CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ESTUDO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: O CASO DA PROPORCIONALIDADE

João Batista Rodrigues da Silva
Instituto Federal de Ensino, Ciência e Tecnologia da Bahia
rodriz38@hotmail.com

José Roberto Costa Júnior
Universidade Federal do Pernambuco
mathemajr@yahoo.com.br

Resumo:
O presente artigo é um recorte da nossa dissertação de Mestrado, cuja temática envolve a História da Matemática como possibilidade pedagógica para a compreensão de conceitos matemáticos. O artigo tem como objetivo apresentar os métodos utilizados pelos Babilônios e Egípcios para lidarem com o conceito de proporcionalidade. Metodologicamente, o levantamento das informações acerca da utilização do conceito nessas civilizações foi realizado por meio de revisão de literatura em diversas obras referentes à História da Matemática. Os resultados coletados e analisados revelaram que essas civilizações já utilizavam o referido conceito em situações diversas, tanto em contextos do cotidiano, quanto em situações internas à própria Matemática; mostrando, também, métodos distintos dos quais muito se utilizam na atualidade, a exemplo da regra de três. De modo geral, os resultados indicaram que a compreensão de conceitos matemáticos pode partir de contextos históricos.
Palavras-chave: História da Matemática; Proporcionalidade; Compreensão.

Introdução

Neste estudo buscamos uma correlação entre a História da matemática e a sua importância e a compreensão de conceitos matemáticos. A História da Matemática como área de pesquisa apresenta uma variedade de caminhos a serem percorridos. Entre esses tantos caminhos escolhemos um deles, inclusive, apontado pelo Professor Hans Wussing (1997 apud BARONI e NOBRE, 1999, p. 130) "como um dos mais investigados no panorama internacional: A história de problemas e conceitos". Já que parte do estudo traça um histórico sobre o conceito de proporcionalidade.

Em nossa pesquisa traçamos um breve histórico sobre o conceito de proporcionalidade onde estudamos sua origem em antigas civilizações, verificando a maneira como esse conceito era empregado nessas civilizações; buscamos conhecer alguns problemas onde esse conceito estava presente, bem como identificá-lo no procedimento de resolução de problemas, seja como um conceito elaborado a partir da própria situação Matemática em questão ou como um método de resolução.

Situamos nossa reflexão numa perspectiva histórica, na medida em que nos interessamos sobre a proporcionalidade na condição de um conceito amplo, tão antigo quanto à própria matemática e que, envolvendo relações entre grandezas, relaciona-se a outros conceitos matemáticos, além de está presente em várias situações cotidianas.

A nossa concepção acerca do conceito de proporcionalidade se aproxima do que Spinillo (1997, p. 41) define como sendo pensamento proporcional: "o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade de estabelecer relações" e, ainda concordamos com Nunes (2003), quando afirma que o conceito de proporcionalidade, em sua origem bastante simples, nada mais é do que a relação entre duas variáveis.

Esta concepção do conceito de proporcionalidade como algo simples em suas origens nos remete a estudar os aspectos históricos que estão relacionados à Matemática de povos da antiguidade, a exemplo dos egípcios, babilônios, gregos, entre outros.

Neste estudo o conceito de proporcionalidade está fundamentado na perspectiva da História da Matemática, ou seja, por meio dela estudamos este conceito em situações do cotidiano de civilizações remotas, o que nos permite conhecer sobre seu desenvolvimento. Esta escolha toma como base o fato de que a História da Matemática investiga a Matemática enquanto ciência em construção, levando em consideração aspectos sociais e culturais, os quais exercem forte influência na construção desse conhecimento.

Nessa perspectiva, Brolezzi (1991) enfatiza que a ordem lógica mais adequada para o ensino da Matemática não é a do conhecimento matemático sistematizado, mas sim aquela que revela a Matemática enquanto ciência em construção. Nesse sentido, identificar fatos históricos que envolveram a proporcionalidade poderá ser útil para a compreensão deste conceito e, consequentemente, para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

A História da Matemática possibilita caminhos para a pesquisa em Educação Matemática, sobretudo por aqueles que supomos ainda não claramente esclarecidos, ou melhor, não investigados:

> [...] o estudo da história da matemática se apresenta como uma oportunidade para entender tanto problemas que possam motivar a construção de novos conceitos quanto a sequência de esquemas desenvolvidos pelos indivíduos ao procurar uma solução significativa para um problema (D'AMBROSIO, 2007, p. 402).

