NÚMEROS TRANSREAIS: UMA ANÁLISE DO PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO E DOS POTENCIAIS EDUCATIVOS DE UM NOVO CONJUNTO ONDE É POSSÍVEL A DIVISÃO POR ZERO

Tiago Soares dos Reis
Instituto Federal do Rio de Janeiro
tiago.reis@ifrj.edu.br

Renata Arruda Barros
Instituto Federal do Rio de Janeiro
renata.barros@ifrj.edu.br

Resumo:
Este trabalho faz uma apresentação básica do conjunto dos números transreais, um conjunto numérico onde a divisão por zero é possível. Inicialmente, faz uma apresentação da aritmética transreal e da prova de sua consistência. Em seguida, apresenta um panorama das principais pesquisas sobre o tema e discute as relações entre o processo de desenvolvimento atualmente vivido por esse conjunto e o processo histórico de construção de outros conjuntos numéricos. Por fim, faz uma breve reflexão sobre as possibilidades educativas que podem advir do conhecimento do tema “números transreais”.
Palavras-chave: Números transreais; divisão por zero; conjuntos numéricos; história dos conjuntos numéricos.

1. Introdução

Os conjuntos numéricos buscam entender a natureza dos números e classificá-los, caracterizando suas propriedades e estabelecendo o que os diferencia. Ao longo da história da matemática, pode-se observar que o surgimento de um novo conjunto está sempre ligado a uma necessidade da sociedade da época, seja ela de ordem prática ou teórica. Enquanto os números naturais surgem a partir da necessidade prática de contagem, outros conjuntos numéricos surgem a partir de necessidades teóricas, oriundas da própria matemática, como, por exemplo, os números irracionais, que surgem a partir de demandas da geometria e do cálculo diferencial e integral.

A impossibilidade da divisão por zero é um fato bem conhecido na matemática. Entretanto, com o advento da informática, a impossibilidade de tal divisão se tornou um limitador para o processamento dos computadores atuais, que retornam uma mensagem de erro quando se deparam com essa exceção aritmética. Nesse contexto, faz sentido pensar nas vantagens de se conceber um conjunto numérico que contenha o conjunto dos números reais e onde seja possível realizar a divisão por zero.

Foi essa a motivação de James A. D. W. Anderson para propor um novo conjunto numérico, o conjunto dos números transreais, que é denotado por $\mathbb{R}^{\mathrm{T}}$. Neste conjunto, existem as frações de denominador zero. James Anderson postula, além dos números reais, a existência de três novos números: $-\infty = \frac{-1}{0}$, $\infty = \frac{1}{0}$ e $\Phi = \frac{0}{0}$, denominados respectivamente de menos infinito, infinito e *nullity*. Ele chama de conjunto dos números transreais o conjunto dos números reais adicionado destes três novos elementos, $\mathbb{R}^{\mathrm{T}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$, e define, de forma conveniente, uma aritmética e uma relação de ordem neste novo conjunto (ANDERSON, 2005). Tendo definido $\mathbb{R}^{\mathrm{T}}$, pode-se também pensar em estender a representação da reta numérica para o conjunto dos números transreais. Nesse sentido, Anderson propõe uma configuração para o que ele chama de reta transreal que pode ser dada a seguir.

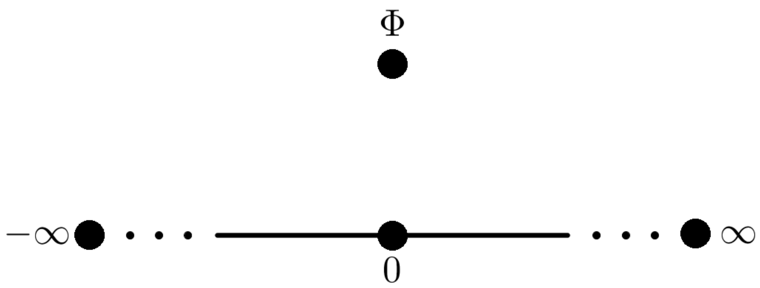

Figura 1. Reta transreal

Este trabalho apresenta a aritmética transreal, um esboço da prova da sua consistência e alguns assuntos que têm sido tema de pesquisa na área. Além disso, faz uma comparação entre o processo de criação do conjunto dos números transreais e o processo histórico de construção de outros conjuntos numéricos e, ainda, discute as possibilidades de inserir o tema como uma ferramenta educacional na formação de professores de matemática.

