BASE NO PLANO: UM ESTUDO DE EXPLORAÇÃO DE REGISTROS SEMIÓTICOS DESENVOLVIDO EM UM AMBIENTE DINÂMICO

Monica Karrer
Centro Universitário da FEI
mkarrer@uol.com.br

Tiago Estrela de Oliveira
Centro Universitário da FEI
t.estrela@fei.edu.br

Resumo:
Neste artigo, tem-se o objetivo de expor os resultados da aplicação de parte de um experimento de ensino da disciplina de Geometria Analítica, especificamente sobre o conceito de base no plano, o qual foi elaborado de modo a explorar relações entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural. O experimento, desenvolvido nos ambientes papel e lápis e GeoGebra, contou com a participação de cinco alunos do primeiro ciclo do curso de Engenharia de uma instituição confessional de ensino. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas e sua elaboração e condução se basearam na metodologia de *Design Experiment*. As produções dos sujeitos revelaram que um trabalho integrado entre os ambientes papel e lápis e computacional e a diversificação de registros foram vitais para que os sujeitos pudessem avançar na compreensão do conceito de base no plano.
Palavras-chave: Base no Plano; Registros de Representações Semióticas; Experimento de Ensino; GeoGebra.

1. Introdução

O conteúdo de Base é desenvolvido nos cursos superiores da área de exatas na disciplina de Geometria Analítica, especificamente para os casos de bases no plano e no espaço, sendo retomado na disciplina de Álgebra Linear para os casos de bases de espaços vetoriais de dimensão finita. A Geometria Analítica, disciplina presente no ciclo básico dos cursos superiores de exatas, demanda do estudante a habilidade de tratar algebricamente situações geométricas, o que leva à necessidade de um ensino que integre principalmente relações entre representações de dois registros distintos, o algébrico e o gráfico.

Dificuldades de construção de conceitos nessas disciplinas e discussões sobre a limitação do tratamento da Geometria Analítica à resolução de algoritmos são apontadas por diversos autores, dentre eles Santos (2013) e Dallemole et al. (2011). Muitas vezes os estudantes resolvem exercícios apresentando um domínio processual, mas não compreendem o significado do conceito. Ainda, Karrer e Barreiro (2009) detectaram, por meio de análise de livros didáticos de Geometria Analítica, a reduzida exploração de representações do registro gráfico e de conversões envolvendo este tipo de registro, mostrando que há um desequilíbrio no tratamento das vertentes geométrica e algébrica, com ênfase na algébrica. Consequentemente, algebrizar o estudo da Geometria Analítica, restando ao estudante manipular equações, restringe a construção dos conceitos a uma habilidade procedimental, sem atingir sua efetiva compreensão. Tal fato nos motivou a realizar um estudo sobre conteúdos desenvolvidos na Geometria Analítica, com o intuito de tentar lidar com essas dificuldades por meio de um ambiente favorável para a construção do conceito, constituído de um trabalho que une a exploração de representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural com uma estratégia exploratória no ambiente dinâmico GeoGebra.

Neste artigo apresentamos somente parte do estudo, especificamente o trabalho com o conceito de base no plano. Para isso foram propostas cinco atividades, visando investigar se o aluno conclui que a base no plano não é única, ainda se um conjunto de dois vetores é uma base do plano, então é possível escrever qualquer vetor do plano como combinação linear deles e que isso não é possível se o conjunto for formado por dois vetores colineares. Por fim, pretende-se que o aluno exponha que, como a base não é única e um mesmo vetor pode ser representado em diferentes bases, suas coordenadas dependem da base considerada.

2. Fundamentação Teórica e Revisão de Literatura

Considerando o fato de que a Geometria Analítica requer do sujeito o tratamento de problemas geométricos por meio da álgebra, é fundamental que o estudante seja capaz de coordenar as relações entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural.

Desta forma, este estudo se apoia na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2006). Este pesquisador afirma que, como a Matemática tem um caráter abstrato, não há como acessar um objeto matemático sem utilizar representações semióticas.

