OS APELOS ÀS IMAGENS E AS FALHAS DO SISTEMA AXIOMATICO NO LIVRO I DOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Hemanuella Pereira de Albuquerque
Universidade de Pernambuco - UPE
hemanuellacggc@gmail.com

Stéffany da Silva Ribeiro
Universidade de Pernambuco - UPE
steffany.ribeiro@hotmail.com

João Paulo Carneiro Barbosa
Universidade de Pernambuco – UPE
joao.barbosa@upe.br

Resumo:
A Matemática construída atualmente se baseia no sistema dedutivo e axiomático idealizado por Aristóteles e construído por Euclides na obra intitulada *Os Elementos*. Cerca de dezoito séculos após o surgimento da obra, percebeu-se falhas que iam de confronto ao sistema apresentado. Entre as falhas, boa parte se baseava no apelo que Euclides fazia à imagem em diversos teoremas. Porém, foi observado nas demonstrações que também existiam lacunas que eram suprimidas pela imagem. A fim de compreender a diferença entre o apelo à imagem e tal falha existente no sistema, o presente trabalho buscou analisar algumas demonstrações de *Os Elementos*, baseado no sistema dedutivo e axiomático. Através da pesquisa bibliográfica realizada, foi observado que quando a imagem passa apenas uma informação de localidade, esta não se apresenta como falha. Porém, quando esta imagem tenta convencer o leitor de que um passo dado sem explicação é possível, neste caso existe a falha.
Palavras-chave: Sistema axiomático; Euclides; Os Elementos.

1. Introdução

A Geometria é um ramo da Matemática que sempre foi objeto de estudo, ao longo da história, de vários matemáticos. Um dos mais importantes matemáticos que se debruçou sobre a Geometria foi Euclides de Alexandria Ele é o autor daquela que é considerada a maior obra de toda a história da Matemática, *Os Elementos.* De acordo com Eves (2004, p. 178), "apesar da grande importância do conteúdo dos Elementos, talvez mais importante ainda seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo". A "maneira formal" que Eves chama a atenção é o que se conhece hoje como sistema dedutivo e axiomático.

Com o decorrer do tempo, o sistema euclidiano recebeu diversas críticas referentes às falhas na estrutura axiomática e aos apelos às imagens que este realiza em suas demonstrações. Contudo, será que existe diferença entre a falha e o apelo à imagem na axiomática euclidiana? Este é um ponto em que se faz essencial uma análise da obra de Euclides, observando-se quando ele comete a falha, ou seja, deixa uma lacuna no sistema e quando este apela à imagem para passar uma informação sendo que aparentemente os processos e as informações usadas foram transmitidos anteriormente.

É importante analisar se a falha do sistema dedutivo e axiomático de Euclides está na imagem, ou nas lacunas deixadas nas demonstrações e no uso que este faz da imagem para preencher esta lacuna. A necessidade deste estudo está no fato de que existem demonstrações que aparentemente não há lacunas no sistema, apenas um apelo a imagem, devendo haver uma distinção de quando a imagem é apresentada apenas como um apelo, e quando ela aparece para suprir uma lacuna. Assim, existe a necessidade de explicitar como este apelo pode comprometer todo um sistema. Neste caso o apelo à imagem vem ser apenas para facilitar o entendimento e compreensão da demonstração, de modo que muitas vezes não fica tão claro se a falha é o apelo à imagem, ou este é consequência da falha.

Com isso, o principal objetivo do presente trabalho é analisar a obra *Os Elementos* com foco no sistema dedutivo e axiomático, observando as falhas e os apelos cometidos pelo autor em sua obra. Assim, para se conseguir alcançar tal objetivo se faz necessário o estudo de bases essenciais como a análise da biografia de Euclides e da época em que este viveu, como também estudar a obra *Os Elementos* e compreender a estrutura do sistema dedutivo e axiomático. Conhecendo-se a obra, o autor e o sistema, faz-se necessário o estudo e a análise das demonstrações de algumas das proposições presentes em *Os Elementos* e a influência que as imagens exercem sobre estas, para assim conseguirmos identificar lacunas e possíveis apelos presentes na obra.

