TORRE DE HANÓI: UM RECURSO PEDAGÓGICO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Autor: Lucas Batista Paixão Ferreira
Instituição: Universidade Federal do Pará
E-mail: luscaspaixao@hotmail.com

Orientador: Prof. Dr.Márcio Lima do Nascimento
Instituição: Universidade Federal do Pará
E-mail:marcionufpa@gmail.com

Resumo

O principal objetivo de um educador é transmitir com clareza e máxima compreensão o conhecimento para o educando, para que o ensino do professor resulte em uma aprendizagem significativa para o aluno. O jogo, com seu caráter lúdico, atua como uma ferramenta de fácil acesso ao interesse das crianças e jovens, por esse motivo, criar situações que envolvam o ensino da matemática e o uso de jogos educativos é atingir o prazer, o desafio e o melhor desempenho daqueles que estão em pleno processo de formação. Isto posto, elegeu-se como objeto de estudo o jogo "Torre de Hanói" para explorar o lúdico e a imaginação dos alunos, tornando as aulas mais agradáveis tanto para o professor, quanto para os próprios alunos. A Torre como uso de nova prática pedagógica, despertará mais o interesse do educando, o estimulando a criar estratégias e contribuindo com seu raciocínio lógico.

Palavras-chave: Ludicidade; Torre de Hanói; Ensino.

1. Introdução

Professores da Educação Básica, e de quaisquer outros níveis de ensino, devem buscar o melhor método de repassar conhecimento aos seus alunos. Podendo variar, de educador para educador, a maneira que esta metodologia é aplicada, contudo, mantendo uma característica única e exclusiva: uma aprendizagem significativa com a compreensão do educando. É fato que a Matemática é uma disciplina na qual muitos alunos apresentam baixo nível de proficiência. O que nos faz questionar: o que há de particular nessa disciplina que a torna algo tão complexo? Essa complexidade pode não partir do nível de dificuldade propriamente dita, ou até mesmo com o fato de a maioria das pessoas não se identificarem com ela, mas sim pela escassez de métodos pedagógicos eficientes obtidos no início da vida acadêmica e a falta de estímulo e criatividade para com as crianças e os jovens.

É comum de um aluno, comentar que "não está compreendendo o assunto" ou que "essa matéria é muito complicada". Perguntam o objetivo de tal conhecimento e qual a aplicação que lhes é proposta em suas vidas. Conforme destaca Medeiros (2005, p.20):

> No ensino tradicional da matemática não tem havido, em geral, um respeito pela criatividade do aluno. Na prática de ensino de um grande número de professores, alheios à preocupação com a criatividade matemática, há um desencontro entre esta e a forma metódica como as ideias parecem surgir aqueles em suas exposições de sala de aula.

O ensino por meio de ferramentas lúdicas mostra o quanto a matemática atua desde situações mais simples até as mais complexas. Os jogos matemáticos possuem particularidades que os ressaltam diante de qualquer outra maneira de aprendizagem, são elas: desenvolvimento sensorial e motor, ampliação do pensamento dedutivo, evolução cognitiva, elaboração de estratégias, entre outras. O que torna a disciplina algo prazeroso aos alunos, bem diferente das aulas que estão acostumados a assistir. São métodos consideravelmente diferentes, contudo, levando consigo o mesmo aprendizado, com a particularidade de que o aluno absorve o conhecimento com um grau de facilidade significativo.

O jogo em questão pode ser explorado da educação básica até o ensino superior, como uma forma de resolver problemas que se sucedem de casos simples, e tornam-se bem mais complexos. Para Machado (1995), a Torre de Hanói é um jogo muito simples que envolve desafios com grau crescente de dificuldade, que podem ser explorados até mesmo com o auxílio de computadores.

Essa ferramenta lúdica, muitas vezes, é encontrada com sete discos, empilhados do maior ao menor em um dos três pinos, formando uma torre. O objetivo do jogo é empilhar todos os discos no terceiro pino no menor número de passos, sem nunca colocar um disco maior em cima de um menor. Para chegar aos questionamentos, primeiramente analisa-se o jogo com um, dois, três e quatro discos, a fim de descobrir o menor número de movimentos para transferir a torre inicial para o terceiro pino, atentando-se para a repetição de movimentos e assim, chegar próximo de desvendar a lei que rege esse jogo.

