

## EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR-GT4 DA SBEM

### TEXTO 1: ÊNFASE NAS PESQUISAS ENVOLVENDO GEOMETRIA

*José Carlos Pinto Leivas  
Centro Universitário Franciscano  
leivasjc@unifra.br*

#### **Resumo:**

Neste artigo apresentamos um texto que tem por objetivo promover o debate entre os componentes de uma mesa redonda sobre o ensino superior. Focamos na Geometria e seu ensino, com pesquisas relativas a este nível, tecendo algumas considerações do que julgamos ser procedente ser abordado junto ao GT4 da SBEM. Para tal, fizemos um levantamento de trabalhos apresentadas em dois eventos que julgamos fundamentais para a divulgação da pesquisa no Brasil que são: Seminário Internacional de Pesquisa em Ensino de Matemática – SIPEM da SBEM, junto ao GT4 e Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEMAT, ambos nas edições de 2012 e 2015. Verificamos que, comparativamente a outras áreas, há poucas pesquisas em Geometria no ensino superior, especialmente em outras geometrias que não a euclidiana, bem como tendências atuais. Não foram encontradas pesquisas envolvendo tendências para o ensino de Geometria no ensino superior.

**Palavras-chave:** Ensino Superior; geometria; tendências; pesquisas.

#### **1. Introdução**

O Grupo de Trabalho no Ensino Superior da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – GT4 - é organizado de modo a que participem pesquisadores que desenvolvam atividades de pesquisa no Ensino Superior em suas diversas nuances. Neste artigo, elaborado como subsídio para uma discussão em mesa redonda, iremos articular algumas ideias a respeito de Geometria e seu ensino neste nível de escolaridade de modo complementar com outras duas falas dos componentes da mesa, que estamos propondo, envolvendo outras áreas da Matemática.

Iremos nos ater a alguns aspectos de pesquisas em Geometria [euclidiana, não euclidianas e analítica]. É bem sabido por todos que discutem o seu ensino, no qual nesta área do conhecimento, em geral, os aspectos ligados à Geometria de Euclides, parecem merecer pouca atenção nos currículos, tanto na Educação Básica quanto na Superior, dentre aqueles que são publicados. Os demais não têm sido focados nas pesquisas, via de regra.

Leivas (2009) observou, em pesquisa realizada em oito currículos de Licenciatura em Matemática de universidades gaúchas, que apenas em uma delas a Geometria Analítica e o Cálculo constituem uma mesma disciplina sendo desenvolvida em dois semestres letivos. Em

apenas dois projetos de curso é contemplado minimamente o estudo de Geometrias Não-Euclidianas e dois envolvendo Geometria Fractal. Cinco currículos fazem uso de recursos tecnológicos para o ensino, não sendo explicitado que o sejam para a Geometria. Três cursos trazem indicativos de abordagem de Topologia e Geometria Diferencial e quatro algum tratamento de tendências atualizados para o ensino da área. Em termos de visualização quatro desses currículos a utilizam, porém no que diz respeito à planificação de sólidos geométricos e construção de modelos desses. Poucos são aqueles que utilizam algum tópico de Geometria Descritiva e Desenho Geométrico que parecem ser dois temas abandonados nos currículos da formação de professores.

Entendemos que o ensino atual em Geometria não pode se alienar de tópicos como visualização pois, pesquisa publicada por Batanero et al. (1992), (FIORENTINI e LORENZATO, (2006)), geometria, visualização e representação espacial e pensamento geométrico estavam em linhas de pesquisa de programas internacionais de mestrado e doutorado.

A partir deste entendimento, propomos discutir algumas tendências que julgamos oportunas para o ensino de Geometria no Ensino Superior e, portanto, sendo objeto de interesse para o GT4.

## 2. Algumas questões

A partir do que Davis e Hersh (1995) apontam como questões internas da Matemática, e porque não da Geometria, salientamos: os símbolos, a abstração, a generalização, a formalização e a demonstração. Neste primeiro semestre um estudante que inicia um curso universitário de Educação Física nos EEUU nos pede auxílio para tentar compreender alguns aspectos matemáticos da disciplina que todos os estudantes daquela instituição necessitam cursar. Em nosso amistoso diálogo pelo Skype afirmávamos do quanto básico era o tema e ele, desesperado com a simbologia da fórmula

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

sequer atinava interpretar cada um dos símbolos ali existentes, quanto mais efetuar as operações exigidas para chegar à solução do problema.

