# USO DE MATERIAIS CONCRETOS PARA O ENSINO DE POTENCIAÇÃO

*Carlos Adriano da Costa Gomes*
*Instituto Federal do Piauí – Campus Corrente*
*carlos.gomes@ifpi.edu.br*

*Flávio de Ligório Silva*
*Instituto Federal do Piauí- Campus Corrente*
*flavio.ligorio@ifpi.edu.br*

*Marcelo Simplício de Lyra*
*Instituto Federal de São Paulo – Campus Capivari*
*marcelo.lyra@ifsp.edu.br*

**Resumo:**
Neste trabalho, serão apresentadas duas formas concretas para o ensino de potenciação com bases e expoentes naturais, conteúdo de matemática cujo estudo é iniciado, geralmente, no sexto ano do ensino fundamental. Procura-se inicialmente fazer com os que alunos entendam o significado de "quadrado" e "cubo", quando os expoentes são dois e três, respectivamente. Não obstante, deseja-se ainda que os estudantes consigam obter uma representação concreta para potências com outros expoentes naturais maiores que três, apreendendo o conceito como uma multiplicação de fatores repetidos, e também lhes oferecendo oportunidade diferenciada de aprenderem de correlacionarem algumas propriedades da potenciação.
**Palavras-chave:** Ensino; Potenciação; Material Concreto.

## 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar o relato de uma experiência de ensino-aprendizagem de potenciação por meio de materiais concretos. Mesmo em se considerando a existência de variados obstáculos didáticos e epistemológicos (PAIS, 2001) de aprendizagem do conteúdo de potenciação, como se verá mais adiante, não temos a pretensão de apresentar um estudo crítico que faça uma descrição completa de todas as dificuldades de compreensão do conteúdo em uma amostra particular de alunos. Antes, porém, temos o desejo de apresentar nossas impressões, de natureza subjetiva, a respeito dessa situação didática (PAIS, *op. cit.*) e a forma como nossa criatividade possibilitou enfrentar a questão junto aos alunos. Neste sentido, parafraseando Bondia (2002), nossa intenção é exibir notas a respeito de nossa experiência de ensino e o saber de natureza qualitativa e subjetiva, ou ainda, nossas impressões geradas por essa experiência.

O conceito de potenciação é datado do século V a.C. devido ao matemático Hipócrates de Chios. Hipócrates estudava problemas clássicos de Geometria, dentre os quais podemos destacar a quadratura do círculo (PITOMBEIRA, 2012). A potenciação surgiu da necessidade de escrever grandes números, os quais são obtidos por produtos de fatores iguais. De acordo com Van de Walle (2009, p. 527) ”A notação exponencial é um caminho poderoso para expressar produtos repetidos do mesmo número. Especificamente, potências de 10 expressam números muito grandes e muito pequenos de uma maneira muito econômica”.

Apesar da antiguidade do surgimento da potenciação, a complexidade do tema em questão é discutida até hoje. Nosso primeiro contato com a matemática é por meio do processo de contagem, o qual possui duas etapas distintas:

> Na primeira etapa aprendemos a enunciar uma sequência de palavras (um, dois, três...), sem atribuir significado a elas.
> Na segunda etapa, aprendemos a usar esta sequência para contar os elementos de um conjunto, ou seja, estabelecer uma correspondência entre os elementos do conjunto e estas palavras que chamamos de números. Algo notável, que não costumamos a observar, é que, não importa como façamos a correspondência, o número final é sempre o mesmo – a ele, denominamos o número de elementos do conjunto (MORGADO, 2013, p. 2).

Observa-se que a maior dificuldade de assimilação encontrada pelos alunos é na segunda etapa, uma vez que exige um grau elevado de abstração. Isto se deve ao fato de que a potenciação é uma forma sintética de representação de multiplicações repetidas. Além disso, a diversidade de casos (expoente pertencente a diferentes conjuntos numéricos, bases negativas, propriedades dos números reais etc.), como se verá logo abaixo, traz dificuldades de contextualização e transposição didática ao professor, no sentido que Pais (2001) atribui a esses termos. De fato, nossa experiência em sala de aula nos permite muitas vezes observar que os alunos, ao invés de efetuarem produtos, multiplicam a base pelo expoente, não compreendendo em sua plenitude o sentido e o significado de cada um dos termos da operação. Esta abstração é comprovada nos livros didáticos, nos quais, a potenciação e suas propriedades são definidas como sendo:

A. Potência de expoente natural

Seja $a$ um número real e $x$ um número natural. Definimos a potência de $a$ de expoente natural $x$ como sendo o número:

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{x\text{ fatores}} \tag{1}$$

B. Potência de expoente inteiro

Seja $a$ um número real, $a \neq 0$, e $x$ um número inteiro. Se $x > 0$, definimos a potência de $a$ com expoente inteiro $x$ como no item anterior. Se $x < 0$, faça $x = -n$, onde $n$ é um número natural, assim definimos:

$$a^x = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{a}}_{n\text{ fatores}} \tag{2}$$

C. Potência de expoente racional

Seja $a$ um número real positivo, $x$ e $n$ números inteiros, $n \neq 0$, definimos:

$$a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}\,, \text{se } \frac{x}{n} > 0 \tag{3}$$

ou

$$a^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^x}}\,, \text{se } \frac{x}{n} < 0 \tag{4}$$

D. Potência de expoente irracional

Seja $a$ um número real positivo e $\mu$ um número irracional. Considere os conjuntos: $X_1 = \{r \in \mathbb{Q}; r < \mu\}$ e $X_2 = \{s \in \mathbb{Q}; s > \mu\}$, veja que $r < s$ para todo $r \in X_1$ e para todo $s \in X_2$ e $r < \mu < s$. Logo, se $a > 1$, temos que $a^r < a^s$, assim definimos aproximações por falta, $a^r$, e por excesso, $a^s$, da potência $a^\mu$. Se $0 < a < 1$ é análogo. Para se demonstrar a existência de um único $\mu$ entre $r$ e $s$, a qual garante a existência da potência $a^\mu$, faz-se uso de uma matemática refinada que pode ser encontrada em LIMA (2011, p. 54). Por esse motivo, a maioria dos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio faz apenas uma pequena referência à potência de expoente irracional.

E. Propriedades da Potenciação

As propriedades abaixo relacionadas são válidas para todos os casos de potenciação citados anteriormente. Considerando-se bases e expoentes reais e as condições de existência da operação, estas propriedades afirmam que:

a) $0^a = 0, se\ a \neq 0;$

b) $x^0 = 1, se\ x \neq 0;$

c) $x^{a+b} = x^a . x^b;$

d) $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

e) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, se $x \neq 0$;

f) $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$, se $x > 0$.

Com o grau de complexidade que tais definições e propriedades apresentam, percebemos que muitos de nossos alunos não conseguem apreender o caráter multiplicativo da operação de potenciação – o sentido de que a base deve ser multiplicada por si mesma tantas vezes quanto for o expoente, para a potenciação de expoente inteiro, substituindo esta noção por outra – a de que a base deve ser multiplicada pelo expoente. Quantos de nós professores de matemática já não nos deparamos com resposta do tipo $2^5 = 10$, em vez da resposta correta $2^5 = 32$? Percebem-se ainda obstáculos de natureza epistemológica (PAIS, 2001) na transição das potências de expoente natural para expoentes negativos, fracionários e irracionais. Ora, se a base deve ser multiplicada por ela mesma tantas vezes quanto o expoente natural ordenar, "que sentido há em um expoente negativo ou ainda um número 'quebrado' para o expoente?" – perguntam-se os nossos os alunos. Pode-se multiplicar um número pelo outro "menos duas vezes" ou "um terço de vez" por exemplo? Considerando-se, pois, tais dificuldades, isso faz com que pensássemos alternativas diferenciadas para o ensino de potenciação, de forma que os alunos pudessem estabelecer a correspondência adequada entre o conceito e sua significação em termos práticos de cálculo aritmético.

A apreensão plena do significado introdutório de potenciação é competência fundamental para que os alunos consigam avançar em seus estudos matemáticos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, de forma que possam compreender suas propriedades operatórias, estendendo o conceito para bases e expoentes, inicialmente, inteiros negativos e posteriormente, racionais e reais, com as condições de existência adequadas. Sem uma base inicial sólida, nenhum destes estudos pode ser feito nos anos escolares posteriores, comprometendo além do exposto acima a apreensão de conceitos como raiz quadrada e raízes em geral, notação científica, função exponencial, função logarítmica e progressões geométricas, dentre outros.