ISSN 2178-034X

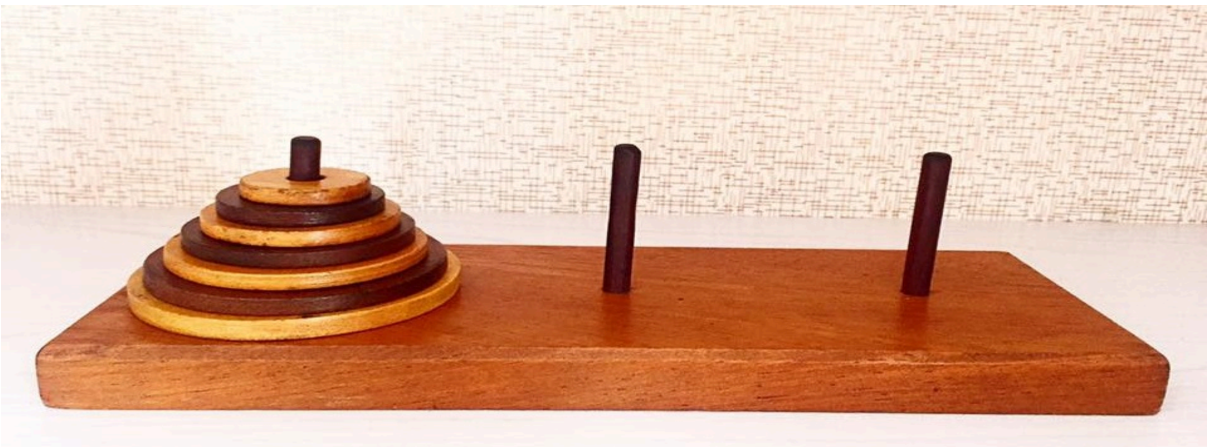
2. História

Este jogo foi criado por Édouard Lucas, matemático francês, que se inspirou em uma lenda Hindu, em 1883. O nome do jogo partiu de um símbolo da Cidade de Hanói, no Vietnã. Existem várias lendas sobre a origem do jogo, Lucas anexou ao seu brinquedo a seguinte lenda romântica (FERRERO, 1991; MACHADO, 1992):

> No tempo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. Dia e noite os sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o debaixo nunca fosse menor do que o de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir. Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo.

Para desvendar uma Torre de Hanói de 64 discos, como diz a lenda, são necessários no mínimo 18.446.744.073.709.551.615 movimentos, levando os monges durante bilhões de anos a completar a tarefa.

Figura 1 – Torre de Hanói



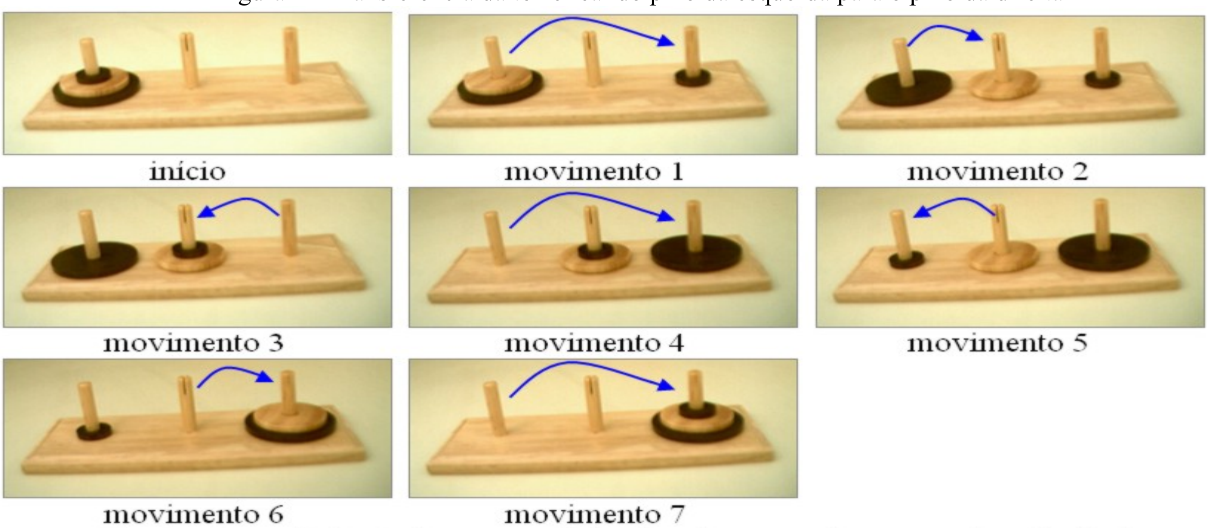
Fonte: Elaborada pelo autor.

