UMA EXPERIÊNCIA COM O CÁLCULO INTEGRAL EM UM AMBIENTE INFORMATIZADO DE APRENDIZAGEM

José Milton Lopes Pinheiro
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho(UNESP-Rio Claro)
jmilton.ufjf@gmail.com

Luiz Carlos Leal Junior
Instituto Federal de São Paulo (IFSP) e UNESP - Rio Claro
jhcleal@gmail.com

Resumo:
Este artigo tem por objetivo compreender *como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando Atividades Exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*. Para tanto, foram convidados a desenvolver atividades junto a cossujeitos de aprendizagem e a recursos tecnológicos, alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP-Rio Claro). Sob perspectiva da interrogação desta pesquisa e do olhar metodológico qualitativo, foram descritas e analisadas as articulações dos sujeitos no tratamento das atividades. O movimento de análise permitiu compreender a relevância dos recursos da exploração junto à informática para constituição de conceitos em Matemática, bem como, permitiu propor modos de pensar o ensino e a aprendizagem desses conceitos como desafios e possibilidades para Educação Matemática na atualidade.

Palavras-chave: Soma de Riemann. Atividades Exploratórias. Ambiente Informatizado de Aprendizagem. Educação Matemática.

1. Introdução

Pesquisas realizadas em torno do uso da Informática na Educação Matemática, como as de Powell e Alqahtani (2015) e Silva e Penteado (2009), desdobram articulações em torno do conhecimento matemático, mostrando que o avanço da presença dos recursos tecnológicos levanta seguidas interrogações sobre as possibilidades didáticas e pedagógicas das tecnologias informáticas levadas à escola.

Como professores imbricados no contexto, em que a tecnologia informática é presente, constantemente nos atemos a estas interrogações sob perspectiva de nossa prática. Vemo-nos com inquietações que se voltam às implicações que se desdobram nas possibilidades do uso da tecnologia informatizada nas escolas. Ir ao encontro dessas inquietações tornou-se uma tarefa constante em nossa vida acadêmica e profissional, o que motivou uma busca mais fundante junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Consoou com a busca de uma reflexão mais aprofundada no domínio de nossas inquietações, cursar, no programa, a disciplina A Utilização de Informática na Educação Matemática - 2º semestre de 2015. O estudo que aqui apresentamos é fruto dessa disciplina e do trabalho solicitado pelo Professor, que diz respeito ao desenvolvimento de uma proposta de ensino sobre um tema matemático valendo-nos de ferramentas computacionais.

Escolhemos para o desenvolvimento de nosso trabalho, o tema Soma de Riemann e, como apoio dado pela tecnologia, optamos por trabalhar este tema, propondo atividades na interface do *software* Geogebra, acoplado a um *blog* de nossa autoria, disponível no endereço eletrônico http://integracaoriemann.blogspot.com.br (LEAL JR; PINHEIRO, 2015).

Essa proposta foi aplicada aos 21 alunos da disciplina, estando os mesmos divididos em dez duplas, mais o professor da disciplina, que realizou as atividades individualmente. Ressaltamos que a maior parte dos alunos são professores de Matemática e, todos participam do referido programa de pós-graduação.

Para dar início ao nosso estudo, buscamos a priori entender como é feita a introdução à Integral em livros didáticos, dentre os quais: (FLEMMING; GONÇALVES, 2006), (GUIDORIZZI, 2008), (STEWART, 2013), (LARSON; HOSTELER; EDWARDS, 2006) e (THOMAS; WEIR; HASS, 2012). Pudemos constatar que há muitas formas de se introduzir o conceito de área, como introdução à integração definida. Vimos que, nos livros analisados, essa introdução é feita através do conceito de Soma de Riemann, todavia, as abordagens são variadas, podendo ser descritivas, breves, prescritivas, exemplificadoras, construtivistas ou formais. Mas, a maioria o faz de maneira lacônica, onde os estudantes sequer podem inferir e relacionar as ideias, além de não conseguirem trabalhar os problemas geradores de um novo conceito.

