REPRESENTANDO DISTINTAS SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS DE DIFERENTES NÚMEROS DE ETAPAS DE ESCOLHA

Danielle Avanço Vega
UFPE
danielleavanco@yahoo.com.br

Juliana Azevedo
Edumatec - UFPE
azevedo.juliana1987@gmail.com

Rute Borba
Edumatec - UFPE
resborba@gmail.com

Resumo
Há distintos modos de resolução de problemas combinatórios e, para tal, podem ser escolhidas formas variadas de representação simbólica e diferentes estratégias. O estudo buscou investigar se estudantes escolhem representações e estratégias em função do tipo de problema combinatório e do número de etapas de escolha envolvidos nos problemas. Participaram do estudo 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Observou-se que a tendência era cada aluno responder todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*) e com distintos números de etapas de escolha (duas, três ou quatro) utilizando a mesma forma de representação e a mesma estratégia – tais como as representações escritas via multiplicação e por intermédio de desenhos. Embora o uso de mesma representação e estratégia possa indicar o reconhecimento de alguns aspectos comuns de situações combinatórias, falta o entendimento de que é necessário tratar diferentemente as situações de acordo com o tipo de problema.

1. Introdução

O estudo da Combinatória é recomendado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e ao longo da escolarização básica (BRASIL, 1997). Defende-se que situações combinatórias simples e variadas (tais como os *produtos cartesianos*, os *arranjos*, as *combinações* e *permutações*) podem ser trabalhadas desde o início da escolarização e não apenas no Ensino Médio, quando se dá o estudo formal da Análise Combinatória.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) indicam que problemas combinatórios podem ser trabalhados inicialmente por representações pictóricas até chegar a representações matemáticas mais formais. Acredita-se que esse modo de uso de representações simbólicas variadas possibilita o entendimento de situações combinatórias e que ao invés de trabalhar-se apenas com fórmulas, os estudantes podem ser levados a utilizarem outras formas de registro e gradativamente entenderem modos formais de representação.

No presente texto, são apresentados pressupostos teóricos que defendem a importância de representações simbólicas no aprendizado matemático e é discutido um estudo realizado com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de verificar se os estudantes utilizam formas variadas de representação e se usam estratégias diferentes quando são solicitados a resolverem problemas diversificados de Combinatória – problemas que variam em tipo de situação em número de etapas de escolha.

2. Referencial Teórico

Os tipos de representação simbólica usados na resolução dos problemas combinatórios podem ser os mais variados: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, quadros, diagramas, cálculos ou uso de fórmulas, entre outras (PESSOA; BORBA 2009). Sobre representações de um conceito, destacamos a abordagem de dois autores: Gérard Vergnaud e Raymond Duval.

Vergnaud (1996, p.184) ressalta o papel das representações no aprendizado de conceitos. Este autor afirma que "[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas". Além das representações simbólicas, Vergnaud destaca que, para a compreensão de um determinado conceito é necessário atentar para outras duas dimensões tão importantes quanto as representações as situações que dão significado ao conceito e seus invariantes prescritos e operatórios.

Duval (2009, p.29) enfatiza que:

> Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. [...] ela está no centro de toda reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo. Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Assim, Duval (2009, p.15) destaca que as representações semióticas são "[...] o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais (tornarem visíveis), possuindo função de comunicação.".

Os dois autores, dessa forma, reconhecem a importância do estudo sobre as representações simbólicas utilizadas pelos estudantes para a resolução de diferentes problemas, destacando os problemas matemáticos. Enquanto Verganud destaca o papel das representações nos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas – que envolve, no segundo campo, também os problemas combinatórios –, Duval (2009) aprofunda seus estudos na importância dessas representações e afirma que não há apreensão conceitual de um objeto sem que o estudante tenha acesso a uma pluralidade de sistemas semióticos, incluindo a questão da linguagem e compreensão textual como uma importante tarefa para que seja permitida essa apreensão conceitual.

A partir dos seus estudos, Duval (2009, p.36) destaca que os sistemas semióticos devem "permitir o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação". A primeira atividade consiste em *identificar* traços perceptíveis como uma representação pertencente a um sistema determinado; a segunda se constitui como o *tratamento* dessa representação segundo as regras próprias do sistema; e a terceira atividade está relacionada com a *conversão* das representações produzidas em um sistema para outro sistema.

No presente estudo, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e a teoria das representações semióticas de Duval se encontram num diálogo que reconhece as representações simbólicas como fundamentais para a apreensão do conhecimento.

3. Método

O estudo aqui apresentado faz parte de uma pesquisa maior, na qual foram observadas outras dimensões da Combinatória, tais como, comparação dos desempenhos dos alunos nos problemas com *significados* variados (*arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano)*; abordagem das relações *invariantes* dos distintos problemas, em particular, o número de *etapas de escolha* sendo controladas, e verificação das *representações simbólicas* utilizadas para responder aos problemas combinatórios. Nesse texto, o foco – está na última dessas dimensões – referente às representações simbólicas utilizadas para o registro e solução de problemas combinatórios.