A História da Matemática nos possibilita o conhecimento de grande parte do que foi produzido, desenvolvido e disseminado no campo da Matemática em diversas civilizações. São vários os estudiosos que se dedicam a esta área do conhecimento no sentido de descobrir

ISSN 2178-034X

e explorar fatos da Matemática do passado, esclarecer questões duvidosas e também promover a História da Matemática como uma proposta pedagógica inovadora para os currículos escolares, inclusive na formação de professores de Matemática.

Apresentamos a seguir alguns recortes das evidências do conceito de proporcionalidade em civilizações como a egípcia e babilônica.

A civilização egípcia se forma por volta do ano 4000 a.C., estabelecendo-se às margens do Rio Nilo e possuindo características de uma sociedade mais evoluída, quando comparada com as comunidades neolíticas. Esta nova forma de sociedade se caracterizou pelo uso da agricultura, do comércio e também por questões ligadas à posse de terra, irrigação, construção de monumentos, entre outros fatores.

O conhecimento matemático advindo da civilização egípcia advém em parte dos papiros que eram usados para registrar a Matemática por eles utilizada. Estes documentos resistiram ao tempo, graças ao clima seco daquela região. O mais conhecido e talvez mais importante seja o Papiro de Rhind, descoberto por H. Rhind em 1858 e que foi compilado pelo escriba Ahmes, por volta do ano 1650 a. C. Este papiro é composto por uma série de tabelas e apresenta 85 problemas entre os quais, problemas de quantidades envolvendo equações, atualmente denominadas de equação do 1º grau, resolvidas pelo método da falsa posição. Segundo Boyer (1974) alguns destes problemas pode ser descritos como aritméticos e outros como algébricos.

O problema 72 do papiro de Rhind, conforme Boyer (1974, p. 12), é um exemplo de problema aritmético e é descrito da seguinte forma: “qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10?”. Já o problema de número 63 pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, em partes proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} e \frac{1}{4}$.

Para Boyer (1974) muitos dos problemas compilados por Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalente à regra de três. Por exemplo, para o problema 72 é apresentada a seguinte solução: $\frac{100}{10} \cdot 45$ ou 450 pães.

Conforme Boyer (1974), com relação ao problema de número 63, a solução é obtida calculando o quociente de 700 pela soma das frações na proporção, que resulta em 400 e calculando $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} e \frac{1}{4}$ deste valor. Dessa forma, a soma das frações na proporção,

$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+6+4+3}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$ corresponde a $\frac{700}{\frac{7}{4}}=700\cdot\frac{4}{7}=100\cdot 4=400$, então, um inteiro corresponde a 400.

Assim, $\frac{2}{3}\,de\ 400=\frac{2\cdot 400}{3}=\frac{800}{3}=266\frac{2}{3}=266+\frac{2}{3}=266{,}66...$

$\frac{1}{2}\,de\ 400=200$

$\frac{1}{3}\,de\ 400=\frac{400}{3}=133\frac{1}{3}=133+\frac{1}{3}=133{,}33$

$\frac{1}{4}\,de\ 400=100$

Temos que $266\frac{2}{3}+200+133\frac{1}{3}=100 \quad 700$

Os antigos egípcios já utilizavam, embora de forma implícita, o conceito de proporcionalidade na resolução de problemas práticos, dos quais, alguns aparecem registrados no papiro de Rhind. Este conceito aparece no chamado método da falsa posição, que se caracteriza como uma abordagem algébrica de resolução de problemas. Neste tipo de problema não se faz referência a objetos concretos e também não exige operações entre números conhecidos.

O que percebemos é que os problemas foram elaborados de forma que as suas soluções correspondem a equações lineares do tipo x + ax = b ou x + ax + bx = c, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. O método da falsa posição, em sua essência, consiste em um procedimento de tentativas e erros. A título de exemplo, vamos nos ater ao problema de número 24 do Papiro de Rhind, que possui o seguinte enunciado: sabendo que *aha* (nome dado ao valor desconhecido) mais um sétimo de *aha* dá 24, encontre o valor de *aha.*

Obviamente, a solução dada por Ahmes não é aquela presente nos atuais livros utilizados nos meios escolares, mas é característica do processo do método da falsa posição. Um valor específico, provavelmente falso, era assumido para *aha* e, as operações indicadas eram efetuadas sobre esse número suposto. O resultado era então comparado com o resultado que se pretendia obter e, usando proporções eles chegavam à resposta correta.