Vemos nas tecnologias informatizadas, oportunidade para oferecermos um tratamento à compreensão da Soma de Riemann que os livros didáticos não têm dado. Uma compreensão que se dá no envolvimento do aluno com o tema junto a um *software*, no caso proposto, um *software* de Geometria Dinâmica - GD.

A introdução à integração, as contribuições das tecnologias informáticas para esta introdução e o tratamento exploratório de atividades para constituição do conceito de Soma de Riemann, se mostraram temas relevantes a esse estudo, especialmente quando nos demos conta de que poderíamos interrogar a construção do conceito de Soma de Riemann por meio de Atividades Exploratórias expressas em ambientes tecnológicos. Essa interrogação, analisada com colegas de curso, com professores e autores de livros didáticos, que, aqui referenciamos, foi clareando-se, de modo a poder ser assim expressa: *Como se dá a constituição do conceito de Soma de Riemann estando os alunos realizando atividades exploratórias em um ambiente informatizado de aprendizagem*?

Esta questão, interroga, sobretudo, o *conceito de Soma de Riemann, a Atividade Exploratória e o ambiente informatizado de aprendizagem,* que pudessem satisfazer nosso intento de ofertar atividades, meios e ferramentas para melhor tratá-las, bem como, possibilitar o registro dos dados necessários às considerações possíveis a esse estudo. Ao evidenciar o que interroga a interrogação, mostramos o que este estudo solicita em termos de pesquisa.

2. Ideias que se mostram importantes à pesquisa

Decorrente de nosso estudo junto aos livros didáticos, vislumbramos a importância de se valorizar a constituição do conceito de Soma de Riemann, através de Atividades Exploratórias. Para Leal JR e Onuchic (2015), trabalhar nessa perspectiva, não nos limita apenas a definição, mas nos permite recorrermos e visualizarmos outros conceitos relacionados, como limites, áreas de polígonos, questões de cinemática, funções e volumes.

Ponte (2003, p. 27) aponta que, ao trabalharem com atividades exploratórias, os alunos desenvolvem habilidades e capacidades "que envolvem conhecimentos de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidades de raciocínio e de uso desses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas", por meio da criticidade e reflexão sobre ideias e aplicabilidade das mesmas ao "lidar com situações das mais diversas". Explorar em sala de aula permite aos alunos, conforme Silva et al. (1999, p. 72), formar conjecturas, avaliar sua plausibilidade, permite "a escolha dos testes adequados para sua validação ou rejeição. Permite em ainda, procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessíveis testes e levantar novas questões para investigar".

Uma Atividade Exploratória possui estrutura aberta (PONTE, 2003), pois ela sugere aos alunos algumas atitudes, as quais suas implicações podem balizar conjecturas, reflexões e a concepção de conceitos matemáticos não esperados pelo professor. Apresenta-se aos alunos um modelo pronto, que deve ser explorado, compreendido e analisado. Sobre isso, Gravina e Santarosa (1999, p. 81), dizem que não são as ideias dos alunos que são representadas na atividade, há um desafio de compreendê-las. "A própria compreensão do modelo, o entendimento dos princípios de construção, já são, por si só, estímulo ao raciocínio, que favorecem a construção de relações e conceitos".

A proposta de trabalhar Atividades Exploratórias pode ser tratada também junto às Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC, visto que a informática fornece ferramentas e meios que otimizam a busca e a exploração. Sobretudo, muito além das tarefas/atividades *per si*, importa considerar, também, a forma como são trabalhadas na sala de aula e no ambiente informatizado de aprendizagem.

Borba e Penteado (2010, p. 64) dizem que o lançar mão do uso de TIC “não significa necessariamente abandonar outras tecnologias. É preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender nosso propósito” (Ibidem, p.64). Entretanto, quando nos situamos num cenário de inserção de tecnologia informática no ambiente escolar, podemos perceber que a mesma tem sido vista “como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade” (Ibidem, p.65).

