NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: EM BUSCA DE UM MODELO PARA OS PROBLEMAS DE PARTILHA DE QUANTIDADE[1]

*Jadilson Ramos de **Almeida***

Universidade Federal rural de Pernambuco

jadilsonalmeida@hotmail.com

Resumo:

Este texto é parte de uma tese de doutorado que tem por objetivo propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por alunos da educação básica ao resolverem problemas de partilha de quantidades. Trazemos, aqui, a versão a priori do modelo construída a partir da análise de indícios caracterizadores do pensamento algébrico revelados nas estratégias escritas mobilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas de partilha. Utilizamos, nessa etapa da pesquisa, os resultados da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011). Após nossa análise, percebemos que as estratégias dos alunos indicam a existência de um modelo que vai desde o nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando por um nível incipiente (nível 1), por um intermediário (nível 2) e por um nível consolidado de pensamento algébrico (nível 3).

Palavras-Chave: Pensamento algébrico; Modelo; Níveis; Problemas de partilha.

1. Introdução

Autores como Lins e Gimenez (2005) consideram que o fracasso em álgebra significa, muitas vezes, o fracasso absoluto na escola, e que um dos principais obstáculos ao aprendizado da álgebra é que ela representa um momento de seleção na educação escolar. Ainda segundo esses autores, uma grande dificuldade no trabalho com a álgebra escolar é perceber a existência de uma ruptura epistemológica nessa passagem do raciocínio aritmético para o algébrico, o que demanda uma transição para a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico-matemático.

Talvez por conta disso, muitas pesquisas são realizadas com o propósito de entender o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças. Essas pesquisas vêm mostrando a necessidade de diversificar as atividades propostas aos estudantes com o intuito de desenvolver esse raciocínio matemático (ANDRADE; BECHER, 2011; BORRALHO; BARBOSA, 2011; PONTE; VELEZ, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012).

[1] Esse artigo apresenta a versão preliminar de um modelo que está sendo construído pelo autor em sua tese de doutorado em Ensino das Ciências e Matemática na UFRPE sob a orientação do professor Dr. Marcelo Câmara.

Entretanto, para fazer o aluno desenvolver o pensamento algébrico, além de o professor ter o domínio de situações que levem a isso, acreditamos que seja necessário, também, saber em que nível de desenvolvimento o aluno se encontra, pois, se o professor propor situações que necessitem de um nível de desenvolvimento muito avançado para alunos que estejam em um nível básico, essas situações, provavelmente, não ajudarão no desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos, já que eles não conseguirão respondê-las.

Algumas pesquisas, como as de Fiorentini, Fernades e Cristovão (2005) e as de Godino et al (2014) chegam a apontar a existência de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos. A pesquisa de Fiorentini, Fernandes e Cristovão teve por objetivo investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino da álgebra elementar e, a partir de suas observações, indicam a existência de fases de desenvolvimento do pensar algebricamente. Já Godino e seus colaboradores tinham, em sua pesquisa, o objetivo de apresentar um modelo no qual se diferenciam níveis de pensamento algébrico elementar para ajudar na formação dos futuros professores de matemática, porém, sem realizar nenhum estudo com alunos da educação básica.

É com bases nessas pesquisas que surgiu o interesse em responder, nesse texto, a seguinte questão: é possível propor um modelo que indique níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por alunos ao resolverem problemas de partilha?

Resolvemos escolher um tipo de situação, os problemas de partilha de quantidades, por alguns motivos. Em primeiro lugar, acreditamos que os alunos podem estar em um ou outro nível dependendo do tipo de situação a ser respondida. Em segundo lugar, os problemas de partilha são, segundo Almeida e Câmara (2014), os mais propostos nos livros didáticos brasileiros para o ensino de equações polinomiais do 1º grau. E, as pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) indicam que alguns alunos utilizam estratégias mais sofisticadas que outros na resolução desse tipo de problema, apontando para possíveis níveis de desenvolvimento.

2. Caracterizando pensamento algébrico

Kieran (1992) faz uma diferenciação entre o pensamento aritmético e o algébrico. Para essa pesquisadora, o pensamento aritmético está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, enquanto que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e com o "uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional" (p. 4). Portanto,

> [...] o pensamento algébrico pode ser interpretado como uma abordagem às situações quantitativas, que evidencia os aspectos relacionais das mesmas, com recurso a ferramentas que não são necessariamente letras usadas como símbolos e que podem ser utilizadas como suporte cognitivo para a introdução e sustentação do discurso mais característico da álgebra escolar (KIERAN, 1996, p. 274-275).