2. A aritmética transreal

A concepção do infinito e do menos infinito unidos ao conjunto dos números reais já é bem conhecida. Bartle (2001) comenta que, na teoria da medida e integração, é conveniente unir os dois símbolos ∞ e $-\infty$ ao conjunto dos números reais. O *nullity*, por sua vez, foi concebido por Anderson inspirado na geometria projetiva. Um modelo para esta geometria é definir cada ponto no plano projetivo como sendo uma determinada classe de pontos em $\mathbb{R}^3 \setminus$

ISSN 2178-034X

$\{(0,0,0)\}$. Desta forma, o ponto $(0,0,0)$ não faz parte do sistema. Para Anderson, a inclusão do ponto $(0,0,0)$ no modelo projetivo traz diversas vantagens em computação, sobretudo em controle de robôs que precisam compreender a forma e disposição dos objetos no espaço e como eles mudam com o tempo. Anderson (1997) defende esta tese e se refere ao ponto $(0,0,0)$ como *point at nullity*.

Motivado nos reais estendidos e no *nullity*, Anderson postula a existência do novo conjunto numérico: $\mathbb{R}^T$. Para estabelecer a aritmética e a relação de ordem nos transreais, Anderson, Völker e Adams (2007) propõem uma lista de trinta e dois axiomas. Abaixo, os transcrevemos exatamente como aparecem no artigo original. Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}^T$, segue que:

[A1] Associatividade da Adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$

[A2] Comutatividade da Adição: $a + b = b + a$

[A3] Elemento Neutro da Adição: $0 + a = a$

[A4] Adição por *Nullity*: $\Phi + a = \Phi$

[A5] Adição por Infinito: $a + \infty = \infty$: $a \neq -\infty, \Phi$

[A6] Subtração como Soma pelo Oposto: $a - b = a + (-b)$

[A7] Bijetividade do Oposto: $-(-a) = a$

[A8] Inverso Aditivo: $a - a = 0$: $a \neq \pm\infty, \Phi$

[A9] Oposto de *Nullity*: $-\Phi = \Phi$

[A10] Subtração de Infinito não Nula: $a - \infty = -\infty$: $a \neq \infty, \Phi$

[A11] Subtração de Infinito por infinito: $\infty - \infty = \Phi$

[A12] Associatividade da Multiplicação: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

[A13] Comutatividade da Multiplicação: $a \times b = b \times a$

[A14] Elemento Neutro da Multiplicação: $1 \times a = a$

[A15] Multiplicação por *Nullity*: $\Phi \times a = \Phi$

[A16] Infinito vezes zero: $\infty \times 0 = \Phi$

[A17] Divisão: $a \div b = a \times (b^{-1})$

[A18] Elemento Inverso da Multiplicação: $a \div a = 1$: $a \neq 0, \pm\infty, \Phi$

[A19] Bijetividade do Recíproco: $(a^{-1})^{-1} = a$: $a \neq -\infty$

[A20] Recíproco de zero: $0^{-1} = \infty$

[A21] Recíproco do Oposto do Infinito: $(-\infty)^{-1} = 0$

[A22] Recíproco do *Nullity*: $\Phi^{-1} = \Phi$

[A23] Positivo: $\infty \times a = \infty \Leftrightarrow a > 0$

[A24] Negativo: $\infty \times a = -\infty \Leftrightarrow 0 > a$

[A25] Infinito Positivo: $\infty > 0$

[A26] Ordem: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

[A27] Menor que: $a > b \Leftrightarrow b < a$

[A28] Maior ou igual que: $a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$