A potencialidade das TIC, focada junto ao ensino e à aprendizagem de Matemática, nos motivou a pensar uma proposta de introdução à Integração através de Soma de Riemann, utilizando o s*oftware* Geogebra, no qual a questão da visualidade, que tem se mostrado como uma dificuldade em muitas situações de aprendizagem, pode ser melhor tratada, visto que este *software* fornece ferramentas que facilitam a construção de gráficos que são muitas vezes inviáveis sem o auxílio do computador.

O ambiente de GD se mostra aberto à elaboração e realização de Atividades Exploratórias. Explorar implica em ações de testar, observar e conjecturar. A opção de “arrastar” dos *softwares* de GD oferta essa mobilidade aos alunos, permitindo-lhes transformar continuamente e, em tempo real, um objeto ou construção. “Sem dúvida, a principal característica de um *software* GD é a possibilidade do arrastar. [...] essa característica permite que estudantes explorem situações problemas e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando” (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1070).

As Atividades Exploratórias em ambientes GD devem convidar os alunos a explorar propriedades, teoremas, e objetos, que, postos em determinada situação de movimentar, abrem possibilidades de percepção de propriedades constituintes dos mesmos.

3. Metodologia e procedimentos de investigação

Temos desenvolvido um modo de investigar, e mesmo de compreender os acontecimentos do nosso entorno profissional, no qual nos cobramos uma atentividade ao que vemos a partir de uma percepção imediata do vivido, que nos leva à adesão creditativa neste estudo às nuanças dos procedimentos de investigação qualitativa.

Para nosso estudo, criamos um site, na modalidade *blog*, onde decidimos tratar da temática da introdução à integração através de Soma de Riemann. Nele colocamos algumas reflexões e problemas que acreditamos serem interessantes para a abordagem desse conceito.

Colocamos no *blog* nossa motivação e em seguida, propomos três Atividades Exploratórias. Em cada atividade disponibilizamos uma interface do *blog* com o Geogebra. Ao final de cada atividade, criamos um ambiente, por meio do *Google Drive*, para que os estudantes pudessem escrever suas respostas, e em seguida nos enviá-las. Disponibilizamos também, o espaço para comentários presente no próprio *blog*, no qual os estudantes poderiam emitir suas opiniões sobre o material e a dinâmica daquela proposta de aula.

Convidamos os sujeitos, após a realização das atividades à visualizarem duas postagens no *blog*. Na primeira dizemos de nossa visão a respeito da problemática que envolve o conceito de Soma de Riemann. Na segunda, apresentamos referências de alguns materiais didáticos, disponíveis na internet, dentre os quais, dois ambientes do Geogebra Tube, em que os alunos poderiam interagir com a ferramenta, e perceber como se comportam a Somas de Riemann em três perspectivas: Soma Superior - SS, Soma Inferior - SI e Soma ao Ponto Médio - SPM. Além disso, eles poderiam alterar as funções, os intervalos de definição das mesmas e o número de retângulos para estimar o cálculo da área.

4. Construção e análise dos dados

Aqui trazemos as descrições e análise em duas das atividades trabalhadas pelos sujeitos. Articulando compreensões nossas sobre a percepção e constituição de conceitos que foram se mostrando aos sujeitos na vivência com as atividades, conosco e com os aportes tecnológicos ofertados. Entendemos ser suficiente para nossa análise, trazer apenas algumas respostas dadas, mas, que expressaram o mesmo sentido das demais respostas.

Recortamos da planilha do *Google Drive*, para a qual os alunos reportaram suas articulações, um conjunto de respostas, sem mudar suas ordens prévias, nem mesmo inserir outras respostas neste conjunto, ou retirá-las. Com isso, visamos não conduzir a análise, trazendo a ela respostas que, por julgamento, dizemos mais elaboradas e favoráveis.