## 2. MÉTODOS

Para este estudo, realizamos uma revisão de literatura a respeito do ensino de potenciação, de modo a subsidiar a construção de uma sequência didática de quatro aulas com um grupo de seis alunos do sexto ano de uma escola pública.

Nosso objetivo geral foi oferecer aos educandos novas ferramentas para o ensino de potenciação. Esperava-se que eles conseguissem, ao final da atividade, participar de atividades integradoras diferenciadas para alcançarem mais amplamente o processo de ensino e aprendizagem da aritmética da potenciação. Dentre os objetivos específicos, destacaram-se:

- O significado do termo "quadrado" quando o expoente é dois;
- O significado do termo "cubo" quando o expoente é três;
- Formas concretas de representação de potenciações cujos expoentes são números naturais maiores que um;
- Relação entre a área de um quadrado e seu lado, aproximando do conceito de raiz quadrada;
- Relação entre o volume de um cubo e sua aresta, aproximando do conceito de raiz cúbica.

Propusemo-nos a desenvolver atividades em que os alunos pudessem utilizar materiais concretos e manipulativos para compreender a noção de potenciação, bem como aliar os conteúdos matemáticos à arte. A realização da sequência didática foi registrada por meio de fotografias, as quais ilustram as atividades desenvolvidas.

Relatamos a experiência e nossas *impressões* sobre o trabalho pedagógico desenvolvido nas seções que seguem. Há de se deixar claro que realizamos, portanto, a exposição de uma narrativa (GARNICA, 2003) que empreendemos quando da realização de nossas atividades docentes na perspectiva do professor pesquisador. Esta narrativa é resultado de um processo de reflexão e abstração sobre nossa própria docente realizada nas seguintes etapas: 1) percepção de uma dificuldade de ensino, 2) discussão dessa dificuldade com os pares, 3) montagem de uma sequência didática ou plano de aula, 4) aplicação do plano em uma aula ou sequência de aulas com os alunos, 5) discussão da experiência, 6) registro escrito da experiência com observações e impressões. Tais registros formam um *corpus* de conhecimentos práticos a respeito da prática docente que pode subsidiar futuros trabalhos da equipe, bem como servir de base para a formação inicial e continuada de outros professores.

Consideramos, portanto, importantes, os registros dos saberes (TARDIF, 2014; MOREIRA, DAVID, 2010) e das experiências (DUBET, 1994) dos professores (TARDIF, LESSARD, 2014). Tais saberes, mais do que apenas aprendidos e construídos na própria e solitária prática docente da sala de aula deveriam ser compartilhados solidariamente e constituir um corpo de conhecimento empírico sobre os modos pelos quais se pode empreender o processo de ensino da matemática escolar.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Utilizamos como material necessário para desenvolvimento das atividades folhas de papel ofício para o registro de tabelas, papel crepom de cores variadas, cola, lápis e borracha para escrita, e material dourado em quantidade necessária para os participantes.

*1ª Atividade: O significado de Quadrado*

Exploramos o conceito de quadrado de um número natural através da colagem de bolinhas de papel crepom em folhas de papel.

A aula aconteceu com os alunos organizados em grupos, de forma a estimular a cooperação solidária em um trabalho desenvolvido coletivamente. Os alunos montaram diversas potências, como $2^2$, $3^2$, $4^2$ etc.

Nós professores ainda os estimulamos a construírem tais representações de forma artística, variando cores e texturas, conforme se observa nas imagens abaixo, pertencentes ao


ISSN 2178-034X

nosso acervo pessoal de registro do trabalho pedagógico desenvolvido em uma turma do sexto ano de uma escola pública (FIGURA 1).