Ele define registro de representação semiótica como um sistema em que é possível realizar três atividades cognitivas: a *formação* e duas transformações entre representações, denominadas *tratamento* e *conversão*. Enquanto o tratamento é a transformação entre representações no interior de um mesmo registro, a conversão prevê transformações de representações de registros distintos. Como exemplo de registros, temos o algébrico, o gráfico, o da língua natural e o figural.

A atividade de conversão é destacada por Duval (2006), uma vez que ela tem características que nem sempre são observadas no ensino de Matemática. Isto porque ela pode ser afetada por dois fenômenos: o da não congruência e o da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão. A congruência entre duas representações requer que haja correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Se pelo menos uma dessas condições não for verificada, a conversão é classificada como não congruente e são principalmente estas que podem desencadear dificuldades nos estudantes. O segundo fenômeno, também frequentemente não considerado no ensino de Matemática, levanta o fato de que conversão pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido contrário de conversão.

Uma classificação dos registros proposta pelo autor considera sua funcionalidade e sua discursividade. Quando suas representações permitirem tratamentos algoritmizáveis, eles são classificados em monofuncionais e, caso contrário, em multifuncionais. Quando for possível permitir o discurso, os registros são classificados em discursivos e, caso contrário, em não discursivos. Nessa classificação, o registro gráfico é monofuncional não discursivo, o algébrico é classificado como monofuncional discursivo, a língua natural é classificada como registro multifuncional discursivo e o figural como multifuncional não discursivo. Conforme apontado por Duval (1995), principalmente nos níveis mais avançados de ensino de Matemática, os registros monofuncionais discursivos são os mais presentes.

A utilização de ferramentas computacionais no ensino de Matemática é defendida por diversos pesquisadores, dentre eles Borba e Penteado (2010) e Noss e Hoyles (1996).

Além de considerarem que seu uso é direito de qualquer aluno, esses pesquisadores apontam que eles permitem realizar explorações que não seriam possíveis em outros ambientes, contribuindo, assim, para o desenvolvimento do pensamento matemático. Coerentes com esse pensamento, adotamos o software GeoGebra. A seleção desse software se deu pelo fato de favorecer um trabalho de levantamento de conjecturas, além de permitir o estabelecimento de relações dinâmicas entre representações dos registros algébrico e gráfico.

3. Metodologia

Para elaborar e conduzir o experimento de ensino, foi utilizada a metodologia denominada *Design Experiment* de Cobb et al. (2003). Essa metodologia tem por foco a análise das compreensões dos sujeitos durante o processo. Uma primeira concepção do desenho é realizada tendo por base as indicações presentes na literatura científica, porém, à medida que o experimento é conduzido, caso haja necessidade, novas conjecturas devem ser realizadas e o experimento pode ser remodelado de acordo com as produções dos estudantes. Isso faz com que a metodologia seja dotada de um caráter cíclico, prevendo iteratividade e flexibilidade. Essa metodologia objetiva fornecer uma base para propostas de inovações no ensino da Matemática. Há várias manifestações dessa metodologia, tanto de pesquisas com modelos de pequena escala, como para grandes amostras, visando reestruturações mais amplas. No presente estudo, utilizamos o modelo de pequena escala para favorecer a análise minuciosa das trajetórias dos sujeitos. O papel do pesquisador consiste em atuar como orientador do processo, intervindo somente nos momentos de bloqueio e identificando as reformulações necessárias durante a execução do experimento.

Participaram do experimento cinco estudantes do ciclo básico do curso de Engenharia de uma instituição confessional de ensino superior. Eles já haviam tido contato com o tema proposto, porém, sem o uso do recurso computacional. O desenvolvimento dos questionários e das atividades ocorreu em um laboratório de informática, com duas duplas e um único aluno, os quais são denominados nesse artigo por Dupla A, Dupla B e Aluno A. Para a análise dos dados, foram consideradas as produções oral e escrita dos sujeitos. Inicialmente foi solicitado aos alunos que avaliassem a veracidade das seguintes informações, justificando suas classificações.