Na primeira atividade delineamos questões que, ao serem tratadas, pudessem permitir os alunos chegarem ao conceito de Soma de Riemann, experimentando as possibilidades dinâmicas e visuais dadas na interface do *software* Geogebra. A atividade foi assim posta:

Use retângulos para estimar a área sob a curva f(x) = e^x no intervalo [0,1] atentando aos passos que seguem:

Item 1: *Marque a opção Mostrar Soma Inferior. Observe a área determinada por esta soma.*

Item 2: *Marque a opção Mostrar Soma Superior. Observe a área determinada por esta soma.*

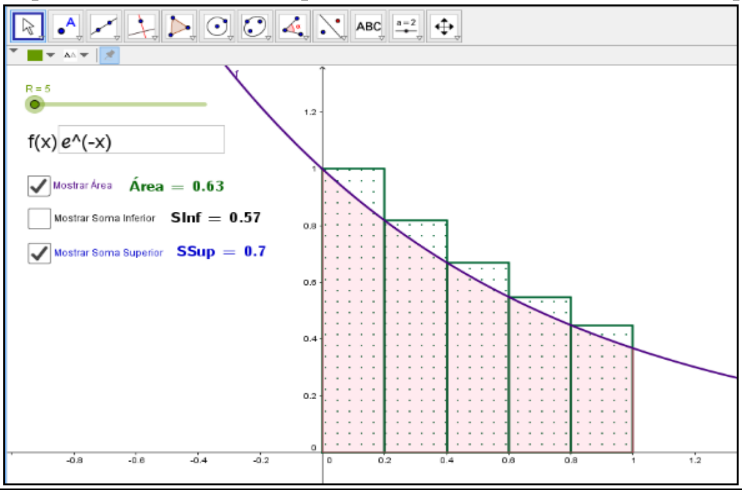

Figura 1: Atividade Exploratória1

FONTE**:** O autor

QUESTÃO 1 - *O que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhada a soma do item 1? O que pode ser dito quando olhado o item 2? E o que pode ser dito sobre a área sob a curva quando olhados simultaneamente os itens 1 e 2?*
R1 - A soma inferior resulta numa área menor que a área real; e a soma superior dá uma área maior. Quando olhado simultaneamente, uma soma compensa a outra.
R2 - Utilizando a soma inferior (item 1), quanto mais retângulos, a área da figura aumenta e aproxima da área igual a 0,63. Utilizando a soma superior (item 2), quanto mais retângulos, a área da figura diminui e se aproxima da área igual 0,63. Observados os itens 1 e 2 simultaneamente vemos que os retângulos que faltam na soma inferior e o que ultrapassa pela soma superior se complementam.
R3 - A soma 1 chega ao valor mais próximo do exato de forma crescente, já a segunda de foma decrescente. E a área da curva é a integral.
QUESTÃO 2 - *Diga sobre a área sob a curva, agora estudando a Soma Inferior e Superior quando o intervalo é dividido em 8 partes, ou seja, considerando as áreas de 8 retângulos.*
R1 - Aumentando-se o número de retângulos, a soma de suas áreas aproxima-se mais da área real sob a curva.
R2 - A soma inferior é igual a 0,59. A soma superior é igual 0,67. Percebemos que falta 0,04 na soma inferior e que sobra 0,04 na soma superior em relação a área de 0,63. Ou seja, uma se aproxima de 0,63 crescendo e a outra decrescendo.
R3 - O valor O valor superior é aproximado para menos e o valor inferior aproximado para mais.
QUESTÃO 3 - *Aumentando gradativamente o número de retângulos no intervalo de 0 a 1. O que acontece com as somas Inferior e Superior ao serem comparadas com a área sob a curva?*
R1 - A soma superior e inferior vão se aproximando da área real.
R2 - Aumentando-se gradativamente, a soma de suas áreas aproxima-se cada vez mais da área real sob a curva, ou seja, diminui-se a diferença entre a área sob a curva e a área determinada pelas somas superior e inferior.
R3 - As somas se aproximam a área da curva que é de 0,63.

