ENSINO E APRENDIZAGEM DE ARITMÉTICA: REFLEXÕES COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Luiz Augusto Richit
Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS
luizaugustorichit@gmail.com

Bárbara Cristina Pasa
Universidade Federal da Fronteira Sul/UFFS
bapasa1@htomail.com

Méricles Thadeu Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC
mthmoretti@gmail.com

Resumo:
As dificuldades enfrentadas pela maioria dos estudantes na área da matemática são recorrentes e podem ser identificadas se analisados os índices de desempenho nesta área. Segundo a teoria dos registros de representação semiótica (RRS), toda a atividade matemática, incluindo sua compreensão, está vinculada à mobilização simultânea de, ao menos, dois RRS de um objeto matemático. Nesta perspectiva, objetivamos, neste artigo, refletir sobre o custo cognitivo envolvido no controle e manipulação dos RRS na resolução de problemas de Aritmética. Embora este conteúdo seja um dos primeiros conhecimentos em matemática, geralmente é fonte de dificuldades até mesmo para estudantes ao final do ensino fundamental. Os problemas aqui analisados foram retirados de avaliações realizadas durante o Programa de Iniciação Científica Jr., da OBMEP, durante o ano de 2014. A discussão e análise realizadas se baseiam na congruência e/ou não congruência semântica, abordada nos estudos de Raymond Duval.
Palavras-chave: Registros de Representação; Congruência Semântica; Aritmética; Sistema Numérico Decimal Posiciona.

1. Introdução

O ramo mais antigo da matemática é o que se associa aos *números* e às *operações* possíveis entre eles. Este ramo, chamado de aritmética elementar, apesar de ser apenas uma parcela restrita de todo o conhecimento que permeia a atividade matemática, é de grande importância, pois é sobre ele que se origina a formação da matemática. O objeto *número*[1] surgiu a partir da preocupação do homem em contar e medir. A relação entre contagem e *número*, porém, é apenas pontual, de modo que o *número* assume a representação de uma quantidade, isto é, o objeto utilizado para se referir a um objeto não matemático que possa ser quantizado por um valor.

[1] A discussão dada neste trabalho envolve os números naturais.

Lins e Gimenez (2005) discutem essa relação:

> "[...] bem, na verdade números não tem nada a ver com contar e medir, eles são objetos abstratos, que aplicamos aos objetos concretos com os quais queremos lidar, e a partir daí produz-se um conjunto de princípios que definem número, e que não fazem menção alguma aos significados não matemáticos; esses princípios definidores podem basear-se em conjuntos ou num princípio de construção por sucessores, mas nada de medida ou contagem" (LINS, GIMENEZ, 2005, p. 24).

O trabalho com números pode parecer espontâneo ou elementar, já que se relaciona a atividades 'elementares' como contar e medir. Contudo, pesquisas como Brandt (2005), Lins e Gimenez (2005) e Vece, Silva e Curi (2013) comprovam as dificuldades de compreensão relacionadas ao objeto matemático abstrato *número* e ao sistema de numeração decimal.

Enquanto as medidas e a contagem são elementos físicos que possuem um contexto real, os *números* são objetos matemáticos que pertencem a um *sistema de representação semiótica* e são objetos que só podem ser concebidos a partir das representações: eles não são a representação em si, mas só podem ser tomados em função delas (DUVAL, 2012b). Um número em matemática pode tomar a forma de designações linguísticas, de representações em sistemas numéricos de representação muito diferentes entre si, como por exemplo, sistema romano, decimal posicional, egípcio, sumério, entre outros.

Além disso, os números não podem ser alcançados em função de um sistema de representação e sim em função da mobilização entre suas representações em diferentes registros semióticos. Esta transição entre registros de um mesmo objeto não é simples nem direta, pois os princípios definidores de um objeto nem sempre são correspondentes nos dois *registros de representação semiótica (RRS)*, tomamos o exemplo de Brandt (2005):

Objeto designado linguisticamente → Objeto designado numericamente

Trinta e três → 30+3=33 (tri→3, nta→10, e→+ e três→ 3, 3×10+3=33);

Onze → 10 +1=11 (on→ 1 e ze→ 10, 1+10=11 e não 1×10).

Esta tarefa não é uma simples mudança de representação, porque as *regras naturais* de correspondência entre a estrutura linguística de designação e o sistema de numeração decimal nem sempre são mantidas. Neste caso, estamos nos referindo à congruência e a não congruência semântica entre as representações em sistemas diferentes (DUVAL, 2012a).

