ARQUIMEDES E CÁLCULO DE ÁREA

Julio Cesar Mohnsam
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia Sul-Riograndense – Campus Pelotas
Prof.juliomatfis@hotmail.com

Resumo:
Arquimedes de Siracusa foi considerado por muitos, o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos. Neste trabalho, será mostrado como Arquimedes usou o método das alavancas para resolver o problema da quadratura da parábola.

Palavras-chave: Arquimedes, áreas, alavancas, parábola, quadratura.

1. Introdução

Segundo historiadores, o cálculo de áreas é uma prática muito antiga. Os primeiros desses cálculos foram realizados no Egito, há muitos anos atrás. Naquela época, os agricultores se deparavam com o problema de dividir as terras que não estavam inundadas pelas cheias do rio Nilo, bem como, com problemas de demarcação de divisas, em virtude das altas taxas de impostos. Segundo (BOYER, 1974), registros desses cálculos estão no papiro de Rhind, documento matemático muito antigo, que mostra os problemas práticos de matemática do Egito antigo. Depois na Grécia antiga, Euclides de Alexandria sistematizou todo o conhecimento geométrico Grego, em sua obra "Os elementos", quando realizou também, diversos cálculos de áreas. No entanto, tais problemas de geometria antiga não se comparam aos problemas resolvidos por Arquimedes de Siracusa, no que se refere à dificuldade e à complexidade. Outro ponto de destaque do trabalho de Arquimedes é a metodologia e análise dos problemas. Por esta razão Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos.

Arquimedes foi o primeiro a resolver o problema da quadratura da parábola, que consiste em construir um quadrado que tenha a mesma área do segmento parabólico. Essa tarefa não era tão trivial, pois os únicos recursos usados pelos gregos eram régua e compasso não graduados. Arquimedes com argumentos mecânicos, lógicos e princípios geométricos, demonstrou que a área do segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura. Essa prova com o teorema dos momentos (alavancas) não era rigorosa na época e então Arquimedes usou o método da Exaustão e chegou ao mesmo resultado.

2. Método das alavancas

A ideia é montar uma alavanca com as áreas do segmento parabólico e o triângulo inscrito para demonstrar que a relação entre a área do primeiro é $\frac{4}{3}$ da área do referido triangulo. (BOYER, 1974)

Teorema: A área do segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura.

Demonstração:

A construção geométrica da alavanca teórica (figura 1) é feita da seguinte forma: traça-se um segmento de parábola que passa pelos pontos ABC de base $\overline{AC}$. Dentro deste segmento de parábola temos um triângulo ΔABC. Prolongando o segmento $\overline{QB}$ até E, que pertence ao segmento da tangente no ponto C, onde Q é o ponto médio da base $\overline{AC}$ e a reta tangente a B é paralela a base $\overline{AC}$.

Construindo outros dois segmentos, $\overline{AF}$ e $\overline{OM}$, ambos paralelos a $\overline{QE}$. Observamos que O é um ponto arbitrário importante pertencente ao segmento $\overline{AC}$. O segmento $\overline{OM}$ começa em O, na base $\overline{AC}$, e intercepta a parábola no ponto P e encontra a reta tangente no ponto M (reta tangente que passa pelo ponto C).

ISSN 2178-034X

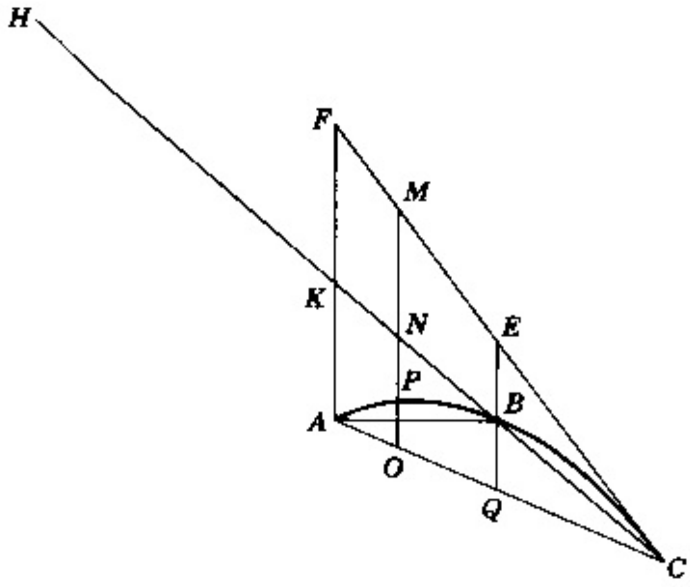

Figura 1. Quadratura da parábola pela lei da alavanca. (BOYER, 1974)

Analogamente, o ponto F também pertence a reta tangente. Agora, desenha-se a mediana $\overline{CK}$ do triangulo ΔAFC, relativa ao vértice C e ao lado $\overline{AF}$. Esta mediana passa pelos pontos B e N. O triângulo ΔABC está inscrito na parábola e possui uma altura igual a um quarto da altura do triângulo ΔAFC, isto se justifica pelas propriedades da reta tangente, isto já era conhecido por Arquimedes (MOHNSAM, 2014). A justificação desse fato é em virtude de B pertence à mediana CK. Assim QB=BE e 2QE=AF, pois Q pertence ao eixo da parábola.