3. O Jogo

Constitui-se em uma base com três pinos, na posição vertical em relação à base. No pino de uma das extremidades, há uma sequência de discos de ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o terceiro pino, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, com o detalhe de que no momento da passagem, os discos que possuem maior diâmetro, nunca fiquem sobre os de menor diâmetro. Normalmente, esse jogo encontra-se contendo três discos, mas a quantidade pode aumentar, tornando o grau de dificuldade mais elevado de acordo com o número de discos utilizados. Para completar tal desafio, é preciso tanto do pino que está sendo ocupado pela torre inicial, quanto dos que não estão.

A partir das informações dadas, temos o seguinte questionamento: Qual o número mínimo de movimentos que precisaremos fazer para alcançar o objetivo? Se o jogo fosse composto por apenas um disco, seria fácil movê-lo, de acordo com as regras, para isso precisaríamos de apenas um movimento. Se fossem dois discos, claramente seriam necessários 3 movimentos. O que queremos, de fato, é o menor número de movimentos necessários para solucionar uma Torre de Hanói com n discos. A ilustração a seguir apresenta uma possibilidade para os 7 movimentos necessários para resolver o jogo para n=3:

Figura 2 - Transferência da torre real do pino da esquerda para o pino da direita



Fonte: http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimple-rv/?%26nbsp%3B_APLICA%C7%D5ES:Torre_de_Hanoi:O_Problema

ISSN 2178-034X

E se n=4? Vejamos: para mover 4 discos - que estão no pino que chamaremos de pino 1 - para outro pino, precisamos liberar o disco maior diâmetro, de baixo. Para tanto, precisamos mover os 3 discos acima dele para um outro pino, que chamaremos de pino 2, o que se faz com 7 movimentos, como na figura anterior e, claro, usando também os pinos 1 e 3 quando necessário. Uma vez instalados os 3 discos menores no pino 2, movemos o disco grande, solitário no pino 1, para o pino solitário que chamaremos de pino 3, com apenas 1 movimento. Finalmente, com novos 7 movimentos, movemos os 3 discos do pino 2 para o pino 3, encima do disco grande, como no exemplo anterior e o problema está resolvido: os discos foram transferidos do pino 1 para o pino 3. Assim, o total de movimentos para resolver o problema de 4 discos é 7+1+7=15. Observe que não sabemos exatamente quais são esses 15 movimentos, mas sabemos que, se são necessários 7 movimentos para moverem 3 discos, então serão necessários 15 movimentos para mover 4 discos.

E se n=5? Raciocinamos exatamente como no caso anterior: movemos os 4 discos que estão encima do maior para o pino 2, com 15 movimentos, depois movemos o disco grande para o pino 3 com 1 movimento e, finalmente, movemos os 4 discos do pino 2 para o pino 3, encima do disco grande, com 15 movimentos. Está resolvido o jogo da Torre com 15+1+15=31 movimentos. Novamente, observamos que não sabemos exatamente quais são esses 31 movimentos, mas sabemos que, se são necessários 15 movimentos para moverem 4 discos, então serão necessários 31 movimentos para mover 5 discos.

Esses exemplos permitem concluir que se o problema com n discos se resolve com N movimentos, então o problema com n+1 discos se resolve com N+1+N = 2N+1 movimentos, pois é necessário liberar o disco maior, de baixo, sempre, com o deslocamento dos n discos acima dele através de N movimentos. Depois, colocamos esse disco grande no pino vazio com 1 movimento e, finalmente, movemos os n discos para cima desse grande com mais N movimentos. Esses casos particulares e essa conclusão geral, permitem que montemos a seguinte tabela e façamos a conjectura que dela segue:

n = número de discos	N = número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

Bem, para encontrarmos a próxima linha da tabela, é fácil: quando n=9, então N será 255.2+1=511. Mas se quisermos N quando n for 26? Chegaríamos à resposta apenas depois de termos passado por n=10, 11, 12, ..., 23, 24 e 25, um trabalho considerável.

Seria, portanto, interessante que obtivéssemos uma fórmula para N em função de n, que nos permitisse encontrar diretamente N quando n fosse 26 ou qualquer outro número natural. Como obter uma tal fórmula, se é que ela existe? Comecemos analisando novamente os casos particulares acima. Observe que se somarmos 1 aos números da segunda coluna, obteríamos as potências sucessivas de 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 e 256.