Davis e Hersh (1995) partem do exemplo de obtenção do traçado de uma linha reta por um carpinteiro sobre a madeira, com todas as imperfeições oriundas do grafite e/ou do

instrumento guia, para o posterior corte. Afirmam: “Contrastando com a linha reta real e concreta, existe o conceito mental da abstração matemática de uma linha reta ideal. Na sua manifestação idealizada, desaparecem milagrosamente todos os acidentes e imperfeições da sua concretização física” (DAVIS E HERSH, 1995, p.127). No livro I de Euclides encontramos “E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma” (OS ELEMENTOS/EUCLIDES, 2009, p. 97) e esta definição ilustra o quanto se fez necessário, desde os tempos de Euclides, o uso da abstração em Geometria. Já na reorganização da Geometria por Hilbert, reta é caracterizada como um sistema de objetos atendendo “certas relações mútuas e indiquemos estas relações por palavras tais como ‘estar situado’, ‘entre’, ‘congruente’; a descrição precisa e, para fins matemáticos, completa destas relações, é dada por meio dos *axiomas da geometria*.” (OLIVEIRA, 2003, p. 1).

No entender de Davis e Hersh (1995) a generalização difere da abstração, embora sejam, as duas, frequentemente, interpretadas como sendo a mesma ideia. Exemplificamos isto com a afirmação: a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ . Assim, abstrair o conceito de reta da Geometria Euclidiana para outros modelos teóricos é fundamental para a compreensão do mundo geométrico.

Courant e Robbins (2000) afirmam que a realidade física que se encontra além dos conceitos de ponto, reta, plano e axiomas correlatos, como inicialmente se conduz o estudante à sua compreensão, algumas vezes necessitam ser modificados se quisermos que eles sejam adequados para descrever fenômenos físicos. “Porém, se os axiomas formais não estiverem mais ou menos de acordo com as propriedades dos objetos físicos, então a Geometria seria de pouco interesse.” (p.265). Nesse sentido, a criação dos modelos de Poincaré ou de Klein, por exemplo, para uma Geometria Hiperbólica exigem um nível de abstração e de generalização, os quais deveriam fazer parte da formação em nível superior de um professor que irá ensinar Geometria. Além desses, o significado de uma reta num modelo de Geometria Esférica, exige um nível de compreensão maior do que o que usualmente é feito na escola básica e, portanto, estão a exigir pesquisas que envolvam a formação do professor de Matemática.

### **3. Pesquisas envolvendo geometrias no ensino superior no SIPEMAT e no SIPEM**

Por considerarmos que os eventos: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática –SIPEMAT e Seminário Internacional de Pesquisa em Ensino de Matemática – SIPEM, são importantes no cenário brasileiro da pesquisa na área de Educação Matemática, apresentamos um levantamento realizado nos anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa

em Educação Matemática – 3º SIPEMAT, realizado em Fortaleza em 2012, do 4º SIPEMAT, realizado em Ilhéus em 2015; do V SIPEMAT, realizado em 2012, em Petrópolis e do VI SIPEMAT, realizado em Pirenópolis em 2015. A busca foi feita a partir do título do trabalho e do resumo, nos quais constava o tema e o envolvimento no ensino superior nos primeiros por não serem alocados especificamente neste nível, enquanto que nos outros dois nos dirigimos diretamente aos trabalhos apresentados no GT4.

Dos 741 trabalhos propostos no 3º SIPEMAT, foi verificado que, em apenas 6 publicados, foram encontrados resultados de pesquisa envolvendo algum tipo de geometria no Ensino Superior e mais cinco envolvendo relatos de experiência relacionados. No primeiro, com base nas concepções de Fischbein (1993) e Duval (1993), os autores analisam e interpretam as dificuldades dos estudantes, relativas ao uso de hipótese e tese, no contexto da demonstração em Geometria Analítica. No segundo, o autor apresenta uma possibilidade de ensino de Geometria Hiperbólica com o uso de Geometria Dinâmica para a criação do Disco de Poincaré. O autor conclui que, por meio do software, é possível auxiliar a entender uma nova métrica bem como ocasionar dúvidas a respeito de princípios geométricos estabelecidos.

O terceiro trabalho aborda pesquisa realizada com estudantes de final da Licenciatura em Matemática e teve por objetivo analisar as contribuições da Geometria Fractal na formação do professor de Matemática. O seguinte teve por objetivo analisar como acadêmicos de matemática aceitariam a ideia da soma dos ângulos internos de um H-Triângulo da Geometria Hiperbólica ser menor que  $180^\circ$ , ao construírem tal triângulo com o software GeoGebra e compará-lo com o triângulo euclidiano.