Logo, a área do triângulo ΔAFC é quatro vezes a do triângulo ΔABC. Agora deve-se prolongar a mediana a partir do ponto K até o ponto H, tal que $\overline{CK} = \overline{KH}$. Estas distâncias devem ser iguais, pois colocaremos um fulcro (apoio) de uma alavanca teórica, exatamente em K. Segundo HEATH 1897, como $\overline{CF}$ é tangente ao ponto C e devido aos conhecimentos das cônicas, era conhecido a seguinte igualdade:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$

Como $\overline{CK}$ é a mediana do triângulo ΔAFC e $\overline{AF}$ é paralela a $\overline{OM}$ e usando o teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \qquad (2)$$

As razões (1) e (2) implicam em:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \qquad (3)$$

Logo:

$$\overline{KN} \times \overline{OM} = \overline{KC} \times \overline{OP} \qquad (4)$$

Lembramos que $\overline{HK} = \overline{KC}$, substituindo em (4) obtemos que:

$$\overline{KN} \times \overline{OM} = \overline{HK} \times \overline{OP} \qquad (5)$$

Com a igualdade em (6) pode-se perceber a lei da alavanca com fulcro (ponto de apoio do centro da alavanca) no ponto K, ou seja, o peso $\overline{OM}$ colocado a uma distância $\overline{KN}$ do fulcro equilibra o peso $\overline{OP}$ a uma distância $\overline{HK}$ do fulcro. Nota-se que como o ponto O é um ponto arbitrário pertencente ao segmento $\overline{AC}$, então, qualquer segmento paralelo ao eixo que corta a parábola e o triângulo podem ser postos segundo a mesma condição de equilíbrio. Como a área da parábola é a soma de todos esses segmentos paralelos ao segmento $\overline{QB}$ e, analogamente, a área do triângulo ΔAFC é a soma de todos os segmentos paralelos ao $\overline{QE}$. Logo pode-se dizer que se levar a parábola até o ponto H equilibrará o triângulo ΔAFC a uma distância de $\frac{1}{3}$ do fulcro, pois o baricentro do triângulo ΔAFC esta em cima da mediana $\overline{KC}$ a uma distância de $\frac{1}{3}$ do ponto K (pois sabe-se da geometria plana que $\overline{KG} = \frac{\overline{KC}}{3}$, onde G é o baricentro).

ISSN 2178-034X

Então, podemos concluir que:

$$A_S \times \overline{KH} = A(\Delta AFC) \times \frac{\overline{KH}}{3} \qquad (6)$$

Onde A_S é a área do segmento parabólico, Ou seja:

$$A_S = \frac{A(\Delta AFC)}{3} \qquad (7)$$

e, consequentemente como $A(\Delta AFC) = 4A(\Delta ABC)$, pois a altura de $A(\Delta AFC)$ é quarto vezes maior que a altura de $A(\Delta ABC)$, mas ambos tem a mesma base. Portanto:

$$A_S = \frac{4}{3} A(\Delta ABC)$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

3. Considerações Finais

Arquimedes foi o primeiro a obter a quadratura da parábola. Essa prova inicialmente foi obtida pela mecânica. Apenas depois Arquimedes conseguiu elaborar uma demonstração geométrica do teorema (Método da exaustão). O referido resultado foi um ponta-pé inicial extremamente importante na geometria e influenciou decisivamente os matemáticos modernos que desenvolveram o calculo integral.

4. Agradecimentos

Quero agradecer aos meus orientadores de mestrado, professor Adriano De Cezaro e professora Fabiana Travessini De Cezaro, exemplos de dedicação e mestres, que me orientaram com dedicação. Agradeço aos colegas professores da Coordenadoria de Matemática do IF SUL campus Pelotas. Obrigado a todos que de alguma forma contribuíram para esse trabalho.

5. Referências

[1] BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[2] HEATH, T. The Works Of Archimedes. Cambridge University Press, 1897.

[3] MOHNSAM, J. C. As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas. Rio Grande 2014.

ISSN 2178-034X