Quadro 1 - Questionário inicial

a) Só existe uma base no plano (   )   b) Dado um conjunto de dois vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, ele sempre será uma base do plano ( )   c) Se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$é uma base do plano, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (   ) d) Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ colineares, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ( ) e) As coordenadas de um vetor do plano dependem da base considerada (   )

Em seguida, foram propostas cinco atividades. Em todas as atividades os vetores foram dados em relação à base canônica do plano. Na primeira, apresentada a seguir, teve-se o objetivo de criar para o aluno um ambiente favorável para observar que, dados dois vetores do plano não colineares, é possível escrever um vetor qualquer do plano como combinação linear deles. Inicialmente esperava-se que o aluno determinasse a combinação linear algebricamente para, em seguida, relacionar o obtido com a representação no registro gráfico, efetuando conversões no sentido algébrico-gráfico.

Quadro 2 – Primeira Atividade

1. Na entrada, construir os pontos A=(0,0), B=(1,2), C=(3,1) e D=(11,7). 2. Usando o comando "vetor" (no terceiro ícone), construir os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Com o botão direito do mouse vá em propriedades e altere a cor de $\vec{w}$. 3. No papel, determine a e b para que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, se possível. 4. Vamos verificar o significado geométrico dessa situação. No GeoGebra, construa a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AC}$ que passa por D. Para isto, use o comando “reta paralela” (quarto ícone). Do mesmo modo, construa a reta paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$ que passa por D. Usando o comando “reta” (terceiro ícone), construa as retas AB e AC. Agora com o comando “interseção de dois objetos” (segundo ícone) determine os pontos de intersecção entre as retas. Observe que o vetor $\overrightarrow{AD}$ coincide com a diagonal do paralelogramo AFDE. 5. Construa os vetores $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$ e $\vec{f} = \overrightarrow{AF}$ usando o comando "vetor" (no terceiro ícone). As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AE}$ são (,) e as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AF}$ são (,). 6. No item 3, você encontrou: (11,7)=_______(1,2) + ________(3,1) Compare essa resposta com os vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AF}$ na tela do GeoGebra. O que você observou?

Na atividade 2, o vetor $\vec{w}$=(11,7) foi mantido, porém os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ foram alterados para $\overrightarrow{AB}$=(2,1) e $\overrightarrow{AC}$=(1,1). O objetivo consistiu em fazer com que o aluno observasse, tanto algébrica como graficamente, que um mesmo vetor pode ser dado em relação a diferentes bases, ou seja, que a base não é única.

Neste caso, procurou-se explorar a conversão no sentido gráfico-algébrico, ou seja, no sentido contrário do utilizado na atividade 1. Na atividade 3, foi solicitado aos estudantes que comparassem o obtido nas duas atividades anteriores. Nesse sentido, teve-se por objetivo investigar se os alunos percebiam que as coordenadas de um mesmo vetor são alteradas de acordo com a base considerada, por meio da análise das resoluções algébrica e gráfica. Na quarta atividade, manteve-se o vetor $\vec{w}=(11,7)$ e os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ foram alterados para $\overrightarrow{AB}=(1,2)$ e $\overrightarrow{AC}=(2,4)$. O objetivo da atividade consistiu em levar o aluno a concluir que não seria possível escrever o vetor $\vec{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, dado que eles são colineares, daí a necessidade de um conjunto possuir dois vetores com direções diferentes para ser uma base do plano. Ainda nessa atividade, foi solicitada a alteração do vetor $\vec{w}$ para $\vec{w}=(4,8)$, para verificar que, se o vetor for colinear com os outros dois, a combinação linear solicitada é possível. Novamente essas situações foram exploradas no GeoGebra e também no registro algébrico no ambiente papel e lápis. Na última atividade, os alunos puderam manipular uma macroconstrução realizada no software. Nela eram apresentados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no plano e ao aluno era solicitada a manipulação deles. Em primeiro lugar, eles alteravam apenas o vetor $\vec{w}$ para verificar se seria possível escrevê-lo sempre como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares). Em segundo lugar, ao aluno foi solicitado que fixasse o vetor $\vec{w}$ e alterasse apenas os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, observando o que ocorria na representação gráfica e nas coordenadas. Por fim, o mesmo questionário dado no início foi aplicado para observar se os estudantes apresentavam avanços nas suas compreensões.