Para a realização de tal estudo e obtenção dos objetivos relatados, a pesquisa terá um caráter bibliográfico, em que o principal material de análise será a obra *Os Elementos*, além de outros livros, artigos e periódicos que tratem da obra, do escritor e do sistema axiomático, a fim de compreender e desenvolver a habilidade de cruzar fontes para obtenção de uma resposta ao questionamento levantado.

2. A Evolução da organização Matemática

Os primórdios do desenvolvimento da Matemática estiveram sempre relacionados à busca de melhores condições de vida e adaptação dos seres humanos. Os primeiros relatos sobre essa ciência são encontrados aproximadamente entre 2000 a.C. a 1.600 a.C. nas civilizações egípcias e babilônicas. A Matemática grega[1] por sua vez se desenvolveu através do contato com estas civilizações, sendo os gregos responsáveis por um salto no desenvolvimento desta ciência.

De início, dois nomes podem ser aqui mencionados: Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. Eles teriam sido, segundo conta boa parte da literatura clássica, os responsáveis por dar a Matemática os primeiros traços de uma ciência teórica. No entanto, sobre ambos se sabe muito pouco. Após Pitágoras, ainda de acordo com a mesma literatura clássica, muitos outros nomes contribuíram para a construção da Matemática. Eudoxo de Cnido, responsável pela teoria das proporções e pelos primórdios do método de exaustão, e Teeteto de Atenas, que desenvolveu e teoria dos irracionais, são dois deles.

Com as descobertas e contribuições, ou seja, com o grande avanço da Matemática, ela necessitava de uma organização. Se mostrava cada vez mais urgente a sistematização de um modo de fazer Matemática. Foi justamente neste contexto que surgiu Euclides de Alexandria. Tal nome foi responsável por organizar boa parte dos conteúdos descobertos até então de uma maneira lógica e sistematizada.

Euclides de Alexandria provavelmente viveu entre 325 – 265 a.C., e segundo Eves (2004, p.167), talvez tenha sido aluno da Academia de Platão e o fundador da forte Escola Matemática de Alexandria.

> É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. (EVES, 2004, p 167)

Euclides escreveu várias obras que tratavam de diversos assuntos como geometria, óptica, acústica, consonância e dissonância e muitas destas se perderam no tempo. Contudo, a grande fama deste nome está relacionada à sua obra de maior renome, *Os Elementos*. Euclides juntou grande parte do conhecimento matemático adquirido até aquele momento, não apenas geométricos, e os organizou atendendo a uma forma logica dedutiva.

[1]Devemos destacar que quando falamos da matemática grega, não nos referimos às praticadas somente por gregos, uma vez que muitos matemáticos gregos não nasceram na Grécia. Por isso é importante atentarmos que quando falamos em matemática grega nos referimos a matemáticos que partilhavam tradição, cultura e língua. (BERLINGHOFF; GOUVEA, 2008, p. 14-15)

De fato, segundo Wagner (2011), a Matemática se desenvolveu tão rapidamente graças aos gregos, pensadores, filósofos e cientistas que perceberam que a lógica, o raciocínio e a razão são ferramentas essenciais para se descobrir algo e explicar o mundo. E Euclides, nesse contexto, apareceu como criador de *Os Elementos* e do sistema em que a Matemática é fundamentada até os dias de hoje, o sistema dedutivo e axiomático.

3. *Os Elementos* e a axiomática

A maior obra da geometria grega é de longe *Os Elementos*, se tratando de um conjunto de livros que organiza a maior parte dos conhecimentos sobre matemática adquiridos por volta do século III a. C. A fama deste se fez na história, conforme cita Eves (2004, p. 167), “nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente nenhum exerceu influência maior no pensamento científico”.

Apesar de ser a obra mais famosa de todos os tempos, *Os Elementos* não foi a primeira obra que buscou reunir conhecimentos matemáticos adquiridos. Contudo, foi a primeira obra que, além da reunião dos conteúdos geométricos, apresentou uma sequência lógica dedutiva rigorosa que até à atualidade é usado para estruturar a Matemática e muitas outras ciências.