QUESTÃO 4 - *Se pensarmos em um número n de retângulos, que tende ao infinito, o que pode ser dito sobre as áreas em questão?*
R1 - Elas são iguais.
R2 - Poderemos dizer que a área sob a curva é igual ao limite da soma das áreas dos n retângulos, quando n tende ao infinito.
R3 - Os retângulos cada vez ficarão próximos um ao outro e chega um momento em que a soma superior e inferior manterão o mesmo valor da área independente de acrescentar outros retângulos.

Tabela 1: Atividade Exploratória n. 1
FONTE**:** Material dos autores.

Dispomos um percurso a ser tomado pelos alunos para conduzi-los ao trabalho com determinado número de retângulos em um intervalo e, em seguida, ao propor o aumento gradativo da quantidade de retângulos, abrimos a possibilidade da percepção de um invariante, "a aproximação da área sob a curva através de SS e SI". Uma vez compreendido isso, pedimos aos alunos que trabalhassem com um número de retângulos significativamente alto, e que fizessem isso em diferentes intervalos. Intencionamos com isso, a busca por uma generalização que abarque o conceito de Soma de Riemann.

Este percurso permitiu aos alunos diferenciar a área das somas finitas e, a partir delas, trabalhar as noções de limite e infinito, ao estudarem as somas em diferentes intervalos e números de retângulos. Tais noções, embora complexas, nesta atividade mostraram-se mais acessíveis, dadas as possibilidades do *software,* postas à disposição junto a esta atividade.

Na esteira dessas considerações, entendemos que as questões levantadas e as possibilidades do *software* deram conta de ofertar aos alunos uma percepção da singularidade das áreas pautadas, bem como das relações entre as mesmas. Mesmo sendo um conhecimento prévio da maior parte dos alunos, o conceito de Soma de Riemann, tal como propomos na atividade, mostrou-se desafiador, visto que eles se embrenharam numa busca e, ao final, articularam suas compreensões, sendo muitas delas desprendidas da formalidade posta nos livros. A motivação expressa pelos alunos no envolvimento com essa atividade, e o êxito dos mesmos ao argumentarem coerentemente sobre áreas e noção intuitiva de Soma de Riemann, conduz-nos ao entendimento de que há potencial de aprendizado em atividades, cuja proposta, é o aprender explorando.

Sem falar de Integral, os alunos conseguiram perceber e expor que a soma das áreas dos retângulos, quando o número deles tende ao infinito, é igual à área sob a curva. Esta percepção dá abertura ao tratamento de Integral. Abertura esta que se deu na intenção do aluno em estar com a atividade e a buscar as respostas que a mesma lhe solicitava.

A segunda atividade diz da aplicação de integral à cinemática, mais especificamente na questão da relação entre velocidade e deslocamento. Motivou esta questão, nossa percepção de professores de Cálculo, da dificuldade de nossos alunos em relacionar a curva e a área limitada pela mesma em determinado intervalo e, até mesmo, em trabalhar com esta relação. Então, a atividade foi proposta para possibilitar, aos sujeitos de nosso estudo, a percepção do que diz a curva em relação a área e o que diz a área em relação a curva, mais especificamente, ao olhar para a "curva velocidade" e para o deslocamento dado pela área sob a mesma, em um intervalo definido, estando os sujeitos novamente explorando junto ao ambiente de GD.