4. Resultados

O Aluno A acertou todas as questões da atividade inicial e manteve suas convicções no questionário final. Apesar disso, foi possível observar um salto de qualidade nas justificativas de algumas tarefas do questionário final. Por exemplo, na questão c do questionário preliminar, o aluno respondeu corretamente na língua natural escrita que, se um conjunto de dois vetores é uma base do plano, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear deles.

Já no questionário final, ele acrescentou em sua justificativa uma menção ao fato de vetores diferentes representados numa mesma base terem suas coordenadas alteradas. Tal afirmação foi dada tanto no registro da língua natural como no algébrico, apontando assim uma habilidade em coordenar representações de registros diferentes, tanto mono como multifuncionais, conforme apresentado na Figura 1.

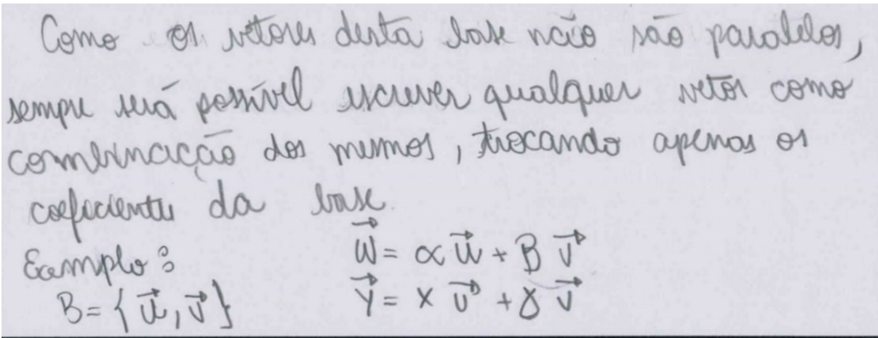

Como os vetores desta base não são paralelos, sempre será possível escrever qualquer vetor como combinação dos mesmos, trocando apenas os coeficientes da base.
Exemplo: $\vec{W} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ $\vec{Y} = \chi\vec{u} + \gamma\vec{v}$

Figura 1 - Produção do Aluno 1 - Questionário final - Item c

No item d do questionário preliminar, apesar de o aluno acertar na classificação, em sua justificativa ele afirmou que não seria possível escrever qualquer vetor do plano como combinação linear de outros dois vetores colineares. Nesse mesmo item da atividade final, ele ressaltou que haveria a possibilidade de escrever um vetor como combinação linear de dois vetores colineares se esse também fosse colinear com os outros dois, provavelmente influenciado pela atividade 4 do design que tratou desse caso. Para esse aluno, durante a execução das atividades, o professor-pesquisador interviu apenas em dois momentos, para auxiliá-lo na compreensão do enunciado da atividade 2 e para lembrá-lo da condição de paralelismo entre dois vetores.

A Dupla A errou todas as questões do questionário inicial. Além de classificar todas as tarefas incorretamente, suas justificativas, dadas no registro da língua natural, apontaram deficiências no conceito de base no plano. Por exemplo, para eles a base no plano era única, fornecendo como justificativa "Verdadeiro, pois em uma base podem estar contidos infinitos planos".

Além disso, quando questionados se um conjunto de dois vetores quaisquer poderia ser uma base do plano, eles forneceram a produção "Verdadeiro, pois os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem mesmo sentido".

Ao participarem da primeira atividade, os alunos resolveram o sistema linear no ambiente papel e lápis com certa dificuldade, mas conseguiram determinar a combinação linear solicitada. Fizeram a construção gráfica no GeoGebra, porém necessitaram da intervenção do professor para auxiliá-los nessa construção, provavelmente porque não tinham muita familiaridade com o software. Eles conseguiram relacionar o obtido algebricamente com a construção gráfica, efetuando satisfatoriamente a conversão do algébrico para o gráfico. Na atividade 2, eles tiveram sucesso na determinação das coordenadas e observaram que o mesmo vetor foi dado em duas bases diferentes.