Outro pesquisador que tenta diferenciar o pensamento algébrico do aritmético é Radford (2009, 2011). Para ele, enquanto nesse último lidamos com quantidades conhecidas, no pensamento algébrico lidamos com quantidades indeterminadas de uma maneira analítica, ou seja, tratamos quantidades desconhecidas (por exemplo, incógnitas ou variáveis) como se fossem conhecidas e realizamos cálculos com elas como fazemos na aritmética, com os números conhecidos.

Seguindo esse caminho, Blanton e Kaput (2005, p. 43) caracterizam o pensamento algébrico como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade".

Neste artigo adotaremos "pensamento algébrico" como a capacidade de analisar e estabelecer relações, de expressar ou explicar a estrutura de um problema, ou seja, construir um modelo matemático, generalizar essas relações, operar com o desconhecido como se fosse conhecido, ou seja, de forma analítica, produzindo significado para a linguagem e os objetos algébricos (KIERAN, 1992; BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009, 2011).

3. Problemas de partilha

Um problema de partilha se caracteriza por ter uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em partes desiguais e desconhecidas (MARCHAND; BEDNARZ, 1999). Podemos visualizar um exemplo desse tipo de problema no exemplo a seguir:

João, Paulo e Carlos têm juntos, 72 figurinhas. Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas têm cada um?

Representamos esse problema no esquema a seguir, no qual podemos perceber que para o estudante realizar a conversão do enunciado em linguagem natural para a equação, em linguagem algébrica, é necessário estabelecer relações entre as informações, entre os dados colocados no problema. É a capacidade de estabelecer essas relações e expressá-las em uma linguagem matemática que caracteriza o pensar algebricamente.

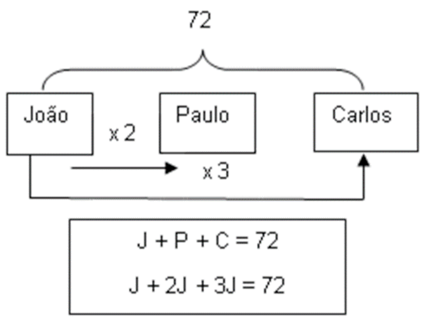


Figura 1. Estrutura do problema de partilha

Estudos em história da matemática indicam que os problemas de partilha estão intimamente associados às origens da álgebra, tal como a conhecemos hoje, a partir da necessidade de repartir heranças e resolver situações do cotidiano. Além disso, pesquisas como as de Marchand e Bednarz (1999) e Oliveira e Câmara (2011) indicam que esse tipo de problema pode favorecer a passagem da aritmética à álgebra, uma vez que leva o estudante a estabelecer relações entre as informações do enunciado.

4. Resultados

Esse artigo é um recorte de uma tese de doutorado que está sendo desenvolvida e, que tem por objetivo propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por alunos ao resolverem problemas de partilha de quantidades. Para a construção do modelo aqui apresentado analisamos as estratégias escritas mobilizadas para resolver a esse tipo de problemas de 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental, sendo 195 alunos brasileiros de três escolas do Recife e 147 estudantes canadenses de quatro escolas da província do Québec[2]. Acreditamos que as estratégias adotadas podem revelar indícios de pensamento algébrico que indiquem em que nível de desenvolvimento o aluno se encontra.

Temos, a partir de então, a caracterização dos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico. Gostaríamos de ressaltar, entretanto, que nosso modelo está sendo

[2] Os protocolos foram cedidos por Oliveira e Câmara (2011) de uma pesquisa realizada em 2009 com o objetivo de identificar as estratégias mobilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Participaram da pesquisa 342 alunos, e cada um respondeu a sete problemas de partilha.

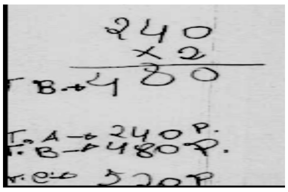
ISSN 2178-034X

construído a partir de um tipo específico de problema de estrutura algébrica, os problemas de partilha com duas relações. Portanto, dizer que o aluno se encontra no nível consolidado de pensamento algébrico, não significa que ele tenha condição de resolver todas as situações que necessitem da mobilização dessa forma de pensar.