3.1 O sistema axiomático

Não é possível falar em sistema axiomático sem referenciar Aristóteles. De acordo com Eves (2004, p.132), Aristóteles foi “o sistematizador da lógica dedutiva, além de ter deixado vários escritos sobre temas da física, algumas partes de sua *Analytica Posteriora* revela um domínio raro do método axiomático”.

A contribuição de Aristóteles foi indireta, pois este constitui uma teoria na qual tudo começava com princípios básicos que deveriam ser aceitos como verdadeiros sem provar, e todas as demais coisas seriam provadas através destas primeiras. Contudo, Aristóteles não aplicou esta teoria, mas esta serviu de primórdios para a elaboração da obra de Euclides.

Um sistema dedutivo e axiomático é composto por afirmações tomadas como verdadeiras que não exigem provas como os axiomas, postulados e definições, e, por afirmações que precisam ser provadas através dos mesmos, sendo chamadas de proposições ou teoremas. A primeira obra que apresentou rigorosamente o sistema dedutivo e axiomático idealizado por Aristóteles foi *Os Elementos*.

ISSN 2178-034X

3.2 Os Elementos

É muito provável que a obra de Euclides seja, em sua maior parte, uma compilação e ordenamento lógico de trabalhos anteriores. Porém, crê-se que grande parte das demonstrações apresentadas em *Os Elementos* foi feita pelo próprio Euclides sob o sistema que este inaugurou. Para Eves (2004, p. 168-169), "o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais".

Os Elementos é uma obra composta por 13 livros, e estes são compostos por definições, postulados, noções comuns e 465 proposições que fundamentam a obra de Euclides. Entre os livros, são abordados estudos sobre a geometria plana, teoria das proporções, incomensurabilidade de segmentos e geometria sólida tridimensional.

Como se sabe, *Os Elementos* são compostos de definições, postulados, noções comuns e proposições. De um modo geral, pode-se entender que as definições caracterizam os objetos matemáticos, fixando o significado de termos que serão usados no discurso demonstrativo. Os postulados enunciam o que é possível fazer geometricamente. As noções comuns ou axiomas é um conjunto de verdades evidentes, que não precisam de prova e que estruturam todo o sistema dedutivo e axiomático. E por fim as proposições que têm por objetivo demonstrar algo, sendo provada através do encadeamento lógico que parte das definições, postulados e axiomas, podendo servir de instrumento para novas provas.

Uma observação pertinente é que proposições já provadas podem servir de instrumento para novas provas, sendo assim uma demonstração no sistema dedutivo e axiomático é fundamentada sobre as definições, postulados, axiomas e proposições já provadas. Euclides, em sua obra, faz com um alto rigor para época as demonstrações que compõem sua obra. É interessante observar que ele assume como base a existência de pontos, retas e círculos e, com base nestes, prova uma série de outras figuras e características destas.

A obra de Euclides é valorizada mundialmente pela forma que foi elaborada, pelo rigor demonstrativo, pelos assuntos abordados. Sem dúvida, foi a maior obra Matemática de todos os tempos.

> Os Elementos de Geometria de Euclides, reunião sistemática das proposições sobre esta ciência que no seu tempo se conheciam e de outras que ele próprio inventou; obra admirada pelos matemáticos e filósofos de todos os países e de todos os tempos

> pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma; modelo lógico para todas as ciências físicas pelo rigor das demonstrações e pela maneira como são postas as bases da Geometria em conceitos fundamentais, apresentados sob o nome de definições, axiomas e postulados. Nesta mesma obra aparece, sob forma geométrica, a origem da Álgebra, com a resolução das equações do segundo grau. (TEIXEIRA apud CARDOSO, s/d p.9).

Apesar do alto rigor que *Os Elementos* apresentavam para época, com o decorrer do tempo, muitos questionamentos surgiram sobre alguns pontos nas demonstrações de Euclides. Com a realização de estudos, perceberam-se falhas no processo dedutivo de Euclides e este começou a sofrer críticas a respeito do sistema por ele utilizado.

3.3 A crítica aos *Elementos*

Toda a crítica a Euclides se originou quando estudiosos questionaram a consistência do quinto postulado do referido autor, o postulado das paralelas. Os estudiosos acreditavam que este postulado, diferente dos demais, poderia ser provado, e assim, trabalharam nesse sentido. Através destas tentativas, começaram a surgir novos teoremas que constituíram a geometria não-euclidiana.