[A29] Menor ou igual que: $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$

[A30] Quadricotomia: Exatamente um: $(a < 0)$, $(a = 0)$, $(a > 0)$, $(a = \Phi)$

[A31] Distributividade:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) : \neg\left((a = \pm\infty) \wedge \left(\operatorname{sgn}(b) \neq \operatorname{sgn}(c)\right) \wedge (b + c \neq 0, \Phi)\right)$$

[A32] Completude: O conjunto, X, de todos os números transreais exceto Φ é completo, porque:

$$\forall\, Y : Y \subseteq X \Rightarrow (\exists\, u \in X : (\forall\, y \in Y : y \leq u) \wedge (\forall\, v \in X : (\forall\, y \in Y : y \leq v) \Rightarrow u \leq v))$$

Em resumo aos axiomas acima, a aritmética e ordem nos transreais se dá da seguinte forma, sendo $x, y \in \mathbb{R}^T$.

Simétrico: $-\Phi = \Phi$, $\quad -(\infty) = -\infty$, $\quad -(-\infty) = \infty$.

Recíproco: $0^{-1} = \infty$, $\quad \Phi^{-1} = \Phi$, $\quad \infty^{-1} = 0$, $\quad (-\infty)^{-1} = 0$.

Adição: $\Phi + x = \Phi$, $\quad \infty + x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{-\infty, \Phi\} \\ \infty, & x \notin \{-\infty, \Phi\} \end{cases}$, $\quad -\infty + x = -(\infty - x)$.

Multiplicação: $\Phi \times x = \Phi$, $\quad \infty \times x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{0, \Phi\} \\ \infty, & x > 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$, $\quad -\infty \times x = -(\infty \times x)$.

Subtração: $x - y = x + (-y)$.

Divisão: $x \div y = x \times y^{-1}$.

Ordem: Se $x \in \mathbb{R}$ então $-\infty < x < \infty$. Além disso, não ocorre que $x < \Phi$ nem $\Phi < x$.

3. A prova de consistência da aritmética transreal

James Anderson introduziu os transreais de forma intuitiva e axiomática. Do ponto de vista formalista, não há problema na apresentação de James Anderson, uma vez que seus axiomas não apresentaram inconsistências e os próprios autores Anderson, Völker e Adams (2007) afirmam ter uma máquina de prova que estabelece a consistência dos axiomas da aritmética transreal. Entretanto, do ponto de vista construtivista, paira uma dúvida. Os números transreais "existem" de fato? Existe algum modelo sobre os números reais que contemple a aritmética transreal? Algum significado pode ser dado à divisão por zero? Observe que, com seus axiomas, Anderson estabelece um sistema que contém a divisão por zero, entretanto ele não dá uma definição, nem um significado, a esta operação. Reis, Gomide e Anderson (2016) propõem uma construção do conjunto dos números transreais a partir dos números reais. Desta forma, os números transreais e sua aritmética e ordem ficam estabelecidos, não apenas de forma axiomática, mas de forma construtiva. Assim, a consistência dos transreais fica fundamentada na consistência dos reais. E, além disso, esta construção dá um significado, ainda que analítico, não necessariamente contextual, à divisão por zero. A seguir fazemos um breve resumo do exposto no texto citado.