4.1. Nível 0 (ausência de pensamento algébrico)

Nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno não consegue mobilizar elementos caracterizadores dessa forma de pensar para resolver problemas de partilha. Portanto, podemos dizer que o aluno que se encontra nesse nível não consegue resolver um problema de partilha com duas relações, ou o entende como um problema de estrutura aritmética, uma vez que ele tem condições apenas de lidar com objetos particulares expressos por meio de diversas linguagens, como a natural, a numérica, a simbólica ou a gestual. Nesse nível, o aluno pode até utilizar símbolos para se referir a um valor desconhecido, entretanto, esse valor é obtido como resultado de operações sobre valores conhecidos, ou seja, sobre objetos particulares. Podemos observar, nos exemplos 1 e 2 a seguir, respostas de alunos a problemas de partilha que se encontram nesse nível.

***Ex. 1:** Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*



***Ex. 2:** Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?*

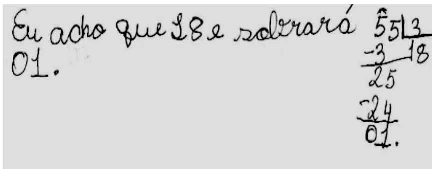


*Figura 2***.** Exemplos da estratégia total como fonte e dividir por 3

Percebemos que o aluno, ao responder o exemplo 1, adota a estratégia *"total como fonte"*. Nessa estratégia o sujeito associa o total do problema ao valor de uma das incógnitas (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Nesse caso, o aluno adota o total de 240 pontos como sendo a pontuação do time A e, em seguida realiza as duas operações para encontrar os outros valores. Multiplica 240 por 2 para encontrar a pontuação do time B, que foi o dobro do time A, e soma 40 pontos ao total de pontos do time B para encontrar a pontuação do time C.

Já o aluno que responde ao exemplo 2 adota a estratégia *"dividir por 3"*. Nesse tipo de estratégia o aluno "inicia o problema dividindo o total fornecido para as três incógnitas do problema, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais" (OLIVEIRA; CÂMARA 2011), ou seja, ele não considera as relações do enunciado, entendendo-o como uma simples situação de estrutura aritmética, que pede para dividir 55 figurinhas para três pessoas em partes iguais.

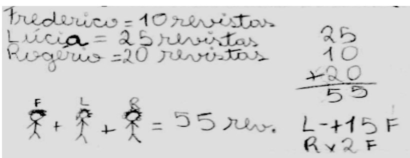
Portanto, acreditamos que esses alunos não mobilizam nenhum elemento caracterizador do pensamento algébrico, indicando estarem no nível 0, ou seja, ao resolver problemas de partilha com duas relações eles mobilizam essencialmente elementos caracterizadores do pensamento aritmético, pois, como nos coloca Kieran (1992), pensar aritmeticamente está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado.

Além dos alunos que tentam responder os problemas de partilha utilizando as estratégias essencialmente aritmética (dividir por 3 e total como fonte), acreditamos que os que não tentam responder os problemas e os que realizam cálculos quaisquer, como por exemplo somar os valores que estão no enunciado, se encontram, também, no nível 0.

4.2. Nível 1 (pensamento algébrico incipiente)

Nesse nível de desenvolvimento o aluno já tem condições de perceber as relações existentes entre as informações contidas no enunciado de um problema de partilha com duas relações, ou seja, inicia o trabalho com objetos gerais, entretanto, ainda não consegue representá-los em linguagem exclusivamente simbólica, adotando, para tal, linguagem natural, numérica, gestual, pictórica e elementos da linguagem simbólica, o que podemos caracterizar de uma linguagem sincopada, que, também é percebida na evolução histórica da álgebra (FIOTENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Podemos observar respostas que caracterizam esse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico nos extratos a seguir.

Ex. 3: *Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?*



Ex. 4: *Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm cada um?*

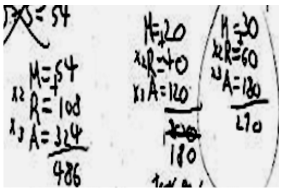


Figura 3. Exemplos da estratégia atribuir valores

Os alunos que respondem aos exemplos 3 e 4 adotam a estratégia *"atribuir valores"*. Nessa estratégia "o aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas" (OLIVEIRA; CÂMARA; 2011).

