# GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: EXPLORANDO CONCEITOS E PROPRIEDADES COM O DESENVOLVIMENTO DE *APPLETS* NO GEOGEBRA

*Gabriel de Souza Pinheiro*
*Faculdade Cenecista de Osório- FACOS*
*gabrielpmatematica@gmail.com*

*Joseide Justin Dallemole*
*Faculdade Cenecista de Osório-FACOS*
*jjdallemole@yahoo.com.br*

*Jussiê dos Santos Matos*
*Faculdade Cenecista de Osório-FACOS*
*jussiematos@hotmail.com*

**Resumo:** Busca-se promover junto aos professores e estudantes de Matemática uma reflexão do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Plana e Espacial, explorando seus conceitos e propriedades com o auxílio das Tecnologias de Informação e Comunicação embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. São apresentadas sugestões de atividades didáticas, utilizando vetores, as quais são desenvolvidas com o auxílio do software Geogebra, e podem ser integradas à metodologia de sala de aula, com o intuito de contribuir para que o aluno construa, compreenda e aprenda conceitos e propriedades matemáticas através da mobilização e coordenação de diferentes registros semióticos, como a língua natural, o registro algébrico, registro geométrico e o registro gráfico.
**Palavras-chave:** Geometria Analítica; Vetores; Tecnologias da Informação e Comunicação; Registros de representação Semiótica.

## Introdução

Segundo Eves (2007) as ideias concebidas por Descartes e Fermat acerca da Geometria Analítica moderna constituem um método de enfrentar problemas geométricos. Para o autor este conteúdo viabiliza uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, estabelecendo, também, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação e as propriedades geométricas da curva associada.

A ideia de coordenada, segundo Eves (2007), já foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. Hoje a Geometria Analítica, objeto de estudo no Ensino Médio e Superior está presente em muitas áreas da Ciência, como na Medicina em exames por imagem, na Engenharia desde a fabricação de peças de aço até a construção de cenários virtuais, na Astronomia, no GPS, nos radares dos aeroportos e dos aviões, na Física em movimentos de corpos em função do tempo.

Nestas diferentes áreas os vetores e espaços vetoriais constituem a base de estudo. Na Física por exemplo, utiliza-se grandezas vetoriais como: velocidade, aceleração, força, torque, as quais são chamadas de grandezas vetoriais pois para determina-las é necessário conhecer a direção, sentido e módulo. Assim, os vetores são utilizados para auxiliar nos cálculos relacionados à cinemática vetorial, dinâmica, campo elétrico, etc. Além disso, estudos como de Isaac Newton e Leibnez voltados à Geometria Analítica serviram de base para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Comin et.al (2012) a Geometria Analítica é reconhecida como parte imprescindível da matemática, com utilização em diversas áreas do conhecimento, faz parte da formação básica de praticamente todos os programas de educação do país e de cursos de formação superior. Os autores afirmam que no Ensino Médio é ensinada uma Geometria Analítica clássica e nos cursos superiores é ministrada uma Geometria Analítica vetorial, ou seja, a Geometria Analítica à medida que se faz necessária uma Matemática mais significativa, vai sendo associada a outras áreas da Matemática, neste caso, com a álgebra linear.

Dallemole (2010), constatou em uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática que estes ainda apresentam dificuldades em realizar tratamentos e conversões entre os registros língua natural, representação algébrica e representação gráfica envolvendo os conteúdos de Geometria Analítica, mesmo já tendo visto tais conceitos no Ensino Médio. Silva (2006) constatou que muitos alunos do Ensino Médio mostram dificuldades em articular com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, além da dificuldade para compreender a diferença entre o objeto matemático e sua representação. Esta constatação implica em dificuldades, também, no conteúdo ministrado em Geometria Analítica do Ensino Superior.