No conjunto $T = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$ os autores definem a seguinte relação: $(x, y) \sim (w, z)$ se, e só se, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $x = \alpha w$ e $y = \alpha z$. E mostram que $\sim$ é uma relação de equivalência, isto é, $\sim$ satisfaz as propriedades, para todos $(x, y), (w, z), (u, v) \in T$: (reflexiva) $(x, y) \sim (x, y)$, (simétrica) $(x, y) \sim (w, z) \Rightarrow (w, z) \sim (x, y)$ e (transitiva) $(x, y) \sim (w, z)$ e $(w, z) \sim (u, v) \Rightarrow (x, y) \sim (u, v)$. Em seguida, denotando por $[x, y]$ a classe de equivalência do par (x, y), mostram que o conjunto quociente de T com respeito a $\sim$, $T/\sim$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência, é formado pelas classes do tipo $[t, 1]$ onde $t \in \mathbb{R}$ e, apenas, mais três classes: $[-1,0]$, $[1,0]$ e $[1,0]$. Isto é, $T/\sim\ = \{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{[-1,0], [1,0], [1,0]\}$. Continuando, os autores definem em $T/\sim$ as operações aritméticas, (adição) $[x, y] + [w, z] = \begin{cases} [2x, y], & \text{se } [x, y] = [w, z] \\ [xz + wy, yz], & \text{se } [x, y] \neq [w, z] \end{cases}$, (multiplicação) $[x, y] \times [w, z] = [xw, yz]$, (simétrico) $-[x, y] = [-x, y]$, (recíproco) $[x, y]^{-1} = \begin{cases} [y, x], & \text{se } x \geq 0 \\ [-y, -x], & \text{se } x < 0 \end{cases}$, (subtração) $[x, y] - [w, z] = [x, y] + (-[w, z])$ e (divisão) $[x, y] \div [w, z] = [x, y] \times [w, z]^{-1}$ e mostram que estas operações estão bem definidas. Definem, ainda, a relação de ordem: $[x, y] < [w, z]$ se, e só se, $[x, y] = [-1,0]$ e $[w, z] = [1,0]$ ou, se, $xz < wy$. Então, demonstram que o conjunto $\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\}$ é um corpo ordenado completo, logo uma cópia do conjunto dos números reais. Desta forma, passam a denotar $\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\}$ por $\mathbb{R}$ e $[t, 1]$ simplesmente por t. Além disso, denotam $-\infty := [-1,0]$, $\infty := [1,0]$ e $\Phi := [0,0]$. Finalmente, os axiomas de James Anderson são demonstrados como teoremas da construção acima descrita.

4. O que tem sido pesquisado em transmatemática

A matemática que surge a partir da permissão da divisão por zero é chamada de transmatemática (REIS, GOMIDE, ANDERSON, 2016). Anderson publicou diversos artigos sobre o assunto (2005, 2006, 2007, 2008, 2014, 2015). Além dos trabalhos iniciais, o próprio Anderson mais Gomide, Kubrusly e Reis têm desenvolvido o tema. Dentre outros tópicos, estes quatro autores: fazem um estudo do momento pelo qual passam os números transreais confrontado a momentos históricos de diversas outras categorias de números (REIS, GOMIDE, KUBRUSLY, 2013); comparam os números transfinitos de Cantor aos transreais, afirmando que estes últimos possibilitam a extensão do conceito de métrica às distâncias infinitas e indeterminadas (GOMIDE, REIS, 2013); propõem o cálculo transreal estendendo os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral ao espaço transreal (ANDERSON, REIS, 2014) (REIS, ANDERSON 2014a, 2015a); propõem os números transcomplexos (REIS, ANDERSON 2014b); propõem uma interpretação contextual para as operações aritméticas entre os transreais (REIS, 2014); propõem uma aplicação dos transreais à lógica estabelecendo uma tradução, no conjunto dos números transreais, dos valores lógicos das proposições e, a partir desta semântica, propõem uma algebrização do espaço lógico, isto é, o espaço das proposições (ANDERSON, GOMIDE, 2014) (GOMIDE, REIS, ANDERSON, 2015); fazem uma discussão sobre as novidades que os transreais trazem à matemática e sobre o desafio de serem aceitos pelo meio acadêmico (REIS, KUBRUSLY, 2015); fazem uma releitura das leis do movimento de Newton sob a ótica dos transreais (ANDERSON, REIS, 2015); estendem as funções elementares ao domínio transreal (REIS, ANDERSON 2015b); demonstram a consistência da aritmética transreal e propõem o conceito algébrico de transcorpo (REIS, GOMIDE, ANDERSON, 2016). Além dos tópicos acima mencionados, a transmatemática foi o tema da tese de doutorado de Reis orientado por Kubrusly (REIS, 2015).