Com o surgimento desta nova geometria, todo o sistema axiomático de Euclides foi questionado, sendo estudado sobre um olhar mais crítico. Percebeu-se que as provas da geometria não-euclidiana se apoiavam na geometria euclidiana, logo não havia uma ou outra certa ou errada, mas sim que os postulados de Euclides eram insuficientes para provar os novos teoremas.

Além disso, foram descobertas outras falhas referentes à obra *Os Elementos*. De acordo com Molina (2012, p 23,24), Euclides deduzia partes que podiam ser provadas e assumia outras sem provas, algumas das definições da obra eram consideradas confusas. Ele usava provas por redução ao absurdo, usava provas por sobreposição, além de não respeitar a ordem científica de exposição, no qual é necessário partir de gêneros supremos para chegar a espécies minúsculas.

Além das falhas já citadas, foi observado também que, muitas vezes, nas suas demonstrações, Euclides usava propriedades não ditas anteriormente nem nas definições, postulados, noções comuns ou proposições já provadas. Em muitos casos, realizava como objetos de demonstração, apelo a fatos alheios ao sistema dedutivo e axiomático. Como Leibniz afirma em uma carta de 1678 (LEIBNIZ apud MOLINA, 2012, p. 27):

ISSN 2178-034X

> Pues em las demostraciones de cualquier proposición, no se precisa nada más que las definiciones, los axiomas (a los que reduz coaquílos postulados), los teoremas ya demostrados y las experiencias. Y como a su vez, los teoremas deben ser demostrados y todos los axiomas, excepto los idénticos, pueden serlo, es enfin evidente que todas las verdades se resuelven en definiciones, proposiciones idénticas y experiencias [...]

Em toda esta nevoa de dúvidas e críticas, fez-se necessária a construção de um novo modelo axiomático para se seguir, e em 1899, o matemático alemão David Hilbert (1862 – 1943) apresentou sua obra, *Fundamentos de Geometria* que além de reorganizar *Os Elementos* corrigindo as falhas existentes, buscava suprir o que estava faltando.

4. Análise dos Teoremas

Do estudo realizado nos *Elementos* perceberam-se muitos pontos norteadores. A geometria euclidiana encontrava-se incompleta, o sistema axiomático continha falhas e havia a realização de apelo a fatos alheios ao sistema. A fim de identificar falhas no sistema axiomático e o apelo à imagem em diferentes situações, foram analisadas algumas proposições da obra.

Observe passo a passo da demonstração da proposição 1 dos *Elementos*[2]:

PROPOSIÇÃO 1 - *Sobre uma linha reta determinada, descrever um triângulo equilátero.*

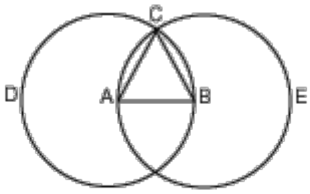

Figura 1 - Proposição 1

Seja uma reta limitada, AB deve-se sobre ela construir um triângulo equilátero, que de acordo com a definição 20, é aquele que possui os seus três lados iguais.

I - Com o centro A, e com o intervalo AB fazendo uso do postulado 3 que afirma que com todo centro e distância é possível descrever um círculo, é construído o círculo BCD;

II - com o centro B, e com BA é construído o círculo ACE, conforme o postulado relatado anteriormente.

---

[2] Definições, postulados, noções comuns e proposições tirados do livro Os Elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo.

III – A partir do ponto C, onde os dois círculos se cortam até os pontos A e B, através do postulado 1 que afirma que é possível traçar uma reta a partir de um ponto até outro ponto são traçadas as retas CA, CB.

IV - Sendo o ponto A o centro do círculo BCD, através da definição 15 que afirma que todas as retas que a partir de um ponto posto no meio da figura até a circunferência do círculo são iguais entre si, então AC = AB. E sendo o ponto B o centro do círculo CAE, então BC = BA.

V - Tendo visto que CA = AB, e BC = AB, como diz a noção comum 1, as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre sim. Logo, tanto CA, como CB, é igual a AB.

VI – Logo, as três retas CA, AB, BC são iguais; e, por consequência, o triângulo ABC, feito sobre a reta dada AB, é equilátero.