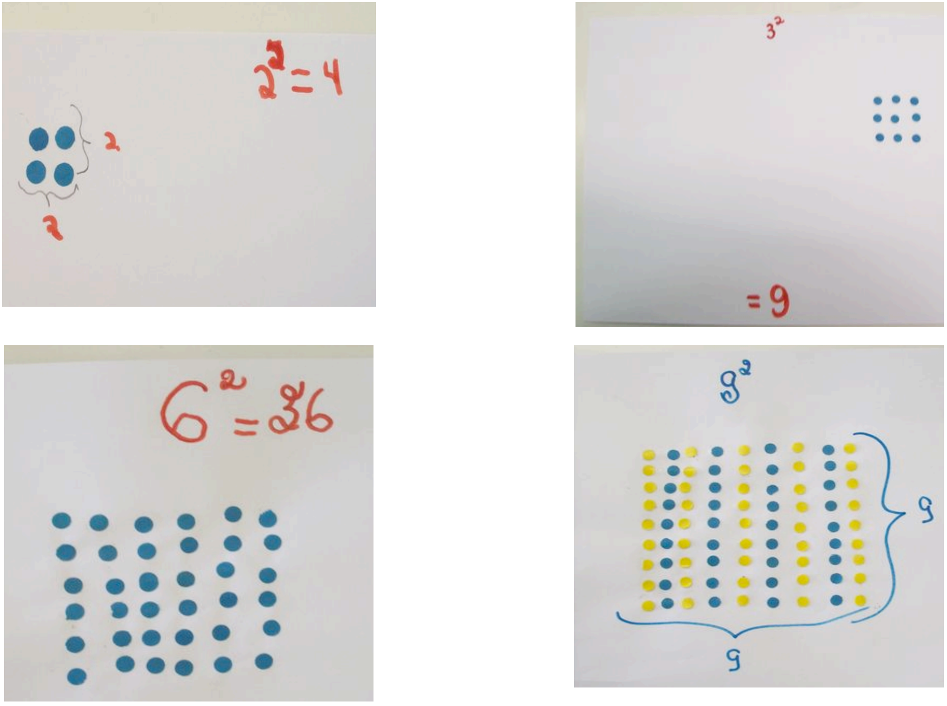


**Figura 1 - Representações de números quadrados construídas pelos alunos**

Nós ainda pedimos para os alunos tentarem organizar um quadrado com um número qualquer de bolinhas (por exemplo: tentem fazer um quadrado com 30 bolinhas!), de forma que eles percebam que nem todos os números naturais formam quadrados perfeitos. Para os números que eles conseguirem formar um quadrado perfeito, pedimos para que eles comparassem a quantidade de bolinhas na lateral da figura com a quantidade total de bolinhas utilizadas para construir o quadrado.

Em seguida, pedimos que os educandos organizassem os resultados em tabelas (TABELA 1). As tabelas têm importância fundamental na sistematização do conhecimento adquirido pelos alunos. É através delas, e principalmente da última, que os alunos podem escrever formalmente a potenciação de expoente dois, dando os resultados corretos. A atividade mostrou aos alunos o motivo de chamarem de quadrado potências cujo expoente é dois.

**Tabela 1 - Dados a serem organizados pelos alunos**

| Lado do quadrado | Quantidade de bolinhas |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

| Quantidade de bolinhas | Lado do quadrado |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

| Potenciação | Resultado |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |

*2ª Atividade: O material dourado e os outros expoentes.*

Desenvolvido pela médica italiana Maria Montessori (1870-1952), tal material serve para o estudo inicial das operações aritméticas para crianças a partir de 4 anos de idade[1]. Tal material, que tradicionalmente é útil para o estudo da adição e subtração mostrou-se bastante eficaz no ensino de potenciação.

Inicialmente, a título de exploração do material, pedimos que os alunos realizassem representações de quadrados como na atividade anterior, utilizando as peças do material dourado. Posteriormente, pedimos que eles explorassem a construção de cubos de diversos números naturais, como se segue nas imagens pertencentes ao nosso acervo pessoal de registro de situações pedagógicas desenvolvidas (FIGURA 2).