5. Uma análise do processo de desenvolvimento do conjunto dos números transreais

Anderson axiomatiza que $\frac{0}{0} = \Phi$. É claro que tal caminho para resolver-se o problema da divisão por zero é passível da opinião de que apenas foi dado um nome para o objeto $\frac{0}{0}$, que não é um número! Esta observação, a um primeiro olhar, não está equivocada. Porém, lembramos que este é um processo comum na história da matemática. Em diversos momentos, um problema foi inicialmente resolvido de forma supositiva, isto é, supondo-se a

ISSN 2178-034X

existência de um determinado objeto e que este objeto gozava de propriedades já conhecidas de outros. De forma semelhante acontece agora com os transreais. James Anderson deu um importante passo na resolução do problema da divisão por zero propondo uma axiomática para os números transreais. Este novo conjunto, agora, tem sido explorado nas pesquisas que foram comentadas na seção anterior. Em Reis, Gomide e Kubrusly (2013) e no capítulo 2 de Reis (2015), os autores abordam a evolução histórica do conceito de número. Falam de como o homem, em diversos momentos, necessitou ampliar o que entendia por número. E observam que cada uma destas ampliações se deu inicialmente de forma intuitiva, sem preocupação com rigor, vindo depois a formalização do novo conjunto numérico. Na presente seção, tratamos resumidamente deste assunto. Queremos, com isso, defender que o conhecimento da história da matemática é extremamente importante na compreensão e no processo de ensino-aprendizagem de uma nova teoria.

Números como, por exemplo, irracionais, complexos e infinitesimais já foram tratados como fictícios, imaginativos, irreais e não como números verdadeiros. No início dos estudos do cálculo diferencial e integral, o entendimento dos números reais era apenas a ideia intuitiva de que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos numa reta e o conjunto dos números. Apesar desta concepção, os irracionais eram, por muitos, aceitos não como números, mas como objetos convenientes em determinados estudos. Um outro exemplo se deu com os números complexos. No século XVI, Bombelli executou operações aritméticas com raízes quadradas de números negativos supondo que pra elas valiam as propriedades aritméticas dos números reais. Naquele momento, Bombelli não se preocupou com rigor ou com uma interpretação do objeto estranho, ele apenas supôs a existência de outros entes que pudessem ser chamados de números. Os números complexos foram estudados por outros matemáticos, mas ainda com a condição de números imaginativos (ROQUE, 2012). Cabe comentar ainda, o caso dos números hiperreais. Leibniz desenvolvia seu cálculo diferencial e integral utilizando números infinitamente pequenos ou infinitamente próximos de zero (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006). E, mesmo sem ter uma definição rigorosa de infinitésimo (número infinitamente pequeno), Leibniz deduziu diversos resultados do cálculo atual.

O advento do cálculo integral e diferencial trouxe ideias inovadoras e com elas as polêmicas acerca de seus métodos. Dentre outros motivos, essas polêmicas causaram um movimento em direção à formalização dos conceitos matemáticos, isto é, o estabelecimento destes conceitos sem a pressuposição da intuição geométrica. No século XVIII, esforços foram feitos em dar fundamentação aos números reais, mas sua consolidação se deu apenas no século XIX com uma construção, feita por Dedekind, a partir dos números racionais. A motivação de Dedekind foi instituir o conjunto dos números reais não apenas pela admissão de sua existência, mas seus elementos deveriam ser todos definidos de modo preciso a partir de objetos já estabelecidos. Quanto aos complexos, também no século XIX, Hamilton deu uma definição rigorosa a esses números e a sua aritmética, deduzindo suas propriedades a partir das propriedades de números reais (ROQUE, 2012). Os infinitésimos de Leibniz sofreram duras críticas e só na década de 1960, Robinson fez uma construção dos hiperreais (que contém os infinitesimais) a partir dos números reais e deduziu as propriedades já vislumbradas por Leibniz (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006).