É possível observar que, com exceção da primeira afirmação do terceiro passo, em todos os passos ou características das figuras Euclides se apoia nas definições, postulados e noções comuns. Nota-se que em nenhuma definição, postulado, ou noção comum Euclides relata que círculos construídos sobre uma mesma reta com centros em extremidades diferentes obterão um ponto em comum, percebendo assim que muitas vezes o autor dá um passo sem ter dito que era possível.

Conforme a Matemática Moderna, sabe-se que um fato não pode ser citado em uma demonstração se a existência deste não é declarada (no caso de axiomas), ou demonstrada (no caso de teoremas) previamente. Caso ocorra, como acontece na demonstração da proposição I, este é considerado como uma falha do sistema.

Do mesmo modo ao qual foi analisada a proposição 1, observa-se agora a proposição 4.

PROPOSIÇÃO 4: *Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais estendem os lados iguais.*

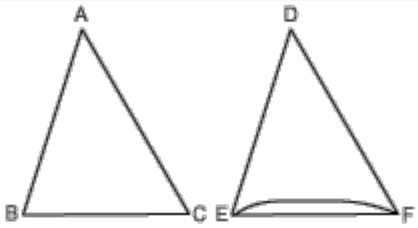

Figura 2 - Proposição 4

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, respectivamente e o ângulo BAC igual ao ângulo EDF. Digo que as bases dos triângulos e os demais ângulos serão iguais.

I – Com base na noção Comum 7 (e as coisas que se ajustam umas as outras são iguais entre si), Euclides apresenta: pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustara sobre o E, por ser a AB igual a DE; então, tendo se ajustado AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; deste modo também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF.

II – Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível, conforme a Noção Comum 9 que afirma que duas retas não contem uma área.

III – Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela; deste modo, também o triângulo DEF todo será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles.

Aparentemente toda a demonstração dessa proposição é realizada através de apelos à imagem. Observando o passo I da demonstração, todas as afirmações são fundamentas em sobreposições/ajustes, basicamente toda a demonstração feita por ajuste. A sobreposição só é possível quando observamos a imagem em um meio real, e a matemática é construída em um meio totalmente abstrato. Molina (2012, p.26) relata a crítica realizada pelos matemáticos a demonstrações desta natureza:

> Otras pruebas que, para muchos matemáticos del siglo XVII, resultaban polémicas eran las pruebas por superposición como la demostración de la proposición I, 4 de los *Elementos*. Se apoyan en el axioma de los *Elementos* que dice que dos cosas que pueden superponerse una con las otra son iguales entre si.

Como visto, Euclides chega inclusive a postular na Noção Comum 7, a questão da sobreposição, que está quando ocorre garante que coisas são iguais. Mas a Matemática trata de uma ciência abstrata de modo que a sobreposição não seria possível. Euclides faz toda a demonstração baseada na sobreposição, levando o leitor a olhar para imagem e perceber que ambas são iguais. Molina (2012, p. 26) corrobora com o que foi dito ao tratar da caracterização da Matemática, segundo Aristóteles.

> Las ciencias matemáticas según la caracterización de Aristóteles en su *Metafísica* M, 3, se ocupan de la cantidad en la medida en que ésta es abstraída de las cosas sensibles. Como el movimiento es propio de las cosas sensibles y no de las abstractas, en la Geometría no podrían ser admitidas pruebas que estuvieran basadas en el movimiento de figuras.

De certo modo, basicamente não existe nos *Elementos* uma demonstração da proposição 4, o que há é uma influência por meio da imagem. Além da questão da sobreposição por si mesma, que é um total apelo à imagem. O postulado que retrata a questão da sobreposição apresenta-se na demonstração de forma contrária. Nas palavras de Euclides (BICUDO 2009, p. 99), a Noção Comum diz que "E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si". No texto da demonstração de Euclides, ele parece usar a Noção Comum de modo inverso. Observemos um trecho da demonstração: "[...] e sendo porto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre E, por ser AB igual à DE" (BICUDO 2009, p. 101).