A solução do problema apresentado é descrita por Eves (2004, p. 73), da seguinte maneira: "o escriba egípcio escolhia um valor para a quantidade desconhecida *(aha)* que evitasse a fração $\frac{1}{7}$. Uma boa escolha seria o próprio número 7". Aqui é importante observar que este valor 7 atribuído inicialmente à quantidade desconhecida não tinha a pretensão de ser um palpite verdadeiro; era, realmente, uma tentativa que logo em seguida seria apropriadamente corrigida.

Aplicando a esta posição inicial as condições do enunciado do problema, o escriba raciocinava da seguinte forma: se a resposta fosse 7, então $7+\frac{1}{7}$ de 7 = 8. Como o resultado esperado era igual a 24, a posição inicial assumida para a incógnita (7) era claramente falsa.

Entretanto, tendo em vista que o resultado obtido (8) precisava ser multiplicado por (3) para se chegar ao valor da soma correta (24), na mesma proporção deveria ser multiplicada a falsa posição (7) para se obter o valor correto da incógnita. Assim, o método da falsa posição apontava para um valor de "aha" igual a 7 x 3 = 21.

Já no que se refere às evidências do conceito de proporcionalidade no contexto babilônico, inicialmente podemos mencionar o conhecimento matemático contido nas tabletas babilônicas, a exemplo da tableta de multiplicação, disposta por duas colunas, cuja escrita era feita em forma de cunhas, tanto na horizontal quanto na vertical; as cunhas escritas na vertical representavam as unidades, enquanto as cunhas horizontais representavam as dezenas do nosso sistema decimal, vale ressaltar que a base utilizada pelos babilônicos era a sexagesimal.

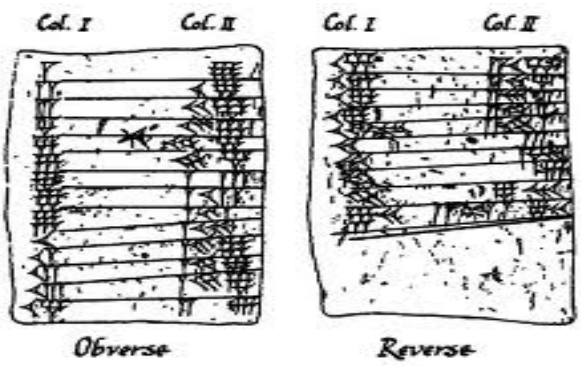

FIGURA 1: TABLETA BABILÔNICA

Como podemos observar na figura anterior, na primeira linha da primeira coluna há uma cunha vertical, na segunda duas, na terceira três; naturalmente interpretada como sendo 1, 2, 3; e assim por diante até a 9ª linha. Na décima linha aparece um símbolo novo, uma cunha angular, em posição horizontal. Esta cunha é interpretada como sendo 10; na linha seguinte vê-se uma cunha angular e uma vertical, na décima segunda linha, uma cunha angular e duas verticais e assim por diante, podendo, sem dificuldade, ser interpretado por 11, 12 e assim sucessivamente.

Na segunda coluna desta mesma tableta encontram-se na primeira linha nove cunhas verticais; na segunda, uma cunha angular e oito cunhas verticais; na terceira, duas cunhas angulares e sete verticais, constituindo-se numa tábua de multiplicação por nove. Assim, percebemos que os babilônios utilizavam o raciocínio multiplicativo que é um tipo de raciocínio proporcional e este fato evidencia que esta civilização já usava o conceito de proporcionalidade há aproximadamente 4000 anos. Atualmente representamos esse conhecimento da seguinte maneira:

COL I	1	2	3	4	5	6	...
COL II	9	18	27	36	45	54	...

