REPRESENTAÇÕES DA DERIVADA E A APRENDIZAGEM

Jayme do Carmo Macedo Leme
Centro Paula Souza
jayme.leme@cps.sp.gov.br

Sonia Barbosa Camargo Igliori
PUC/SP
sigliori@puc.br

Resumo:

Este artigo apresenta um estudo sobre a aprendizagem do conceito da derivada trazendo elementos da História e da aprendizagem nas suas diferentes representações. Há duas perspectivas de teorias sobre a aprendizagem, aquelas que focam no sujeito que aprende e aquelas que focam no objeto matemático. O objetivo deste artigo é analisar as representações numéricas, simbólicas e gráficas da derivada com foco no objeto. Este é um recorte de uma pesquisa mais ampla que trata dos dois enfoques. Refere-se a uma pesquisa de caráter exploratório, cujos dados são coletados em material bibliográfico. Como resultado pode-se indicar que a abordagem estudada, pode ocasionar limitações que podem refletir na aprendizagem.

Palavras-chave: Derivada; Aprendizagem; Representações da Derivada.

1. Introdução

Apresentamos nesse artigo um estudo que versa sobre a aprendizagem do conceito da derivada, mostrando elementos da História e referências conceituais da aprendizagem relativos às representações numérica, gráfica e simbólica da derivada, sendo recorte de uma tese de doutorado realizada no Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

O Cálculo Diferencial e Integral foi um marco para a evolução da humanidade no modo de se fazer ciência, sendo a derivada, um de seus conceitos fundamentais. Esse conceito matemático é também aplicado em outras áreas do saber como Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia entre outras.

Pesquisas da Educação Matemática do Ensino Superior tratam do processo de ensino e aprendizagem da derivada em diferentes vertentes, como a realizada por Ramos (2009), que buscou fazer um levantamento de dificuldades e concepções de alunos, no que se refere à compreensão do conceito de derivada e suas aplicações. Outros pesquisadores buscam elaborar atividades ou sequências didáticas a fim de otimizar o aprendizado da derivada, como a de D'Avoglio (2002) que propôs uma sequência didática, utilizando conceitos do cotidiano, para o favorecimento da aprendizagem. Também, há outro grupo de pesquisas que busca investigar aspectos de aprendizagem do conceito derivada, como o trabalho de Leme (2003), que apresentou uma reflexão sobre os aspectos processuais e estruturais da derivada à luz da teoria de Anna Sfard; Meyer (2003) investigou, sob o ponto de vista geométrico, elementos da imagem conceitual e definição conceitual relativa à derivada; e Godoy (2004) analisou a percepção dos alunos sobre derivada à luz da teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval.

Neste artigo, o direcionamento da pesquisa é relativo aos aspectos processuais e estruturais da derivada em suas diferentes representações, tendo como foco o objeto matemático. Trata-se de uma pesquisa exploratória, pois considera que:

> … tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. (Gil, 2008, p 27)

2. O conceito de derivada

A seguir, apresentamos elementos da História, a definição do conceito de derivada e alguns aspectos da aprendizagem relativos às representações da derivada com enfoque no objeto matemático, amparados em livros, artigos e pesquisas.

Com os elementos históricos pretendemos evidenciar alguns impasses epistemológicos que a humanidade enfrentou para conceber as definições atuais da derivada; com as definições evidenciamos seu caráter conceitual. E, por último, apresentamos uma categorização das diferentes representações desse conceito, na perspectiva do processo da aprendizagem.

2.1. Elementos Históricos

Nesse sucinto panorama da evolução da Matemática, amparado em Boyer (1959), destacamos que a Matemática sofreu, ao longo de sua História, transformações quanto sua natureza e fundamentos. Em tempos remotos, os antigos Babilônios e Egípcios construíram

ISSN 2178-034X

um corpo de conhecimentos matemáticos básicos que os auxiliavam a fazer observações de outros conhecimentos a partir do método dedutivo, pois notavam que as conclusões encontradas por esse método eram compatíveis com uma grande parte dos resultados encontrados pela observação. No entanto, esse método de validação não era satisfatório, levando a busca de uma Matemática que precedesse a experiência.