Poderíamos dizer, a princípio, que essa estratégia é aritmética, uma vez que se vale de cálculos essencialmente aritméticos. Entretanto, acreditamos que o aluno que adota essa estratégia está mobilizando alguns elementos caracterizadores do pensar algebricamente. Por exemplo, as respostas aos exemplos 3 e 4 mostram que os sujeitos perceberam as relações existentes entre as informações contidas no enunciado do problema, o que não acontece com as respostas aos exemplos 1 e 2, e perceber essas relações é um dos elementos centrais que caracterizam o pensamento algébrico.

Percebemos, também, que em ambas as respostas os estudantes utilizam uma linguagem sincopada, ou seja, formada por abreviações, letras, números, desenhos e sinais de operações. Blanton e Kaput (2005), Radford (2009, 2011), dentre outros, defendem que um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico é a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais, isto é, em uma linguagem cada vez mais simbólica. Portanto, acreditamos que o aluno que responde a um problema de partilha dessa forma já está iniciando o processo de modelação, uma vez que está criando uma linguagem matemática "própria" para representar o problema.

Diante disso, acreditamos que esse nível de pensamento algébrico se aproxima do *"pensamento algébrico factual"* proposto por Radford (2009). Nesse caso, a indeterminação, o desconhecido, ou seja, a incógnita, não aparece de forma explícita nos registros dos estudantes, apesar das letras utilizadas por ele na resolução do problema. As letras parecem ser utilizadas para que o aluno visualize, ou mentalize, as relações existentes entre os dados do problema.

Por exemplo, na resposta ao exemplo 3, a expressão registrada pelo aluno "L + 15F" é a conversão da sentença "Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico", e "R x 2F" é a conversão de "Rogério tem o dobro de revista de Frederico". Entretanto, esse aluno não consegue ir além desses registros, e construir a equação "F + F + 15 + 2F = 55", ou, em uma linguagem algébrica tradicionalmente utilizada nos ambientes escolares, "X + X + 15 + 2X = 55".

Isso ocorre porque a incógnita, nesse caso, a quantidade de revistas de Frederico, que deverá ser utilizada como fonte para a construção da equação, é considerada, pelo aluno que se encontra nesse nível, como um espaço vazio a ser preenchido pela eventual substituição de termos particulares (RADFORD, 2009). Por isso a utilização da estratégia "atribuir valores".

Por exemplo, o aluno que responde ao exemplo 4 substitui, na primeira tentativa de resposta, a quantidade de chaveiros de Marta por 54, ou seja, substitui o "X" da equação por um valor particular, e, após realizar os cálculos, percebe que o valor escolhido não pode representar a quantidade de chaveiros de Marta. Percebendo que o valor escolhido é maior que o necessário, ele escolhe um valor menor na segunda tentativa. Substitui, então, a quantidade de chaveiros de Marta por 20, e, após os cálculos, chega à conclusão que o valor escolhido é menor que o necessário. Ele partiu então para a terceira tentativa, chegando, enfim, a resposta do problema.

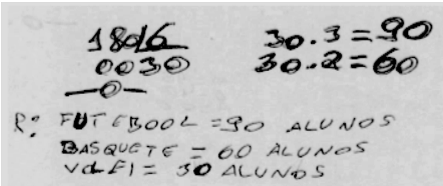
Apesar desse nível ocorrer dentro de uma camada primária de generalidade, não podemos afirmar que ele seja uma forma simples de reflexão matemática. Muito pelo contrário, essa forma de pensar algebricamente mobiliza mecanismos mentais sofisticados, uma vez que o aluno é levado a perceber as relações existentes entre os dados do enunciado para que, em seguida, as represente em uma linguagem matemática cada vez mais sofisticada, chegando, em um nível mais desenvolvido, na linguagem algébrica simbólica formal.