Assim como as classes de números acima citadas, os transreais foram propostos por James Anderson inicialmente de forma intuitiva, com apelo geométrico. E agora, Reis, Gomide e Anderson (2016) propõem uma construção do conjunto dos transreais a partir dos reais. Desta forma, os números transreais e sua aritmética surgem como uma consequência dos números reais e não de forma axiomática. Esta construção, apresentada anteriormente, demonstra a consistência da aritmética transreal.

6. Potencialidades educacionais da abordagem da transmatemática

Todos os conteúdos matemáticos passam por um processo de evolução e consolidação dentro de uma sociedade e sofrem o reflexo de suas qualidades e problemas. Porém, todo esse desenrolar costuma ser omitido durante o processo didático, devido ao nosso interesse somente nos conceitos e propriedades já definidas. Essas informações que são omitidas mostram uma matemática obscura, onde os conceitos, definições e propriedades parecem ter sido descobertos e rapidamente lapidados, sem que matemáticos tivessem feito escolhas ruins, assumido valores lógicos verdadeiros para proposições falsas ou até mesmo dedicando anos e anos de estudo para conseguir obter o resultado em questão.

Aliado a isso, parece ser parte do senso comum que a matemática é uma ciência completamente terminada e essa imagem contribui para que muitos alunos a considerem como uma ciência difícil ocasionando a desistência e criando barreiras e obstáculos para o aprendizado. Concordamos com os PCN que:

ISSN 2178-034X

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento [...]. (BRASIL, 1998, p.37)

Nesse sentido, o processo de evolução pelo qual o conjunto dos números transreais está passando pode ser comparado com o processo histórico de desenvolvimento de outros conjuntos numéricos, como mostrado na seção anterior, permitindo o estabelecimento de comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente. Além disso, acreditamos que conhecimentos básicos sobre os números transreais podem contribuir para mostrar que necessidades da sociedade moderna, como o advento da informática, ainda propiciam o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos. Não estamos defendendo que esta nova teoria deva ser incluída no currículo obrigatório dos cursos de formação de professores de matemática, mas que, ao menos, um conhecimento introdutório dela pode exemplificar muito bem que a matemática ainda está em desenvolvimento. Por exemplo, temos ministrado, já há quatro semestres, disciplinas optativas com temas na área da transmatemática no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ campus Volta Redonda.

7. Considerações Finais

O conjunto dos números transreais é alvo de pesquisas atuais no campo da matemática e passa, atualmente, por um momento que pode ser comparado a momentos vividos, ao longo da história, por outros conjuntos numéricos. Tal fato permite estabelecer uma comparação entre presente e passado que pode ajudar na compreensão da relação entre o desenvolvimento da matemática e as demandas das sociedades ao longo da história.

Acreditamos que a apresentação de um novo conjunto numérico, advindo de necessidades recentes da sociedade, pode ajudar a desmistificar a ideia de que a matemática é uma ciência pronta e acabada, permitindo que os estudantes percebam que o saber matemático é uma construção contínua da sociedade.

