O CONJUNTO DAS INVARIANTES DE UM CONCEITO: SUA IMPORTÂNCIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR CRIANÇAS DE 5º ANO

José Fernando Fernandes Pereira
Universidade Cruzeiro do Sul
jnandopereira@gmail.com

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul
edda.curi@gmail.com

Resumo:
Fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, bem como em trabalhos de pesquisadores envolvidos na resolução de problemas sobre o raciocínio combinatório, este texto tem o objetivo de mostrar a importância do conhecimento, pelos alunos, do conjunto das invariantes que dão significado ao conceito envolvido nos problemas apresentados que se referem a esse tema. Para tanto, nos valemos de pesquisa realizada com alunos de 5º ano de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, com característica de pesquisa documental, investigando seus protocolos. Após realização da análise qualitativa dos dados, à luz da fundamentação teórica, entendemos que, se os alunos tivessem conhecimento dos princípios que regem a formação de agrupamentos referentes a problemas do raciocínio combinatório, poderiam ter sido mais bem sucedidos em seus resultados. É um desafio a ser enfrentado.
Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Campo das Estruturas Multiplicativas; Raciocínio Combinatório; Resolução de Problemas.

1. Introdução

O texto ora apresentado é parte integrante de ampla pesquisa que dará origem a uma tese de doutorado[1] e apresenta resultados parciais de uma única ideia do raciocínio combinatório. Para a tese serão desenvolvidos instrumentos abordando todas as ideias da combinatória. Destacamos, aqui, aquela que busca estabelecer a relação entre dois ou mais conjuntos distintos e encontrar todos os agrupamentos formados por elementos desses conjuntos. Essa tarefa não é tão simples quanto possa parecer, uma vez que é regida por uma série de características próprias que, quando respeitadas, devem conduzir o aluno ao sucesso, mas, quando descuidadas, podem gerar dificuldades na execução do problema.

[1] Desenvolvida pelo primeiro autor deste texto sob a orientação do segundo autor.

Por ser parte integrante do campo conceitual das estruturas multiplicativas, fundamentamos o estudo, aqui apresentado, sobre o raciocínio combinatório, na Teoria dos Campos Conceituais do psicólogo francês Gérard Vergnaud.

Consideramos, também, trabalhos de pesquisadores da área em questão, como relevantes contribuições para o desenvolvimento deste texto.

Os alunos que produziram o material pesquisado pertencem a uma sala de vinte e nove alunos, regularmente matriculados, de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, região DRE – LESTE 1. A referida escola faz parte de um projeto desenvolvido pela Prof.ª Dr.ª Edda Curi, cuja proposta é a melhoria da qualidade de ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental aliada ao desenvolvimento profissional de seus professores.

O projeto envolveu quinze escolas da Diretoria Regional de Ensino (DRE – Leste 1). Cada escola inscreveu cinco professores de cada ano escolar para discutir, em encontros quinzenais, situações que, invariavelmente, ocorrem durante as aulas, em suas escolas de origem. Cada grupo de professores, todos do mesmo ano escolar, era coordenado por um professor especialista de Matemática, regularmente matriculado, cursando o Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul.

O projeto tem aprovação do Comitê de Ética da universidade, sob o número 018/2015.

Nossa participação, como professor especialista, deu-se em todas as atividades que envolveram a preparação das sequências de atividades a serem implementadas, a execução dessas sequências pelos alunos, a discussão com eles sobre seus *esquemas* de resolução, as intervenções nos encaminhamentos construídos e, finalmente, na aula expositiva sobre o tema, apresentando as variações disponíveis para a condução ao resultado adequado.

2. Fundamentação teórica

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que foi, originalmente, criada para estudar como crianças constroem o raciocínio sobre problemas das estruturas aditiva e multiplicativa.

Vergnaud (1996) distingue duas classes de situações na resolução de um problema. Aquela em que o aluno pode dispor das competências necessárias a sua solução e a torna imediata, ou aquela em que o educando não dispõe de todas as competências necessárias e terá que refletir, explorar, hesitar, reformular até atingir, ou não, a solução correta do problema. A essa organização dos conhecimentos em ação, que vão sendo transformados em ação operatória, gerando compreensões das crianças, o autor denomina esquema.

Habitualmente, na primeira classe de situações, os esquemas são expressos por condutas automatizadas, enquanto na segunda há o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas até atingirem a solução procurada.

Segundo Vergnaud (1996), um campo conceitual deve ser estudado à luz de três planos, simultaneamente:

- **S** – conjunto das situações que dão sentido ao conceito;
- **I** – conjunto das invariantes nas quais se assenta a operacionalidade dos esquemas;
- **R** – conjunto das formas que permitem representar simbolicamente o conceito.