Houve um período de questionamentos sobre a possibilidade de se alcançar, pela razão ou experiência, algum conhecimento absoluto, pois a ciência aristotélica mostrava que, pela observação e lógica, poderia apresentar uma representação consistente de um fenômeno. É a partir dos elementos de Euclides, que a Matemática torna-se um padrão para interpretação da natureza, idealizada em relações dedutivas e embasadas em postulados consistentes.

No século XIV, percebemos uma visão qualitativa de movimento e variação, estendida durante os séculos XV e XVI, que renovou a convicção de que a Matemática é independente e anterior à experiência e conhecimentos intuitivos, colocando-a em uma posição menos crítica e mais prática, o que favoreceu o desenvolvimento da Álgebra no século XVII. O foco sobre os procedimentos em lugar das bases matemáticas perdurou durante o século XVIII em razão do sucesso das aplicações de Cálculo em problemas científicos e matemáticos. Com a busca de se encontrar uma fundamentação satisfatória para os conceitos da análise do infinito, no século XIX, o rigor matemático foi revivido, pois o conceito de infinito transcende toda intuição e análise.

Assim, o Cálculo teve suas origens nas dificuldades lógicas encontradas pelos matemáticos gregos para expressar ideias intuitivas sobre razões, proporcionalidade de segmentos de reta e infinito. Posteriormente, os matemáticos foram atentados a utilizar o conceito de infinitesimal, mesmo que logicamente insatisfatório; alguns séculos depois, excluiu o infinitamente pequeno das demonstrações em Geometria em razão do rigor do pensamento.

Em se tratando da derivada, no século XIV, o estudo quantitativo da variabilidade foi ressaltado, apoiado pela introdução da Geometria Analítica e da representação sistemática das quantidades variáveis. No século XVII, esse novo tipo de análise somada à aplicação dos conceitos de número foram as bases para elaboração dos algoritmos de Newton e Leibniz, que são usados até hoje. No entanto, não havia uma concepção das bases lógicas dos conceitos matemáticos, sendo o século XVIII, um período de tentativas de livrar o Cálculo da intuição de movimento contínuo e magnitudes geométricas. Só no século XIX, com a definição de número, uma base sólida foi completada, colocando a derivada como conceito fundamental do Cálculo.

Esse caminho de 2500 anos para se concluir uma base sólida, com conceitos precisos e logicamente definidos, tem seu preço, pois mesmo com a origem prática do Cálculo, o conhecimento matemático desvincula-se do mundo da experiência sensorial, da intuição e da cognição imediata, tendo como resultado construções abstratas bem-definidas, como as definições fundamentais do Cálculo (limite, derivada e integral) que podem então agora ser claramente observadas nos livros de Cálculo e demonstradas as operações que as envolvem.
Hoje, os livros didáticos de Cálculo trazem apenas fragmentos de sua história, pois não conseguem retratar o árduo caminho que a humanidade percorreu para chegar às definições apresentadas, mostrando apenas uma síntese da produção humana de um conhecimento científico, que foi moldado por recorrentes aperfeiçoamentos de sua estrutura para chegar aos resultados utilizados nos dias atuais.

2.2. Dados conceituais

Definição de limite de uma função em um ponto

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto da reta contendo um ponto p, não necessitando que f seja definida no próprio p. Seja L um número real.

Chama-se limite de uma função no ponto p, o $\lim_{x \to p} f(x) = L$, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - p| < \delta$.

Definição de derivada

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto da reta contendo um ponto p, tal que f seja definida no próprio p.

Chama-se derivada de *f* no ponto *p* e indica-se por $f'(p)$ o $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$, se existir e for finito.