Na terceira atividade, os alunos forneceram a seguinte conclusão: "Podemos concluir que os dois vetores são iguais". Essa resposta revelou que eles observaram que as combinações lineares com vetores diferentes resultavam no mesmo vetor, no caso, o vetor (11,7). Na atividade 4, a dupla notou, manipulando o software, que não seria possível representar o vetor (11,7) como combinação linear dos vetores (1,2) e (2,4). Em seguida, ela observou que o vetor (4,8) poderia ser representado como combinação linear desses mesmos vetores, porque ele era colinear com os outros dois. Apesar disso, ao analisar algebricamente essa última situação, a dupla classificou o sistema linear como SPD e não como SPI. Embora tenha notado que o vetor (4,8) era colinear com (1,2) e (2,4), a dupla relatou que "o vetor $\vec{s}$ passa por cima de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e são equipolentes", o que denotou problemas na compreensão de equipolência. A despeito desses equívocos, notamos avanços no questionário final, uma vez que no inicial a dupla errou todas as classificações e justificativas das questões e, na final, ela classificou todos os itens corretamente e apresentou justificativas coerentes. Ela afirmou que existe mais de uma base no plano e soube avaliar que nem sempre dois vetores não nulos formam uma base do plano. Para isso, ela se utilizou do registro não discursivo figural, conforme apresentado na Figura 2.

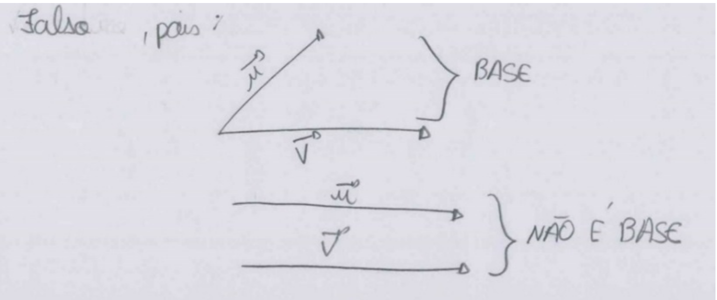
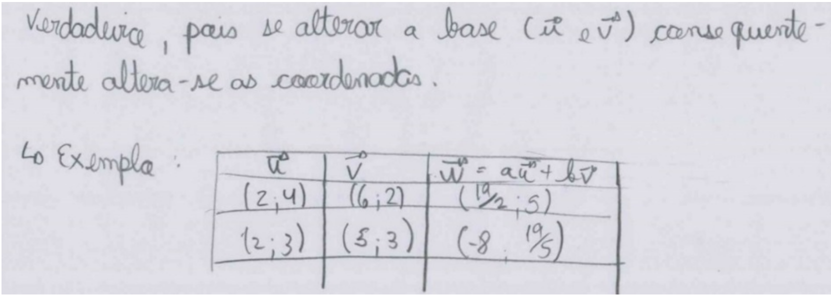


Figura 2 - Produção da Dupla A- Questionário final - Item b

Ela observou que, se um conjunto de dois vetores é uma base do plano, qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear deles, apresentando uma justificativa no registro algébrico. Ao ser questionada se qualquer vetor do plano poderia ser escrito como combinação linear de dois vetores colineares, a dupla relatou que só existiria essa possibilidade para vetores que fossem colineares com esses dois.

No item e, a dupla se utilizou de dados obtidos no software para justificar que as coordenadas de um vetor do plano dependem da base considerada, conforme apresentado na Figura 3.


Verdadeira, pois se alterar a base ($\vec{u}$ e $\vec{v}$) consequentemente altera-se as coordenadas.