Ao calcularmos as razões entre a segunda e a primeira coluna, verificamos que:

$$\frac{9}{1}=\frac{18}{2}=\frac{27}{3}=\frac{36}{4}=\frac{45}{5}=\frac{54}{6}=\ldots=9$$

Na sétima linha da segunda coluna vêem-se uma cunha vertical, um espaço e três cunhas verticais, enquanto que na oitava linha vê-se uma cunha vertical, seguida de uma angular e mais duas verticais.

Certamente não podemos interpretar essa primeira cunha como sendo 1 (uma unidade) e, neste contexto, o que faz sentido é supor que representa 60. Portanto, estas linhas foram transcritas como sendo 1,3 e 1,12, supondo que o primeiro 1 é equivalente a 60. Assim:

$$1{,}3 = 1\cdot 60 + 3\cdot 60^0 = 63\,(7^{a}\text{ linha})$$

$$1{,}12 = 1\cdot 60 + 12\cdot 60^0 = 72\ (8^{a}\text{ linha})$$

1. Resolução de Problemas de Proporcionalidade

A proporcionalidade é um conceito de considerável relevância para a Matemática e costuma aparecer em várias situações cotidianas tais como: na compra e venda, nas receitas de cozinha, na construção civil e nos demais ramos da atividade da ciência e tecnologia. Além disso, o conceito de proporcionalidade está relacionado a muitos outros conceitos matemáticos, como porcentagem, fração, função linear, taxas, inclinação do gráfico de uma função, etc.

O conceito de proporcionalidade tem sido estudado com interesse pela psicologia no que se refere ao desenvolvimento cognitivo de sujeitos escolarizados e também não escolarizados. Esses estudos são realizados porque a proporcionalidade possui a propriedade da resolução de problemas matemáticos abrangerem diversos contextos, não se restringindo unicamente a problemas matemáticos de sala de aula.

Resolver problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade vai muito além da mera aplicação de algoritmos, a exemplo da regra de três, costumeiramente associada à proporcionalidade. A compreensão de problemas que envolvem a proporcionalidade requer inicialmente, o estabelecimento das relações que existem entre as grandezas ou variáveis. Segundo Spinillo (1997), o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.

Para Schliemann e Carraher (1997) o estudo da proporcionalidade na escola se restringe apenas à estratégia da regra de três, baseando-se nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{x}$, as igualdades $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ e $a..x=b.c$ são verdadeiras e, portanto, $x=\frac{b.c}{a}$. Se o professor em seu trabalho com proporcionalidade utiliza apenas este tipo de procedimento, deixa de explorar as relações existentes entre as grandezas consideradas, consequentemente perde a oportunidade de desenvolver juntos aos seus alunos o pensamento proporcional.

Dessa forma, entendemos que a resolução de proporcionalidade deve explorar as relações existentes entre as grandezas em questão, bem como enfatizar a relação deste conceito com outros conceitos matemáticos.

2. Importância do estudo da História da Matemática

A História da Matemática tem se tornado assunto de debates e motivos de investigação por parte de estudiosos da Educação Matemática. Neste contexto, uma das questões relevantes ao debate é a inserção da História da Matemática na formação de professores. Este debate é de suma importância para a construção de elementos teórico-metodológicos que contribuam com a prática pedagógica dos professores, no que refere ao conhecimento histórico matemático, bem como a utilização desse conhecimento em sala de aula.

No Simpósio Nordeste de História da Matemática e Educação Matemática, realizado em Natal – RN, Radford (2009) apontou algumas razões que justificam o estudo da História da Matemática na formação de professores:

a) A História da Matemática deve ser parte da cultura geral do professor.
b) A História da Matemática ajuda o professor a compreender melhor o conteúdo que deve ensinar.
c) A História da Matemática ajuda o professor a entender o desenvolvimento das idéias matemática.
d) A História da Matemática pode dar idéias ao professor sobre a maneira como apresentar o conteúdo (RADFORD, SLIDES, 2009).

Esses pontos não somente são razões para a inserção da História da Matemática como uma disciplina do currículo na formação de professores, mas também se constituem em razões para o crescimento cultural do professor enquanto agente mediador do processo de ensino-aprendizagem.

