractal", embasada na experiência profissional de docentes de uma universidade federal mineira e orientada por alguns pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos. Participaram da oficina estudantes do Ensino Fundamental e Médio da região, que tiveram acesso a um tema que, em geral, não têm contato no cotidiano escolar, com o objetivo amplo de popularização da ciência e, de forma mais específica, para divulgação da matemática. Os fractais foram mencionados explicitamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) para o Ensino Médio, como exemplo da utilização das transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composição destas) e homotéticas para construir e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas, além de promover a habilidade de identificar padrões geométricos.

Os autores destacam, também, que os fractais possibilitam a abordagem de transformações geométricas e a realização de discussões sobre pensamento computacional e algoritmos na Educação Básica para o desenvolvimento do pensamento computacional. Após a apresentação de diversas imagens (brócolis, borboleta, montanhas chinesas, teia de aranha, raio, concha partida ao meio,

folha de samambaia, girassol, nuvens, figuras do artista gráfico Escher - 1898-1972) e a identificação de configurações fractais, trazendo transparência e visibilidade na utilização desses objetos da natureza, foi proposta a construção do "cartão fractal" por meio de dobradura e recorte em papel. Observou-se que o computador também pode ser usado para produzir imagens fractais por meio de transformações geométricas e do uso de *softwares*, como o Geogebra. A continuidade da oficina foi proposta para um conjunto de alunos por um ministrante e ocorreu o aprofundamento de discussões sobre imagens digitais, pixels e a geração de imagens fractais, por meio de um processo iterativo e da linguagem de programação, que podemos considerar ações no sentido de promover a invisibilidade dos recursos utilizados.

Na comunicação científica intitulada "Ensino de ângulos com a caneta 3D" (AGUIAR; FRIZZARINI; SILVEIRA, 2019) os autores, professores catarinenses, apresentam uma pesquisa em andamento sobre a possibilidade de ensinar o conceito de ângulos para cegos com o uso de canetas 3D como recurso auxiliar para a confecção de material manipulável. A caneta 3D é um dispositivo compacto e acessível e seu uso em salas de aula é promissor devido à facilidade de manuseio e por apresentar um custo mais baixo. Os objetos matemáticos foram confeccionados com a caneta 3D durante a própria aplicação, na forma de um material tátil que possibilitou o manuseio logo após sua construção. Para uma pesquisa do tipo qualitativo e de natureza exploratória, foram desenvolvidas atividades que contemplam os conteúdos de segmento de reta, semirreta, retas, ângulos e plano cartesiano, voltadas ao ensino de alunos cegos. A experimentação e entrevista contaram com a participação de um aluno do ensino médio regular, que possui cegueira congênita, vendo apenas vultos e cores e que frequenta uma associação para Integração dos deficientes visuais catarinense. Após a compreensão do conceito de ângulo e sua medida com esquadro ou transferidor, foram trabalhados os conceitos de ângulos retos, agudos e obtusos e de medidas de ângulos, de forma a possibilitar a visibilidade do material utilizado. Com o apoio desses materiais como facilitadores, o aluno identificou os ângulos facilmente e demonstrou interesse e compreensão dos conteúdos, permitindo o acesso à invisibilidade do material.

No artigo "Parabológrafo: um artefato para desenhar parábolas" (AGUIAR; FIGUEIREDO; MATTOS, 2019) um grupo de pesquisadores de uma universidade catarinense apresentou uma proposta de construção de um "parabológrafo", usando recursos tecnológicos como uma impressora 3D e

uma seleção de *softwares* adequados à construção de modelos para sólidos geométricos e suas secções. Os *softwares*, citados no artigo, permitem gerar representações para várias das curvas que são encontradas no Ensino Médio, como a parábola, a elipse e a hipérbole, por meio de secções cônicas, que podemos considerar recursos virtuais. A construção do parabológrafo que resulta nessa combinação de recursos tecnológicos e *softwares* é uma das etapas de um projeto mais amplo de utilização desses recursos de tecnologia para o ensino. A construção, apresentada no artigo, baseia-se na definição da parábola como lugar geométrico, dados o foco e a reta diretriz dessa curva plana. Segundo os autores, é possível construir máquinas matemáticas com a impressora 3D e, em um segundo momento, pretende-se utilizar o artefato para o ensino de parábolas em sala de aula.

No relato de experiência intitulado "Aprendizagem cooperativa na aula de geometria: ladrilhamento" (FELÍCIO; MENEZES; TEODOSIO, 2019), professores de instituições cearenses detalham um trabalho sobre ensino de polígonos, realizado com uma turma de alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Trata-se de um assunto explicitamente mencionado na habilidade EM13MAT505[4] elencada na BNCC (2018). Orientados pelos pressupostos da Aprendizagem Cooperativa, a proposta de trabalho baseou-se na utilização de modelos para alguns polígonos regulares, confeccionados em material manipulável, que possibilitou a proposta e discussão de possibilidades de ladrilhamentos e suas relações com as medidas dos ângulos internos dos polígonos selecionados para compor a pavimentação, que podemos considerar como oportunidades para promover a visibilidade do recurso. Segundo os autores, buscou-se proporcionar um ambiente educacional mais participativo e interativo, no qual o estudante é protagonista do seu processo de aprendizagem. Esta estratégia possibilitou aos estudantes agir, interagir e experimentar, promovendo uma Aprendizagem Cooperativa em Geometria.

## Recursos didáticos identificados nos trabalhos apresentados no XIII ENEM relacionados ao ensino de Geometria Espacial

Dentre as quatro comunicações científicas apresentadas, duas estão relacionadas à utilização de materiais manipuláveis para a construção de modelos

[4] (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

de poliedros, uma delas, além da construção caleidoscópios na forma de prismas, explora brevemente alguns aspectos da reflexão em espelhos. Uma das oficinas trata de um dos problemas clássicos da antiguidade para discutir a trajetória desse problema, usando construções com régua e compasso e dobraduras. A quarta comunicação trata da exploração dos sólidos geométricos de revolução com o uso da impressora 3D.

A utilização de embalagens como um recurso manipulável para a exploração dos conceitos da Geometria Espacial aparece como recurso predominante em três dos relatos de experiências, além de outras duas alternativas utilizando materiais diversos e o GeoGebra. Um dos relatos de experiência trata de um processo investigativo a respeito das relações entre a área de superfície e o volume da embalagem e da barra de sabão, respectivamente. Os relatos têm como objetivo a exploração das propriedades dos sólidos construídos do ponto de vista métrico – áreas e volumes – ou de posição – paralelismo, perpendicularismo etc.

A comunicação científica, intitulada "O problema deliano: duas perspectivas geométricas" (GRACIOLLI; SHINTANI; SILVA, 2019), traz a discussão proposta por pesquisadores de uma universidade pública paulista, baseada no problema clássico da duplicação do cubo. Nessa proposta, fica subjacente como recurso didático a História da Geometria, ou seja, temos um exemplo de utilização de um recurso sociocultural, de acordo com Adler (2000). O objetivo dos autores é tratar da discussão da impossibilidade da resolução do problema por meio das construções com régua e compasso, acompanhando o processo clássico e, também, comparando com as possibilidades de discussão, como a utilização de dobraduras ("origamis") como recurso manipulável alternativo. O artigo traz os detalhamentos das relações entre os resultados matemáticos e as alternativas propiciadas por ambos os recursos. Ele detalha as relações da construção com régua e compasso e a álgebra e a chamada "geometria do origami". A proposta apresentada ainda não foi levada à sala de aula, mas enquanto proposta de atividade pode atender aos aspectos elencados na competência específica 3 da BNCC (2018)[5].

Dois professores de uma universidade pública do estado do Rio de Janeiro e uma professora do estado do Espírito Santo relatam, na comunicação científica "A geometria de forma lúdica: uma experiência com materiais manipulativos em

[5] Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

turma do ensino médio" (DESTEFANI; DESTEFANI; MARINHO, 2019), uma atividade investigativa realizada com a participação de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola capixaba. Segundo os autores, o objetivo era investigar se "a estratégia de ensino e aprendizagem adotada [(uso de materiais manipulativos]) proporcionou aos alunos o desenvolvimento conceitual matemático de forma mais dinâmica e contextualizada, estimulando o trabalho coletivo" (DESTEFANI; DESTEFANI; MARINHO, 2019, p.7 ). Objetos trazidos pelos estudantes, ou seja, os recursos provenientes do dia a dia, foram utilizados para uma discussão inicial sobre formas geométricas especiais; materiais como palitos de churrasco, palitos de dentes, canudinhos, fios de nylon, agulha e massinha de biscuit foram utilizados, na sequência, para a construção de esqueletos de poliedros, possibilitando a realização de discussões e atividades de familiarização e reconhecimento de sólidos geométricos. Essas atividades propiciaram a visibilidade dos recursos e a fixação das propriedades geométricas, contribuindo, segundo os autores, para a construção e a sistematização do conhecimento. O aspecto de ludicidade, mencionado no título do trabalho, é relacionado ao engajamento e à participação ativa dos participantes no desenvolvimento das atividades propostas.

O autor do trabalho "Caleidoscópio: um recurso didático manipulável para o ensino da matemática" (CAMPOS, 2019), mestrando em uma universidade estadual matogrossense, nos traz um relato de sua experiência docente na educação básica, apoiada na construção de caleidoscópios como recurso para discussão dos aspectos matemáticos envolvidos na construção e utilização desses objetos. O objetivo do trabalho é mostrar que o caleidoscópio pode ser utilizado como um recurso didático manipulável para o ensino da Geometria Euclidiana e para introduzir a Geometria Fractal. Nesse sentido trata, mais especialmente, das experiências dos estudantes na elaboração de material para uma feira de ciências, orientadas a partir de trabalhos realizados, em sua prática escolar, com grupos de estudantes do Ensino Médio. A construção e a manipulação dos caleidoscópios remetem à exploração das propriedades de um prisma, sua rigidez dependendo da escolha da base e as possibilidades de reflexão nas faces espelhadas. A visibilidade do material ocorre por conta da manipulação e discussão provocada pelo processo de construção dos prismas. As conclusões nos remetem à habilidade EM13MAT512[6]; o autor destaca a importância de o professor promover oportunidades de utilização de materiais manipuláveis e observa que esses

[6] (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

materiais podem possibilitar, ao ambiente de ensino, a liberdade de criação para os alunos, a investigação, a exploração de conteúdos e a construção de seus próprios conhecimentos.

Na comunicação científica "Sólidos de revolução: uma construção usando a impressão 3D" (BUTTENBENDER; FIGUEIREDO; MATTOS; SILVA, 2019), uma professora e três alunos de Licenciatura apresentam "o processo de criação de um material concreto estruturado, desde sua ideia inicial até sua confecção", elaborado com o auxílio da impressora 3D como recurso tecnológico auxiliar. Motivados por uma iniciativa de criação de embalagens, chegou-se à proposta de usar a tecnologia para o estudo de Geometria Espacial, e, em especial, trabalhar com a modelagem dos denominados "corpos redondos". O uso da impressão 3D possibilita e exploração de muitos modelos e uma investigação de alternativas enquanto ensaios. Inicialmente, foram esboçados modelos a partir das seções planas que, quando rotacionadas em torno de um eixo, dariam origem ao sólido, e também o sólido para que os alunos pudessem comparar e diferenciar esses elementos bidimensionais e tridimensionais. Detalham-se, no trabalho, possibilidades para o trabalho com o software Blender para a criação de objetos gerados pela rotação das secções planas. Dessa forma, pode-se enriquecer a experiência dos estudantes e produzir os objetos tridimensionais que possibilitem a manipulação. O material desenvolvido possibilitou a simulação da rotação de seções planas em torno de um eixo para gerar os objetos tridimensionais e compreender os sólidos resultantes. As atividades a serem desenvolvidas com o material produzido não são relatadas nesse trabalho.