No quinto artigo, de cunho teórico, os autores discutem a influência da filosofia kantiana, dominante tanto pela igreja como pela academia em meados do século XIX, na aceitação de novas geometrias, as ditas Não-Euclidianas. No seguinte, seus autores apresentam pesquisa realizada com estudantes de Pedagogia e Licenciatura em Matemática, na qual avaliam o conhecimento de conceitos relativos às figuras espaciais e as atitudes frente à Geometria nos dois cursos

Encontramos, além desses, alguns outros relatando algum tipo de experiência, dentre os quais destacamos um que relata um curso de Cálculo Diferencial e Integral II, num curso de Ciências Naturais e Matemática, em que foram utilizados softwares para validar o Teorema de Pappus-Guldin. Os alunos escolhiam um sólido, o qual poderia ser caracterizado como de revolução e, seguindo um roteiro prévio para um trabalho experimental e outro computacional, coletaram dados e os compararam entre si para chegarem à validação pretendida.

Dos 626 trabalhos propostos no 4º SIPEMAT, apenas seis deles abordaram pesquisas relacionadas à Geometria no Ensino Superior. No primeiro deles é apresentada uma pesquisa apontando algumas contribuições do Desenho Geométrico, em uma disciplina optativa, para a aprendizagem de Geometria na formação inicial do professor de Matemática. No seguinte, é tratada a Geometria Analítica com o uso do GeoGebra, em que seus autores verificam vantagens e desvantagens do uso de tecnologias para o ensino das cônicas, concluindo sobre a importância das representações no software para a aprendizagem dos estudantes.

O terceiro artigo a respeito tem por objetivo mapear as principais produções em um mestrado focadas no ensino de Geometria com o uso de caleidoscópios e espelhos como recursos didáticos. No quarto artigo envolvendo pesquisas no Ensino Superior em Geometria, encontramos o uso do software Régua e Compasso para o estudo de Geometria Plana num curso de Licenciatura em Matemática e Física. Seus autores analisaram as contribuições do uso desse software e concluíram que a utilização do mesmo foi uma boa estratégia de ensino.

No quinto artigo encontramos uma pesquisa que apresentou o estado da arte sobre as pesquisas realizadas em um mestrado de Educação Matemática, com relação às dissertações sobre Geometria, e seus autores concluíram que vários autores foram utilizados inúmeras vezes em uma mesma dissertação assim como bibliografias mais antigas. Por fim, o último dos artigos abordou a História da Matemática, por meio de tecnologia, para analisar como o uso do GeoGebra foi feito na resolução de problemas da Geometria do Compasso Mascheroni (1750 – 1800) na obra *La Geometria del Compasso* publicada em 1797.

A seguir, apresentamos pesquisas envolvendo Geometria no Ensino Superior constantes dos anais do V SIPEM realizado em 2012 em Petrópolis, no Rio de Janeiro. Ao todo foram apresentados 15 trabalhos relativos ao Ensino Superior sendo que, em apenas 3 deles, aparece o tema Geometria. No primeiro é feita pesquisa envolvendo os registros de representação semiótica na disciplina de Geometria Analítica utilizando o sistema SIENA. No segundo, a pesquisa envolveu habilidades de visualização em Geometria Espacial com alunos de uma Licenciatura em Matemática e no terceiro, foi abordada a formação geométrica de licenciandos em Matemática em Geometria Espacial.

No VI SIPEM, realizado em 2015, em Pirenópolis, Goiás, foram aprovados 16 trabalhos para apresentação no GT4, sendo que apenas em dois deles aparece Geometria no Ensino Superior. O primeiro tratou de uma pesquisa realizada em uma disciplina de Geometria num mestrado na qual o autor teve como objetivo investigar como os estudantes visualizavam curvas e triângulos numa superfície esférica, as denominadas geodésicas, e triângulos esféricos. Foi

empregado o Cabri 3D e concluído sobre a importância de uma nova abordagem para a compreensão de conceitos avançados em Geometria.

No segundo artigo, os autores descrevem parte de uma pesquisa que investiga a transição do Ensino Médio para o Superior. Afirmam que a prontidão para a aprendizagem de Cálculo depende do conceito de função e o enfoque dado à Geometria. Apresentam resultados do desempenho de alunos na primeira disciplina de Geometria Analítica e indicam que pouco tem sido ensinado de Geometria Analítica na Educação Básica e que os alunos chegam ao Ensino Superior sem saber trabalhar com vetores, além de apresentarem dificuldades na conversão entre os registros gráfico e analítico de retas.