Fauvel & Maanen (2000, p.110) também destacam as funções básicas do uso da História da Matemática na formação inicial de professores:

a) Levar os futuros professores a conhecer a matemática do passado (função direta da História da Matemática);
b) Melhorar a compreensão da matemática que eles irão ensinar (funções metodológicas e epistemológicas);
c) Fornecer métodos e técnicas para incorporar materiais históricos em sua prática (o uso da História da Matemática em sala de aula);
d) Ampliar o entendimento do desenvolvimento do currículo e de sua profissão (a História do ensino de matemática)

Observamos que as concepções dos autores citados anteriormente, acerca da História da Matemática para a formação do professor de Matemática, convergem para uma mesma direção, ou seja, a História da Matemática possui a possibilidade de dar subsídios gerais, não só na formação do professor, mas também na sua prática pedagógica cotidiana. Este caráter unificador de vários elementos contributivos tanto para a formação inicial quanto continuada de professores de Matemática encontra sustentação de cunho teórico-prático nos pressupostos teóricos da História da Matemática.

Um dos possíveis e maiores problemas que o Ensino de Matemática vem apresentado ao longo dos últimos anos parece está relacionado ao fato de que a maioria das pessoas, inclusive muitos professores de Matemática, apresentam a concepção de uma Matemática perfeita, pronta e acabada, sem levar em conta fatores históricos envolvidos no desenvolvimento desta. Segundo Miguel e Miorim :

ISSN 2178-034X

> Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido (MIGUEL e MIORIM, 2008, p. 52).

Esta concepção equivocada da Matemática por parte de alguns professores poderá afetar, de forma direta, a formação de seus alunos, criando nestes uma mistificação do conhecimento matemático e da própria Matemática. A História da Matemática pode contribuir para amenizar este equívoco a partir do momento que proporciona ao professor o conhecimento de uma Matemática que evoluiu ao longo do tempo. Muitos pesquisadores encontraram dificuldades, cometeram erros e acertos em suas investigações, mas isso possibilitou desmitificar a Matemática como uma disciplina que nasceu pronta e só foi desenvolvida e usufruída por gênios.

3. Metodologia

O presente estudo apresenta característica de pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico. Segundo Fiorentini e Lorezanto (2009, p.61) "[...] se a questão de pesquisa puder ser respondida sem a coleta de dados empíricos, não havendo, portanto, uma pesquisa de campo, então a investigação poderá ser um pesquisa teórica ou simplesmente bibliográfica".

A revisão da literatura aqui realizada faz parte de um estudo mais amplo, com base na pesquisa de mestrado, cuja temática é a História da Matemática, de onde se originou a maior parte de fonte de informações. Para Gil (2002, p.44) "a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". Em nosso estudo, dedicamos um período de seis meses para a seleção, leitura e análise de obras da História da Matemática.

4. Resultados

Estudos como os de Spinillo (1997), Schliemann e Carraher (1997), Nunes (2003) e Post, Behr e Lesh (2001) indicam que o estudo do conceito de proporcionalidade está atrelado à aplicação da regra de três como uma única estratégia para a resolução de problemas que envolvem o referido conceito.

Post, Behr e Lesh (2001) afirmam que compreender o raciocínio proporcional apenas pelas soluções de problemas de valor desconhecido é muito limitado, tendo em vista que este tipo de problema envolve soluções algorítmicas e muitas vezes desprovida de significado.

O conceito de proporcionalidade é muito mais abrangente que a aplicação do algoritmo da regra três para a resolução de problemas matemáticos. A aquisição e posterior desenvolvimento cognitivo deste conceito pode se dá por meio de estratégias diversificadas, ou seja, deve-se priorizar o raciocínio proporcional de maneira que o indivíduo possa estabelecer relações entre as grandezas envolvidas no problema. Além do mais, o conceito de proporcionalidade está presente em muitas situações do cotidiano das pessoas, relacionado a outros conceitos matemáticos, bem como em outras áreas do conhecimento. Entendemos que para que ocorra uma compreensão adequada deste conceito, o estudo da proporcionalidade deve explorar os diversos contextos em que este conceito está inserido.

Explorando o conhecimento matemático egípcio e babilônio acerca da utilização da proporcionalidade, percebemos que este é explorado em situações distintas; com os egípcios, observamos, por meio das leituras, a aplicação do conceito em contextos práticos do cotidiano, desenvolvendo uma matemática mais utilitária, cujo interesse era a resolução de problemas do dia a dia, no entanto, percebemos que utilizavam métodos diversos, a exemplo do método da falsa posição.