O trabalho "O ensino de geometria espacial a partir de um projeto de pesquisa de iniciação científica júnior" (NEHRING; SOARES; SOUZA, 2019) traz as reflexões de pesquisadores de uma universidade privada gaúcha sobre as atividades de dois anos de pesquisa e ensino realizadas no âmbito do projeto de iniciação científica júnior "Descobrindo a Geometria nas Embalagens de Alimentos", com a participação de um aluno bolsista do Ensino Médio de uma escola pública. O projeto teve como objetivo principal buscar novas formas de apresentar conceitos de Geometria Espacial para os alunos do ensino médio, apresentando os conceitos de geometria usando como recursos objetos do cotidiano, especialmente, embalagens de alimentos, além de livros, provas do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio e o software de geometria dinâmica GeoGebra.

Buscou-se, com as atividades desenvolvidas, a construção/compreensão

dos conceitos de geometria espacial e sua aplicação no desenvolvimento de embalagens de alimentos e a verificação da contribuição do software GeoGebra para a compreensão dos conceitos de Geometria Plana e Espacial, abordados no ensino médio. Foram propostas tarefas em papel e lápis e no GeoGebra ao bolsista, que compreenderam a resolução de problemas e questões de geometria espacial, que levaram em conta escolhas de embalagens a partir de informações sobre possíveis modelos, materiais e custos. Os alunos do Ensino Médio da turma do aluno bolsista participaram, no laboratório da universidade, de 4 (quatro) intervenções nas quais foram utilizados os mesmos recursos empregados no trabalho com o bolsista, iniciadas por atividades introdutórias no GeoGebra, visando familiarizar os alunos com o software, e seguidas por atividades propostas com o uso das embalagens, semelhantes às propostas para o bolsista. O aluno bolsista foi o monitor durante as intervenções e os professores coordenadores do projeto foram os ministrantes. As atividades foram avaliadas oralmente pelos participantes, mas não há registro detalhes sobre a transparência, visibilidade ou invisibilidade na utilização dos recursos além da familiarização com o uso do Geogebra.

O relato de experiência intitulado "Experiência em geometria: observações e interpretações de uma atividade em sala de aula" (CUNHA; FERREIRA; GUIMARÃES; SENA, 2019), apresentado por um grupo de professores de uma instituição federal mineira, trata de uma atividade realizada em sala de aula com a participação de alunos do segundo ano do Ensino Médio, com o objetivo de partir do empírico - manipulável para se chegar à formação de conceitos. Foram utilizados como recursos manipuláveis objetos do cotidiano, mais especialmente, embalagens de diferentes formas e tamanhos foram distribuídas aos alunos participantes numa proposta de trabalho em grupo. As atividades, propostas na forma de roteiro, no formato de "perguntas", visaram uma introdução do estudo dos prismas e foram desenvolvidas sob a perspectiva da investigação e manuseio de unidades de medidas para compreensão da área e volume dos objetos. As discussões prévias e ao longo do desenvolvimento das atividades propiciaram a visibilidade do material utilizado. Os autores destacam a importância, para a execução completa da atividade, da interação entre os participantes ao trabalhar em grupo, promovendo a oportunidade de discutir e testar as melhores ações a serem tomadas para que o trabalho fosse concluído.

Uma proposta de sequência didática desenvolvida com a participação de estudantes do segundo ano do ensino médio de um colégio privado gaúcho,

tendo as embalagens como recurso manipulável, é apresentada no relato de experiência denominado "Sequência didática sobre geometria espacial no colégio marista medianeira". A sequência intitulada "Embalagens inteligentes" contém a proposta de criação de embalagens sustentáveis para produtos de limpeza de forma a economizar materiais para a sua construção e armazenar maior quantidade de produto. Questiona-se sobre os sólidos geométricos que podem ser utilizados para a criação da embalagem e sobre os argumentos que podem ser utilizados para verificar a relação custo-benefício da embalagem proposta. Os estudantes, num trabalho em grupo, deveriam construir embalagens e apresentar comparações entre volume e área de superfície dos objetos construídos. Segundo a autora, os estudantes mobilizaram os conhecimentos necessários para a realização da sequência e demostraram muita criatividade na elaboração de um vídeo propaganda, apresentando as vantagens de determinado produto para uma escolha de compra.

O trabalho "Construção dos sólidos platônicos com materiais alternativos" (FREITAS; MACEDO; SAMPAIO; SILVA, 2019), apresentado por professores ligados a instituições federais maranhenses, relata uma experiência didática, vivenciada durante o desenvolvimento do projeto de extensão "Bases Matemáticas – BaMat", como parte da contribuição do projeto para a aprendizagem de conceitos matemáticos, associados aos conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. As atividades propostas para a oficina, intitulada "Construção dos Sólidos Platônicos com Canudos", adotaram como recurso o uso de canudos como material para a construção de poliedros e foram orientadas por um roteiro que contemplou a história, os conceitos matemáticos e as definições e propriedades métricas relacionadas aos poliedros. Um roteiro didático foi preparado para auxiliar as construções, que favoreceram a visualização do recurso utilizado. Segundo os autores, as discussões propiciaram uma melhor compreensão dos conceitos e das habilidades de visualização dos objetos espaciais; os participantes relataram maiores dificuldades na construção do sólido Dodecaedro e destacaram a importância da teoria associada à prática no processo de construção do conhecimento matemático.

O relato de experiência "Explorando a geometria espacial com os materiais concretos reutilizáveis" (ANJOS; CAVALCANTI; RODRIGUES, 2019), apresentado por pesquisadores ligados a uma instituição federal pernambucana, trata de atividades desenvolvidas a partir da manipulação de materiais concretos, construídos com recicláveis. A proposta, desenvolvida no Laboratório de Ensino

de Matemática (LEM), consistiu na construção de estruturas de poliedros com bolas de isopor para os vértices e materiais alternativos para arestas. Além da montagem e do manuseio dos artefatos criados, foram registradas as descobertas matemáticas na instrumentação e organizada uma Exposição Matemática (ExpoMAT) para a divulgação dos resultados.

A atividade didática possibilitou a exploração das propriedades pertinentes aos moldes das estruturas do objeto matemático: tridimensionalidade, perpendicularismo, paralelismo, áreas e diagonais, ou seja, estão explicitadas as possibilidades de visualização dos recursos criados, via a discussão entre os elementos dos objetos criados e as propriedades matemáticas representadas. Com base nas experiências vivenciadas, os autores relatam que "o envolvimento discente proporcionou o reconhecimento satisfatório quanto à explicitação de relações e propriedades referentes aos conceitos matemáticos evidenciados durante experimentação de práticas exploratórias com sólidos geométricos reutilizáveis neste processo educativo" (ANJOS; CAVALCANTI; RODRIGUES, 2019, p.1) .

Objetos do cotidiano, como barras de sabão, são recursos utilizados no relato de experiência "Explorando conceitos e cálculos de área e volume na fabricação de sabão" (BRANDL; DEVIGLI, 2019), parte do projeto de ensino "A conexão entre a Química e a Matemática na fabricação de sabão", conduzido por professores de uma instituição federal catarinense. As atividades foram desenvolvidas por meio de uma oficina com uma classe do 3º ano do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio. A oficina promoveu a discussão sobre os formatos e as dimensões mais adequadas para embalar o sabão a ser produzido, de forma a manter o mesmo volume e utilizar o mínimo de material para a embalagem, tendo como objetivo explorar expressões algébricas e cálculos referentes à área e ao volume na projeção de embalagens para acondicionar o sabão produzido a partir do óleo de cozinha usado. Várias simulações deram suporte às discussões e, paralelamente, foram propostas questões referentes ao descarte e reaproveitamento de óleo de cozinha para a fabricação de sabão, como integração do projeto com a área de Química. A condução das atividades propostas nos aponta para parte da competência 5 – BNCC (2018)[7] e possibilita a visibilidade dos recursos utilizados.

[7] Competência 5 – BNCC (2018) - O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas.

Os recursos identificados nos trabalhos sobre tópicos de Geometria Espacial caracterizam-se, em sua maioria, como materiais manipuláveis, constituídos por objetos de uso cotidiano ou construídos a partir de materiais recicláveis, utilizados para o estudo de poliedros e exploração de suas propriedades geométricas ou métricas. Destaca-se pouca utilização de recursos computacionais nas propostas para o ensino de Geometria Espacial.

## Recursos didáticos identificados nos trabalhos apresentados no XIII ENEM relativos à Trigonometria

A comunicação científica, voltada para o ensino de Trigonometria, adotou uma proposta diferenciada, pois utilizou como recurso uma história em quadrinhos preparada pelos pesquisadores para, em paralelo com uma sequência didática, trazer elementos históricos e relacionados aos conceitos a serem desenvolvidos e ser um foco de atração para despertar o interesse e a curiosidade dos participantes. Com esse recurso com características socioculturais, os autores, pesquisadores de uma instituição federal pernambucana, estabeleceram como objetivo investigar a construção do conceito de razões trigonométricas por meio de uma intervenção com a participação de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública. A pesquisa foi orientada teoricamente pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS e as ferramentas teóricas sobre idoneidade didática subjacentes. Discorreu-se sobre a Idoneidade Cognitiva do processo de ensino e aprendizagem, vivenciado com o grupo. A sequência didática teve como foco as relações trigonométricas nos triângulos retângulos, a partir da semelhança de triângulos, permeando conceitos e aplicações. Os autores consideram que a idoneidade cognitiva, avaliada segundo os pressupostos da teoria do processo foi alta e que essa avaliação evidencia uma das muitas possibilidades do uso de HQ no ensino de matemática, particularmente das razões trigonométricas. Podemos considerar que, nessa pesquisa, a utilização do recurso passou pelas etapas que propiciaram transparência, visibilidade e invisibilidade em relação aos conhecimentos matemáticos mobilizados na pesquisa.

Os relatos de experiência tiveram como elementos comuns de conteúdo os conhecimentos sobre a trigonometria no triângulo retângulo e, exceto um deles, o trabalho orientado por uma sequência didática; dois dos relatos contemplaram o uso do GeoGebra e um deles o Cabri-Géomètre, ou seja,

softwares de geometria dinâmica associados. Como recurso adicional, um dos relatos utilizou um modelo em madeira de uma roda gigante que foi distribuído a cada um dos grupos participantes, como parte da proposta de esboço do gráfico (papel e lápis) de alturas associadas ao movimento de um ponto na roda. Em dois dos relatos, aparecem atividades destinadas à discussão da transição das razões para a trigonometria na circunferência.