Os dados levantados nos quatro eventos de pesquisa realizados nos últimos seis anos, por si só, ilustram a pouca atenção que a Geometria tem recebido no Ensino Superior e, portanto, abre-se um leque enorme de possibilidades de pesquisa nessa área e nesse nível de ensino. Consideramos ainda que as geometrias analítica, vetorial, não euclidianas, topológica, fractal, etc. são fundamentais para o estudo das outras áreas da Matemática, como o Cálculo, as Equações Diferenciais, as Variáveis Complexas, etc.

No próximo item indicamos algumas de nossas pesquisas nessa área.

#### 4. Algumas de nossas pesquisas

Em nosso entender, a Geometria merece uma importância maior do que aquela que vem sendo dada nas disciplinas do Ensino Superior, haja vista suas inúmeras aplicações ou mesmo possibilidades de favorecimento de compreensão de conceitos. Fischbein (1977) ao tratar da dialética conceito e imagem na aprendizagem matemática indica a representação icônica na resolução do famoso problema de pés de galinhas e coelhos em uma fazenda, a qual corresponde à solução aritmética usual e discute sobre qual é mais natural? Para o autor, “A representação icônica não é necessariamente a primeira e a mais natural. Às vezes, o oposto pode ser verdade: modelos icônicos podem ser a representação simbólica de uma determinada estrutura conceitual.” (p.154). Ele discute que é necessário disponibilizar para a aprendizagem matemática variadas possibilidades, pois os indivíduos têm formas de aprender diferentes uns dos outros, sendo a geométrica uma delas.

Segundo Freudenthal (1973), propriedades de espaço vetorial podem ser visualizadas em espaços de dimensão 2 e 3 e imaginadas em dimensões maiores de forma geométrica, incluindo aí o conceito de determinante.

A primeira e mais importante consequência geométrica não trivial dos axiomas de espaço vetorial é a noção de volume. Em um espaço vetorial  $n$ -dimensional uma função de  $n$  vetores, chamada determinante, é explicitada por

$$\det(a_1, \dots, a_n)$$

para os  $n$  vetores  $(a_1, \dots, a_n)$  é para dar o ‘volume orientado’ (após certa normalização) do paralelepípedo gerado por  $a_1, \dots, a_n$ . (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 424)

Portanto, visualização corresponde a uma área de pesquisa importante pois o termo vai muito além do que a habilidade do órgão físico da visão. Silva (2013) realizou uma pesquisa de mestrado, sob nossa orientação, na qual investigou como um estudante cego pode utilizar visualização, como um construto mental, para classificar figuras e sólidos geométricos utilizando materiais concretos cuidadosamente confeccionados pelo investigador.

Marin (2013), também sob nossa orientação desenvolveu a pesquisa de mestrado utilizando o Cabri 3D para investigar como os alunos visualizavam cortes em um cubo por um plano e comparou com o processo visual obtido com instrumentos convencionais de desenho, constatando a relevância e influência do software para uma melhor aprendizagem. Os aspectos intuitivos verificados pela dinâmica do computador despertam o interesse dos estudantes na busca de soluções.

Para Davis e Hersh (1995) a intuição tem grande carga de mistério e ambiguidade pelos matemáticos. “Por vezes parece ser uma substituta perigosa e ilegítima para demonstração rigorosa. Noutros contextos parece indicar uma luz inexplicável de visão, através da qual alguns felizardos adquirem conhecimento matemático que outros só conseguem alcançar com grande esforço” (p. 360). A pesquisa de Silva (2013b), sob nossa orientação, verificou que intuição é uma grande aliada na aquisição de propriedades topológicas por parte de estudantes de um mestrado profissionalizante, os quais desconheciam tal conteúdo e vislumbraram ser uma possibilidade para o ensino de Geometria na escola básica.

A Geometria do Taxi é um caso de inserção de geometrias não euclidianas no currículo escolar e superior. Souza (2015) verificou, em uma dissertação de mestrado sob nossa orientação, que o uso de tecnologia computacional proporcionou aprendizagem de alguns fundamentos desta geometria para alunos concluintes do ensino médio. Por sua vez, investigamos com alunos de um mestrado como esta geometria desperta interesse nos estudantes e oferece possibilidades de aplicações em lugares geométricos no desenvolvimento de Geometria Analítica (LEIVAS, 2013, 2014, 2014b).

Entendemos pois que o GT4 oferece um grande espaço para divulgação de pesquisas envolvendo geometria em diversas nuances.