A passagem entre expressão linguística e numérica de um número é uma das primeiras dificuldades enfrentadas no aprendizado de matemática. Ela permite identificar que a mudança de representação é origem de diversas dificuldades e é ela que determina a compreensão e o sucesso em matemática sendo, portanto, insubstituível (DUVAL, 2004). Assim, se torna imprescindível utilizarmos a riqueza das formas de representação (figuras, gráficos, tabelas, esquemas, sistemas simbólicos...) a partir da ótica dos RRS de Raymond Duval, nas atividades matemáticas. Contudo, é exatamente sobre este ponto que uma análise mais minuciosa das dificuldades de aprendizado em matemática, traz a tona o que Duval já chamara atenção anteriormente: a mobilidade de registros semióticos e as condições semânticas envolvidas nestes processos são questões que devem ser levadas em conta no ensino (DUVAL, 2012b). O exemplo de Brandt (2005), tomado acima, pode servir de introdução.

É neste sentido, que o presente trabalho objetiva abordar alguns problemas aritméticos relacionados à dificuldade apresentada pela maioria dos estudantes com relação ao custo cognitivo envolvido no controle e manipulação dos RRS. A discussão levada em conta aqui não se refere necessariamente às dificuldades entre nomes de números e suas representações no sistema decimal posicional. Os exemplos utilizados neste trabalho pressupõem a compreensão destes sistemas, contudo demonstram as dificuldades de reconhecimento dos objetos a serem manipulados para resolução do problema, em função de uma articulação entre enunciado e atividade numérica.

Os exemplos analisados neste trabalho são questões retiradas de testes avaliativos aplicados aos estudantes que participaram do Programa de Iniciação Cientifica[2] Jr., no ano de 2014, vinculado à Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Pública – OBMEP, de 2013. Os problemas e as resoluções dadas por estes estudantes foram então tomadas em função do custo cognitivo necessário à sua resolução, isto é, em função dos fenômenos de congruência semântica envolvidos na mobilização dos RRS.

2. O Sistema Decimal Posicional de Numeração

[2] O Programa de Iniciação Cientifica Jr. em Matemática é um programa que concede bolsas de estudos (CNPq) aos alunos medalhistas na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP regularmente matriculados em escolas públicas na vigência do programa. Estes medalhistas estudam matemática através de atividades presenciais e virtuais, por aproximadamente um ano. Mais informações no site http://www.obmep.org.br/pic.html

A compreensão do sistema de numeração decimal posicional é importante não só por ser o mais utilizado na atividade matemática mundial, mas por ele possibilitar um avanço em função de sua representação uma vez que apresenta inúmeras vantagens do ponto de vista de tratamento. Outros sistemas de representação podem ser inoperáveis do ponto de vista do custo cognitivo, como é o caso da língua natural. (DUVAL, 2004). As vantagens operatórias da representação decimal posicional podem ser constatadas facilmente, quando comparadas, por exemplo, ao sistema de numeração romano. Estas particularidades operatórias dadas em função de sua representação são fundamentais para a atividade matemática.

Contudo, conhecer as especificidades de um registro e as vantagens que ele fornece é fundamental, mas não o suficiente. A atividade intrarregistro não cumpre uma função importante de um sistema semiótico: a *objetivação* do conhecimento. Esta função só pode ser construída a partir da mobilização dos diferentes sistemas semióticos de representação. É nesse ponto que, segundo Duval (2004), surgem muitos problemas. Nesta perspectiva, apresentamos a discussão de quatro problemas relativos à aritmética, acompanhados de análises das respostas dadas por um grupo de estudantes participantes do Programa de Iniciação Cientifica[3], em Matemática, no ano de 2014, conforme explicitado anteriormente.

3. Problemas e Análises a partir da Teoria dos RRS

Problema I - *Qual é o maior número de seis algarismos que se pode encontrar suprimindo-se nove algarismos do número* 778157260669103, *sem mudar a ordem de seus algarismos?*

Este problema pode ser considerado acessível a grande parte dos estudantes uma vez que se baseia em critérios de posição do sistema decimal posicional, o qual é requisito mínimo para toda atividade matemática que envolve, ao menos em algum momento, o trabalho com números.