2.3. Aspectos de Aprendizagem

Neste tópico tratamos da derivada à luz de teorias que propiciam observar diferentes abordagens desse conceito, como por exemplo, quando observado em sua representação numérica, gráfica e simbólica.

Nessa perspectiva, Kendal (2001) fez uma pesquisa que destacou esses aspectos sobre a derivada, conforme pode-se observar na Figura 1:

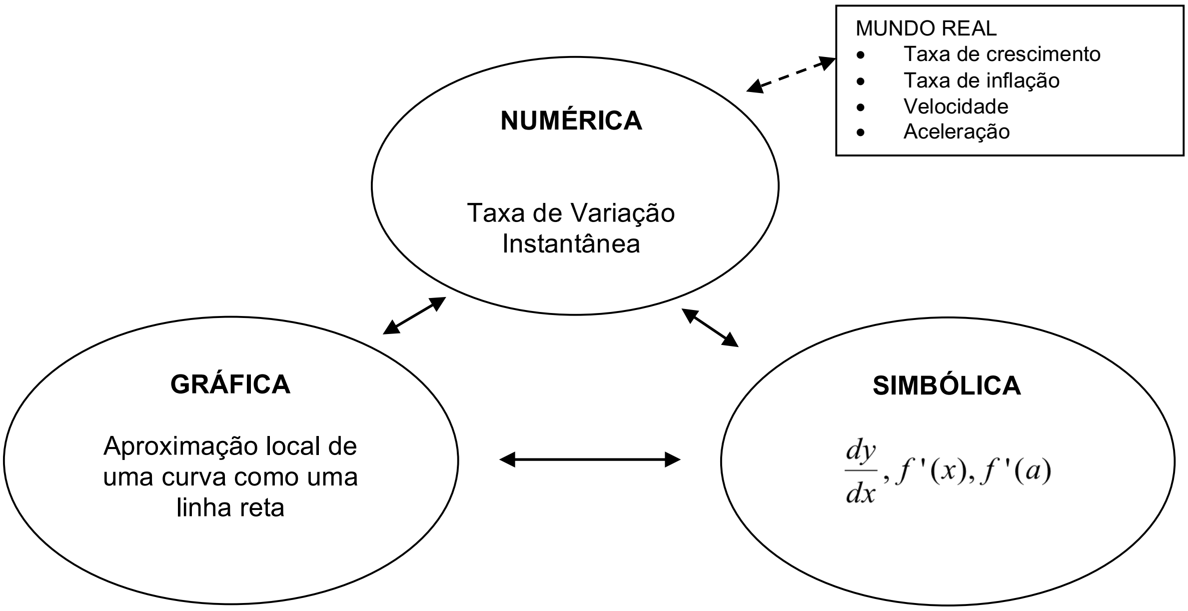

Figura 1 – Mapa das Representações da Derivada, adaptado dr Kendal, 2001.

Kendal (2001) ressalta que um aprendiz adquire esse conceito, quando consegue articular as representações gráfica, numérica e simbólica nos processos cognitivos de formulação e interpretação, elaborando dezoito habilidades necessárias para a aquisição deste conceito.

Assim, a derivada pode ser observada nas representações simbólica, gráfica e numérica. No aspecto simbólico a derivada é definida como:

$f'(p) = \lim_{x \quad p} \frac{f(x) \quad f(p)}{x \quad p}$, se o limite existir e for finito.

Conforme Tall e Vinner (1981, p. 152), o *conceito imagem* é a estrutura cognitiva que inclui as imagens mentais, as propriedades associadas e os processos. Logo a derivada traz em seu bojo uma considerável gama de propriedades e processos. Não pretendemos explorar todas as possíveis demonstrações que envolve a derivada, mas, sim, destacar um possível processo que pode ser desenvolvido pela definição da derivada e que trata de elementos simbólicos da derivada, sendo:

Se $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, com $n \neq 0$.

