

A CONSTRUÇÃO DA NOÇÃO DE LIMITE E OS ALUNOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

*Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul*

*José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul*

Resumo:

Neste trabalho apresentamos uma pesquisa de doutorado que está em andamento e que tem como objetivo investigar a construção do conceito de limite por alunos de um curso de licenciatura em Matemática. Este conceito é considerado importante na disciplina de Cálculo Integral e Diferencial I, em que, em geral, os alunos apresentam um baixo rendimento. Encontramos diversos estudos que falam do elevado número de reprovações e que buscam compreender os motivos para que isso ocorra. Por um lado, temos as dificuldades relacionadas aos conceitos envolvidos (no campo conceitual) na construção do conceito de limite, que podem ser de origem epistemológica, didática, dentre outros. Nesta investigação pretendemos elaborar e aplicar uma sequência didática para investigar como o aluno constrói o conceito de limite. Pretendemos explorar situações com uso de técnicas textuais, gráficas, numéricas e algébricas, buscando identificar principalmente os invariantes operatórios que eles mobilizam na construção deste conceito.

Palavras-chave: Aprendizagem; Limite; Licenciatura em Matemática; Invariantes operatórios.

1. A Problemática

Esta pesquisa de doutorado em andamento é fruto dos estudos e indagações que vêm sendo realizados ao longo dos anos em que estivemos envolvidos no curso de licenciatura em Matemática. Percebemos no trabalho como docente que os alunos chegam ao ensino superior e não conseguem ter um bom desempenho já nas primeiras disciplinas do curso. Nosso interesse particular é pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI).

Essa disciplina está entre as que pesquisadores têm voltado seus olhares em busca de compreender o que ocorre para que ela seja uma das que apresenta um alto índice de reprovações nos cursos da área de exatas.

Sobre esse tema há tanto estudos nacionais (CURY, 2008; FERNANDES, 2015; VOGADO, 2014; ZUCHI, 2005), como internacionais (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983; SIERSPINSK A, 1985), os quais buscam compreender o baixo desempenho dos alunos na

disciplina de CDI. Algumas dessas investigações procuraram identificar dificuldades dos alunos com relação aos conceitos necessários para construção de conteúdos dessa disciplina, no caso: limite, derivada e integral. Sendo que, alguns desses problemas se apresentaram tanto como de natureza epistemológica como também didáticas, suscitando algumas sugestões e questionamentos sobre o ensino e aprendizagem destes conceitos.

Nesse aspecto, encontramos discussões que tratam de conceitos que são relevantes, o que nos leva a novos questionamentos, relevante em que sentido? Sabemos que alguns conteúdos da matemática podem ser importantes tanto como objetos do saber matemático, como também pela possibilidade de utilização que eles podem ter, seja para serem mobilizados na construção de outros conhecimentos, ou como uma ferramenta de resolução de problemas. Os conteúdos da disciplina de CDI têm mais essas possibilidades de aplicação, se pensarmos em cursos como: física, química, nas engenharias, dentre outros.

Como observamos, os conceitos considerados como fundamentais na disciplina de CDI são: limite, derivada e integral. Dentre eles, o conceito de limite é utilizado para construir os outros dois conceitos, e neste aspecto encontramos diversas discussões, por exemplo, nos cursos de engenharias se discute que uma das principais justificativas para o estudo do limite nesta disciplina, é o fato dele ser utilizado para construção dos conceitos de derivada e de integral e que sua apresentação deveria ser mais intuitiva e relacionada às situações-problema desta área. Fernandes (2015), também trata desse tema em sua pesquisa, na qual analisa as falas de alguns professores das engenharias, eles consideram formal a apresentação de limite, nas disciplinas de CDI ministradas aos Cursos de Engenharias, e que o modo como é realizado estaria mais adequado para os cursos de matemática, seja licenciatura ou bacharelado.

Entretanto, essa apresentação considerada formal por alguns professores e mais adequada para os cursos de Matemática, também parece ser um problema nestes cursos e, em particular, para os alunos da licenciatura. Eles também não estão tendo um bom desempenho na compreensão do conceito de limite. Então esse ensino mais formal citado em Fernandes (2015) nos suscitou alguns questionamentos do tipo: que ensino mais formal se refere? Seria fazer a apresentação da definição de limite por ϵ e δ ?