4.3. Nível 2 (pensamento algébrico intermediário)

Nesse nível, o aluno consegue perceber as relações existentes entre as informações do enunciado. Entretanto, ele consegue ir além dos que se encontram no nível 1, percebendo a equação correspondente ao problema. Essa equação é, em alguns casos, montada mentalmente, ou, em outros casos, o aluno até consegue utilizar símbolos essencialmente algébricos para representar as quantidades de cada personagem do problema, porém, não consegue colocar as relações entre as quantidades em uma equação na forma tradicionalmente utilizada no ambiente escolar. Podemos observar no extrato a seguir exemplos de respostas que revelam indícios de pensamento algébrico intermediário.

ISSN 2178-034X

Ex. 5: *Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?*



Ex. 6: *Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?*

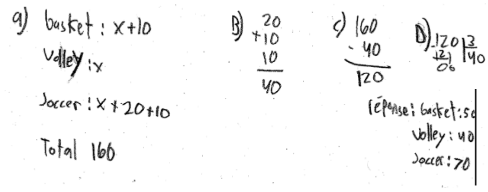


Figura 4: Exemplos da estratégia algébrica com registro sincopado.

A estratégia mobilizada pelos alunos que respondem aos exemplos 5 e 6 é denomindada por Oliveira e Câmara (2011) de *"estratégia algébrica"*, em que, "ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para deteminar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas" (p. 7). O que diferencia o estudante que se encontra nesse nível com o que se encontra no nível de pensamento algébrico consolidado é a forma como ele representa o problema.

Na resposta ao exemplo 5, o aluno, ao que tudo indica, equaciona o problema mentalmente, mesmo não registrando a equação "V + 3V + 2V = 180", por isso a divisão de 180 por 6. Nesse caso, diferente do aluno que se encontra no nível 1, em que tem que partir de um valor particular, o aluno do nível 2 já adota a quantidade de alunos que praticam vôlei como a incógnita fonte da equação, ou seja, nesse nível a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009, 2011), mesmo não aparecendo, em alguns casos, como na resposta ao exemplo 5, nos registros do aluno.

Na resposta ao exemplo 6 a incógnita já aparece no registro do aluno. No caso, o aluno representa a quantidade de alunos que praticam vôlei por X, e a partir de então consegue representar a quantidade dos alunos que praticam basquete, "X + 10", e a quantidade dos que praticam futebol "X + 20 + 10", além de registrar que o total de alunos é igual a 160. Porém, apesar de estabelecer as relações das incógnitas, ele não consegue se desprender da informação contida no enunciado, e chegar no registro da equação que representa a conversão do problema.

Acreditamos que essa situação de não desprendimento da informação contida no enunciado é o que Radford (2009) chama de "narrativas vivas dos fenômenos estudados", ou seja, os sinais da resposta ao exemplo 6, que são sinais tradicionalmente utilizados em álgebra escolar, mantêm uma "experiência corporificada e perspectiva do processo de objetivação" (Ibid.). Por conta disso, o aluno não chega no registro da equação. Entretanto, não chegar ao registro da equação não significa que o aluno não está pensando em seus registros como uma relação entre quantidades, o que caracteriza uma equação, e que, segundo Lins (1992) revela que o aluno está pensando algebricamente.

4.4. Nível 3 (pensamento algébrico consolidado)

Nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno já é capaz de identificar, representar e manipular objetos gerais, no caso, as incógnitas do problema, uma vez que tem condições de perceber as relações existentes entre as informações do enunciado de um problema de partilha com duas relações, além de convertê-lo para uma linguagem algébrica formal, ou seja, representar o problema por meio de uma equação polinomial do 1º grau, como mostram os exemplos a seguir.

Ex. 7: *Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?*

$$x+5+x+2+x=37$$
$$3x=37-5-2$$
$$3x=30$$
$$x=\frac{30}{3}$$
$$x=10$$

Joana → 10
Paulo → 15
Roberto → 12

Ex. 8: *Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*

$$2x+x+2x+40=240$$
$$5x+40=240$$
$$5x=240-40$$
$$x=\frac{200}{5}$$
$$x=40$$

B → 80
A → 40
C → 120

Figura 5: Exemplos da estratégia algébrica com registro algébrico formal.

Percebemos, portanto, que nesse nível a indeterminação, a incógnita, se torna um objeto explícito ao discurso, e podemos perceber claramente a representação do geral no registro do aluno. Nesse caso, a fórmula, a equação, deixa de ter uma natureza "perspectiva", ou seja, deixa de ser uma experiência corporificada do objeto, como as respostas dos alunos do nível 2, e passa a significar coisas de uma forma totalmente abstrata (RADFORD, 2009).