## 5. Considerações Finais

Propomos debater, em uma mesa redonda, resultados de pesquisa que consideramos pertinentes ao GT4 e, neste artigo, focamos na Geometria e seu ensino em nível de graduação e de pós-graduação. Inicialmente trouxemos algumas considerações sobre nosso entendimento do que deveria ser abordado em termos de pesquisa no ensino superior para, em seguida apresentarmos um pequeno levantamento do que foi apresentado tanto no GT4 nos últimos dois SIPEM quanto nos dois SIPEMAT, que são dois importantes canais de divulgação de pesquisas nacionais.

Do levantamento feito, contatamos que os cinco trabalhos relacionados à Geometria apresentados nos SIPEM, dois deles trataram de Geometria Analítica, um utilizando os registros de representação semiótica e a plataforma SIENA e outro investigou os conhecimentos dos estudantes em uma disciplina de Geometria Analítica para verificar a prontidão para o Cálculo. Um dos trabalhos focou na formação geométrica dos alunos de uma licenciatura em Matemática; outro investigou sobre visualização em geometria espacial com o uso do Cabri 3D e o último sobre geodésicas e triângulos esféricos na esfera tridimensional, indicando aspectos de Geometria Esférica.

Com relação às pesquisas apresentadas nos SIPEMAT, um trabalho abordou Geometria Fractal; outro confrontou conhecimentos geométricos entre um curso de Pedagogia e uma Licenciatura em Matemática. A contribuição do Desenho Geométrico para a Geometria foi tratada em um artigo bem como dois delinearam mapeamento de pesquisas no conhecimento geométrico em dois programas de pós-graduação. A História da Matemática como recurso didático para o ensino de Geometria foi investigado em um dos trabalhos e a Geometria Analítica constante de dois deles, sendo que no primeiro foi investigado o processo de demonstração e, no segundo, o uso do software Régua e Compasso. Por fim, os três seguintes abordaram aspectos relacionados à Geometria Hiperbólica, sendo um deles sobre os aspectos filosóficos de Kant na aceitação dessas geometrias.

Por sua vez, inexistiram pesquisas abordando outras tendências para o ensino de Geometria como por exemplo, a Teoria de Van Hiele, a Modelagem Matemática ou a Resolução de Problemas.

Considerando o universo analisado consideramos que muito ainda há a se investigar em termos de outras geometrias que não somente a euclidiana no ensino superior. Consideramos a importância dada por Piaget e Inhelder (1993) quanto à natureza topológica para a compreensão geométrica preceder às euclidianas, uma vez que as primeiras independem

das medidas. Para os autores, a construção do espaço começa no plano perceptivo e parte para o representativo, algo que é, usualmente, invertido no ensino de Geometria. Por sua vez, indicam que a intuição espacial em sua ordem representativa equivale a compreender a passagem do plano perceptivo para o representativo.

Para finalizar, retomamos o escrito por Freudenthal (1973, p. 402): “Uma vez, a geometria não foi somente uma peça avassaladora da ciência dedutiva, ela foi o exemplo mais antigo e declarado de didática.”

Esperamos que, a partir destas considerações, o debate possa fluir com novas considerações pelos componentes da mesa e pelos participantes.

## 6. Referências

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. Image and concept in learning mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics 8**. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1977. pp.153-165.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education:** China Lectures. London: Kluwer Academic Publisher. 1973. Mathematics Education Library.

HOFFMAN, K. M., KUNZE, R. **Linear Algebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1970.

LEIVAS, J.C.P. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.15, n.3, pp.647-670, 2013.

\_\_\_\_\_. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. In: **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 189-209, 2014.

\_\_\_\_\_. Ensino de geometria: uma experiência investigativa em uma aula de mestrado profissionalizante. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.16, n.4, pp. 1181-1199, 2014 b

MARIN, G. B. **O software cabri 3d como ferramenta de auxílio ao ensino e visualização de seções planas no cubo para alunos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). UNIFRA, Santa Maria, RS, 2013. 174 p.

OLIVEIRA, A.J.F. **Fundamentos da Geometria – David Hilber**. Lisboa: Gradiva, 2003.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

SILVA, D. C. da. **O ensino da geometria para alunos com deficiência visual.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). UNIFRA, Santa Maria, RS, 2013. 78 p.

SILVA, E. S. da. **Intuição e propriedades topológicas para um grupo de professores, mestrados de um mestrado profissionalizante em ensino de física e de matemática.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). UNIFRA, Santa Maria, RS, 2013b. 97 p

SOUZA, H. M. de. **A geometria do táxi:** investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). UNIFRA, Santa Maria, RS, 2015. 140 p.