Para este texto, nos interessa estudar o campo conceitual da estrutura multiplicativa e a importância do conjunto das invariantes na tomada de decisão dos esquemas a serem utilizados na resolução de um problema.

Vergnaud (2009) distingue duas grandes categorias de relações multiplicativas.

Por mais paradoxal que possa parecer, a categoria utilizada para introduzir a multiplicação nos anos inicias do Ensino Fundamental não pode ser expressa na forma tradicionalmente utilizada para sua representação, qual seja: a x b = c. Isso se dá porque o conceito de multiplicação, nessa categoria, é construído por meio de uma relação quaternária entre quatro quantidades, duas a duas representando medidas de uma determinada grandeza. A essa categoria Vergnaud denomina isomorfismo de medidas, que pode ser subdividida em dois tipos de relação: relação de um a muitos e relação de muitos a muitos. Ambas podem ser representadas por um quadro de correspondências entre duas grandezas e suas respectivas medidas.

A segunda categoria, denominada por produto de medidas, consiste em uma relação ternária entre três medidas, das quais uma delas (criada para dar solução ao problema) é o produto das outras duas (as que foram enunciadas no problema).

Nesta categoria encontram-se os problemas referentes à configuração retangular e os problemas relacionados ao raciocínio combinatório.

Os problemas que envolvem o raciocínio combinatório são classificados por meio de duas situações. Uma, que tem seus agrupamentos formados por elementos de conjuntos distintos, cujo resultado denominaremos por produto das medidas elementares. A outra, cujos agrupamentos são formados por elementos do mesmo conjunto, que pode subdividir-se em três tipos: permutação, arranjo e combinação.

Borba e Azevedo (2012) organizam os problemas referentes a esse raciocínio em quatro situações distintas no que tange à ideia e à solução do problema, assim denominadas: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Classificam produto cartesiano por uma coleção de agrupamentos que esgotam todas as possibilidades de relacionar elementos diferentes de dois ou mais conjuntos distintos. As permutações, os arranjos e as combinações, são formações estabelecidas com elementos de um mesmo conjunto, o que torna o produto cartesiano uma associação diferenciada das demais.

Este texto propõe-se a analisar a influência que as invariantes de um conceito exercem na resolução dos problemas referentes ao conceito em questão. Particularmente, a relação entre as invariantes atribuídas ao raciocínio combinatório e a resolução dos problemas referentes a essa ideia, especificamente, problemas caracterizados pela formação de agrupamentos oriundos da relação entre elementos de dois ou mais conjuntos distintos.

Nos títulos a seguir indicamos como foi feita a análise desses dados.

3. Metodologia

Para este artigo, utilizamos uma pesquisa do tipo documental, pois buscamos os resultados nos protocolos dos alunos, documentos sem qualquer outro tratamento científico anterior à nossa imersão (OLIVEIRA, 2012), além de ser de cunho qualitativo, pois nossa investigação tem caráter de pesquisa arqueológica, cuja preocupação é detectar vestígios deixados pelos alunos que possam conduzir-nos a relevantes resultados.

ISSN 2178-034X

Procuramos identificar qual a familiaridade que os alunos possuíam com o tema, realizando uma sondagem em relação ao uso do material do EMAI[2]. Constatamos a existência de treze problemas referentes ao tema, distribuídos na Tabela 1, com a numeração que consta do material (Sequência . Atividade). Para melhor compreensão das rubricas indicadas no referido quadro, definimos por ação a escolha de um dos elementos de cada um dos conjuntos envolvidos no problema. Assim, o problema que enunciar dois conjuntos implicará a formação de agrupamentos formados por duas ações; aquele que envolver três conjuntos demandará agrupamentos formados por três ações (indicado por triplo). Denominamos problema direto aquele em que são conhecidos os elementos dos conjuntos enunciados no problema (ou suas quantidades). Problema inverso representa aquele que o enunciado oferece as possibilidades (ou sua quantidade) de um dos conjuntos e dos agrupamentos formados, solicitando as possibilidades (ou a quantidade) do outro conjunto envolvido no problema. Problema em tabela foi a designação dada àqueles, cujos dados aparecem nesse formato.