↳ Exemplo:

$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
(2;4)	(6;2)	(19/2 ; 5)
(2;3)	(5;3)	(-8 , 19/5)

Figura 3 - Produção da Dupla A- Questionário final - Item e

Com isso, notamos que os alunos apresentaram avanços significativos após a participação no design e as justificativas, antes limitadas ao registro da língua natural no questionário inicial, se valeram de diversos registros, tais como o figural, o algébrico e o da língua natural, o que aponta que a dupla mostrou habilidade em coordenar diferentes registros e efetuar conversões de maneira satisfatória entre representações desses registros.

A Dupla B acertou os itens a e e do questionário inicial. No item b, ela afirmou que um conjunto de dois vetores sempre será uma base do plano e apresentou uma representação gráfica de dois vetores LI, conforme justificativa apresentada na Figura 4.

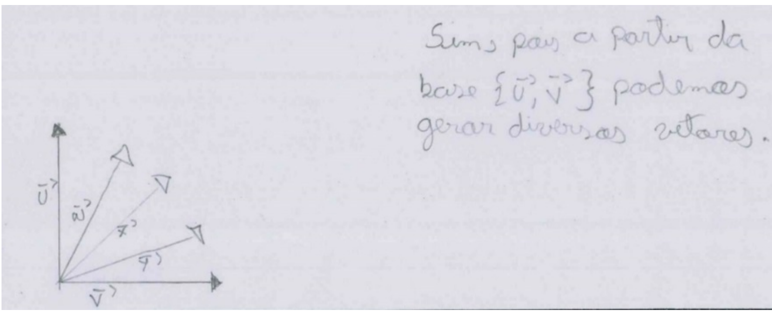


Figura 4 - Produção da Dupla B- Questionário inicial- Item b

Nota-se que a dupla não pensou no caso de vetores colineares. No item c, ela julgou falsa a afirmação que dizia que se um conjunto é uma base do plano, qualquer vetor pode ser escrito como combinação linear deles, fornecendo como justificativa "porque nem sempre os vetores vão ser paralelos (múltiplos)", denotando um problema no conceito de base.

No item d, a dupla afirmou que dados dois vetores colineares, qualquer vetor pode ser escrito como combinação deles, justificando com a seguinte frase: "Sim, pois os vetores serão múltiplos entre si". Provavelmente, ela entendeu que, dados dois vetores colineares, seria possível escrever um em função do outro.

Essa dupla realizou a atividade 1 com êxito, estabelecendo satisfatoriamente a conversão do registro algébrico para o gráfico. As intervenções do professor-pesquisador foram pontuais, relacionadas à correção de cálculos ou a orientações do uso do software. Na atividade 2, a dupla estabeleceu de forma satisfatória a relação entre os resultados gráfico e algébrico e, na atividade 3, concluiu, comparando as resoluções obtidas nas atividades anteriores, que a base não é única e que, dependendo da base, as coordenadas do mesmo vetor são alteradas. Na atividade 4, a dupla constatou que não seria possível escrever a combinação linear indicada, tanto no registro gráfico como no algébrico. Na atividade 5, era esperado que os alunos constatassem, por meio do registro algébrico, que o vetor $\vec{s}=(4,8)$ poderia ser representado de infinitas maneiras como combinação linear dos vetores (1,2) e (2,4), uma vez que o sistema obtido seria indeterminado. Nessa situação, a dupla não recorreu ao registro algébrico. Ela optou pelo registro figural e mostrou três opções para essa combinação linear. Ainda nessa atividade, ao ser questionada se qualquer vetor do plano poderia ser representado como combinação linear de dois vetores colineares, a dupla respondeu que “Não, somente vetores paralelos a eles”. Por fim, a dupla realizou a atividade 5 e, dado o dinamismo do software adotado, pôde experimentar, de modo mais amplo, a análise de que, dados dois vetores não colineares no plano, qualquer vetor pode ser representado como combinação linear deles e que um mesmo vetor pode ser dado em diferentes bases e consequentemente suas coordenadas se adéquam à base utilizada.

Após o experimento, a dupla mostrou avanços no item b ao observar que nem sempre um conjunto de dois vetores será uma base do plano, fornecendo a justificativa presente na Figura 5.