Neste aspecto, Cornu (1983) fala que a definição por ϵ e δ traz o conceito de limite, mas que ela apresentada isoladamente não é suficiente para que os alunos

compreendam o conceito de limite. Sendo importante trabalhar também a noção intuitiva, explorando diversos exemplos que possam favorecer o processo de construção desse conceito pelos alunos. Todavia, o autor chama a atenção para o fato de que existe uma “distância” entre a definição formal e a noção intuitiva de limite, enquanto a definição por épsilon e delta é estática, a noção intuitiva apresenta um aspecto dinâmico, pensando nas expressões utilizadas, como: “tende a” ou “se aproxima de”.

Vários estudos vêm questionando essa apresentação de maneira isolada da noção intuitiva e da definição formal no ensino de limite, buscando “aproximar” essas duas apresentações. Zuchi (2005), por exemplo, investigou uma proposta para o ensino e a aprendizagem deste conceito buscando relacionar a noção intuitiva com a definição formal, no ambiente papel e lápis e com uso de um software. Ela propôs um percurso para formalizar o conceito de limite explorando inicialmente situações concretas com a análise de exemplos numéricos, em seguida situações com o uso de um épsilon fixo até chegar a sua generalização.

Contudo, não é somente com a definição por épsilon e delta que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática têm dificuldades, ou em compreender a relação entre a noção intuitiva e a definição formal. Sabemos também, que os estudantes estão tendo problemas nas situações em que a definição intuitiva é utilizada, e que é a grande maioria das atividades que eles precisam realizar no curso de CDI.

E não podemos compreender essas dificuldades sem considerar todos os conceitos envolvidos na construção do conceito de limite levando em conta estas duas apresentações citadas. Diante disso, buscamos em Vergnaud (1990) suporte para nosso estudo, por meio do que ele define como Campo Conceitual. Segundo ele a construção de um conceito envolve muitos outros que precisam estar disponíveis para a formação do novo conceito, e a definição de um conceito não abarca todos os aspectos necessários para sua compreensão, sendo necessário, para isso, lidar com situações variadas que permitam explorar os diversos aspectos envolvidos na construção deste conceito.

Pensando em nossa pesquisa, por exemplo, podemos encontrar na introdução do estudo de limites, após apresentação da noção intuitiva, situações para o aluno resolver os limites, como: (a) $\lim_{n \rightarrow 2} x + 2$ e (b) $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Neste caso, o aluno poderá aplicar diretamente a definição intuitiva na primeira situação e ele pode ficar satisfeito, parar no resultado encontrado, ou ainda poderá esboçar a representação dessa função afim no plano cartesiano e

ver, quando $x = 2$, o que acontece com o gráfico, no caso uma reta. No segundo caso, a substituição direta não vai ser possível imediatamente, e para perceber isso ele deve se lembrar de que não podemos ter zero no denominador, primeiro precisará simplificar a função racional através da fatoração para aplicar a noção intuitiva. Assim temos, duas situações que exploram o conceito de limite em que os alunos podem mobilizar conhecimentos diferentes para resolvê-los. Além disso, vemos como a noção intuitiva se apresenta insuficiente para a compreensão do conceito de limite. Podemos elencar diversos exemplos aplicando a noção intuitiva, mas em nenhum exemplo e, nem mesmo a definição formal consegue reunir todos os aspectos envolvidos na construção do conceito de limite se estivermos interessados no processo de construção do conhecimento pelo estudante.

Assim, Vergnaud (1990) argumenta que nenhum conceito pode ser reduzido a sua definição se pensamos na aprendizagem do aluno. Para o teórico um conceito é composto por uma tríade (S, I, s) , em que: S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito; I o dos invariantes operatórios – os conhecimentos envolvidos nessas situações – significado; s o conjunto das representações simbólicas ou de linguagens utilizadas nas situações – significantes.

Voltando ao objeto do nosso interesse, o conceito de limite, nesta perspectiva, elaborou-se várias questões, como: Que situações são pertinentes para a compreensão da noção intuitiva e da definição formal de limite? Quais situações podem favorecer uma aproximação entre essas duas formas de estudo de limite? Quais conceitos são importantes para o licenciado em Matemática mobilizar, ou elaborar, nas situações de introdução ao estudo de limite? O que de limite é importante para esse aluno, futuro professor de matemática?