Um dos problemas foi apresentado tanto na forma inversa quanto em formato de tabela, indicado dos dois modos no quadro a seguir e apenas dois problemas foram contemplados com três ações envolvidas, assim distribuídos:

Tabela 1- Quantidade de atividades por unidade, no material do EMAI

Atividade	Problema direto	Problema inverso	Problema em tabela
7.6	2	1	0
9.7	1	0	0
10.1	0	1	0
18.3	1	0	0
28.4	2 (1 triplo)	0	1
28.5	1	1	2
29.5	1 (triplo)	0	0

Fonte: Dados coletados pelos autores.

[2] Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – material utilizado nas escolas públicas do Estado de São Paulo, elaborado por professores da rede pública em conjunto com professores de universidades, com sequências de tarefas organizadas em oito unidades, uma para cada mês do ano letivo. Cada unidade tem, em média, quatro sequências. Essas sequências, de 1 a 33 são compostas por várias atividades. Na rede estadual de São Paulo, esse é o material usado como livro didático, substituindo o livro-texto.

Pesquisas na área constatam maior dificuldade na resolução de problemas inversos, em função da pouca visibilidade dos agrupamentos em formação, além da impossibilidade do uso da árvore de possibilidades como estratégia de resolução (SPINILLO, 2016).

Nossa análise foi focada em um problema direto, porém com a dificuldade de ser um problema triplo e deu-se por meio de elementos extraídos de minuciosa investigação sobre os protocolos referentes ao problema cujo enunciado indicamos a seguir.

No almoço de um restaurante são oferecidos quatro tipos de legumes (cenoura, abobrinha, pimentão e pepino), três tipos de carne (frango, peixe e linguiça) e dois tipos de verdura (alface e espinafre). De quantas formas diferentes é possível fazer um prato com esses três tipos de alimentos? Quais são essas formas?

4. A análise dos dados

Há quatro princípios que devem reger o raciocínio daqueles que se dispõem a resolver um problema que busque encontrar o produto dessas três medidas, ou seja, o conjunto formado por todos os agrupamentos que esgotam todas as possibilidades de relacionar os elementos dos três conjuntos envolvidos (dos legumes, das carnes e das verduras).

O produto das três medidas é a resposta numérica, mas como enumerá-lo? Como formar todos os agrupamentos que dão solução ao problema?

Segundo Mekhmandarov (2000, apud SPINILLO 2016), esses princípios são:

i. Cada agrupamento é formado com apenas um item de cada um dos conjuntos ou medidas elementares;
ii. Cada agrupamento formado se constitui em um elemento do conjunto ou medida produto;
iii. Cada elemento dos conjuntos ou medidas elementares está presente em todos os agrupamentos formados;
iv. Cada agrupamento formado deve aparecer apenas uma vez no conjunto ou medida produto.

Spinillo (2016) associa esses princípios enunciados por Mekhmandarov (2000) ao conjunto das invariantes nas quais se assenta a operacionalidade dos esquemas, mencionado anteriormente como integrante do tripleto que, segundo Vergnaud (2009), dá sustentação a um campo conceitual.

Ilustraremos a seguir de que forma esses princípios se apresentam como dificuldades na resolução do problema supramencionado, apresentando alguns protocolos de alunos integrantes de nossa pesquisa.