No relato de experiência "O estudo da periodicidade de uma função trigonométrica a partir de um experimento envolvendo a roda gigante" (ALVES; RHEA; VERRENGIA, 2019), pesquisadores de uma universidade estadual paranaense descrevem um conjunto de atividades propostas a partir da exploração do movimento de um modelo de roda gigante em madeira como um recurso manipulável que foi distribuído aos grupos de alunos participantes. De posse dos modelos, os participantes foram questionados sobre as variações de altura de um ponto na roda em movimento e a periodicidade desse movimento. A partir das medições com auxílio de régua e barbante, passouse à exploração de representações gráficas desses dados em função da altura ou do comprimento percorrido ao longo da circunferência, propiciando a discussão da medida de ângulo em radianos. As atividades permitiram a visibilidade do recurso enquanto possibilitador da compreensão dos conceitos representados pelo modelo. Os autores destacam a importância da observação e manipulação e o incentivo à reflexão e ao desenvolvimento do pensamento matemático numa situação do cotidiano, promovidos pela utilização do recurso. Destacam, também, que a prática adotada promoveu uma interação rica e diferenciada no processo de ensino.

Pesquisadores de uma universidade federal paulista apresentaram, no relato de experiência "Seno e cosseno: a transição do triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico" (MELLO; SANTOS, 2019), uma sequência didática utilizada numa intervenção com a participação de alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Os autores explicitaram, como objetivo, introduzir as razões trigonométricas seno e cosseno e fazer a transição entre o estudo dessas razões no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. Os recursos na realização das atividades, referentes às construções geométricas, foram a régua e compasso e o software CabriGéomètre, este último introduzido por meio de atividades de familiarização.

O trabalho foi orientado pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), de forma a propiciar momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. As atividades basearamse no

trabalho realizado pelos participantes, individualmente ou em grupo, buscando provocar a mobilização de saberes antigos para a aquisição de novos. A sequência trata apenas da introdução ao ciclo trigonométrico e os autores sugerem o desenvolvimento de uma nova sequência didática para trabalhar as demais relações trigonométricas e avançar para o estudo das funções (MELLO; SANTOS, 2019). Destacam o recurso tecnológico utilizado, afirmando que a principal contribuição da pesquisa foi evidenciar a importância do professor e da escola utilizarem, cada vez mais, tecnologias em sala de aula, como o uso de softwares, que demonstrou ser um exercício prazeroso e interessante para os participantes.

O relato de experiência "Algumas reflexões sobre o uso do Geogebra no ensino das funções trigonométricas" (DULLIUS; NASCIMENTO, 2019) descreve uma intervenção proposta por pesquisadores de uma universidade privada gaúcha, realizada com a participação de estudantes do Ensino Médio de uma instituição federal cuiabana. O objetivo foi desenvolver, com o uso do software GeoGebra enquanto recurso tecnológico, uma proposta de ensino, norteada pela concepção de tornar significativa a aprendizagem das funções trigonométricas. O trabalho de familiarização com os recursos do software foi conduzido na fase inicial do desenvolvimento das atividades; seguiuse a introdução do círculo trigonométrico e da medida de ângulos em radianos. O uso do software também auxiliou na transição das razões para as funções trigonométricas e na compreensão da construção dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente a partir da sua lei de formação e na exploração das características de cada função. Os autores observam que, a partir de uma avaliação realizada com os estudantes, ficou clara a importância da utilização da geometria dinâmica como forma de compreensão dos conceitos e de relações geométricas e consideram que a experiência com as atividades evidencia as potencialidades apresentadas pelo software GeoGebra no ensino e na aprendizagem de trigonometria.

Recursos destinados ao estudo de Geometria de forma dinâmica, propiciados pelo software Geogebra, também foram utilizados no relato de experiência "O software geogebra como ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem da trigonometria" (DOMINGOS NETO, 2019), apresentado por um professor de uma instituição federal mineira. Com a atividade proposta, teve-se o objetivo de verificar as contribuições da utilização do software GeoGebra para o ensino e a aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, no trabalho com um grupo de estudantes do primeiro ano do ensino médio. Após uma avaliação inicial, de acordo com os conteúdos de matemática propostos pelo

Currículo Básico Comum (CBC) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - para o Ensino Fundamental e o primeiro ano do Ensino Médio, o trabalho com o software foi desenvolvido no laboratório, orientado por um tutorial proposto pelo professor. Foi realizada uma avaliação final, com uma questão em aberto para manifestação dos participantes. O autor destaca que o uso do software na resolução da atividade proporcionou uma aprendizagem significativa quanto à trigonometria de forma atraente e prazerosa, porque assim eles estariam fazendo matemática em tempo real, e tornou o processo mais dinâmico, interativo, participativo e construtivo.

Pesquisadores de instituições do Mato Grosso do Sul relatam, no trabalho "A validação de uma trajetória hipotética de aprendizagem de trigonometria por meio de oficina pedagógica" (FIGUEIREDO; MACHADO; PACHECO, 2019), como o uso de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA –, fundamentada em Simon, auxilia na aprendizagem. O trabalho foi desenvolvido na forma de oficina, contou com a participação de cinco estudantes do Ensino Médio, que desenvolveram, com o uso de recursos materiais e tecnológicos, uma pista em papel cartão, em forma de circuito, para o percurso de um robô, programado com dados oriundos do planejamento dessa pista. A THA foi detalhada por meio de uma sequência de atividades que envolveram os conceitos trigonométricos de forma lúdica e diferente de como é vista pelos alunos em sala de aula tradicionalmente. A atividade, segundo os autores, foi realizada com o intuito de instigar a curiosidade e o interesse para o aprendizado. Foram mobilizadas as ideias sobre a determinação de valores das razões trigonométricas, a tabela de ângulos fundamentais, de forma que os alunos pudessem fazer os cálculos das medidas dos lados e ângulos dos triângulos, necessárias para adequação do circuito aos possíveis deslocamentos do robô. Em geral, podemos afirmar que essa é uma proposta de trabalho que trata de habilidades mencionadas na BNCC como a EM13MAT308 . Segundo os autores, a proposta pretendeu, também, mostrar para o aluno que a Matemática pode ser divertida e de fácil entendimento e está relacionada ao seu cotidiano.

Observamos que predomina, nos relatos de experiência, a mobilização de recursos tecnológicos, associados a propostas de sequências didáticas. A transparência ou visibilidade do recurso utilizado é proporcionada pelo desenvolvimento das atividades; não temos informações suficientes para comentar sobre a evolução para a invisibilidade. A ludicidade é explicitamente mencionada apenas em um dos relatos.

## Recursos didáticos identificados em trabalhos que consideram outros aspectos do conteúdo

Nesse grupo de trabalhos, temos uma comunicação científica que relata uma pesquisa bibliográfica, com base nos livros didáticos aprovados no PNLD, que aborda questões relativas a tipos de raciocínio a serem mobilizados em provas e demonstrações apresentadas nos textos. Os relatos de experiência tratam de possibilidades de exploração de conceitos geométricos, propiciados pelo jogo UNO e um relato sobre dificuldades com o conceito de perpendicularismo do ponto de vista de Geometria Analítica.

Na comunicação científica "A Geometria nos livros didáticos: um olhar para os diferentes tipos de raciocínio" (AMARAL-SCHIO; MAZZI, 2019), pesquisadores de uma universidade estadual paulista nos trazem uma pesquisa documental, baseada nos capítulos de Geometria de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), edital de 2018. O objetivo é investigar a abordagem adotada para as questões relativas às provas ou demonstrações apresentadas nos textos, de acordo com os pressupostos teóricos adotados para considerar o uso de diferentes tipos de raciocínio, envolvidos no ensino de Matemática, como o dedutivo, abdutivo, indutivo e analógico. Foram analisadas sete coleções de livros didáticos e os respectivos Manuais do Professor, além do Guia de Livros elaborado pelo PNLD. O artigo apresenta comentários sobre exemplos dos tipos de raciocínio propostos nos textos. Segundo os autores, as análises indicaram que nem todos os livros apresentam todos os tipos de raciocínio, mas identifica-se cada um deles, mesmo que em coleções distintas.

O relato de experiência "Enunciado do conceito de retas perpendiculares em geometria analítica – dificuldades dos alunos do 3º ano do ensino médio" (BORGES, OLIVEIRA, 2019), apresentado por professores de instituições paulistas, traz uma proposta no contexto do ensino de Geometria Analítica para o ano final do Ensino Médio. O estudo adotou o esquadro feito de papel pardo como um recurso para a discussão da relação das declividades de duas retas perpendiculares no plano cartesiano. Foram levados em conta no relato os dados de uma sequência de cinco aulas sobre perpendicularidade de retas. Os autores discorrem sobre as dificuldades de entendimento dos conceitos pelos alunos, a relação dessas dificuldades com a não familiarização do aluno com os conhecimentos retrospectivos e apontam argumentos de teorias sobre

o pensamento e a linguagem, conforme Vigotski (2000), e sobre significado da palavra pelo seu modo de uso, segundo as regras dos jogos de linguagem de Wittgeinstein (1999). Os autores apontam, ainda, que essas dificuldades, embasadas nos teóricos, podem se aplicar a qualquer ambiente de ensino e aprendizagem e que outras dificuldades podem ocorrer por falta do incentivo à participação pelos meios socioculturais ou em razão da não compreensão da importância do aprendizado. Em relação aos conceitos explorados nas atividades, identificou-se que as dificuldades eram decorrentes da falta de conhecimento retrospectivo de representação algébrica, gráfica e de operações com números inteiros e racionais.

No relato de experiência "Utilização do jogo uno como método alternativo de ensino de geometria" (BARROS; MENDES; OLIVEIRA; PINTO, 2019), pesquisadores de uma universidade federal fluminense trazem um jogo, uma adaptação do jogo de cartas "UNO", realizada por eles, para o ensino de Geometria. As cartas do jogo denominado "UNOmetria" mantêm as cores das cartas do jogo original, e são acrescidas de figuras geométricas e sólidos (cartas com quadrados, cones, cubos, triângulo, cilindro etc.) ou das relações algébricas correspondentes à área ou ao volume das formas geométricas estudadas. O jogo mantém as regras do jogo original e é destinado a promover a construção e revisão de conceitos de geometria numa turma de terceiro ano do Ensino Médio. O relato traz a discussão sobre o uso de jogos, dentro da sala de aula de Matemática, como um recurso para o processo de ensino e aprendizagem de forma a proporcionar aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir com inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola. De acordo com os autores, foi perceptível, após a aplicação do "UNOmetria", que a utilização desse material possibilitou uma reflexão a respeito dos conteúdos geométricos, os quais os alunos sentem mais dificuldades de compreensão durante toda sua vida escolar.

Nos três últimos trabalhos apresentados, identificamos diferentes abordagens associadas a recursos distintos. O primeiro apoiase nos conteúdos dos livros didáticos relativos à Geometria, examinados com o objetivo de identificar aspectos formais do ensino dos conceitos fundamentais e suas interrelações. O segundo, com o auxílio de um esquadro construído em papel, explora os aspectos relacionados ao perpendicularismo de retas no plano do ponto de vista da Geometria Analítica. No terceiro, temos uma adaptação das cartas e regras de um jogo conhecido, para promover atividades de reconhecimento e identificação de relações métricas associadas aos elementos, áreas e volumes de figuras planas

ou espaciais. As considerações sobre os conceitos e demonstrações apresentados nos livros didáticos, a discussão sobre as relações algébricas relativas ao perpendicularismo no plano e as possibilidades de recuperação de conteúdos, propiciadas pelo jogo, ressaltam alguns aspectos a serem levados em conta sobre a utilização de recursos didáticos para o ensino de Geometria em sala de aula.