Segundo Duval (2003), compreender e apreender conceitos matemáticos não tem sido tarefa fácil para a maioria dos alunos, pois estes, têm apresentado dificuldades muitas vezes insuperáveis na busca pelo saber matemático. Duval (2004), em sua teoria dos Registros de Representação Semiótica estabelece que toda a atividade Matemática e toda comunicação nesta área se dá com base nas representações semióticas, e aponta sua teoria como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem nesta disciplina, enfatizando a importância de se trabalhar com a diversidade de registros de representação que possui um objeto matemático e a articulação entre eles para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos pela Matemática.

Entende-se que o conteúdo de Geometria Analítica contêm uma diversidade de registros semióticos que devem ser explorados em seu processo de ensino e aprendizagem. Para isso é fundamental a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), utilizando softwares que possibilitam desenvolver situações de ensino e aprendizagem que enfatize conceitos e propriedades articulados em diferentes registros semióticos como, geométrico, algébrico e gráfico para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos por este conteúdo matemático.

## 1. Tecnologias da Informação e Comunicação

Relacionada a área da Matemática Mendes (2009) ressalta que atualmente a informática é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes na efetivação da aprendizagem em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais para a Matemática imaginária.

De acordo com a literatura em informática educativa, Bairral (2009), coloca que poderíamos conceituar as TIC como uma tecnologia que tem quatro características essenciais: conectividade, integração de mídias, dinâmica e construção hipertextual, e interatividade.

Para Borba (1999) a disponibilidade de novas mídias na sala de aula pode alterar o pensamento matemático, pois este é condicionado pelas mídias disponíveis em um determinado momento. Cita como exemplo que, "com a capacidade de geração de gráficos destas mídias há um deslocamento da ênfase algébrica dada ao estudo das funções para uma atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares" (BORBA, 1999, p. 293). Scheffer, Bressan e Corrêa (2010) mencionam que a investigação matemática com as tecnologias de interface, explora diferentes modos e experimenta inúmeras variações, principalmente na construção geométrica e no estudo de funções a partir da representação gráfica, possibilitando questionar a intuição, na busca de argumentos para a validação de conjecturas.

Segundo Bellemain et al. (2010, p. 245)

> a representação de objetos matemáticos em um ambiente computacional concebido para favorecer a aprendizagem de conhecimentos permite o desenvolvimento de novos registros de representação semiótica, explorando os aportes específicos de um suporte digital e computacional.

Nesse sentido, os autores complementam que um software deve dar acesso a diversos meios de representar objetos matemáticos e manipular essas representações nas interfaces do computador.

Assim, o uso de TIC no processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve propiciar o uso de diferentes tipos de representações e a articulação entre elas.

No ensino da Geometria Analítica articulado a tecnologia, Brasil (2006), enfatizam que há uma variedade de softwares que se pode trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como polares, possuem recursos que facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, o que ajuda o aluno a entender o significado geométrico do conjunto- solução de uma equação. Da mesma forma, entende-se que a utilização destes softwares possibilitam a exploração de conceitos e propriedades de vetores e curvas estudados na Geometria Analítica do Ensino Superior, possibilitando a variação de coordenadas e parâmetros a fim de contribuir na visualização de tais propriedades envolvidas nos registros geométricos, algébricos e gráficos.

Com relação ao uso de *applets*, os quais são pequenos programas escritos em linguagem Java e executáveis dentro de paginas da *web*, Bairral (2009) cita algumas razões para inserí-los na prática docente:

> sua diferente apresentação e dinâmica motiva os usuários por apresentar uma forma diferente de visualização e interação dos recursos usuais (livros e cds); seu uso é desafiador, o usuário pode aprender de uma forma diferente, até mesmo interagindo com a figura; estimula o trabalho individual e coletivo; facilidade de acesso pela disponibilidade gratuita na rede; as fontes de informação estão mais diversificadas e a escola tem o dever de estimular novas formas de experimentação e criação dos alunos, bem como seu uso crítico e não apenas cópia e reprodução de algo construído (BAIRRAL, 2009, p. 49).