Pensando nessas duas últimas questões, temos que vários conceitos são utilizados na construção da noção de limite, como: o conjunto dos números reais, a ideia de infinito e de infinitésimo, entre outros. Esses conhecimentos são relevantes para o futuro professor de Matemática que precisará abordar em sala de aula, por exemplo, os conjuntos numéricos desde os primeiros anos da educação básica. No conjunto dos números naturais o conceito de infinito aparece relacionado, em geral, à ideia de que se pode acrescentar sempre mais um, no caso dado n número natural sempre podemos encontrar o $n+1$. Contudo, essa noção vai se complicando a medida que vão sendo trabalhado os outros conjuntos, os racionais, por exemplo, trazem muita dificuldade para as crianças e se o professor não compreender a noção

tanto de infinito, como também de infinitésimo, como ele poderá apresentar este conjunto, ou responder adequadamente as indagações dos estudantes. Não estamos dizendo com isso, que ele precisa possuir esse conhecimento mais aprofundado para abordá-lo para os alunos, mas sim para poder trazer situações pertinentes ao nível de ensino em que está trabalhando.

Dessa maneira, pretendemos fazer um estudo da construção da noção de limite com alunos de um curso em Licenciatura em Matemática. Propondo situações para introdução deste conceito que relacionem a definição intuitiva com a definição formal, bem como, situações que explorem os aspectos gráficos, numéricos, textuais e algébricos, ou seja, os diversos significantes do conceito (VERGNAUD, 1990). Acreditamos que também seja possível buscar situações que trabalhem os conhecimentos que são relevantes ao futuro professor da Educação Básica.

Assim, apresentamos o tema: Um estudo da construção do conceito de limite por alunos de um curso de licenciatura em Matemática. Em seguida, discutimos um pouco sobre o caminho que vem se delineando como pertinente para nossa investigação.

2. Proposta para o nosso percurso

Para investigar a construção do conceito de limite pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática pretendemos elaborar e aplicar uma sequência didática, que talvez se configure como uma engenharia didática conforme proposta por Artigue (1988). Essa metodologia permite investigar aspectos de aprendizagem do conceito de limite ao indicar caminhos tanto para a elaboração e aplicação, como também para análise de sequências de ensino. Ela é composta pelas fases: análises preliminares, análise a priori, experimentação e análise a posteriori.

A sequência didática será aplicada em uma turma de licenciatura em Matemática de uma universidade pública, em que pretendemos acompanhar o trabalho do professor desta disciplina durante todo o semestre. Desse modo, a sequência será composta por várias sessões que podem ocorrer seguidas, ou não, ao longo do semestre.

Para subsidiar a elaboração da sequência didática fizemos, e estamos fazendo, estudos sobre o nosso tema, identificando como o conceito de limite vem sendo tratado usualmente no ensino e quais os possíveis efeitos desse tratamento. Quais dificuldades os alunos apresentam? Se elas estão relacionadas às escolhas didáticas, se são de origem

epistemológica, ou se estão relacionadas aos conceitos envolvidos na construção do conceito de limite.

Neste momento estamos em fase de elaboração da sequência didática, em que buscamos delimitar o Campo Conceitual (VERGNAUD, 1990) para o estudo do limite, isto é conceitos envolvidos na sua construção, situações que darão sentido a construção da noção de limite, bem como, modelizar os invariantes operatórios necessários para lidar com essas situações, em particular os teoremas em ação que podem ser mobilizados nas situações que pretendemos propor.

3. Possibilidades

Acreditamos que esses estudos podem contribuir para uma melhor compreensão do processo de construção da noção de limite e poderemos pensar em sequências de atividades que possam favorecer uma abordagem mais próxima do que é realizado pelos alunos. Assim, esperamos lançar algumas questões sobre os conteúdos envolvidos nesta construção e a relação deles com o que o licenciando em Matemática vai precisar conhecer para o seu futuro trabalho em sala de aula.

4. Referências

ARTIGUE, M. IngénierieDidactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Vol. 9, no 3, p. 281-308, Grenoble : La penséesauvage, 1988.

_____. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. Tese de doutorado - Universidade de Grenoble. 1983.

Cury, H. N. **Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 1. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças**. ACTAS CIENTIAE, Canoas, v.6, 2004, p.27-36.

FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do Saber: O Ensino de Limite em um Curso de Engenharia.** Tese de doutorado (em Educação em Ciências e Matemática) UFPA, Belém/PA, 2015.

SIERPINSKA, A. **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches em Didactique des Mathématiques**, vol. 6, n.1, p. 5-67, 1985.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, Editora La Pensée Sauvage, Grenoble, França, 1990, v.10, n.2.3, p.133-170.

VOGADO, G. E. R.; JUCÁ, R. S.; MOTA, T. de B. **Limite e Derivada: Uma análise da Produção dos Alunos.** Revista WEB-MAT. Belém, vol. 1, n. 1, p. 61-75, janeiro-Julho 2014.