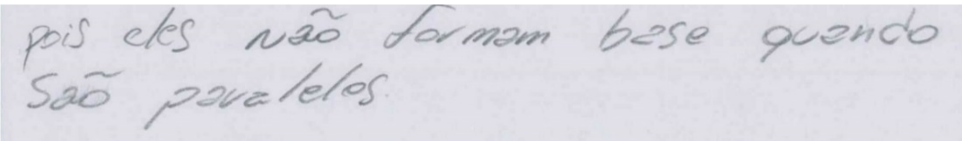

pois eles não formam base quando são paralelos.

Figura 5 - Produção da Dupla B- Questionário final - Item b

No item c, ela observou que se o exercício garante que o conjunto é uma base, então os vetores não são paralelos e aí há possibilidade de escrever qualquer vetor do plano como combinação linear deles. A produção da dupla é apresentada na Figura 6.

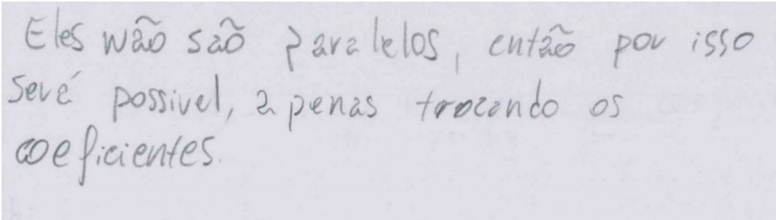

Eles não são paralelos, então por isso será possível, apenas trocando os coeficientes.

Figura 6 - Produção da Dupla B- Questionário final - Item c

No item d, os alunos observaram que se dois vetores são colineares, nem sempre um vetor qualquer do plano pode ser escrito como combinação linear deles, evidenciando que isso só seria possível para vetores paralelos aos vetores dados. Cabe observar que no questionário final, os alunos só utilizaram o registro da língua natural escrita, enquanto no inicial também se valeram do registro figural, o que em certos casos trouxe problemas, pois voltaram suas compreensões e justificativas para o caso particular por eles desenhado.

5. Considerações finais

Um experimento sobre o conceito de base no plano foi elaborado de forma a explorar principalmente conversões entre representações dos registros gráfico, algébrico e da língua natural, nos ambientes GeoGebra e papel e lápis. Foram detectados avanços nas produções de todos os sujeitos em relação a esse conceito. A análise dos dados permitiu verificar um ganho na qualidade nas produções apresentadas no questionário final, principalmente do Aluno A e da Dupla A, com relação à coordenação de diferentes registros. Inicialmente esses estudantes se limitavam ao registro da língua natural e, após o experimento, eles passaram a integrar outros registros em suas produções, estabelecendo de forma satisfatória conversões entre representações dos registros algébrico, gráfico e da língua natural.

Ressalta-se que a Dupla B inicialmente se utilizou dos registros figural e da língua natural, porém, ao se restringir à representação figural elaborada, muitas vezes cometeu equívocos que comprometeram a compreensão do conceito. Tal fato foi sendo superado durante a execução do design, uma vez que ela teve sucesso no questionário final. O software favoreceu as construções gráficas e consequentemente a análise das relações entre situações gráficas e algébricas. Além disso, dado o seu dinamismo, foi possível manipular as extremidades dos vetores para constatar a existência de diferentes bases e a mudança das coordenadas de um mesmo vetor dependendo da base considerada.

6. Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 99 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard; SCHAUBLE, Leona. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, Washington, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DALLEMOLE, Joseide Justin; Groenwald, Cláudia Lisete Oliveira; Ruiz, Lorenzo Moreno. Os registros de representação semiótica no estudo da reta com enfoque na geometria analítica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. v.4, n.2, p. 149-178, 2011.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v.1, n. 61, p. 103-131, 2006.

NOSS, Richard; HOYLES, Celia. **Windows on Mathematical Meanings**: Learning Cultures and Computers. Dordrecht: Kluwer, 1996.

SANTOS, Adriana Tiago Castro. **Caminhos e percursos da Geometria Analítica; estudo histórico e epistemológico.** I CEMACYC - I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, 2013.

ISSN 2178-034X