Demonstração

$$f'(p) = \lim_{x \quad p} \frac{f(x) \quad f(p)}{x \quad p} = \lim_{x \quad p} \frac{x^n \quad p^n}{x \quad p}$$

$$f'(p) = \lim_{x \quad p} \frac{\cancel{(x \quad p)}.[(x^{n \ 1}.p^0) + (x^{n \ 2}.p^1) + (x^{n \ 3}.p^2) + ... + (x^0.p^{n \ 1})]}{\cancel{(x \quad p)}}$$

$$f'(p) = (p^{n \ 1}.p^0) + (p^{n \ 2}.p^1) + (p^{n \ 3}.p^2) + ... + (p^0.p^{n \ 1}) = np^{n \ 1}, \text{ logo}$$

$$f'(x) = nx^{n \ 1}$$

Tal demonstração, assim como muitas outras possíveis de serem realizadas, pertencem aos processos relacionados a derivada, sendo desenvolvidos numa representação estritamente simbólica. É também por meio das demonstrações que são demonstradas as suas propriedades, como por exemplo:

Se f e g são deriváveis em p, $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

Já, na representação gráfica, a derivada pode ser concebida como a inclinação da reta tangente. Ressaltemos aqui que a determinação da reta tangente fazia parte dos problemas geométricos clássicos e desde Euclides (cerca de 300 a.c), período que já contemplava uma concepção da reta tangente a uma circunferência, como sendo a reta que intercepta essa circunferência em um único ponto. Desde então, os matemáticos ao longo dos séculos buscaram diferentes métodos em busca de ferramentas para determinar retas tangentes às curvas, como Arquimedes (287 - 212 a.C.), que possuía um procedimento para encontrar a tangente à sua espiral ou Apolônio (262 - 190 a.C.), que apresentou um método para encontrar retas tangentes à parábolas, elipses e hipérboles.

Hoje, é possível determinar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto p, por meio de manipulações geométricas que nos permitem observar certo movimento e,

ISSN 2178-034X

compreender a derivada na sua representação gráfica, como a inclinação da reta tangente, conforme visualizamos a sua construção nas Figuras 4, 5 e 6.

Seja f uma função e p um ponto do seu domínio, representados no gráfico a seguir:

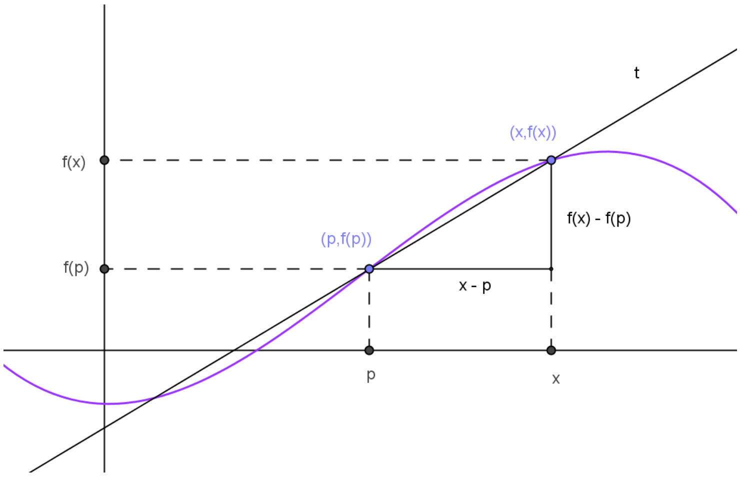

Figura 2 – Reta secante ao gráfico de f

A reta t é secante e intercepta o gráfico de *f* em (*p, f(p)*) e (*x, f(x)*). A inclinação da reta *t* é expressa por $a = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$

Tomando valores de *x* cada vez mais próximo de *p*, encontramos novas inclinações de outras retas secantes, conforme ilustrado pelos gráficos da Figura 5.