## Considerações finais

Desde a década de 1950, segundo Fiorentini (1995), diferentes tendências no ensino de matemática consideram, nos processos e métodos de ensino, a descoberta, o "aprender fazendo" e propostas de atividades que pressupõem a ação, a manipulação e a experimentação, o uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais. No XIII ENEM, os trabalhos apresentados no âmbito do Subeixo 4 - Recursos Didáticos para Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no Médio e no Superior nos trazem uma mostra representativa de propostas que desvelam as iniciativas de mobilização de recursos didáticos para o trabalho em sala de aula.

Buscamos destacar, neste capítulo, a diversidade de recursos mobilizados nas abordagens de conteúdos relativos à Geometria para o Ensino Médio, explicitada nesse conjunto de trabalhos apresentados no XIII ENEM. Organizamos os trabalhos selecionados em grupos que levam em conta os conteúdos previstos para o Ensino Médio, quais sejam, Geometria Plana e Espacial, Trigonometria e outros, e as considerações sobre as competências e habilidades referentes a esses conteúdos explicitadas na BNCC (BRASIL, 2018).

Apontamos algumas possibilidades de olhares teóricos que ressaltam alguns aspectos que consideramos importantes sobre a utilização de recursos didáticos. De acordo com a categorização apresentada por Adler (2000), observamos que os recursos, que encontramos nos trabalhos selecionados, podem ser considerados como materiais escolares específicos para o ensino de matemática ou como recursos de caráter social ou cultural, que vão além dos próprios objetos matemáticos, dos objetos do cotidiano utilizados para o ensino de matemática e dos recursos tecnológicos. Em relação à sua utilização, como manipuláveis, concretos ou virtuais, segundo Clements (1999) ou Moyer (2001), ressaltam-se: a importância de sua articulação com os conceitos e conteúdos matemáticos abordados, a recomendável atenção para esse aspecto e para o

possível comprometimento pela ênfase na ludicidade. A articulação, segundo Lave e Wenger (1991), combina características por eles denominadas visibilidade e invisibilidade, associadas à familiarização inicial com o recurso e à sua utilização em novas situações em que ele possa ser mobilizado.

Em todos os grupos de trabalhos selecionados, encontramos propostas que utilizam materiais concretos ou manipuláveis como recurso didático, recursos esses predominantes nos trabalhos que tratam da Geometria Espacial; por outro lado, os recursos de caráter computacional são frequentemente utilizados nos trabalhos que tratam da Geometria Plana ou da Trigonometria. Identificamos a História da Matemática como um recurso sociocultural, análises documentais com base nos livros didáticos e uma gama de atividades que podem orientar experiências e pesquisas sobre o trabalho em sala de aula, de forma a torná-lo mais rico, interessante e produtivo.

## Referências


AGUIAR, R.; FRIZZARINI, S. T.; SILVEIRA, C. Ensino de ângulos com a caneta 3D, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

AGUIAR, R.; FIGUEIREDO, E. B.; MATTOS, J. M. Parabológrafo: um artefato para desenhar parábolas, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

ALVES, J. S. B.; RHEA, V. C.; VERRENGIA, S. R. A. O estudo da periodicidade de função trigonométrica a partir de um experimento envolvendo a roda gigante. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

AMARAL-SCHIO, R. B.; MAZZI, L. C. A geometria nos livros didáticos: um olhar para os diferentes tipos de raciocínio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

ANJOS, T. V.; CAVALCANTI, L. B.; RODRIGUES, M. A. Explorando a geometria espacial com materiais concretos reutilizáveis. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

BARROS, E.; MENDES, G.; OLIVEIRA, R. L. L.; PINTO, G. M. F. Utilização do jogo uno como método alternativo de ensino de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

BERLANDA, J. C. Sequência didática sobre geometria espacial no colégio marista medianeira, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

BORGES, W. A.; OLIVEIRA, M. H. P. Enunciado do conceito de retas perpendiculares em geometria analítica – dificuldades dos alunos do 3º ano do ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

BRANDL. E.; DEVIGLI, G. Explorando conceitos e cálculos de área e volume na fabricação de sabão. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base**: Ensino Fundamental.. Brasília, DF. 2018.

BUTTENBENDER, L. F. A.; FIGUEIREDO, E. B.; MATTOS, J. P. M.; SILVA, M. M. Sólidos de revolução: uma construção usando a impressão 3D. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

CAMPOS, F. A. B. Caleidoscópio: um recurso didático manipulável para o ensino da matemática, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

CARVALHO, I. J. F.; VASCONCELOS, D. M. Idoneidade cognitiva de um processo de ensino e aprendizagem de razões trigonométricas por meio de HQ. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

CLEMENTS, D. H. "Concrete" Manipulatives, Concrete Ideas. **Contemporary Issues in Early Childhood,** [s. l.], v. 1, p. 46-60, 1999.

CUNHA, C. L.; FERREIRA, F. A.; GUIMARÃES, Y. P. B. Q.; SENA, C. O. R. Experiência em geometria: observações e interpretações de uma atividade em sala de aula In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

DESTEFANI, J. A.; DESTEFANI, W. C.; MARINHO, B. M. A geometria de forma lúdica: uma experiência com materiais manipulativos em turma do ensino médio, In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

DOMINGOS NETO, S. O software Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem da trigonometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

DULLIUS, M. M.; NASCIMENTO, C. C. P. Algumas reflexões sobre o uso do geogebra no ensino das funções trigonométricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

FELÍCIO, M. S. N. B.; MENEZES, D. B.; TEODOSIO, E. S. Aprendizagem cooperativa na aula de geometria: ladrilhamento. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

FERREIRA, J. C.; JULIO, R. S.. Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

FIGUEIREDO, S. A.; MACHADO, S. A.; PACHECO, T. A validação de uma trajetória hipotética de aprendizagem de trigonometria por meio de oficina pedagógica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, nov. 1995.

FREITAS, T. S.; MACEDO, M. J. H.; SAMPAIO, L. M. S.; SILVA, T. P. S. Construção dos sólidos platônicos com materiais alternativos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

GRACIOLLI, C. Y. L. F.; SHINTANI, R. M.; SILVA, R. S. R. Problema deliano: duas perspectivas geométricas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associado, 2006. p. 3-38.

MACEDO, K. S.; MORA, M.; REZENDE, V.; SEISCENTOS, R. L.C.; ZANATTA, L. F. A geometria dos fractais: uma revisão bibliográfica de publicações em anais de eventos da educação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

MEIRA, L. B. U. Mediation by tools in the mathematics classroom. In: **INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION.** 1995, Recife. Proceedings [...]. Recife: [s.n.]. 1995. p. 102-111.

MELLO, E. M.; SANTOS, A. A. Seno e cosseno: a transição do triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

MOYER, P. S. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 47, p. 175–197, 2001.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], p. 1-6, 2004-2005.

NEHRING, C. M.; SOARES, F.; SOUZA, H. M. O ensino de geometria espacial a partir de um projeto de pesquisa de iniciação científica júnior. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá – M T: SBEM, 2019.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 2, p. 65-74, 1996.

## Capítulo 6

# OS RECURSOS DIDÁTICOS NO TRABALHO DOCENTE DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

*Eduardo Mancera Martínez*

## Introdução

Quanto à forma de atuação dos professores, não há muitos estudos extensos que envolvam diversos países da América Latina e trabalhem com variáveis relevantes da região. No relatório de Burns e Luque (2014), apoiado pelo Banco Mundial, são revistas algumas variáveis que chamam a atenção para os elementos presentes no ensino na América Latina.

Sem considerar os resultados apresentados no referido relatório como finais ou necessariamente concordar com a metodologia que suporta os dados e conclusões, existe uma fonte de informação relevante para se ter uma aproximação em relação ao que se passa nos vários aspectos que compõem o trabalho docente em sala de aula. O relatório é extenso e não se pretende analisá-lo na íntegra, mas vale levar em consideração alguns resultados, considerados importantes.

Por exemplo, o gráfico da Figura 1 mostra diferenças entre as atividades desenvolvidas no ensino: aquelas de natureza acadêmica, gestão de sala de aula ou comportamentos típicos fora do desenvolvimento da aula.

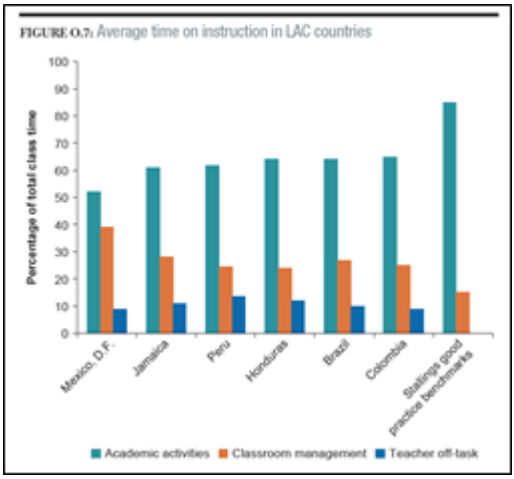



Figura 1 – Tempo médio de instrução nos países da América Latina
Fonte: Relatório de Burns e Luque (2014).

Há uma forte tendência para atividades relacionadas à gestão de conteúdos disciplinares, menos atividades relacionadas à gestão de aulas e parte do tempo que os alunos passam conversando, respondendo mensagens de celular e outras distrações.

É algo que não deveria nos surpreender. Independentemente de onde venha o estudo, ele parece confirmar o sentimento que os professores têm sobre o que acontece no ensino. Isso leva a questionar sobre o envolvimento do aluno na aula, ou seja, por quanto tempo os alunos parecem estar engajados ou interessados no que é desenvolvido em sala de aula, em comparação com o tempo de ensino. O gráfico da Figura 2 fornece informações a esse respeito.

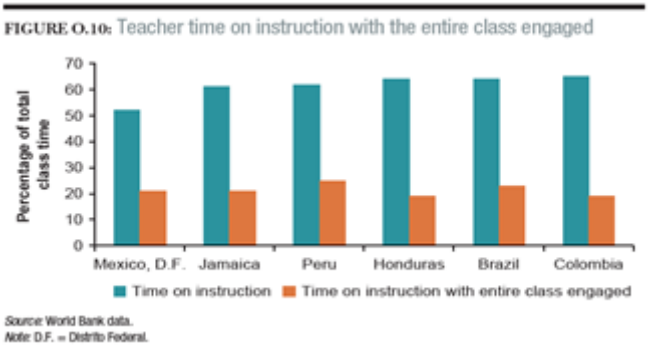



Figura 2 - Tempo do professor na instrução com toda a classe envolvida
Fonte: Relatório de Burns e Luque (2014).

Como pode ser observado, há pouco impacto do trabalho da classe sobre os alunos, poucos ficam interessados nos assuntos e atividades que estão sendo desenvolvidos em sala de aula. Isso suscita várias discussões, pois pode ser a causa do tempo que o professor gasta interagindo com os alunos. Na Figura 3, observa-se que o professor interage pouco com os alunos.