Fica evidente que, não apenas cada atividade possui uma estrutura que propõe um movimento aos alunos rumo a um conceito, mas, as atividades tomadas como um todo também delineiam um roteiro ao se completarem, no sentido de que, o apreendido com uma pode contribuir para o tratamento da outra. A Atividade Exploratória 2 foi assim posta:

Encontrar o deslocamento de um objeto durante um período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes é uma tarefa simples, visto que, problemas como este podem ser modelados pela fórmula: d = v . t (deslocamento = velocidade x tempo). Mas, e se a velocidade variar? Vamos investigar o problema no suposto caso a seguir:

Tempo (s)	0	0,25	0,5	0,75
Velocidade (km/h)	4	2,81	1,75	0,81

Os pares ordenados (tempo, velocidade) estão representados no eixo cartesiano que segue, bem como a curva f(x) que os contém:

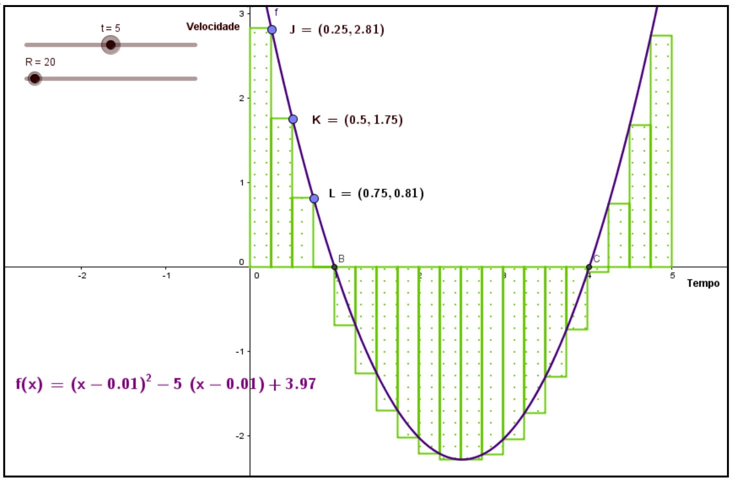

Figura 2: Atividade Exploratória 2
FONTE: Os autores

Levantamos as seguintes questões aos alunos:

ISSN 2178-034X

QUESTÃO 1 - *O que representa a área de cada retângulo? O que representa a soma destas áreas?*
R1 - Representa o deslocamento naquele espaço de tempo. A soma representa o deslocamento total
R2 - O produto representa a posição naquele instante e a Soma é o deslocamento naquele intervalo de tempo.
R3 - A área do retângulo representa o Deslocamento e a soma das áreas a distância.
QUESTÃO 2 - *O que pode ser dito sobre a curva f(x)?*
R1 - Representa a velocidade em relação ao tempo.
R2 - é uma parábola com duas raízes
R3 - A curva gera o deslocamento expresso pela função.
QUESTÃO 3 - *O que pode ser dito sobre a área sob esta curva f(x)?*
R1 - Deslocamento do objeto.
R2 - A área representa o deslocamento no intervalo de tempo.
R3 - Representa a distância percorrida
QUESTÃO 4 - *Se tomados outros tempos no intervalo [1, 4], e aumentado o número de retângulos, o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos contidos neste intervalo?*
R1 - Esta área é negativa pois está abaixo do eixo x
R2 - A área dos retângulos se aproxima da curva, representando a distância percorrida no momento em que o deslocamento está sendo oposto ao da origem.
R3 - Quanto maio o número de retângulos mais preciso será o valor da área.
QUESTÃO 5 - *Tomando o intervalo [0, 6] o que pode ser dito sobre a soma das áreas dos retângulos?*
R1 - Nos intervalos de 0 a 1 e de 4 a 6, a soma das áreas dos retângulos é positiva pois está acima do eixo x já nos intervalos de 1 a 4, a soma das áreas dos retângulos é negativa.
R2 - De zero a 6 tem três áreas, a soma delas vai dar negativo pois a área da curva inferior a eixo X é maior que as áreas que são superiores ao eixo x.
R3 - Quanto mais retângulos, mais se aproxima da área sob a curva (que é o deslocamento).

Tabela 2: Atividade exploratória n. 2
FONTE: Material dos autores.

A percepção primeira, de que a área de um retângulo representa o deslocamento, possibilitou com que os alunos concebessem o conhecimento de que a área sob uma curva, dada por uma "função velocidade", considerando um intervalo, determina o deslocamento de um objeto. Este tratamento *a priori*, trata-se de uma das maneiras de oportunizar a percepção de que a integral da "função velocidade" em determinado intervalo, fornece o deslocamento.