8. Referências

ANDERSON, J. A. D. W. Representing geometrical knowledge. *Philosophical Transactions of the Royal Society* B, v. 352, p. 1129-1140, 1997.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine II: Visualisation. *Vision Geometry XIII Proceedings of the SPIE*, v. 5675, p. 100-111, 2005. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine VII: The universal perspex machine. *Vision Geometry XIV Proceedings of the SPIE*, v. 6066, p. 1-17, 2006. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineVII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine IX: Transreal analysis. *Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE*, v. 6499, p. 1-12, 2007. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineIX.pdf > Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine XI: Topology of the transreal numbers. In: INTERNATIONAL MULTICONFERENCE OF ENGINEERS AND COMPUTER SCIENTISTS, 2008. Hong Kong.Anais... International Association of Engineers, 2008. p. 330-338. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineXI.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W. Trans-floating-point arithmetic removes nine quadrillion redundancies from 64-bit IEEE 754 floating-point arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014, p. 80-85. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp80-85.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W. Transmathematical Basis of Infinitely Scalable Pipeline Machines. In: Slawomir Koziel, Leifur Leifsson, Michael Lees, Valeria V. Krzhizhanovskaya, Jack Dongarra and Peter M.A. Sloot (editores), INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL SCIENCE, ICCS 2015 Computational Science at the Gates of Nature, Procedia Computer Science, v. 51, 1828-1837, 2015. Disponível em <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050915012168> Acesso em 01 de março de 2016.

ANDERSON, J. A. D. W.; GOMIDE, W. Transreal arithmetic as a consistent basis for paraconsistent logics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 103-108. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp103-108.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal limits expose category errors in IEEE 754 floating-point arithmetic and in mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE

ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 86-91. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp86-91.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal Newtonian Physics Operates at Singularities. Synesis, v. 7, n. 2, p. 58-81, 2015. Disponível em <http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path%5B%5D=738> Acesso em 21 de fevereiro de 2016.

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, N.; ADAMS A. A. Perspex Machine VIII: Axioms of transreal arithmetic. Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE. v. 6499, p. 649903.1-649903.12, 2007. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineVIII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

BARTLE, R. G. A Modern Theory of Integration. Graduate Studies in Mathematics. v. 32. Providence: American Mathematical Society, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF, 1998b.

CARVALHO, T. F. de; D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v.8, n.1, São Paulo, PUC-SP, 2006.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos. Números Transreais: Sobre a Noção de Distância. *Synesis*, v. 5, n. 2, p. 197-210, 2013. Disponível em <http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path[]=413&path[]=241> Acesso em 02 de junho de 2015.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Logical Space of All Propositions. Transactions on Engineering Technologies - World Congress on Engineering and Computer Science 2014, Springer, p. 227-242, 2015.

REIS, T. S. dos. Números transreais: matemática ou devaneio? In: 14º SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 2014. Belo Horizonte. Anais... Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2014. Disponível em <www.14snhct.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1899> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos. Transmatemática. 2015. 124 f. Tese (Doutorado em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transdifferential and transintegral calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014a. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 92-96. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp92-96.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Construction of the transcomplex numbers from the complex numbers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014b. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014 p. 97-102. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp97-102.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Calculus. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, v. 45, n. 1, p. 51-63, 2015a. Disponível em <http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v45/issue_1/IJAM_45_1_06.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Limits and Elementary Functions. *Transactions on Engineering Technologies - World Congress on Engineering and Computer Science 2014*, Springer, p. 209-225, 2015b.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W; KUBRUSLY, R. S. Números transreais: mais uma etapa na história dos números. In: SCIENTIARUM HISTÓRIA: VI CONGRESSO DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS, DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA, 2013. Rio de Janeiro. Anais... Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013. Disponível em <http://www.hcte.ufrj.br/downloads/sh/sh6/SHVI/trabalhos%20orais%20completos/trabalho_081.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W; ANDERSON, J. A. D. W. Construction of the transreal numbers and algebraic transfields. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, v. 46, n. 1, p. 11-23, 2016. Disponível em <http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v46/issue_1/IJAM_46_1_03.pdf> Acesso em 21 de fevereiro de 2016.

REIS, T. S. dos; KUBRUSLY, R. S. Divisão por zero e desenvolvimento dos números transreais. Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, 2015. Disponível em <http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path[]=733&path[]=360> Acesso em 21 de fevereiro de 2016.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.