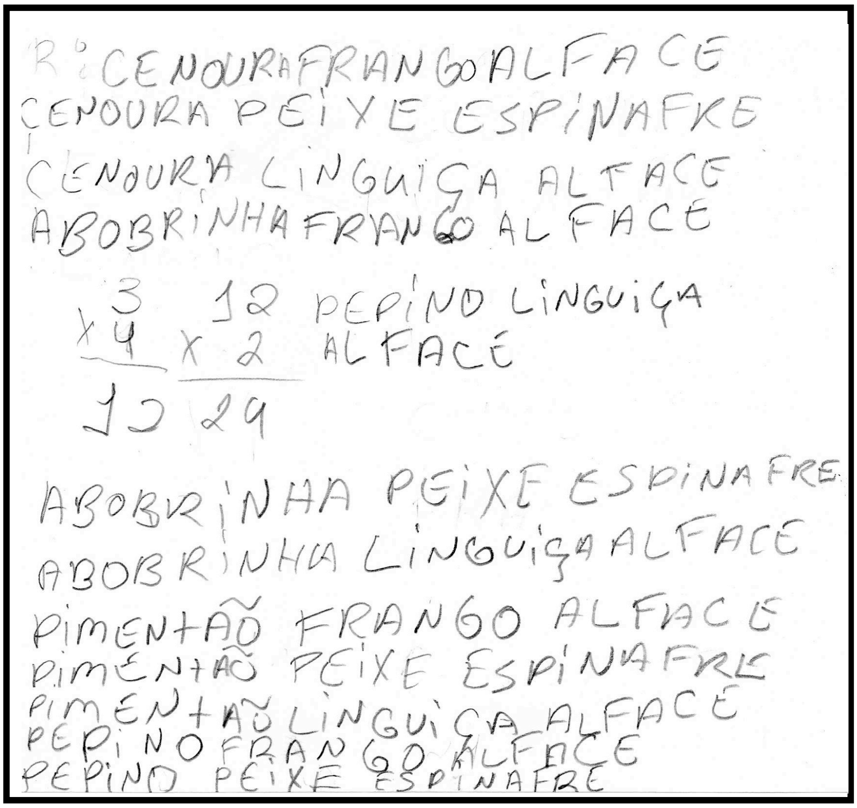

Figura 1: Procedimento do aluno.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

No protocolo da Figura 1, notamos que o aluno reconhece o primeiro princípio, não introduzindo dois elementos do mesmo conjunto nos agrupamentos que formou. Também reconhece o segundo princípio, expondo, como resposta, seus agrupamentos formados, ou seja, como elementos do conjunto produto. Não repete agrupamento no conjunto produto, caracterizando que identifica o quarto princípio. Sua dificuldade não é apresentada na correspondência entre os tipos de legumes e os tipos de carnes, pois associou cada um dos quatro tipos de legumes com todos os três tipos de carnes, porém não identifica que cada um desses agrupamentos parciais pode relacionar-se com dois tipos de verduras, dobrando a medida produto de 12 para 24. Ao utilizar o Princípio Fundamental da Contagem, indicando que 3 X 4 = 12 e 12 X 2 = 24, expõe que tinha entendimento do que deveria encontrar. O não reconhecimento do terceiro princípio, em que cada elemento dos conjuntos elementares deve estar presente em todos os agrupamentos formados foi o obstáculo encontrado pelo aluno. Essa não percepção possibilitou que agrupamentos do tipo (cenoura, frango, espinafre) ou (abobrinha, peixe, alface) não constituíssem sua resposta, pois não conseguiu estabelecer a relação entre cada tipo de carne e os respectivos tipos de verdura.

Na sequência, apresentamos novo protocolo utilizado como instrumento de análise.

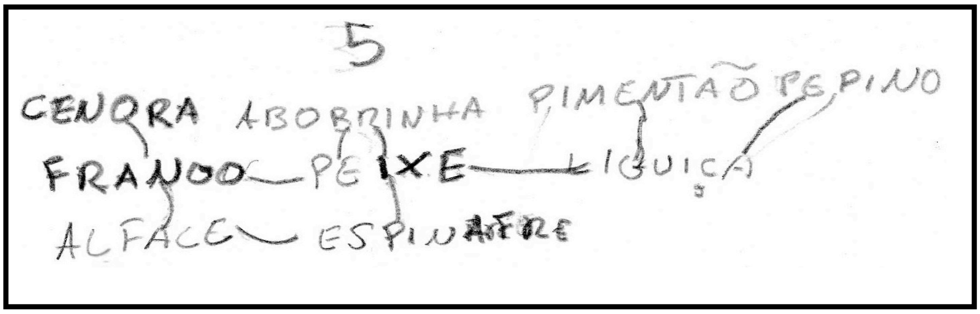

Figura 2: Procedimento do aluno.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

No protocolo da Figura 2, como o aluno indica “5” como resposta e apresenta algumas ligações entre os elementos dos conjuntos enunciados, entendemos que seus agrupamentos seriam (cenoura, frango, alface), (abobrinha, peixe), (abobrinha, peixe, espinafre), (pimentão, linguiça) e (pepino, linguiça). Com esses dados percebemos que o primeiro princípio não foi violado, uma vez que não houve agrupamento com mais de um elemento do mesmo conjunto elementar. O segundo princípio foi igualmente respeitado, observando que o produto das medidas, declarado pelo aluno, corresponde ao número de ligações indicadas como agrupamento. Estabelecer que cada elemento dos conjuntos elementares esteja presente em todos os agrupamentos formados, como preconiza o terceiro princípio, não foi observado na resolução proposta pelo aluno. É clara a não percepção de que cada elemento de um conjunto deve estar relacionado com todos os elementos do outro conjunto. Sobre o quarto princípio, no qual cada agrupamento formado deve aparecer apenas uma vez no conjunto produto, é

ISSN 2178-034X

temerário afirmar sua observância, dado que dos 24 agrupamentos possíveis, o aluno apresentou apenas cinco, impossibilitando a afirmação de que não repetiria agrupamento, caso houvesse apresentado um número maior de elementos no conjunto produto.