Muitas vezes, apenas dizemos "a integral da velocidade é igual ao deslocamento", informação essa que vem a ser abstrata quanto a formação dos conceitos envolvidos e, com isso, passa a ser decorada pelos alunos, e não entendida.

Uma vez compreendido o deslocamento enquanto área sob a curva de uma "função velocidade" em um intervalo definido, que foi objetivo das questões 1, 2 e 3, abrimos com as questões 4 e 5 a possibilidade de atentar-se aos sinais das áreas, determinados pelo posicionamento das mesmas em relação ao eixo OY, o que é omitido por uma grande parcela dos livros didáticos analisados. Calculando as áreas nos intervalos pedidos, com auxílio da ferramenta "Soma de Riemann de ponto a ponto", os alunos encontraram resultados positivos para as áreas superiores ao eixo OX, e negativos para as áreas inferiores ao mesmo eixo. Essa percepção foi posta, no entanto, nessa atividade, não avançamos neste conhecimento, pois um tratamento foi dado na atividade 3.

Os objetivos que tínhamos para a segunda atividade foram alcançados por maior parte das duplas. No entanto, encontramos nas respostas de outras duplas compreensões coerentes, porém, não alinhados com nossos objetivos prévios. Isso se deu pela abertura dada nas questões; preocupávamos em não direcionar respostas, por isso perguntamos "o que pode ser dito em relação a". Assim, direcionamos o olhar, mas não as respostas.

A experiência nos levou à percepção de que os conceitos trabalhados, que já eram familiares aos sujeitos, da forma em que foram (pro)postos, trouxeram desafios, especialmente o de pensar suas práticas propondo a seus alunos situações nas quais eles devem envolverem-se efusivamente para conquistar o conhecimento.

5. Algumas considerações pertinentes ao estudo

Entendemos que propomos um meio de estar com o conceito de Soma de Riemann que se mostra significativo à aprendizagem. Concebemos nossa abordagem como uma dentre as muitas possibilidades de estar com esse conceito. Algumas delas foram citadas por nossos sujeitos, ao apontarem que, na graduação, estudaram Soma de Riemann por meio da abordagem "tradicional", que para alguns foi suficiente, mas para a maioria foi frágil e pouco significativa, no sentido de que "a aprendizagem foi mecânica, visando apenas guardar informações para melhor desempenho na prova".

Objetivamos com nossa proposta um aprendizado em que os alunos se doem à atividade, e esta, se doe aos alunos em compreensões junto às possibilidades do *software*. Com isso, o conhecimento vai fazendo-se, constituindo-se de forma que cada passo deste

ISSN 2178-034X

fazimento seja significativo à aprendizagem, o que sugere a relevância do olhar para o processo, e não apenas para o fim do mesmo, o resultado. Dessa forma, a Soma de Riemann pôde ser compreendida e não decorada segundo a perspectiva de um aprendizado mecanicista.

As características que enunciamos no que concerne às Atividades Exploratórias justificam o tratamento delas nessa pesquisa. Além de oportunizar abertura para o pensamento crítico e reflexivo aos sujeitos no processo junto às mesmas, permitiram-lhes também voltar seus olhares ao potencial dessas atividades para o ensino e à aprendizagem de matemática, visto que são professores e futuros professores e, a abordagem dada pela exploração lhes interessara enquanto importante ferramenta metodológica. Os sujeitos relataram a relevância das atividades trabalhadas não apenas para a aprendizagem dos alunos, mas também "para o desenvolvimento de um novo olhar para a sala de aula, para os alunos, que podem ser pensados como exploradores do contexto expresso pelo professor". Esta percepção sugere também, repensar práticas educativas, a postura do professor e perspectivas outras ao seu repertório docente, expandido e potencializando as oportunidades de aprendizagem.