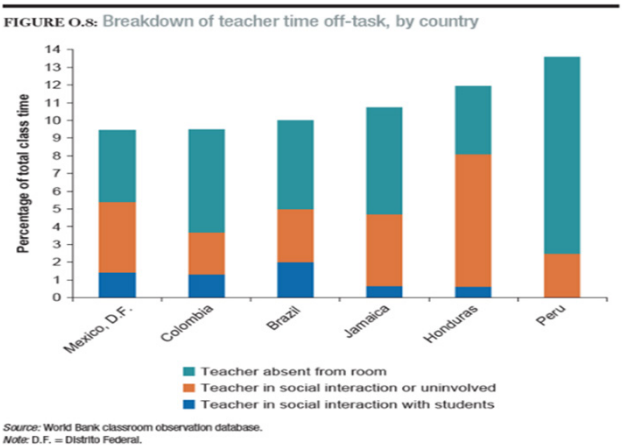



Figura 3 – Distribuição do tempo que o professor dedica fora das tarefas por país
Fonte: Relatório de Burns e Luque (2014).

Existem variáveis que tornam esse tempo de interação mais longo, como o tempo de permanência na escola, a proximidade das escolas com a casa dos alunos, entre outros fatores que não são estudados. Por outro lado, infere-se que o envolvimento dos alunos, em sala de aula, pode estar relacionado ao tipo de práticas que são favorecidas nesse ambiente, conforme se observa na Figura 4.

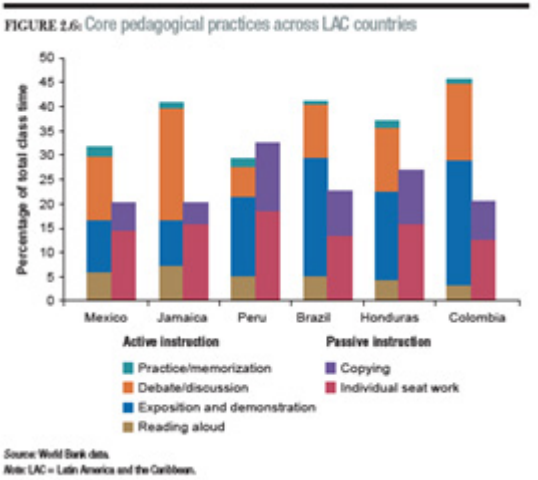



Figura 4 - Principais práticas pedagógicas nos países da América Latina
Fonte: Relatório de Burns e Luque (2014).

Chama a atenção o tipo de práticas que, isoladamente, podem parecer diferentes, mas, se incluirmos algumas barras, haverá menos práticas relacionadas à discussão, aspecto que predomina nas tendências educacionais atuais. Cumulativamente, predominam as práticas referentes a um ensino tradicional, como o exercício e a memorização, bem como a exposição e demonstração ou cópia de um livro ou utilização do quadro-negro (quadro de giz). Se combinarmos os itens da Figura 5 com os recursos usados pelos professores, temos uma melhor perspectiva do problema.

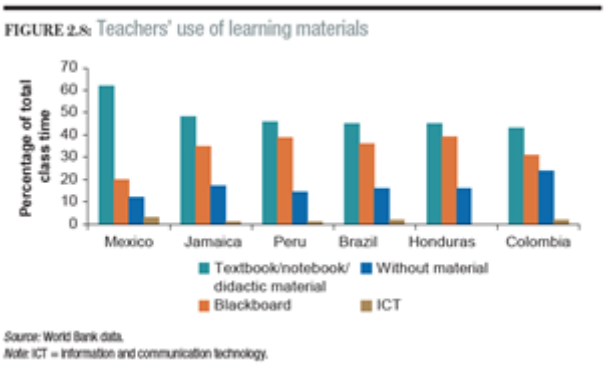



Figura 5 - O uso de materiais de aprendizagem pelos professores
Fonte: Relatório de Burns e Luque (2014).

Predominam o livro didático ou as anotações dos alunos em seus cadernos, junto com o trabalho na lousa (quadro de giz), pouco uso de materiais didáticos e muito menos de recursos tecnológicos. O recurso para o ensino da Matemática é o giz e o quadro-negro (quadro de giz), além do papel e do lápis do aluno. Às vezes, há um livro didático e, em outras situações, alguns materiais ou recursos que vêm de avanços tecnológicos.

Há uma tendência importante de lidar com o simbólico sem levar em conta que o símbolo é apenas uma representação do conceito, das ideias importantes. Por outro lado, um símbolo ou representação pode ser associado a vários conceitos (sinonímia) e, dado um conceito, pode ser representado por diferentes símbolos (homonímia).

O símbolo e o manuseio simbólico não devem ser o ponto central no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, o papel fundamental da escrita (no caderno ou no quadro de giz) costuma ser uma forma preferida de trabalho docente, principalmente nas aulas de Matemática, o que é contrário a todos os slogans e princípios dos grandes educadores e das Teorias de Aprendizagem, consideradas significativas para a aprendizagem dos estudantes. É importante salientar que é preciso aumentar a compreensão, mas isso não se consegue com a gestão simbólica.

O manuseio de símbolos está mais próximo de uma habilidade, pois tem a ver com a coordenação motora para reproduzir as grafias corretas e amarrá-

las sob certas orientações e procedimentos, mas deve-se levar em conta que símbolos ou representações escritos podem ser reproduzidos sem fazer sentido para quem os escreve, ou seja, sem a compreensão dos conceitos que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Historicamente, o símbolo é a parte culminante de um processo de construção de significados, de dar sentido às várias formas de expressão, não é o início, caso contrário não haveria diferentes expressões simbólicas de números e outros objetos matemáticos. Primeiro, se faz necessário dar sentido às ideias matemáticas, depois é nomeado e representado de diversas maneiras, mas como isso pode ser feito? Isso é precisamente o tema principal deste artigo.

## De onde vem as ideias?

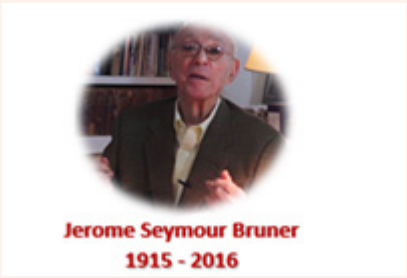
Existem duas perspectivas teóricas principais que compartilham explicações sobre a origem das ideias ou noções matemáticas. Uma, muito próxima das reflexões de Platão, que remete ao fato de que as ideias matemáticas aí estão, de forma estável e pura, longe da vida cotidiana, e só se relacionam com a razão, basta reconhecê-las e tê-las para si, possuí-las ou pegá-las. Isso corresponde à tradição de "aprender", de "apreender", de tomar para si algo que é duradouro e não muda. Outra perspectiva refere-se a um processo de sucessivas aproximações de ideias, em trajetórias não necessariamente lineares ou sem retrocessos ou mudanças de direção, mas apenas de abordagem, de uma compreensão gradual dos elementos que intervêm e como se relacionam, é a tendência da construção do pensamento a partir das próprias experiências.

Aqui devemos tomar partido e será argumentado que as ideias fazem parte de um processo gradual de construção e estão em constante mudança, o que depende da forma como as abordamos, ou seja, noções e procedimentos são construídos, não são aprendidos. No processo de construção, são importantes modelos, dramatizações, assumindo elementos importantes e nos manipulando para conhecer os efeitos de cada possibilidade, que podemos chamar de ações.

É assim que as ideias matemáticas são necessariamente obtidas, observando, relacionando eventos e conjeturando o que deveria acontecer, até evidenciar a mesma coisa muitas vezes e chegar à convicção de que, cada vez que algo é feito, as consequências serão as mesmas ou muito semelhantes, ocorrendo as generalizações.

Entre as correntes que fortaleceram e elevaram construtos nesse sentido, estão, principalmente, as obras de Jerome Seymour Bruner (1915 - 2016), com o aprendizado por descoberta, e Zoltán Pál Dienes (1916 - 2014), com suas ideias sobre o uso de recursos manipuláveis que representam as estruturas matemáticas em estudo. Ambos propuseram inverter a forma de ensino, colocando a simbolização ou os algoritmos, não no início, mas como parte final do processo de construção.

Assim, as etapas propostas por Bruner (1966) representam uma jornada de trabalho com objetos que termina no simbólico e não que inicia com o simbólico (Figura 6).




Evitar o ensino que somente informa como se fazem os procedimentos e nomeia conceitos e procedimentos.
Deixar de lado a exercitação indiscriminada com repetições que não conduzem à compreensão e formação de habilidades
Regressar ao ensino que vai do simples ao complexo, do particular ao geral.
Permitir que os alunos descubram relações e a forma que as coisas funcionam.

**ATIVA**
O conhecimento ocorre através da ação. Aprende-se fazendo coisas, manipulando objetos (situações)

**ICÔNICA**
Um objeto pode representar-se por um ícone, grafia, diagrama, etc. A partir destas representações se podem estabelecer semelhanças. Usar diversas representações permite utilizar a imaginação para estabelecer relações entre os objetivos

**SIMBÓLICA**
Podem ser combinadas representações não óbvias dos objetos com símbolos convencionais. Utilizam-se representações convencionais, sejam palavras, grafias diversas ou diagramas.

Figura 6 – Ensino e Aprendizagem segundo os princípios de Bruner
Fonte: Autores.

Por sua vez, Dienes (1977) propõe uma série de etapas para desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Figura 7).

Zoltán Pál Dienes
1916 - 2014

"Quem esteja familiarizado com uma estrutura matemática, pode desenhar um jogo (atividade), cujas regras seguem as regras da estrutura"

**Adaptação**

Atividade livre, sem restrições nem regras nem objetivo específico, serve para familiarizar-se com os materiais ou uma situação.

**Estruturação**

Atividade com certa estrutura, quer dizer, restrições, regras, estabelecendo alguma meta.

**Abstração**

Buscar aspectos comuns nas atividades, regularidades, padrões para reconhecer a estrutura inerente

Representação livre

Uso de gráficos, diagramas, esquemas, grafias particulares para mostrar elementos presentes na atividade e suas relações

**Representação simbólica**

Introduzem-se denominações e simbologia própria das matemáticas

**Formalização**

Utiliza-se a simbologia formal para expressar relações entre elementos importantes.

Figura 7 – Etapas do ensino e aprendizagem segundo Dienes
Fonte: Autores.

Algumas coincidências deste tipo de perspectivas sobre o ensino da Matemática, que se espalharam na segunda metade do século passado, podem ser encontradas em desenvolvimento, atualmente, e são identificadas como práticas de sucesso, embora curiosamente seu início também tenha se dado nas últimas quatro décadas do século XX. Podemos citar, como exemplo, o Método de Cingapura (Figura 8).

Quadro 1 – Compartativo entre Bruner, Dienes e o Método de Cingapura

| Bruner | Dienes | Método Singapura |
|---|---|---|
| Ativa | Adaptação e Estruturação | Etapa concreta |
| Icónica | Abstração e Representação livre | Etapa Visual |
| Simbólica | Representação simbólica e Formalismo | Etapa Abstracta |

Fonte: Os autores.

Ainda neste contexto do século anterior, difundiram-se as ideias de George Polya (1887 - 1985), que não só abordavam aspectos da resolução de problemas, mas também recomendações implícitas aos professores (POLYA, 1962) que hoje são ainda consideradas fundamentais:

1. Mostra interesse pelo assunto. Se o professor ficar entediado, toda a classe ficará entediada.

2. Domine o assunto. Se um tópico não lhe interessa pessoalmente, não ensine, porque você não será capaz de ensiná-lo adequadamente. Os juros são uma condição necessária, mas não suficiente. Quaisquer que sejam os métodos pedagógicos usados, não é possível explicar algo claramente aos alunos se não tiver sido totalmente compreendido primeiro. O interesse vem primeiro, porque com algum conhecimento aliado à falta de interesse, alguém pode se tornar um professor excepcionalmente ruim.