Uma análise em mais um procedimento de resolução, nos apresenta novos resultados. Observemos o protocolo a seguir.

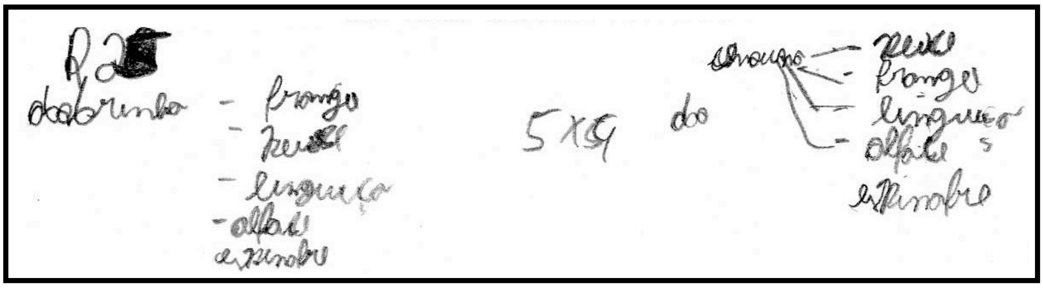

Figura 3: Procedimento do aluno.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Essa situação pode indicar que o aluno não reconhece três conjuntos elementares no enunciado, transformando o problema em um produto de apenas duas medidas, associando os elementos do conjunto das carnes aos elementos do conjunto das verduras. Caso isso fosse verdade, ele teria percebido que todos os agrupamentos que faria com a “abobrinha” ou com a “cenoura” – cinco para cada um desses legumes – faria, também com o “pimentão” e o “pepino”. Daí ter concluído que seriam 5 X 4 = 20 tipos de pratos diferentes a serem formados. Isso caracterizaria seu entendimento do terceiro princípio. O encaminhamento proposto denota que os demais princípios foram respeitados.

5. Considerações finais

Mesmo que a pergunta do enunciado fosse clara em relação à constituição dos agrupamentos (De quantas formas diferentes é possível fazer um prato com esses «três tipos de alimentos»?) antevíamos ser possível encontrar soluções que propusessem agrupamentos com apenas duas das três medidas apresentadas (desprezando uma delas ou agrupando duas, como no procedimento relativo à Figura 3), em função da pouca exploração pelos livros didáticos de problemas triplos (aqueles que envolvem três conjuntos distintos).

Entendemos que colocar o enunciado na forma explícita, indicando todas as medidas elementares dos três conjuntos favoreceria o entendimento do enunciado e produziria melhores desempenhos por parte do alunado. Isso foi possível constatar, pois dos 26 alunos presentes, 15 alunos (57,7%) indicaram corretamente a resposta, tanto numericamente quanto diagramaticamente. Outros três (11,5%) aproximaram-se de uma representação em forma de árvore de possibilidades, perfazendo um total de 69,2% de alunos com entendimento satisfatório sobre a ideia envolvida.

Aproveitando o tema proposto para esta edição do ENEM, sugerimos que a partir do que os alunos já conhecem, novos *desafios* podem ser propostos, observando os limites impostos pelo amadurecimento natural na construção do conhecimento, mas sempre acreditando nas *possibilidades* que nossas crianças apresentam quando instigadas a enfrentar situações desconhecidas.

Acreditamos que quanto mais forem trabalhados os problemas que envolvem o raciocínio combinatório, atendendo recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL,1999), amadurecendo primeiro a ideia dos problemas diretos, começando com dois conjuntos (ou medidas elementares) e, na sequência, com três conjuntos (ou medidas elementares) para, posteriormente, trabalhar com os problemas inversos, tanto alunos como professores das séries iniciais – que não aprenderam esse conteúdo na sua formação – podem consolidar várias formas de resolução desses problemas.

6. Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste estudo.

Agradecemos à Diretoria Regional DRE – LESTE 1 por disponibilizar alunos e professora para a realização desta pesquisa.

Agradecemos às professoras do projeto que colaboraram na discussão e elaboração das sequências de atividades a serem implementadas nas escolas envolvidas.

7. Referências

BORBA, Rute Elizabete Rosa; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Sintria. Labres. (Orgs.) **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa Qualitativa.** 4. ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

SPINILLO, Alina Galvão. Raciocínio Combinatório em crianças: limites e possibilidades na resolução de problemas de produto cartesiano. In: **Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais** (Encepai), Anais Eletrônicos... Recife, 2016.

VERGNAUD, Gérard**. A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

______. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUN, Jean. (Dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.