Assim, a expressão *o maior número de seis algarismos* se entende facilmente como o número de seis dígitos que inicia com o maior algarismo possível seguido dos maiores

algarismos possíveis para cada um dos dígitos subsequentes. Em outras palavras, é necessário conhecer as propriedades e regras do sistema decimal posicional. Diante disto, para o problema I, o dígito A abaixo dever ser o maior possível entre os disponíveis.

[3] Os problemas (I, II, III e IV) discutidos neste trabalho são referentes a uma parcela de questões aplicadas nestes testes avaliativos presenciais para um grupo de alunos de 13 a 15 anos que participaram do PIC Jr. 2013 no ano de 2014.

ISSN 2178-034X

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{A}}_{10^5}\ \underbrace{\boxed{B}}_{10^4}\ \underbrace{\boxed{C}}_{10^3}\ \underbrace{\boxed{D}}_{10^2}\ \underbrace{\boxed{E}}_{10^1}\ \underbrace{\boxed{F}}_{10^0}}_{\text{NÚMERO DE 6 ALGARISMOS}}$$

Todavia, as condições de partida devem ser obedecidas, ou seja, o número deve ter seis algarismos e a ordem dos algarismos da sequência de números informados não deve ser trocada. Assim, no número ≪778157260669103≫ os estudantes facilmente destacam os últimos seis algarismos como condição mínima, e partem para avaliação a partir da propriedade acima.

Comparando o dígito da posição A com os dígitos das posições à esquerda escolhe-se o maior, isto é 8. O raciocínio análogo deve ser repetido, compara-se o dígito B com os disponíveis posteriores a 8 e se escolhe o maior (7), e assim subsequentemente:

$$7\,7\,8\,1\,5\,7\,2\,6\,0 \quad \underbrace{6\,6\,9\,1\,0\,3}_{n^\circ\ de\ dígitos\ mínimos}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{7}\,\cancel{7}\,\boxed{8}\,1\,5\,7\,2\,6\,0\,6 \quad \underbrace{6\,9\,1\,0\,3}_{n^\circ\ de\ dígitos\ mínimos}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{7}\,\cancel{7}\,\boxed{8}\,\cancel{1}\,\cancel{5}\,\boxed{7}\,2\,6\,0\,6\,6 \quad \underbrace{9\,1\,0\,3}_{n^\circ\ de\ dígitos\ mínimos}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{7}\,\cancel{7}\,\boxed{8}\,\cancel{1}\,\cancel{5}\,\boxed{7}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\,\boxed{9} \quad \underbrace{1\,0\,3}_{n^\circ\ de\ dígitos\ mínimos}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{7}\,\cancel{7}\,\boxed{8}\,\cancel{1}\,\cancel{5}\,\boxed{7}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\,\boxed{9}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{3}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}\boxed{F} \leftrightarrow \boxed{8}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{3}$$

Esse problema é geralmente acessível aos estudantes uma vez que existe congruência entre o que o enunciado solicita e o tratamento a ser utilizado. Nesse caso, temos duas questões importantes: não é necessário reformular os dados informados no problema para achar qual o objeto deve passar por tratamento e o tratamento a ser utilizado é informado diretamente na questão, o termo *suprimir* é aplicado diretamente como a supressão dos dígitos (riscá-los). Problemas que exigem dos estudantes a aplicação de propriedades simples e que são congruentes entre o que o enunciado solicita e o tratamento que se deve efetuar sobre os objetos em análise são em geral mais acessíveis aos estudantes (DUVAL, 2011). A taxa de acerto em torno dos 90% pode evidênciar esta análise.

Problema II – *Qual é o resto da divisão do número* $702 \times 1405^3 + 28003^2$ *por 7?*

Esse problema ainda apresenta uma relação direta entre o que solicita o enunciado e o tratamento a ser utilizado. Porém, ele prevê que alguns conhecimentos prévios tenham sido apreendidos. É necessário que se saiba trabalhar com restos numéricos gerados por operações entre números, como por exemplo, multiplicações, potências, soma, subtração e divisão. Nesta perspectiva, todos os alunos que participaram do teste, teriam em potencial, a capacidade para solucionar a questão, já que haviam tido um aprendizado anterior sobre o tema: Critérios de divisibilidade, Teorema do Resto e Teorema Chinês do Resto.

Todos os estudantes que participaram do teste, inicialmente, calcularam os restos dos números 702, 1403 e 28003 na divisão por 7, todavia apenas exatos 2/3 acertaram a questão. Entre os erros comuns destacamos: a) abandono do enunciado do problema: a maioria dos erros ocorreu pela não retomada da expressão corretamente, tendo ficado as potências de fora do cálculo, na passagem *enunciado→resolução numérica*; b) não entendimento dos termos matemáticos: resto, quociente, divisor e dividendo.