Já os babilônios utilizavam o mesmo conceito para fins mais intelectuais, onde uma das aparições da proporcionalidade é em uma tableta de multiplicação, cujo raciocínio proporcional está implícito nesta construção.

Segundo os estudos citados anteriormente, a proporcionalidade é tratada apenas pelo algoritmo da regra de três, porém ao estudarmos as tabletas de multiplicação dos babilônios, percebemos a relação existente entre esses dois conceitos; trata-se de abordar a proporcionalidade por meio do estabelecimento de relações entre grandezas e/ou variáveis.

5. Considerações Finais

O conceito de proporcionalidade na Matemática é de fundamental importância, tendo em vista sua conexão com outros conceitos da mesma área, sua relação com outros campos do conhecimento, além de ser um conceito presente em ações do cotidiano de muitas pessoas. Por outro lado, esse conceito parece ser ao que tudo indica, pouco explorado no processo de ensino da Matemática e, quando trabalhado, não costuma ser abordado de maneira compreensível.

Como foi já mencionado neste artigo, o conceito de proporcionalidade costuma ser abordado nas aulas de Matemática, apenas por problemas matemáticos que utilizam o algoritmo da regra de três, explorando apenas o cálculo mecânico e procedimental, deixando

ISSN 2178-034X

de lado o mais importante a ser abordado que é a proporcionalidade como a relação entre grandezas e/ou variáveis; tornar clara essas relações no estudo da proporcionalidade é essencial para a compreensão do conceito, daí a importância de conhecer outras formas de abordar esse conceito, a exemplo dos contextos históricos.

A História da Matemática está repleta de situações que revelam o desenvolvimento, bem como a aplicação de conceitos matemáticos em sua origem, a exemplo do conceito de proporcionalidade aqui estudado. Como foi apresentado ao longo deste artigo, o referido conceito na civilização egípcia era utilizado na resolução de problemas do cotidiano, com caráter utilitário; o mesmo era explorado por meio de estratégias diversas e distintas das atuais, a exemplo do método falsa posição. No que diz respeito aos babilônios, o conceito de proporcionalidade também era explorado, mas ao contrário da Matemática egípcia, observamos que o emprego desse conceito estava mais relacionado ao estudo da Matemática em si mesma, a exemplo das tabletas de multiplicação.

Por fim, concluímos que um revisitar pela História da Matemática pode contribuir para o conhecimento da origem, do desenvolvimento e da aplicação dos conceitos matemáticos; este fato pode desmistificar a Matemática como ciência pronta e acabada, onde as ideias e os conceitos matemáticos sempre estiveram na forma como os conhecemos hoje, além de proporcionar um novo olhar para as estratégias de resolução de problemas matemáticos dos estudantes de Matemática, que muitas vezes utilizam métodos diversos dos que foram ensinados nas aulas e que por vezes aproxima-se de métodos utilizados em civilizações antigas, berço do nosso conhecimento matemático.

6. Referências

BARONI, R. L. S., NOBRE, S. **A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática.** In: BICUDO, Maria A. V., (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, p. 129-136, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: uma introdução ao sentido do valor didático da História da Matemática.** São Paulo, 1991. 75 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1991.

D'AMBROSIO, B. S. **Reflexões sobre a História da Matemática na formação de Professores.** Revista Brasileira da História da Matemática. Especial n. 1, p. 399-406, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FAUVEL, J.; van MAANEN, J. (Eds.) **History in Mathematics Education: the ICMI study.** Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: precursos teóricos e metodológicos.** 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

GIL, A. C., **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, Mª. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 1ª ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NUNES, T. **É hora de ensinar proporção.** Revista Nova Escola. Ano XVII, n. 161. São Paulo, 2003.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. **A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra.** In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). As idéias da algebra. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Saraiva, 2001. p. 89-103.

RADFORD, L. **Tendências Internacionais em História da Matemática e Educação Matemática.** Natal: Luís Radford, 2009. 38 slides, cor azul.

SPINILLO, A. G. **Proporções nas séries iniciais do primeiro grau.** In: A. Schliemann; D. Carraher; A. Spinillo; L. Meira; J. Falcão; N. Acioly-Régnier (Org.). Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. **Razões e proporções na vida diária e na escola.** Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.

ISSN 2178-034X