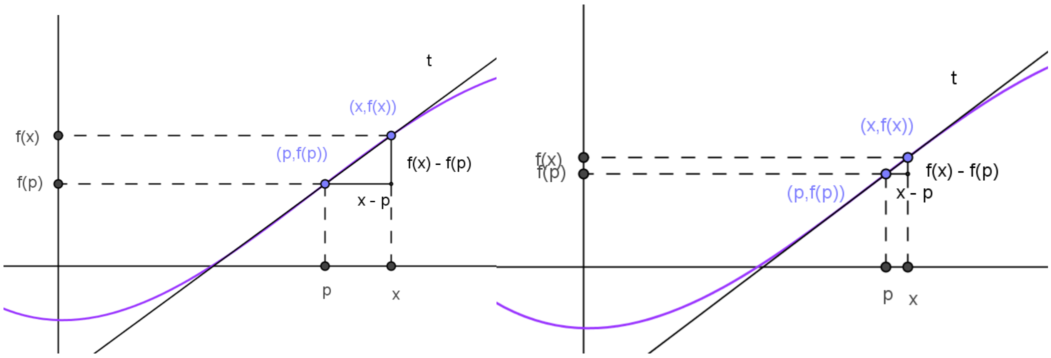

Figura 3 – Reta secante ao gráfico de f

Observamos, dessa forma, que o limite dos coeficientes $a = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, da reta t, quando x tende a p é dado por $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, e denotamos essa reta como a reta tangente ao gráfico da função f em p, conforme apresentado na Figura 6.

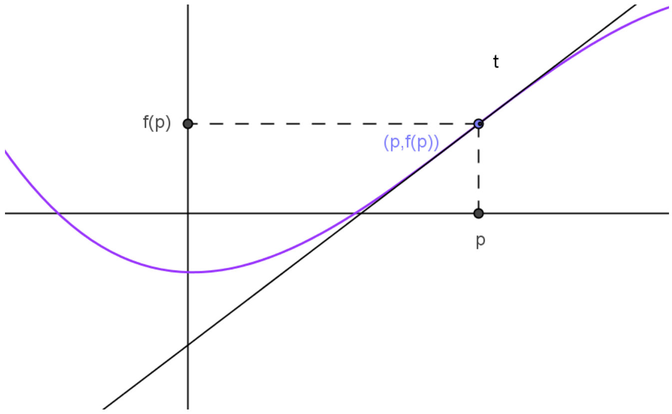

Figura 4 – Reta tangente ao gráfico de f em (p , (f(p))

Logo, podemos dizer que a reta t é tangente ao gráfico da função *f* em *p,* e é dada pela expressão *y = f'(p) x + b.*

Por último, apresentamos o estudo da derivada na representação numérica, sendo tratada como uma taxa de variação instantânea.

Por essa perspectiva, tomemos como exemplo, um dos primeiros conceitos estudados na Física, que é a variação da distância percorrida por um móvel em relação ao tempo decorrido. A taxa de variação desse móvel em relação ao tempo pode ser expressa pela relação $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ e é chamada de velocidade média.

Essa velocidade média pode ser calculada por $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}$, sendo s uma função dependente do tempo t.

Seja um móvel que percorre um trajeto por certo tempo e queremos determinar sua velocidade instantânea em certo instante p.

A velocidade média desse móvel do instante p até o instante t é expressa por $V_m = \frac{s(t) - s(p)}{t - p}$, porém, se queremos encontrar a velocidade instantânea em p, precisamos tomar arbitrariamente valores de t cada vez mais próximo a p, expresso então por $\lim_{t \to p} \frac{s(t) - s(p)}{t - p}$. Esse limite é então a taxa de variação instantânea quando t tende a p, ou seja, a derivada na representação numérica pode ser compreendida como uma taxa de variação instantânea. Tal observação pode também ser concebida em outras áreas como a Economia em que a derivada é aplicada na análise marginal para cálculos sobre funções de demandas, lucros, prejuízos podendo então maximizar os lucros e minimizar prejuízos.