3. Conheça os caminhos do conhecimento: a melhor maneira de aprender algo é descobrindo por si mesmo. Há um grande benefício em ler um bom livro ou ouvir uma boa palestra sobre a Psicologia da Aprendizagem. Mas, ler e ouvir não são absolutamente necessários e em todo o caso não bastam: é preciso conhecer os caminhos do conhecimento, estar familiarizado com o processo que leva da experiência ao conhecimento, graças à experiência obtida nos estudos e na observação dos estudantes.

4. Procure ler os rostos dos alunos, tente adivinhar suas esperanças e dificuldades; coloque-se no lugar deles. Mesmo que você tenha interesse no assunto, que você o conheça bem assunto, que você entenda os processos de aquisição de conhecimento, você pode ser um péssimo professor. É raro, mas muitos de nós conhecemos professores que, sendo perfeitamente competentes, não conseguiram estabelecer contato com sua turma. Como o ensino do professor deve ser acompanhado pela aprendizagem do aluno, deve haver um contato, uma sinergia entre ambos. A reação do aluno ao ensino depende do passado (do que o aluno conhece), das perspectivas e dos interesses. Portanto, leve em consideração o que é conhecido e o que não é conhecido; o que eles gostariam de saber e com o que não se importam; o que devem saber e o que não importa que não saibam.

5. Não se limite a lhes dar informações, mas *know-how*, atitudes intelectuais, o hábito do trabalho metódico. O conhecimento consiste em parte em "informação" e em parte em "saber fazer". *Know-how* é talento, é a capacidade de fazer uso da informação para um fim específico; pode ser descrito como um

conjunto de atitudes intelectuais; é a capacidade de trabalhar metodicamente. Em Matemática, *know-how* se traduz em aptidão para resolver problemas, construir provas, examinar criticamente soluções e provas. É por isso que, em Matemática, o modo como é ensinado é tão importante quanto o que é ensinado.

6. Ensina adivinhação. Imagine primeiro, depois teste. É assim que a descoberta procede, na maioria dos casos. O professor de Matemática tem excelentes ocasiões para mostrar o papel da conjectura no campo da descoberta e fazer com que os alunos adquiram uma atitude intelectual fundamental. A conjectura razoável deve ser fundada no uso acertado de evidência indutiva e analogia, e contém todo o conhecimento plausível que pode intervir no método científico.

7. Ensine a demonstrar. "A Matemática é uma boa escola para o raciocínio demonstrativo". Na verdade, a verdade vai mais longe: a matemática pode ser estendida ao raciocínio demonstrativo, que se infiltra em todas as ciências a partir do momento em que atingem um nível matemático e lógico suficientemente abstrato e definido.

8. No problema com o qual você está lidando, distinga o que pode servir, mais tarde, para resolver outros problemas, tente revelar o padrão geral que está por trás do pano de fundo da situação específica que está sendo tratada. Ao apresentar uma solução para um problema, sublinhe suas características instrutivas. A particularidade de um problema é instrutiva se merece ser imitada. Um aspecto bem apontado, em um problema, e sua solução podem ser transformados em um modelo de resolução, em um esquema tal que, ao imitá-lo, o aluno poderá resolver outros problemas.

9. Não revele repentinamente toda a solução; deixe os alunos fazerem suposições, deixe-os descobrir por si mesmos, sempre que possível. Aqui está um pequeno truque fácil de aprender: quando você começar a discutir a solução de um problema, deixe os alunos adivinharem a solução. Quem tem uma ideia ou a formulou, assumiu um compromisso: deve seguir o desenvolvimento da solução para ver se o que conjecturou é correto ou não, para não ser enganado. Voltaire costumava dizer: "O segredo de ser chato é dizer tudo".

10. Não inculque pela força, ele sugere. Trata-se de deixar aos alunos o máximo de liberdade e iniciativa possível.

Além disso, Polya considerou as liberdades fundamentais no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem:

• **A liberdade de cometer erros** - Ajude os alunos a abordar a aquisição de conhecimento com confiança. Todos nós aprendemos com nossos erros. Ouça e observe os alunos e incentive-os a explicar ou demonstrar o que fazem. Apoie-os quando eles realmente participarem do processo de aprendizagem. Se eles tiverem medo de cometer erros, eles nunca atingirão seu potencial.

• **A liberdade de fazer perguntas** - Lembre-se de que as perguntas dos alunos ajudam não apenas a determinar onde eles estão, mas também a avaliar nossa própria capacidade de promover o aprendizado. O aluno, tendo feito um esforço honesto, deve ser incentivado a buscar ajuda. A estratégia que adotarmos deve depender do aluno e de sua pergunta, nunca fazendo com que ele sinta que não deveria ter perguntado.

• **A liberdade de pensar por si mesmo** - Incentive os alunos a encontrarem suas próprias soluções. Não forneça algoritmos concluídos antes de permitir que cada aluno tenha a oportunidade de experimentar a satisfação de encontrar sua própria solução, sem ajuda. Uma vez que sabemos que podemos fazer isso, também podemos avaliar como outras pessoas alcançaram o mesmo objetivo. Dê às crianças liberdade para pensar.

• **A liberdade de eleger seu próprio método de resolução** - Permita que cada aluno escolha seu próprio caminho e ajude-os a compreender a importância de pensar em vez de lembrar.

Infelizmente, apesar de essas abordagens possuírem grande consenso, elas não se cristalizaram nas práticas de ensino e não foram valorizadas de forma ampla e convincente, embora existam vários autores que aderem a essas ideias, para não falar de seus iniciadores. As possíveis causas para que essas perspectivas não tenham sido consolidadas são:

• Implica que os professores devem abandonar as práticas tradicionais com as quais foram formados, nas quais a memória e a repetição desempenham um papel fundamental.

• Aqueles que os promovem apresentam apenas o que seus criadores fizeram ou geram experiências limitadas que minimizam suas possibilidades.

• Exigir criatividade para desenvolver materiais e guias de aula para facilitar o ensaio e teste de materiais "manipulativos".

## A Educação em tempos de distanciamento social e aulas *online*

É difícil garantir conclusivamente que qualquer procedimento irá melhorar as práticas, que irá enriquecer a formação inicial de professores ou a formação contínua de professores, mas o que sabemos, com certeza, com evidências coletadas ao longo de várias décadas (mais de 7 décadas), é que a tradicional prática (notas de lousa ou textos com procedimentos estereotipados e muitos exercícios) não tem sido a favor da Educação Matemática.

Os problemas que a recente pandemia gerou têm apresentado a possibilidade de uma análise sobre as formas de ensino em que os alunos podem se interessar e se envolver, seja com recursos web ou *software* livre, de forma a simplificar processos e obter melhores resultados. Entre os recursos digitais que vêm sendo utilizados, principalmente com alunos da educação básica, estão os chamados "manipuladores virtuais". Materiais que podem ser manipulados, tocados, transformados, movidos, virados, etc. Ou seja, materiais com os quais várias ações podem ser realizadas para pesquisar regularidades e verificar várias propriedades de entidades matemáticas.

Mas eles foram vistos como inovação, embora pudessem ser feitos diretamente em sala de aula. Na verdade, as mesmas atividades digitais podem ser realizadas com objetos na sala de aula. No entanto, em ambientes digitais, você não precisa fabricar, comprar ou processar sua compra para a escola perante as autoridades administrativas.

Em outras palavras, parece haver uma convicção de usar "manipuladores no ensino", mas eles não têm sido usados de forma consistente por falta de recursos ou habilidades para projetá-los e desenvolvê-los e, assim, eles apresentam características físicas por vezes preocupantes, como o peso e as dimensões, bem como as cores e sem "arestas" que cortam ou partem com facilidade.

Isso também implica reverter a forma de abordagem do conhecimento. O professor deve mudar a perspectiva que tem da disciplina e da construção de conceitos e procedimentos. Em vez de ditá-los e impô-los, eles devem ser alcançados de forma gradual e quase autônoma.

## Matemática sem fórmulas

Durante algumas décadas, inspirado em Bruner e Dienes, iniciou-se uma tentativa de concretização de propostas de ensino em que as fórmulas ou procedimentos estereotipados não fossem protagonistas, mas sim consequências de um processo de construção do conhecimento, tal projeto é denominado "Matemática sem fórmulas".

Um produto desse tipo de intenção foi integrado a uma publicação (MANCERA, 1998) posteriormente modificada (MANCERA; BASURTO, 2016), na qual diversos conteúdos são tratados com a utilização de blocos algébricos de Dienes modificados (Figura 8).

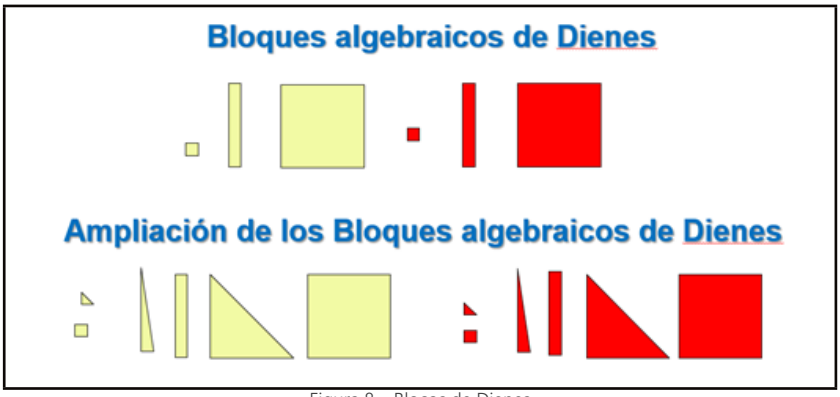



Figura 8 – Blocos de Dienes
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

A ideia era ter materiais que atendessem a todos os anos do Ensino Fundamental e pudessem ser usados de forma consistente e contínua. Por exemplo, temas como estratégias de contagem podem ser trabalhados com cartões coloridos, aspecto importante nos primeiros anos de escola.

Isso é feito comparando coleções de peças de uma cor com as de outra para estabelecer se elas têm a mesma quantidade. Eles também podem ser usados para contar para cima e para baixo, para cobrir um número de peças com a mão e rastrear aquelas que estão sem cobertura, ou colocar algumas peças para cobrir qualquer parte do jogo e fazer suposições sobre quantas foram cobertas, também, que contam como uma única coleção física de cores ou tamanhos

diferentes, etc...

Por exemplo, contando um a um e em uma determinada sequência, ou seja, sempre começa de um lado e na mesma ordem (Figura 9).

Figura 9 – Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Mas é possível contar primeiro em uma direção e depois em outra direção (Figura 10).

Figura 10 - Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

É possível, também, contar em qualquer ordem (Figura 11).

Figura 11 - Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Contar por blocos (Figura 12).

Figura 12 - Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Contar a partir de um número (Figura 13).

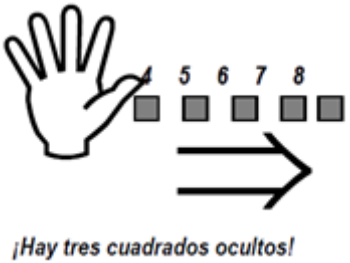



Figura 13 – Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

De un número dado para tras (Figura 14).