Estes erros são comuns em matemática, pois é sobre as especificidades e terminologias de cada registro e sobre a articulação de registros que o ensino deveria ser centrado. Essas dificuldades de correspondência entre estrutura, designações e formações de representação em registros diferentes só podem ser rompidas quando os registros forem mobilizados. Qualquer atividade que se execute dentro de apenas um registro não enfrenta esse tipo de barreira.

Problema III - *De tempos em tempos certo cometa passa pela terra. Este intervalo de anos é sempre o mesmo e é chamado de período do cometa. Sabe-se que o cometa passou pela Terra nos anos de 1530, 1682 e 1910. Em que ano esse cometa passou pela terra pela última vez?*

Neste tipo de problema a dificuldade apresentada pelos estudantes é maior. Primeiro, porque os objetos sobre os quais recae o tratamento não são dados no enunciado diretamente, sendo assim, se torna necessário reorganizar os dados a fim de se obter os objetos. Segundo, porque o tratameto necessário aos dados pode ser ou não mencionado no enunciado ou não apresentar congruência semântica com o enunciado. Ou seja, é necessário converter o enunciado em informações pertinentes, e essa tarefa pode trazer dificuldades expressivas.

Grande parte dos estudantes foi capaz de reconhecer que existe um valor para o período e que este corresponde ao máximo divisor comum (*mdc*). Porém, muitos deles não conseguiram reconhecer que esse *mdc* é o *mdc* dos intervalos entre os anos e não o *mdc* dos anos. A frase "*este intervalo de anos é sempre o mesmo e é chamado de período do cometa*" parece levar esses estudantes a focar a atenção aos anos e não aos intervalos de anos, para executar o cálculo do *mdc*. O termo '*intervalo de anos'* remete diretamente aos valores informados, já que os valores informados são dados em intervalos de anos (*1530, 1682 e 1910).*

Ainda que os anos informados não possuam o mesmo intervalo entre si, um dos procedimentos observados nas soluções dos estudantes foi encontrar o período fazendo o *mdc* dos anos. As soluções apresentadas demonstram a dificuldade de compreensão do enunciado e do conceito de *mdc*. Neste problema, cerca de 90% dos estudantes cometeu o mesmo erro que o estudante que apresentou a resolução da figura 3. A não congruência semântica entre os objetos enunciados no exercício e aqueles sobre os quais o tratamento é necessário para a resolução é um fator que certamente dificulta a compreensão matemática. Isso assume valor quando se toma a taxa de acerto para a questão: apenas 10% dos estudantes obtiveram êxito. Este é um fato preocupante na perspectiva do ensino, pois mesmo havendo ocorrido uma discussão sobre o tema, sendo estudados e debatidos em aula, os alunos não conseguem mobilizar os conhecimentos adquiridos.

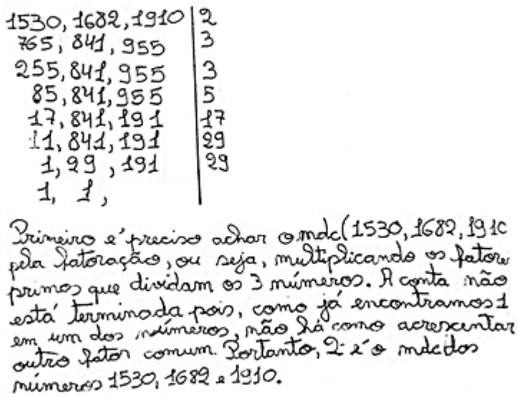

Figura 1: Resposta dada por um dos estudantes.

Na figura 2, pode-se observar uma resolução correta de um estudante que compreendeu o enunciado e o conceito de *mdc* e, desta forma, conseguiu solucioná-lo.