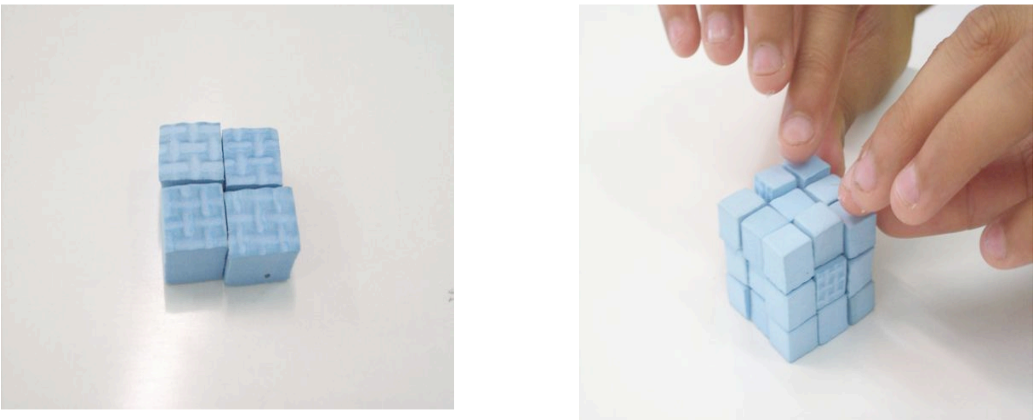

**Figura 2 - Representação de quadrados e cubos**

Podem-se representar outras potências, além de quadrados e cubos com o material dourado. Por exemplo, tomemos dois ao quadrado. A próxima potência é dois ao cubo, que é dois ao quadrado vezes dois. Os alunos têm de perceber que representar dois ao cubo é dobrar a representação de dois ao quadrado. Isso foi ponto de discussão entre nós, docentes, e o grupo

[1] Fonte: http://www.somatematica.com.br/artigos/a14/p.8.php

de estudantes, de forma a estimular que os estudantes descobrissem uma forma de representar uma multiplicação. Com a duplicação da figura anterior, chegamos em oito. A próxima potência é dois à quarta potência. A figura deve ser "dobrada" novamente. A representação segue na Figura 3.

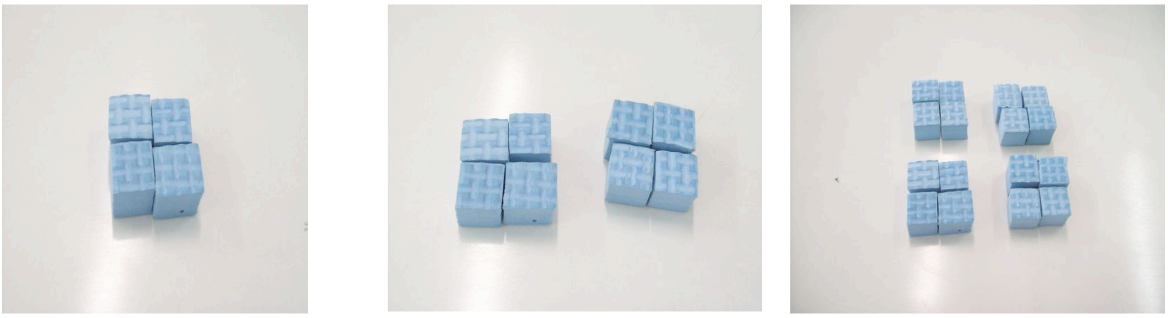

**Figura 3 - Representação de outras potências**

E assim por diante. Interessante expor aos alunos que a relação entre dois ao quadrado e dois à quarta potência, que é dois ao quadrado, ao quadrado (propriedade potência de potência). Isto fica claro pela figura obtida com o material dourado. O dois ao quadrado foi quadruplicado, formando novo quadrado, onde uma unidade agora é dada por dois ao quadrado. Então a base tem quatro quadrados (dois ao quadrado) e a altura também, o que resulta em dezesseis quadrados.

Para as potências de três temos:

**Figura 4 - $3^2$**

Três ao cubo é o triplo de três ao quadrado, portanto temos de "triplicar" a figura inicial:

**Figura 5 - $3^3$, correspondente ao cubo de aresta 3 desmontado**

A próxima potência é o triplo desta, portanto temos de triplicar a figura, fazendo com que cada pilha apareça três vezes:

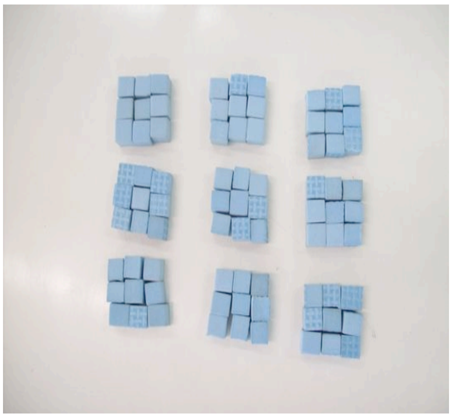

**Figura 6 - 3 à quarta potência**

Chegamos em três ao quadrado ao quadrado, observe que é o mesmo que nove ao quadrado, pois a base do quadrado tem nove peças e a altura também.