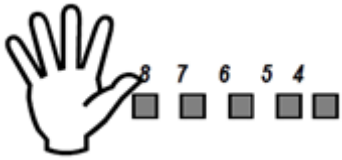



Figura 14 – Coleção de peças
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Também, se pode usar como blocos multibase para introduzir e generalizar as sucessões numéricas (Figura 15).

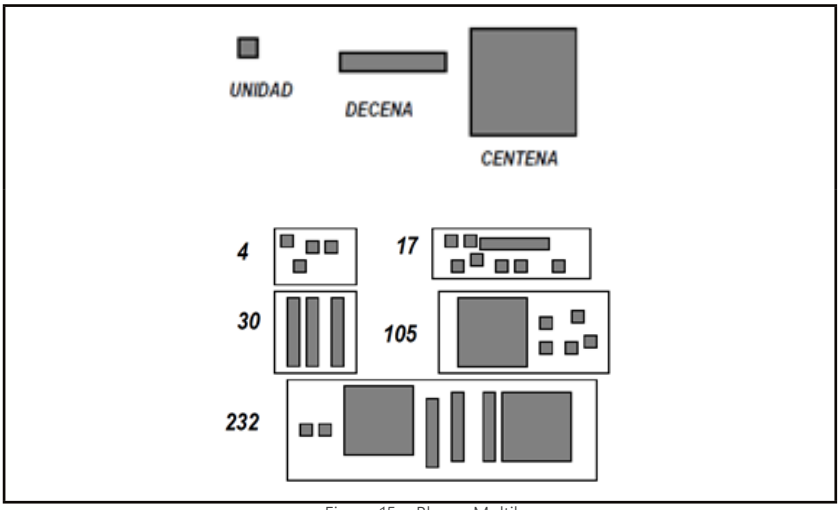



Figura 15 – Blocos Multibase
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Inclusive em sistemas de numeração de bases não decimais, como o binário ou em outras bases. Na Figura 16, apresentamos o sistema binário

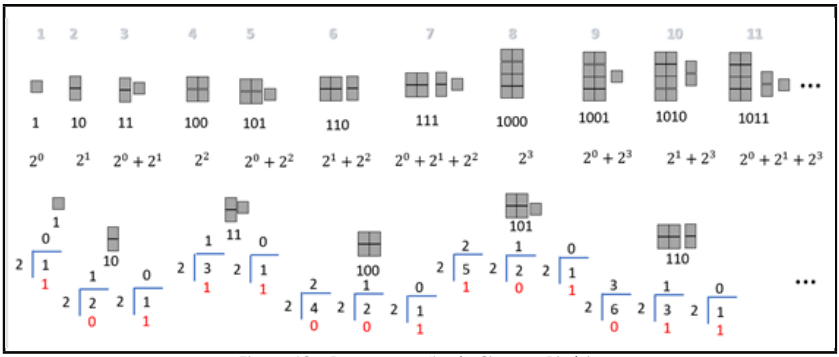



Figura 16 – Representação do Sistema Binário
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Servem para o desenvolvimento de adição e subtração (Figura 17).

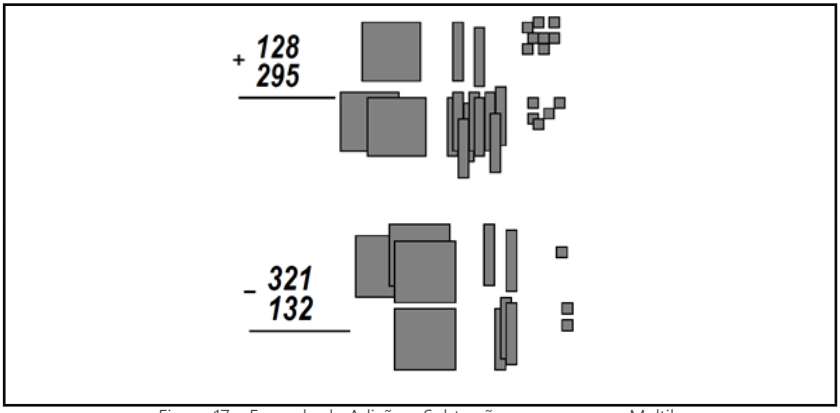



Figura 17 – Exemplo de Adição e Subtração com o recurso Multibase
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Da mesma forma, os algoritmos de multiplicação e divisão podem ser abordados, relacionando o processo com áreas de retângulos (Figura 18).

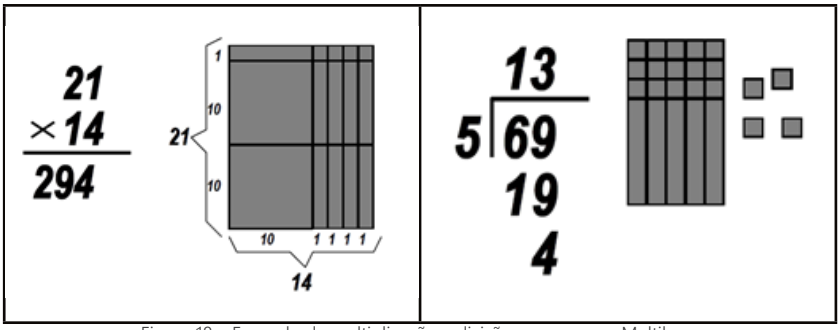



Figura 18 – Exemplo de multiplicação e divisão com recurso Multibase
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

O algoritmo para obter a raiz quadrada de um número pode ser mostrado com Geometria (Figura 19).

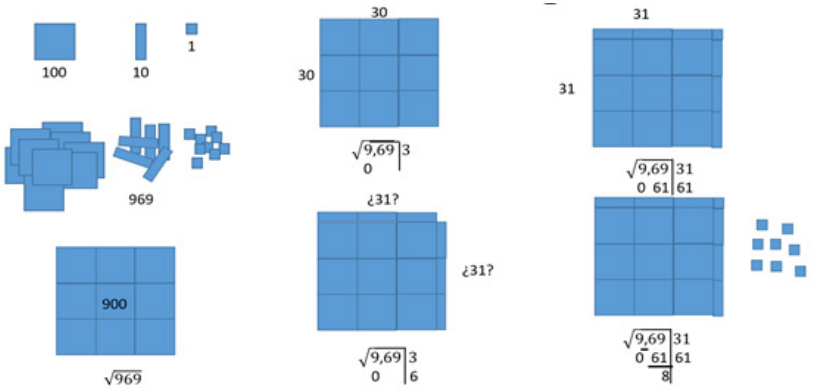



Figura 19 – Exemplo da raiz quadrada com o recurso Multibase
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Encontrar relações entre alguns números poligonais, com fichas quadradas ou redondas (Figura 20).

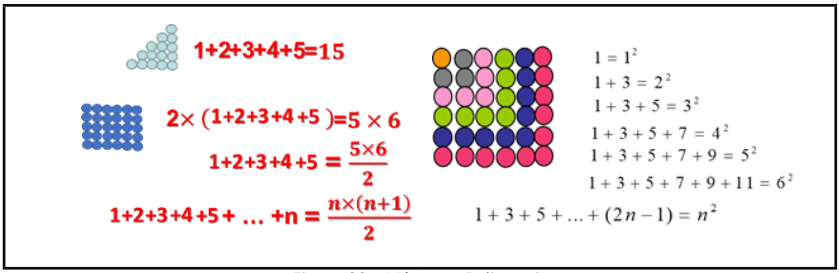



Figura 20 – Números Poligonais
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

E de encontrar adições de séries finitas de Números Naturais (Figura 21).

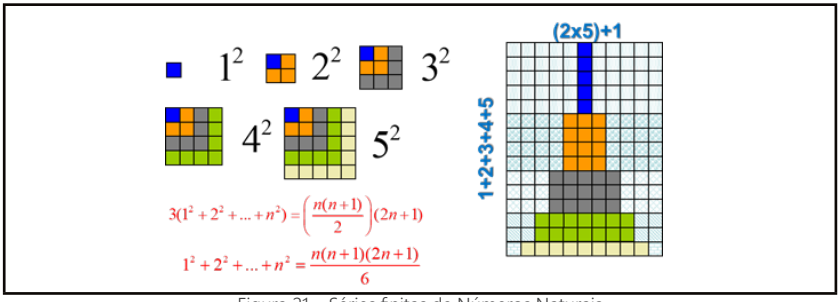



Figura 21 – Séries finitas de Números Naturais
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Na introdução de outros objetos matemáticos que são incorporados à matemática para resolver problemas que os requerem, como frações (Figura 22).

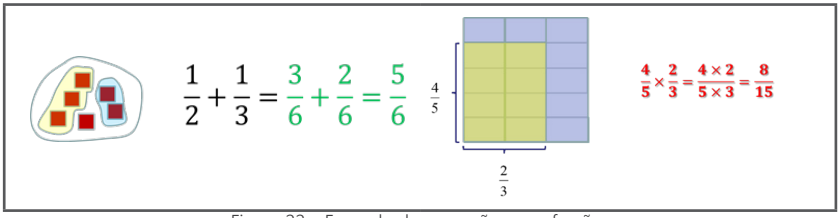



Figura 22 – Exemplo de operações com frações
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Também o caso dos Números Negativos (nem tudo provém de problemas "práticos", novos objetos são incorporados, mas devem respeitar as regras das entidades anteriores) o que implica a incorporação de novos significados, como o zero, que em números naturais é "ausência de quantidade" e nos inteiros é "equilíbrio" (Figura 23).

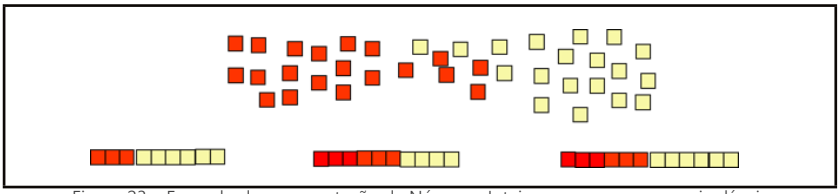


Figura 23 – Exemplo de representação de Números Inteiros com recursos manipuláveis
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Assim, as operações com Números Inteiros podem ser explicadas a partir de elementos que os alunos podem manejar, já que na teoria isso pode ser feito seguindo uma série de convenções (Figura 24).

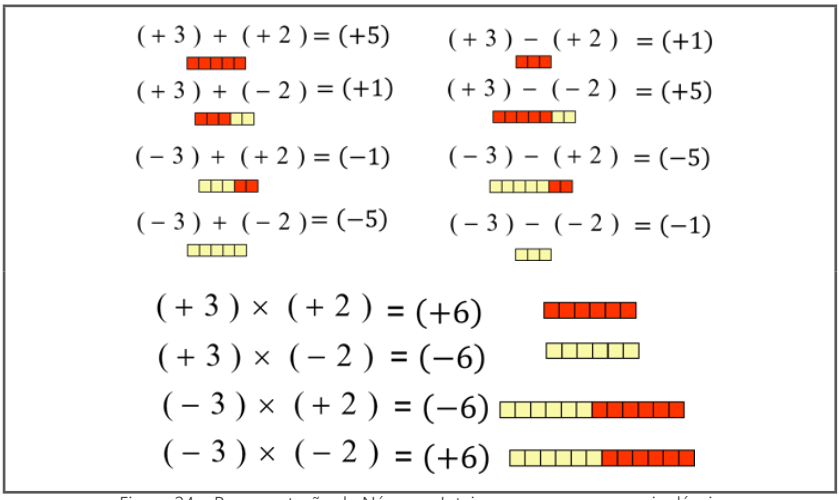



Figura 24 – Representação de Números Inteiros com recursos manipuláveis
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Com esses materiais, eles podem se referir às regras de operação das expressões algébricas (Figura 25).