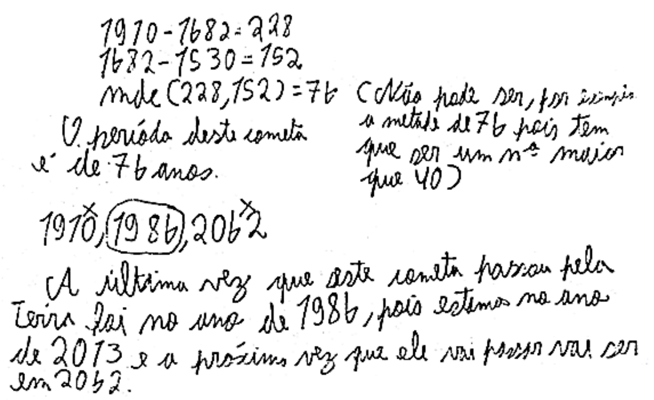
1970-1682=228
1682-1530=152
mdc(228,152)=76 (Não pode ser, por exemplo a metade de 76 pois tem que ser um nº maior que 40)
O período deste cometa é de 76 anos.
1910, 1986, 2062
A última vez que este cometa passou pela Terra foi no ano de 1986, pois estamos no ano de 2013 e a próxima vez que ele vai passar vai ser em 2062.

Figura 2: Resposta correta dada por um dos estudantes.

A retirada das informações pertinentes de um enunciado não é, como se poderia supor a princípio, trivial. Este processo é gradual e complexo, pois envolve as especificidades de cada registro de representação, como suas informações se organizam internamente em seu registro de partida e como estas devem ser representadas e relacionadas umas às outras em outro registro semiótico de chegada. É sobre toda atividade de resolução matemática que recai o valor de uma resposta, porque a atividade que exige a mobilização de registros semióticos pressupõe que tenha havido compreensão do conhecimento matemático envolvido (DUVAL, 2012b). Assim, a resposta final de um exercício não é o que mais importa, embora chegar a ela seja um indício de compreensão.

Consideremos um último exemplo:

Problema IV - *Considere dois números naturais, cada um deles com três algarismos distintos diferentes. O maior deles só tem algarismos ímpares e o menor só tem algarismos pares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é essa diferença?*

A diferença de custo cognitivo entre este problema e os dois primeiros é evidente levando em conta a taxa de acertos obtida para a questão: exatos 1/5 (20%) dos estudantes obteve sucesso na resolução. Todavia, a análise baseada na taxa de acertos precisa ser ampliada e tomada a partir de outros fatores que possibilitem o reconhecimento da origem dessas dificuldades. É necessário considerar os fatores de congruência semântica (DUVAL, 2004) na conversão de representações de um objeto matemático como preponderantes das dificuldades. A compreensão de um enunciado não é suficiente para que se possa chegar a uma resposta, sobremaneira se for necessário uma mudança de registro de representação. Abaixo apresentamos duas resoluções dadas por estudantes:

ISSN 2178-034X

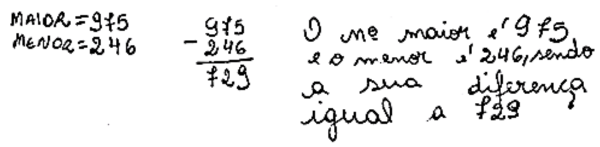

Figura 3: Resolução incorreta do problema.

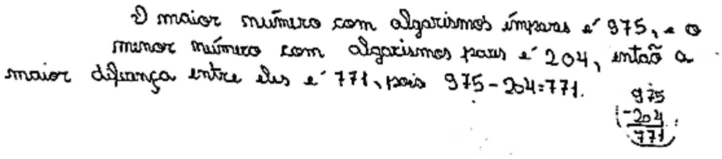

Figura 4: Resolução correta do problema.

O principal equívoco encontrado se refere à sentença "*menor (número) só tem algarismos pares*". Isso pode ser facilmente compreendido da seguinte forma: o enunciado solicita o maior número de três algarismos com todos os algarismos ímpares diferentes: então se obtém *975*, isto é, o maior algarismo possível ocupa a maior posição e assim subsequentemente. Esse raciocínio não se aplica para a sentença "*menor só tem algarismos pares",* porém esta foi a ideia utilizada pelos estudantes que erraram a questão. O raciocínio usado para o primeiro caso é congruente com o que a questão solicita, mas não no segundo caso. À medida que o maior número possível formado de três algarismos ímpares distintos é o número que começa com o maior deles seguidos dos dois menores um após o outro, isto é *9-7-5*, o menor número possível de três algarismos pares distintos não é o número que começa com o menor número par possível *seguido dos outros dois maiores em série* (4 e 6), isto é, *2-4-6*. Neste problema 80% dos alunos cometeram o erro de escolher o número 246 em detrimento ao número 204, que é o correto, embora não congruente com o tratamento que os termos e as condições sugerem.