N = número de discos	N = número mínimo de movimentos necessários parar resolver o problema da Torre de Hanói
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 – 1$
5	$31 = 2^5 – 1$
6	$63 = 2^6 – 1$
7	$127 = 2^7 – 1$
8	$255 = 2^8 - 1$

O que, então, a tabela acima representa? Esses casos nos mostram que N= 2^n -1, para n sendo um número natural qualquer. Portanto, podemos calcular qualquer N em função de um dado n, por exemplo, se n=12, então N= 2^12 -1=5095, sem passar pelo n=9, 10 e 11.

ISSN 2178-034X

4. Metodologia

O objetivo é apresentar, o jogo da Torre de Hanói, um pouco de sua história, a lenda que a ele se refere, bem como as regras do jogo e seus recursos metodológicos. Este método permite ao aluno, o descobrimento das relações entre as peças e as jogadas, identificando o conceito de função e analisando gráficos. Do mesmo modo, consiste na tentativa de descobrir fórmulas para essas funções, explorando o pensamento investigativo, dedutivo e recursivo. E, por fim, nos proporciona várias possibilidades de aplicação em sala de aula. Possivelmente, uma aula mais criativa, com uso de novas práticas pedagógicas, irá despertar mais o interesse do aluno do que aquelas aulas tradicionais, baseadas no livro didático e na resolução de alguns exercícios.

Assim, despertará nos educandos a criação de estratégias para mudar os discos com menor número de movimentos. A procura pela compreensão do jogo, não apenas pelas suas regras implícitas, mas também pelo seu aspecto misterioso, possibilitará uma reflexão sobre os movimentos estabelecidos pelo jogo. Resultando no desenvolvimento do raciocínio lógico e entendimento cognitivo diante de jogos lúdicos. Machado (1995) diz que:

> Na pré-escola, a Torre pode ser utilizada como jogo livre, com regras simples para separação de cores ou tamanhos. A partir da 4ª ou da 5ª série, pode-se jogar segundo as duas regras básicas e o jogo possibilita uma série de explorações interessantes, no caminho para a descoberta da estratégia ótima para alcançar o fim almejado. (p.45)

Através do jogo da Torre de Hanói, pode-se chegar ao Princípio da Indução Finita, quando se quer validar matematicamente as generalizações. Para Machado (1995), esse procedimento pode ser utilizado em classes de Ensino Médio. No entanto, é no Ensino Superior que se usa o referido Princípio como um método de demonstração de teoremas.

5. Considerações Finais

É perceptível que os padrões de ensino da matemática não vêm alcançando o objetivo com a mesma eficácia. É necessário buscar outros meios. O que nos leva ao uso de jogos em sala de aula. Este método, facilitará a interação com a turma, tornando o ensino mais atraente e instigando o aluno a discussão, ocasionando em uma aprendizagem significativa. Com essa forma de ensino, o aluno cria conceitos, de forma dinâmica, desafiadora e motivadora.

São muitos os objetivos que a utilização de ferramentas lúdicas pode alcançar: a interação entre os companheiros de classe, as projeções de definição que se constrói, o estímulo do raciocínio e desenvolvimento do senso crítico, a disposição para aprender e descobrir coisas novas. A Torre de Hanói pode ser associada a questões de coordenação motora, identificação de formas, ordem crescente e decrescente, entre outras. O jogo pode ser usado para o estabelecimento de estratégias de transferência das peças, como a contagem dos movimentos e raciocínio indutivo. Iniciando com um número menor de peças, ou seja, resolvendo um problema mais simples, seguindo assim, um caminho que dará oportunidade a se experimentar uma das mais importantes formas de raciocínio matemático.

6. Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Marcio Nascimento, por todo apoio e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao meu professor, Ulisses, pelo suporte na elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, por toda confiabilidade e fé que sempre depositaram em mim.

7. Referências

COSTA, Alexandre da. *Torre de Hanói, uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio* . Curso de Licenciatura em Matemática – UNIOESTE .Disponível em: http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/2ALEXANDREDACOSTA.pdf

http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimple-rv/?%26nbsp%3B_APLICA%C7%D5ES:Torre_de_Hanoi:O_Problema

KISHIMOTO, Tizuko Morshida. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.* São Paulo: Cortez, 2001.

MACHADO, N.J. *Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins*. São Paulo: Cortez, 1995.

WATANABE, R. *Uma lenda: Torre de Hanói*. In: Druck, S. (org). Explorando o ensino da Matemática: atividades: v.2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. p. 132-135.

ISSN 2178-034X