Para explorar é preciso ferramentas, e o *software,* aqui empregado, mostrou-se suficiente dentro da proposta das atividades. Afirmamos isso ao olhar, tanto para o desenvolvimento dos sujeitos quanto para os resultados expressos pelos mesmos. Entendemos que o *software* possibilitou conjecturas mediante primeiras intuições provenientes da percepção de algumas singularidades. Possibilitou também, a validação destas conjecturas quando o potencial dinâmico e visual do *software* se doou à percepção de invariantes ao permitir extrapolar as singularidades, culminando em generalizações possíveis. Com isso, os sujeitos apontaram que "as ferramentas que possibilitam ampliar as quantidades, arrastando objetos, permitiram perceber que o que era válido para uma ampliação gradativa do número de retângulos, valia também para uma ampliação acelerada de retângulos".

Um fazer possível à nossa proposta é o tratamento de atividades em ambientes virtuais, visto que projetamos um *blog* e, poderíamos propor o tratamento das atividades em qualquer ambiente que não a sala de aula. Não foi assim feito devido à proposta da disciplina, que consistia em uma apresentação em sala, seguida da discussão com a turma a respeito da mesma. A experiência nos leva a esta possibilidade, visto que, constantemente discutimos sobre o perfil dessa geração de alunos, que é natural de uma comunidade informatizada, de um sistema educacional que se abre às possibilidades da Educação a Distância.

Não só a Soma de Riemann, mas muitos tópicos do Cálculo podem ser trabalhados na perspectiva que trouxemos nesse estudo. O retorno positivo dado pelos sujeitos nos permitiu e motivou-nos a pensar em outras possibilidades de pesquisas, dentre as quais o tratamento de outros problemas que nos inquietam em nossas práticas com o ensino de Cálculo. Isso nos levou a mudar o título desta seção, que previamente era “considerações finais”. Vemos estas considerações como pontos de partida para novos estudos, que possam vir a contribuir para o ensino e à aprendizagem de Cálculo, uma vez que, esta pesquisa expressa o potencial que subjaz ao tratamento de conceitos matemáticos junto às tecnologias informáticas.

Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 104 f. 2010.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração.* 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, PGIE-UFRGS, v. 2, n. 1, p. 73-88, mai. 1999.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 380 p. 2008.

LARSON, R.; HOSTELER, R. P.; EDWARDS, B. H. *Cálculo*. Vol. 1. 8ª ed. Tradução: CASTRO, H. M. A.; FIGUEIREDO, L. M. V.; BROLEZZI, JURIAANS, O. S.; HUMES, A. F. P. C.; TOLOSA, T. A. G. São Paulo: McGraw- Hill, 2006.

LEAL JR, L. C., ONUCHIC, L. R. *Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista*. Bolema. UNESP. Rio Claro. vol.29, n.53, pp. 955-978. 2015.

LEAL JR, L. C.; PINHEIRO; J. M. L**.** *Introdução à Integração*. Rio Claro. 2015. Disponível em <http://integracaoriemann.blogspot.com.br/>. Acesso em 30/09/2015.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POWELL, A. B.; ALQAHTANI, M. M. *Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments.* In: International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology., 2015, Antalya. *Anais*... Antalya: ICEMST: 2015. p. 84 – 94.

SILVA, A.; VELOSO, E.; PORFÍRIO, J. ABRANTES, P. *O currículo de matemática e as actividades de investigação.* In: P. Abrantes, et al. (Eds.), Investigações matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 69-85.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. *O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa.* In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. *Anais*... Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

STEWART, J. *Cálculo.* Vol. 1. 7ª ed. Tradução: EZ2Translate; GARIBALDI, E. São Paulo: Cengage Learning. 2013.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo.* Vol. 1. 12ª ed. Tradução: PEDROSO, K. R.; MACEDO, R. C.S.; ASANO, C. H. São Paulo: Pearson Education do Brasil. 2012.

ISSN 2178-034X