Aparentemente, parece que na demonstração Euclides afirma que os pontos se ajustam "por serem" as retas iguais, ou seja, coisas iguais se ajustam. Mas a Noção comum apresenta o inverso da afirmação, coisas que se ajustam são iguais, e sendo assim, essa comutatividade deveria ser provada previamente.

Neste sentido, temos então uma proposição que aparentemente não foi demonstrada nos *Elementos,* apenas mostrada através de apelos à imagem que era uma propriedade válida. Valendo ressaltar que de verdade a propriedade provada na proposição 4 é válida na Matemática, entretanto avaliando na atualidade sobre um sistema rígido dedutivo e axiomático, a demonstração realizada por Euclides não é válida para a Matemática.

5. Considerações Finais

O grande desenvolvimento da Matemática se deu graças a Euclides, compilador da maior obra de todos os tempos, não apenas pelo conteúdo, mas em muito pela apresentação logica, dedutiva e axiomática que a obra apresentava. A influência de Euclides no decorrer da História é extraordinária, pois por muito tempo a forma de se construir Matemática era através do modelo apresentado por Euclides.

Diante da grande influência desta obra, deste nome e das críticas realizadas a estes, foram analisadas algumas proposições de *Os Elementos*, no intuito de reconhecer as falhas no sistema dedutivo e axiomático e os apelos realizados às imagens em diferentes teoremas. Além de compreender a diferença entre o apelo e a falha no sistema axiomático, com o propósito de esclarecer que o apelo à imagem não é a falha no sistema e que aparentemente há teoremas em que todos os passos seguem a lógica dedutiva e axiomática.

Durante a análise sobre o sistema, foi perceptível que há uma diferença entre o apelo e a falha, mas que, muitas vezes, estas se apresentam simultaneamente. Pode-se dizer que a falha é uma lacuna no sistema, e a imagem é um implemento alheio ao mesmo, que em alguns casos busca passar uma informação de localidade e deste modo, aparentemente, não existe uma falha. Quando esta imagem vem tentar convencer o leitor de que um passo dado sem explicação é possível, neste caso existe a falha e a imagem exerce papel direto na demonstração indo contra a estrutura dedutiva e axiomática.

6. Referências

ALMEIDA, Regina de Cassia Manso. *Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX* / Regina de Cássia Manso de Almeida; orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho; coorientador: Gert Schubring. Tese (Doutorado em Educação)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

BARBOSA, João Paulo Carneiro. *Investigação histórica referente á base algébrica das construções geométricas com régua e compasso*: o trabalho de Pierre Laurent Wantzel. Recife: O autor, 2011.

BICUDO, Irineu. *Os Elementos/Euclides*. Tradução e introdução. Editora UNESP, São Paulo, 2009.

Biografia de Pitágoras: *Vida e obra de um matemático*. Disponível em: <http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2007/09/pitgoras-pitgoras-representado-por.html>. Acesso em: 15 de julho de 2015.

BURNET, J. *O despertar da filosofia grega.* / Tradução de Mauro Gama. São Paulo: Siciliano, 1994.

CARDOSO, Maria Dolores Costa Lhamas. *De Euclides e Os Elementos aos nossos dias.* Euclides: matemático de Alexandria. Disponível em: <http://www.e-biografias.net/euclides/>. Acesso em: 15 de julho de 2015.

EVES, Howard. *Introdução à historia da matemática*/ Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SB: Editora da UNICAMP, 2004.

GUERRA, Vanessa Cristina. *Impossibilidades em Construções geométricas:* Aspectos históricos e matemáticos. São Carlos, 2012.

MOLINA, Jorge Alberto. *La crítica de Leibniz a los Elementos de Euclides*. Notae Philosophicae Scientiae Formalis, vol. 1, n.1, p.23 – 31, maio 2012.

MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. *Geometrias sob a Axiomática de Hilbert*. Campinas, 2006.
SANTANA, Ana Lucia. Pitágoras. Disponível em: <http://www.infoescola.com/filosofos/pitagoras/>. Acesso em: 15 de julho de 2015.

WAGNER, E. *Uma Introdução às Construções Geométricas*. Disponível em <http://www.mtm.ufsc.br/ensinomedio/jul-09/const-geometricas.pdf>. Acesso em: 15 de julho de 2015.

ISSN 2178-034X