4. Considerações Finais

Uma breve leitura dos problemas propostos e, considerando os tratamentos necessários e os fenômenos de congruência envolvidos entre o que solicita o exercício e a conduta de solução para obter a resposta, é possível perceber a diferença de custo cognitivo para resolução, sobretudo entre os dois primeiros e os dois últimos.

Os problemas discutidos neste trabalho não se mostram mais do que alguns exemplos matemáticos pertencentes à Aritmética. Dessa forma, o objetivo deste trabalho não é tão somente destacar as dificuldades enfrentadas na resolução dos problemas *aqui* apresentados ou de *outros semelhantes*. É por meio destes problemas, que se prestam à finalidade de exemplificação, que queremos chamar a atenção para as dificuldades enfrentadas pelo estudante na atividade matemática deste ramo específico: a Aritmética.

Estas dificuldades só podem ser contornadas à medida que se tem uma preocupação em conhecê-las e assim identificar suas fontes. Não basta à compreensão matemática a atividade intrarregistro, é necessária uma coordenação de diferentes registros, pois toda atividade 'mono registro' não é funcional e não permite a compreensão dos objetos matemáticos (DUVAL, 2003).

É fácil perceber que a atividade intrarregistro é acessível para os estudantes, no caso dos dois primeiros problemas. A atividade solicitada no enunciado ocorre diretamente sobre os objetos também designados diretamente no enunciado. O que não acontece nos dois últimos problemas por apresentarem duas características importantes: não informam diretamente o tratamento necessário a ser utilizado e não informam os objetos diretamente. Ou seja, demanda uma mudança de registro e tratamento de informações.

Os problemas III e IV são os que mais trazem dificuldades aos estudantes. Eles não são congruentes ao enunciado e os objetos não são informados diretamente. Vece *et al.* (2013) descreve essa diferença de acerto na passagem de problemas descontextualizados (estritamente matemáticos-tratamento direto), e aqueles onde existe um contexto e de onde as informações precisam ser extraídas e reorganizadas. Eles são, em geral, menos acessíveis aos estudantes.

Todo trabalho matemático passa por inconvenientes próprios da mobilização de seu conhecimento e de seus *sistemas semióticos próprios*. Todavia, é necessário para a compreensão integrativa do conhecimento e de todo desenvolvimento matemático. Assim, a análise aqui realizada também aponta para uma profunda reflexão sobre o tipo de ensino que tem sido promovido da matemática e não somente aos falantes da língua portuguesa. As dificuldades apresentadas pelos estudantes são recorrentes em todo globo como mostram as pesquisas de muitos autores em diversos países. Estas dificuldades de aprendizagem só poderão ser superadas à medida que, no ensino, se enfatize uma abordagem que leve em conta as especificidades de cada registro de representação e a importância destas especificidades em toda tarefa de conversão.

Os resultados obtidos a partir do ensino que geralmente é praticado é um indicativo de sua defasagem. Este ensino, chamado de ensino hermético

> "[...] se baseia em registros que provêm, geralmente, de um único sistema semiótico e, mesmo quando trata de mais de um sistema, não considera as possibilidades de articulação semiótica que pressupõe o reconhecimento simultâneo dos elementos semióticos que podem estar relacionados em cada sistema considerado" (MORETTI, THIEL, 2012, p. 379).

Nesta perspectiva, podemos afirmar que o ensino não atende à necessidade de mobilização dos conhecimentos matemáticos. Esta necessidade e coordenação de registros pressupõem, na verdade, que essas dificuldades sejam levadas em conta para que a matemática não seja mais uma das disciplinas com grande fonte de dificuldade e insucesso na vida escolar.

5. Referências

BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. 2005. 245 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: **MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

_________. **Semiosis y Pensamiento Humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Colombia. Tradução: Myriam Veja Restrepo, 1999. Edición en castellano, 2004.

_________. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização de Tânia MM Campos. **Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM**, v. 1, 2011.

_________. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a.

_________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 07, n.2, p. 266-297, 2012b.

LINS, R. C., GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Papirus Editora, 2005.

MORETTI, M.T., THIEL, A. A. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v.7, n.2, p. 379-396, 2012.

VECE, J. P.; SILVA, S. D.; CURI, E. Desatando os nós do sistema de numeração decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos alunos do 5º ano do ensino fundamental a partir de questões do SAEB/Prova Brasil. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** ISSN 1983-3156, v. 15, n. 1, 2013.