3. Considerações Finais

Finalizamos esse artigo, destacando que o estudo da derivada quando enfoca diferentes representações leva em conta o objeto matemático e, assim sendo, apresenta algumas limitações, pois nessa abordagem a derivada, no aspecto simbólico, pode ser pensada como um processo computacional –determinação da função derivada utilizando-se manipulações algébricas– ao mesmo tempo em que pode ser tratada numa estrutura axiomática –composta por provas e demonstrações–. No caso de uma teoria com foco no sujeito, como a teoria dos Três Mundos da Matemática propostas por Tall (2013), uma representação simbólica pode ser concebida de formas distintas, sendo uma com foco nos procedimentos e outra, com foco em uma estrutura puramente axiomática, ampliando assim, a possibilidade de compreensão do conceito de derivada o que pode favorecer a aprendizagem desse conceito.

Os resultados sobre as limitações da derivada, decorrentes de uma análise pelas suas representações, é uma etapa parcial da pesquisa de doutorado na qual foi analisado esse conceito à luz dos Mundos da Matemática em que:

A derivada apresenta elementos perceptíveis a nossos sentidos e que vão formando imagens mentais para o sujeito que aprende, como perceber a derivada como a inclinação da reta tangente, como a retidão local de uma curva em um ponto ou como uma taxa de variação instantânea, sendo essas percepções relacionadas ao mundo corporificado.

Um segundo aspecto a ser destacado foi o dos processos relacionados à derivada. Um estudante iniciante de Cálculo, ao observar pela primeira vez uma atividade de Cálculo de derivada, poderá ficar estagnado pelo fato de desconhecer a simbologia f', pois essa simbologia não terá nenhum significado ao estudante por não estar relacionada a nenhuma rotina. No entanto, durante o aprendizado da derivada, ele irá deparar-se com inúmeras vezes com atividades como: Seja f a função definida por $f(x) = x^2$, determine f'. Atividades como essa vão permitindo ao estudante agregar diferentes rotinas relacionadas à derivação a simbologia f'. Em outras palavras, o mundo simbólico é aquele que o sujeito relaciona rotinas e processos às simbologias matemáticas.

O último ponto a ser ressaltado é o aspecto formal, que é diferente dos aspectos perceptíveis da derivada, como também dos simbólicos, pois, mesmo envolvendo manipulações algébricas, apresenta uma estrutura própria na qual com base nos axiomas, definições e/ou teoremas já demonstrados, novos teoremas podem ser provados.

Assim, consideramos que se pode favorecer a aprendizagem da derivada se os diferentes fluxos de pensamento são levados em conta, pela organização e pelo desenvolvimento de atividades que incitem a ativação desses fluxos. Essa expectativa está em adequação aos preceitos teóricos de Tall (2013), segundo o qual a aprendizagem de um conceito matemático ocorre pela exploração dos mundos corporificado, simbólico e formal.

Referências

BOYER, C.B. The History of Calculus: and its conceptual development. New York, Dover Publication, Inc., 1959.

DALL'ANESE, C. Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 2000.

GIL, A.C. Métodos e técnicas de pesquisa social – 6ª ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, L.F.S. Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

IGLIORI, S.B.C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M.C.R; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

KENDAL, M. Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system. Doutorado em filosofia, tese, Melbourne, 2001.

LEME, J.C.M. Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

LIMA, G.L. O Ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

MEYER, C. Derivada/reta tangente: imagem conceitual e definição conceitual. 2003. Diss. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Centro de Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUCSP, 2003.

RAMOS, V.V. "Dificuldades e concepções de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre derivada e suas aplicações." Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156 11.1, 2009.

SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 1991.

TALL, D. How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge University Press, 2013.