Nesse sentido, entende-se que o uso de *applets* possibilita experimentações e investigações sobre determinado conceito, bem como a construção mesmo, pois permite visualizar e explorar as diferentes representações semióticas de um objeto matemático contribuindo para a apreensão do mesmo.

## 2. Os Registros de Representação Semiótica

Em sua teoria sobre Registros de Representações Semióticas, Raymond Duval define representações semióticas como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (Duval, apud DAMM, 2002, p.143).

Para Duval (2003, p. 13) “é suficiente observar a história do desenvolvimento da Matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.”

Especificamente na Matemática, Duval (2004) afirma que ela permite uma grande variedade de representações. Segundo o autor, existem quatro tipos diferentes de representações semióticas, representadas na figura 1.

| | Representação Discursiva | Representação não-discursiva |
|---|---|---|
| REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis. | Língua Natural<br>Associações verbais (conceituais).<br>Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectiva.<br>Apreensão operatória e não somente perspectiva;<br>Construção com instrumentos. |
| REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos. | Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais).<br>Cálculo | Gráficos cartesianos.<br>Mudanças de sistema de coordenadas;<br>Interpolação, extrapolação. |

Figura 1: quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. (DUVAL, 2003, p.14)

Para a formação de uma representação de um registro, de acordo com Damm (2002), é necessária uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado, e depende de regras que asseguram seu reconhecimento e possibilidade de utilização para tratamento.

Os tratamentos para Duval (2003) são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

Já as conversões de representações são, segundo Duval (2003, p.16), “transformações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo: passar da escrita algébrica de uma equação (registro simbólico) à sua representação gráfica (registro gráfico)”. Para Duval (2003) é necessário distinguir o tratamento da conversão, e se esta consiste em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes.

Um dos problemas do ensino da Matemática é que, na maioria das vezes, conforme Damm (2002) só são consideradas as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários a cada uma, mas, no entanto, o que garante a apreensão conceitual do objeto matemático é a coordenação, pelo aluno, entre vários registros de representação.

Neste contexto, destaca-se a necessidade do professor buscar propor situações de aprendizagem em que é preciso utilizar diferentes registros de representações semióticas, explorar os tratamentos respectivos à estas representações, e principalmente potencializar as atividades de conversão entre os diferentes registros de representação de um objeto para o entendimento matemático do mesmo. Desta forma, a utilização das TIC são ferramentas fundamentais para que os alunos possam analisar e visualizar as propriedades envolvidas nos diferentes tipos de registros contidos no conteúdo de Geometria Analítica Plana e Espacial e facilitar a compreensão para a realização de atividades de conversão entre estes registros.

## 3. As Atividades Propostas

Neste trabalho, serão desenvolvidas diferentes atividades com o auxílio do software Geogebra que permite criar e explorar, segundo o objetivo apresentado, de maneira dinâmica as propriedades de vetores no plano e no espaço, as operações com os mesmos e propriedades de curvas. O professor pode potencializar o ensino facilitando o acesso ao aluno por meio tanto da internet, postado em uma página *html*, como também criado durante as aulas ou simplesmente fornecido pelo professor.

As atividades propostas serão também de desenvolvimentos de *applets* com o conteúdo de Geometria Analítica, possibilitando a investigação das propriedades existentes nas formas geométricas e gráficas em articulação com a interpretação e as resoluções algébricas dos conceitos envolvidos na situação proposta.

A seguir apresenta-se nas figuras 2 e 3 um exemplo de uma atividade que é um *applet* dinâmico construído para provar, utilizando vetores, que o triângulo inscrito em uma circunferência tendo um lado como o diâmetro da mesma é retângulo. Para construção traça-se o raio r desta circunferência a partir de um vetor $\vec{v}$. Fazendo $|\vec{v}|$=r , traça-se um vetor $\vec{u}$ partindo da origem de $\vec{v}$ e com extremidade no ângulo reto do triângulo inscrito. Teremos:

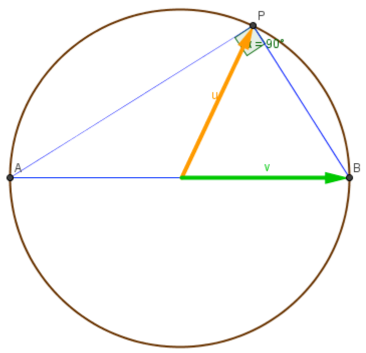


Figura 2: Passo 1 da atividade de construção de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

Com isso temos que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é igual a ($\vec{u}$+$\vec{v}$) e o vetor $\overrightarrow{PB}$ é igual a ($\vec{u}$-$\vec{v}$). No geogebra teremos:

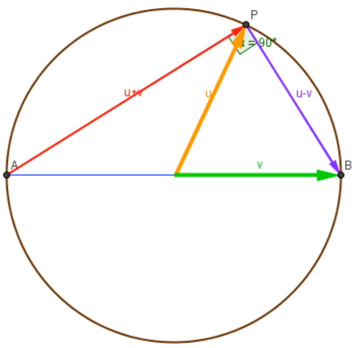


Figura 3: Passo 2 da atividade de construção de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência

Assim é possível visualizar os vetores ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) e ($\vec{u}$- $\vec{v}$) e o ângulo de 90 graus entre eles, o que caracteriza um triângulo retângulo. Fazendo a conversão do registro geométrico para o registro algébrico temos que a condição para que o triângulo seja retângulo é que o produto escalar de ($\vec{u}$+$\vec{v}$) e ($\vec{u}$-$\vec{v}$) seja zero. Logo, ($\vec{u}$+$\vec{v}$).( $\vec{u}$- $\vec{v}$)= $\vec{u}^2$- $\vec{v}^2$, temos por definição que $\vec{u}^2$ = |$\vec{u}$|, como |$\vec{u}$|=|$\vec{v}$|, temos que ($\vec{u}$+$\vec{v}$).( $\vec{u}$-$\vec{v}$)= 0. Ainda é possível, tornar a construção dinâmica ao movimentar o ponto P sobre a circunferência de maneira que seja possível visualizar que ao modificar os módulos e direção dos vetores ($\vec{u}$+$\vec{v}$) e ($\vec{u}$-$\vec{v}$) o ângulo entre eles permanece 90 graus, ou seja o triângulo sempre será retângulo, pois os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são raios da circunferência, o que implica que sempre |$\vec{u}$|=|$\vec{v}$|.

## Considerações

Entende-se que o desenvolvimento cognitivo matemático do educando está diretamente vinculado às ações metodológicas que enfatizem o uso da diversidade de recursos que possibilitem a articulação de diferentes registros semióticos. Assim, é importante que o professor ao trabalhar com recursos informáticos escolha softwares que propiciem a exploração destes registros semióticos, de forma simultânea, pois isto irá contribuir para que os alunos explorem e compreendam determinados conceitos e ideias matemáticas envolvidos nos objetos matemáticos em estudo, o que é fundamental para a qualidade da aprendizagem.

## 6. Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Da UFRRJ, 2009.

BELLEMAIN, Franck et al. Desenvolvimento de Tecnologias para a Educação Matemática- Avanços e Desafios. In: JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática.** Recife: SEBEM, 2010, p. 243- 262.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 285- 295.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/ Seb, 2006.

COMIN, Aline; etal. **História da Educação Matemática:** escrita e reescrita de histórias. Org. Ocsana Sônia Danyluk. Porto Alegre: Sulina, 2012.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA.** Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática**: uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11- 33.

________________. **Semiosis y Pensamiento Humano:** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Tradução em casteliano de Myriam Veja Reestrepo. Universidade Del Valle: Peter Lang, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2007.

SCHEFFER, Nilse Fátima; BRESSAN, Jordana Zawieruka; CORRÊA, Ricardo Machado. Narrativas Matemáticas: linguagem verbal e não-verbal a argumentação e os registros de representação na discussão do tema funções com o auxílio de tecnologias. In: JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática.** Recife: SEBEM, 2010, p. 45- 61.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.