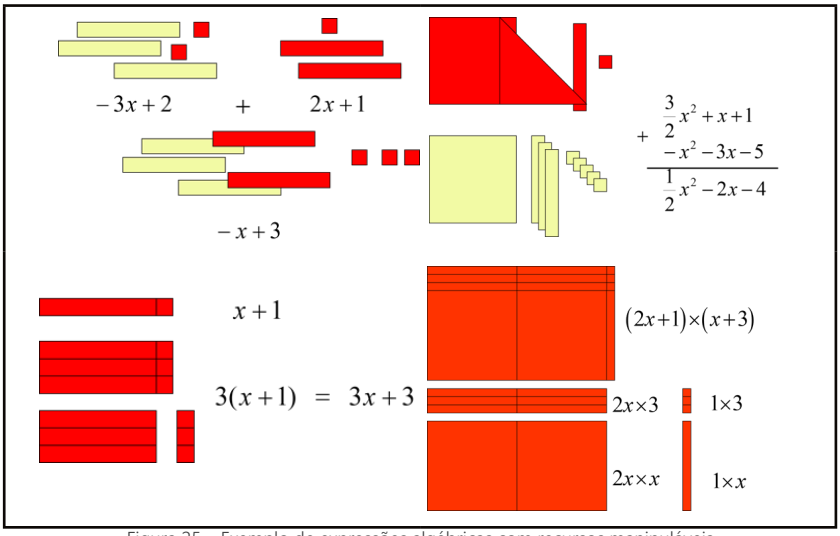



Figura 25 – Exemplo de expressões algébricas com recursos manipuláveis
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Também, podem ser utilizados os blocos de Dienes para resolver equações (Figura 26).

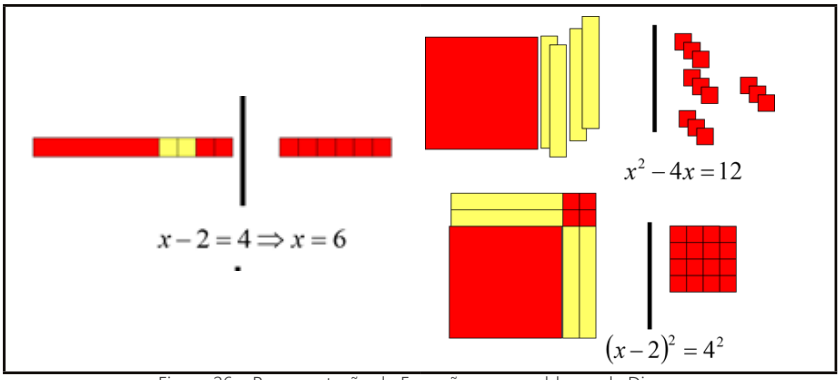



Figura 26 – Representação de Equações com os blocos de Dienes
Fonte: Adaptado de Mancera e Basurto (2016).

Para ampliar a compreensão do uso dos materiais apresentados neste artigo podem ser visualizados os vídeos: https://youtu.be/S_ItI-H0kJY; https://youtu.be/O-GvaGpILQU.

O espaço para fornecer instruções e discutir o básico impede o tratamento desses tópicos neste documento. Também em Mancera (2016) você pode encontrar os elementos necessários para aprofundamento.

## Conclusões

A necessidade de trabalhar com materiais manipulativos com os alunos é muito importante de se atender, partindo de regras e aprender a usá-las não possibilitou resolver problemas de desempenho escolar ou contra o desinteresse dos alunos. Uma investigação mais cuidadosa é necessária sobre o uso de recursos manipuláveis no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo necessário fazer comparações depois de um tempo e entrevistar alunos e suas evocações para realizar os procedimentos matemáticos e se chegar às generalizações necessárias com a mediação do professor.

Os resultados não são imediatos, pois se observa que, após um tempo, os resultados educacionais, quando o professor utiliza materiais manipulativos no planejamento didático, são observáveis, pois isso depende de processos internos que não são totalmente conhecidos.

O currículo atual deve ser desobstruído para que seja possível utilizar os recursos manipuláveis adequadamente ao longo do ano letivo e aproveitá-los suficientemente, de maneira que os estudantes vão ampliando sua compreensão, devendo ser abordados e integrados a outros conteúdos e para outras séries ou níveis de ensino. O Método de Cingapura tem essas duas condições básicas, trabalhando com materiais manipuláveis, geralmente, dentro da estrutura de um currículo com menos conteúdo.

## Referências

BRUNER, J. **Toward a Theory of Instruction**. Belknap Press. Cambridge, 1996.

BURNS, B.; LUQUE, J. Great Teachers. **How to rise and the Caribbean**. World Bank Group. USA, 2014.

DIENES, Z. P. **Las seis etapas del aprendizaje de la matemática**. Teide. Barcelona, 1977.

MANCERA, E. **Matebloquemática**. La forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos. GEI. México, 1998.

MANCERA, E.; BASURTO, E. **Matebloquemática**. La forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos. **Colección Formación de Docentes de Matemáticas**. Sirve. México, 2016.

POLYA, G. Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. John Wiley & Sons. USA, 1962.

# SOBRE OS ORGANIZADORES E AUTORES

## ANA PAULA BARBOSA DE LIMA

É formada em Licenciatura em Matemática pela Autarquia de Ensino Superior de Arcoverde (2010) com especialização em Programação de Ensino em Matemática pela Universidade de Pernambuco (2011), Mestrado (2015) e Doutorado (2019) em Educação Matemática e Tecnológica pela UFPE (2015). Professora de Matemática e de Raciocínio Lógico em turmas de 4º e 5º ano. É integrante do GERAÇÃO - Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico e do Grupo de Trabalho Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (GT2) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Pesquisa na área de Educação Matemática sobre formação de professores de Matemática com foco em ensino de Combinatória, nos eixos sobre Comunidades de Prática, ações colaborativas, conhecimentos docentes, uso de softwares para o ensino de Combinatória e análise de livros didáticos. E-mail: lima.apb@gmail.com

## CARMEN TERESA KAIBER

Possui graduação em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Especialização em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), doutorado em Ciências da Educação pela Universidade Pontifícia de Salamanca, Espanha, título reconhecido pela Universidade Federal de Pernambuco. Atualmente é professora titular da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA e atua no Curso de Matemática Licenciatura e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Tem experiência em ensino e pesquisa na área de Educação Matemática atuando, principalmente, com os seguintes temas Ensino e Aprendizagem em Matemática, Tecnologias Digitais em Educação Matemática e Formação de Professores. E-mail: kaiber@ulbra.br ou carmen_kaiber@hotmail.com.

## CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

Possui graduação em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Especialização em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), doutorado em Ciências da Educação pela Universidade Pontifícia de Salamanca, Espanha, título reconhecido pela Universidade de São Paulo (USP). Pós-doutorado pela Universidade de La Laguna na Espanha. Atualmente é professora titular da Universidade Luterana do Brasil. Atua no curso de Matemática Licenciatura e como coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase na formação de professores, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Currículo de Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Ensino e Aprendizagem, Formação de professores de Matemática. E-mail: claudiag@ulbra.br ou claudiag1959@gmail.com.

## EDUARDO MANCERA MARTINEZ

Graduado em Física e em Matemática pela Escola Superior de Física e Matemática do Instituto Politécnico Nacional, México. Mestre e Doutor em Ciências pelo Centro de Pesquisa e Estudos Avançados do Instituto Politécnico Nacional, México. Orientador, professor e pesquisador em instituições vinculadas ao setor de educação, em diferentes modalidades. Consultor de empresas e de instâncias governamentais relacionadas ao treinamento de professores em serviço com programas presenciais ou online. Colaborou como membro do Comitê Editorial de revistas especializadas em educação, faz parte do grupo fundador da Revista Matemática Educação, Membro do Conselho Mexicano de Pesquisa Educacional, participou da Sociedade Mexicana de Matemática, foi presidente da Associação Nacional de Professores de Matemática. É autor de inúmeros artigos, livros e livros didáticos. Foi Pesquisador Visitante em diversas instituições, atualmente desenvolvendo projetos de formação de professores, é membro e Gerente Internacional da Associação Mexicana de Matemática Educacional (AMME) e Vice-Presidente do Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM), e do Grupo da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI). E-mail: mancera.eduardo@gmail.com

## FELIPE DE ALMEIDA COSTA

Possui licenciatura em Física pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (2008) e mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2017). Atualmente é diretor de escola no Governo do Estado de São Paulo (SEDUC-SP) e professor de Matemática pelo Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza (ETEC). Atua como tesoureiro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo (SBEM-SP) e é Doutorando do programa de pós-graduação de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul. E-mail: felipeacosta@prof.educacao.sp.gov.br

## GABRIELA DOS SANTOS BARBOSA

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre, Doutora e Pós-doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica - PUC-SP. Professora associada da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), atuando como professora permanente da licenciatura em Matemática, do Profmat e do Programa de Pós-graduação em Educação, Comunicação e Cultura. E-mail: gabrielasb80@hotmail.com

## LAURO CHAGAS E SÁ

Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes (2014), Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Ifes (2016) e Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (2021). É professor efetivo do Ifes, campus Vila Velha, onde leciona em cursos técnicos integrados ao Ensino Médio e em cursos de graduação e de pós-graduação. Lidera o EMEP - Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Educação Profissional. Também participa do Grupo de Trabalho 2 da SBEM - Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Ensino Médio, Educação Profissional e Tecnológica, Formação de Trabalhadores e Feiras de Matemática. E-mail: lauro.sa@ifes.edu.br.

## MARIA ELISA ESTEVES LOPES GALVÃO

Bacharel (1971), Mestre (1974) e Doutora (1984) em Matemática formada pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Atualmente é professora colaboradora aposentada junto ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – USP. Na área de Matemática, atuou como pesquisadora na área de Geometria, com ênfase em Geometria Diferencial, atuando principalmente nos seguintes temas: geometria, superfícies mínimas, curvatura média constante em espaços euclidianos e hiperbólicos e na área de ensino, na docência e coordenação em cursos de Licenciatura em Matemática. Na área de Educação Matemática, atuou no programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN e dedica-se ao estudo e pesquisa de aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem em Geometria, adotando como ponto de partida tópicos elementares dos conteúdos geométricos que possam, ao longo do desenvolvimento de atividades, serem aprofundados e relacionados com as outras áreas do conhecimento matemático, ou seja, possam ser associados a conteúdos da álgebra ou do estudo de funções na educação básica. E-mail: elisa.gal.meg@gmail.com

## MARIA LUCIA PANOSSIAN

Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP); Licenciada em Pedagogia pela Universidade de São Paulo (USP). Mestre e Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo. Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR- Curitiba), atuando no curso de Licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Formação Científica Educacional e Tecnológica (PPGFCET). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade Pedagógica (GEPAPe) e vice-líder do Grupo de Estudos sobre Formação de Professores (GeForProf). Coordenadora do Grupo de Trabalho de Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (GT02) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), no período 2018-2021. E-mail: mlpanossian@utfpr.edu.br

Este Livro foi composto com a família tipográfica Segoe UI.

Sociedade Brasileira de
Educação Matemática