Além disso, o desconhecido passa a ser tratado como conhecido. Na resolução da equação o aluno manipula as incógnitas como se fossem números conhecidos, ou seja, utiliza as regras das operações aritméticas. Acreditamos, assim como Lins (1992), que essa forma de tratar o desconhecido é revelada em um nível mais evoluido do pensamento algébrico.

Essa forma de representar os objetos gerais distancia a representação final do problema em linguagem matemática, isto é, a equação não é uma leitura linear do problema,

ISSN 2178-034X

mas, sim, uma fórmula que representa todas as informações do problema, mantem um distanciamento do contexto. E isso caracteriza, segundo Radford, a força da álgebra, em que os símbolos algébricos têm a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata, ou seja, construir um modelo matemático para representar problemas do cotidiano, o que muitos autores defendem como uma das vertentes do pensamento algébrico, a modelagem (LINS, 1992; BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009).

5. Conclusões

Chegamos, ao final de nossas análises, em um modelo que vai de um nível em que não se encontra, nas respostas dos alunos, indícios de pensamento algébrico, que denominamos de nível 0, passando por um nível incipiente de pensamento algébrico, em que nas respostas dos alunos começam a aparecer alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico, o nível 1, e por um nível intermediário do pensamento algébrico, o nível 2, em que as respostas dos alunos se aproximam das respostas tradicionalmente esperadas, e, por fim, o nível 3, em que o pensamento algébrico dos alunos se encontra em um nível consolidado.

Na construção desses níveis (0, 1, 2 e 3) adotamos, como elemento principal, a estratégia de base e o registro adotado pelo aluno na resolução dos problemas de partilha, uma vez que verificamos, assim como as pesquisas de Oliveira e Câmara (2011), que o aluno tende a utilizar a mesma estratégia e o mesmo registro para todos os problemas de partilha que compõem o teste.

No quadro a seguir trazemos uma síntese dos resultados encontrados em nossa primeira fase da pesquisa.

Quadro 1. Número e percentual de alunos por nível

	Nível 0	**Nível 1**	**Nível 2**	**Nível 3**	**Total**
Frequência	101	199	25	17	342
Percentual	29%	58%	8%	5%	100%

Verificamos, a partir dos resultados exposto no quadro 1, que a maior parte dos participantes da pesquisa conseguem resolver problemas de partilha adotando a estratégia “atribuir valores”. A utilização dessa estratégia pela maioria dos alunos talvez seja explicada pelo fato de os participantes da pesquisa se encontrarem matriculados em um ano anterior ao que se começa, pelo menos no Brasil, o ensino formal de álgebra.

Talvez por conta disso também, encontramos tão poucos alunos nos níveis 2 e 3, apenas 13% dos participantes. Os alunos que se encontram nesses níveis já adotam uma estratégia essencialmente algébrica, com diferenças apenas nos registros. Enquanto no nível 2 o registro utilizado é mais sincopado, formado por números, desenhos, algumas letras e sinais de operações, porém sem a formação da equação da forma que tradicionalmente é trabalhada na escola, no nível 3 o aluno já utiliza um registro algébrico formal, chegando à equação esperada.

Referências

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática. In: **Boletim GEPEM**, n. 64 (Online), 2014.
ANDRADE, L. S.; BECHER, E. L. As representações semióticas e suas contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. In: **Journal for Rescarch in Mathematics Education**. v. 36, n. 5. 2005.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**. Vol. 4, nº 1[10]. 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores**. Lisboa, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes- Cristovao2.doc. Acesso em: 02 de novembro de 2010.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. In: **Enseñanza de las Ciencias**, (Online), v. 32, n. 1. Espanha, 2014

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning**. National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, New York, 1992.

_________. The changing face of school algebra. In: ALSINA,C. Et Al. (Eds.), **ICME 8: Selected Lectures**. Seville: S. A. E. M. Thales. 1996.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 5ª Edição. Campinas. Papirus, 2005.

MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **In Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. In: **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro-RJ, Nº 59, p. 53-68, 2011.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Lyon – França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6> Acesso em 18/06/2015.

___________. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **A global dialogue from multiple perspectives**. Editora Springer. Berlin, 2011.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. In: **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, nº 1, p. 206-222, 2012.