Podemos ainda triplicar a figura, obtendo três elevado a cinco, como segue:

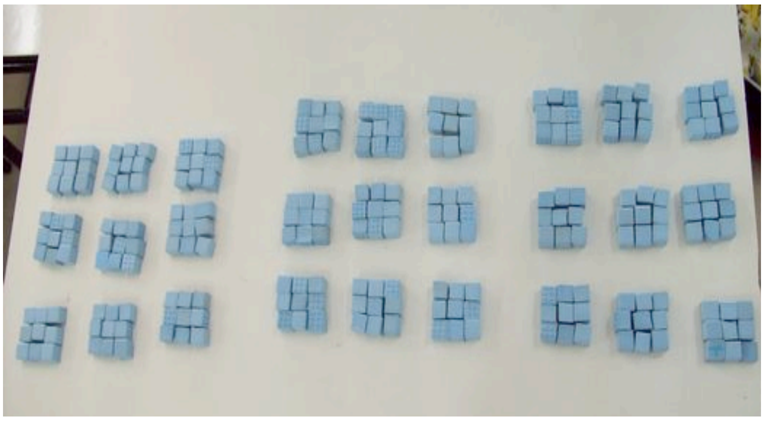

**Figura 74 - 3 à quinta potência**


ISSN 2178-034X

Ao final da experiência, sentimos que nossos alunos viram muito sentido nestas representações e passam a querer representar outras potências. Exploramos este desejo, construindo tabelas com os alunos, com a base, o expoente, e o valor da potência.

## 4. CONCLUSÕES

Considerando-se a natureza desta comunicação, qual seja, um relato de uma experiência, observamos que a atividade desenvolvida junto aos alunos se mostrou bastante profícua quanto ao aprendizado dos conteúdos de potenciação, oferecendo também uma introdução ao conteúdo de raízes. Não se trata, assim, de um estudo ou de uma análise dos obstáculos epistemológicos dos alunos quando de sua aprendizagem do conteúdo de potenciação, mas de notas relativas ao saber gerado por meio de uma experiência (BONDÍA, 2002) de ensino aprendizagem por nós vivenciada enquanto professores de matemática.

A atividade propiciou que os alunos compreendessem, assimilassem e aprendessem o significado dos termos “ao quadrado” e “ao cubo”, referências aos expoentes dois e três, respectivamente. Isso pode ser constatado por meio das avaliações formativas e somativas que aplicamos aos alunos. Percebemos que explicar, por meio de desenhos, na lousa, aos estudantes, o significado destas expressões, como “quadrado” e “cubo” muito perguntadas pelos alunos pode ser um trabalho custoso e dispendioso para o professor, o que pode ser facilitado por meio do emprego de materiais concretos e manipulativos como os que utilizamos para desenvolver nossa atividade.

Os docentes, ao se inspirarem neste relato para elaboraram seus próprios planos de aula, podem querer discutir com seus alunos o fato de que potências de expoente dois e três têm uma representação em duas e três dimensões respectivamente (plana e espacial). Dimensões maiores do que três não têm uma representação óbvia – não podemos utilizar material concreto para representar algo em quatro ou mais dimensões. Mas o material dourado oferece uma possibilidade de exploração a partir do conceito de multiplicar a base, ou seja, se a base é dois, temos de dobrar cada figura, se é três, temos de triplicar cada representação, e assim por diante.

## 5. Referências

BONDIA, Jorge Larrosa. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Rev. Bras. Educ.**, Rio de Janeiro, n. 19, p. 20-28, abr. 2002.

DALTOÉ, Karen e STRELOW, Sueli. Trabalhando com Material Dourado e Blocos Lógicos nas Séries Iniciais. **Só Matemática**. Online. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a14/p8.php>.

DUBET, François. *Sociologia da Experiência*. Lisboa: Instituto Piaget, 1994. 282 p. (Epistemologia e Sociedade, 48)

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação. In: **Zetetike** (UNICAMP), Campinas, v. 11, n. 19, p. 09-55, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Volume 1. Funções de uma variável. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 120p.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta.** Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PITOMBEIRA, J.B., ROQUE, T.M. **Tópicos de história da Matemática**. Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 17ª ed. Petrópolis: Vozes, 2014. 325p.

TARDIF, Maurice; LESSARD, Claude. (2005). **O trabalho docente***:* elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. 9ª ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2014. 317 p.

VAN DE WALLE, John A**. Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.


ISSN 2178-034X