Será apresentada, nesse artigo, parte dos resultados do estudo de Vega (2014) que controlou as etapas de escolha de elementos, buscando verificar a influência do número de etapas de escolha na resolução dos problemas combinatórios. Segundo Vega e Borba (2014), e*tapas de escolha* referem-se ao número de escolhas que devem ser efetuadas em problemas combinatórios. Em *produtos cartesianos* pode-se, por exemplo, escolher um dentre quatro tipos de suco e um dentre cinco tipos de sanduíche e as etapas de escolha são duas: o tipo de suco e o tipo de sanduíche, resultando em 20 possibilidades de combinações. Esse exemplo de problema apresenta duas *etapas de escolha.* Nesse mesmo tipo de problema, podem-se ter três etapas de escolha: o tipo de suco, o tipo de sanduíche e acrescentar-se o tipo de sobremesa, para se obter mais uma *etapa de escolha*.

Outros exemplos utilizados nesse artigo apresentam não só duas ou três etapas, mas, também, quatro etapas de escolha. Cada tipo de problema combinatório apresenta as etapas de escolha de uma forma diferente, de acordo com Vega (2014), em *produtos cartesianos* são elementos de conjuntos que devem ser combinados, em *permutações*, são a quantidade de elementos a serem permutados entre si, já em *arranjos* e *combinações*, são a escolha de alguns elementos que precisam ser arranjados ou combinados, sendo a diferença entre eles, a de que no *arranjo* a ordem influencia na constituição de novas possibilidades e na *combinação* a ordem não gera possibilidades distintas.

Sabendo que as etapas de escolha podem ser um dos fatores que influenciam na resolução de problemas combinatórios, voltou-se o olhar para as representações simbólicas, buscando refletir sobre a facilidade em resolver um determinado tipo de problema em comparação com outros. Analisou-se, também, a influência das representações no desenvolvimento do raciocínio combinatório, quando trabalha-se no Ensino Fundamental a Combinatória – conteúdo matemático que envolve situações multiplicativas de natureza mais complexa.

Com o objetivo de verificar a relação existente entre as representações simbólicas utilizadas por alunos e o efeito de número de etapas de escolha por tipo de problema combinatório, nos quais foi controlado o número de possibilidades, realizou-se um estudo de sondagem com 128 alunos do 6º ano. Cada participante respondeu um de seis tipos diferentes de testes, possibilitando-se um melhor controle das variáveis manipuladas: o número de etapas de escolha dos problemas resolvidos, a ordem de grandeza dos resultados dos problemas e os tipos de situações combinatórias (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). Alguns testes comparavam dois tipos de problemas – sendo um com duas, outro com três e mais outro com quatro etapas de escolha, para cada tipo de problema.

Todos os testes foram entregues aos alunos de forma aleatória, no qual cada tipo de teste tinha resultados semelhantes em cada etapa de escolha. A ordem em que cada problema se dispôs no teste se deu de forma aleatória por meio de sorteio. Não foi preciso variar a ordenação dos problemas, visto que Pontes e Borba (2012) verificaram não haver diferença significativa na disposição dos problemas dentro do teste, ou seja, iniciar um teste por um problema de *produto cartesiano* – tido como mais fácil em estudos anteriores – ou por um problema de *permutação* – considerado mais difícil – não apresentou diferença no desempenho dos alunos.

4. Resultados

Os alunos, em conjunto, utilizaram diversas estratégias, por intermédio de representações simbólicas variadas, para solucionarem os problemas que lhes foram apresentados. Algumas destas estratégias não possibilitaram o acerto total, ou seja, a determinação do número total de possibilidades solicitadas nos problemas combinatórios, enquanto que outras foram eficazes e permitiram ao aluno obter a resposta correta à situação proposta.

Buscou-se verificar a relação entre as representações simbólicas utilizadas pelos alunos com o tipo de problema combinatório, bem como a relação das representações simbólicas com o número de etapas de escolha. Objetivou-se observar se os alunos variam suas estratégias e representações de acordo com o tipo de problema que resolvem – *arranjo*, *combinação*, *permutação* ou *produto cartesiano* – ou se variam as estratégias e representações em função do número de etapas de escolha (duas, três ou quatro) da situação.

De acordo com Pessoa e Borba (2009, p.28), os alunos podem apresentar as seguintes formas de resolução para os problemas combinatórios:

> · Realiza adição, subtração ou divisão, utilizando os valores apresentados no enunciado. A resposta, geralmente, é incorreta sem relação.
> · Desenha ou escreve possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades.
> · Relaciona o problema a um produto, podendo a multiplicação ser adequada ou inadequada.

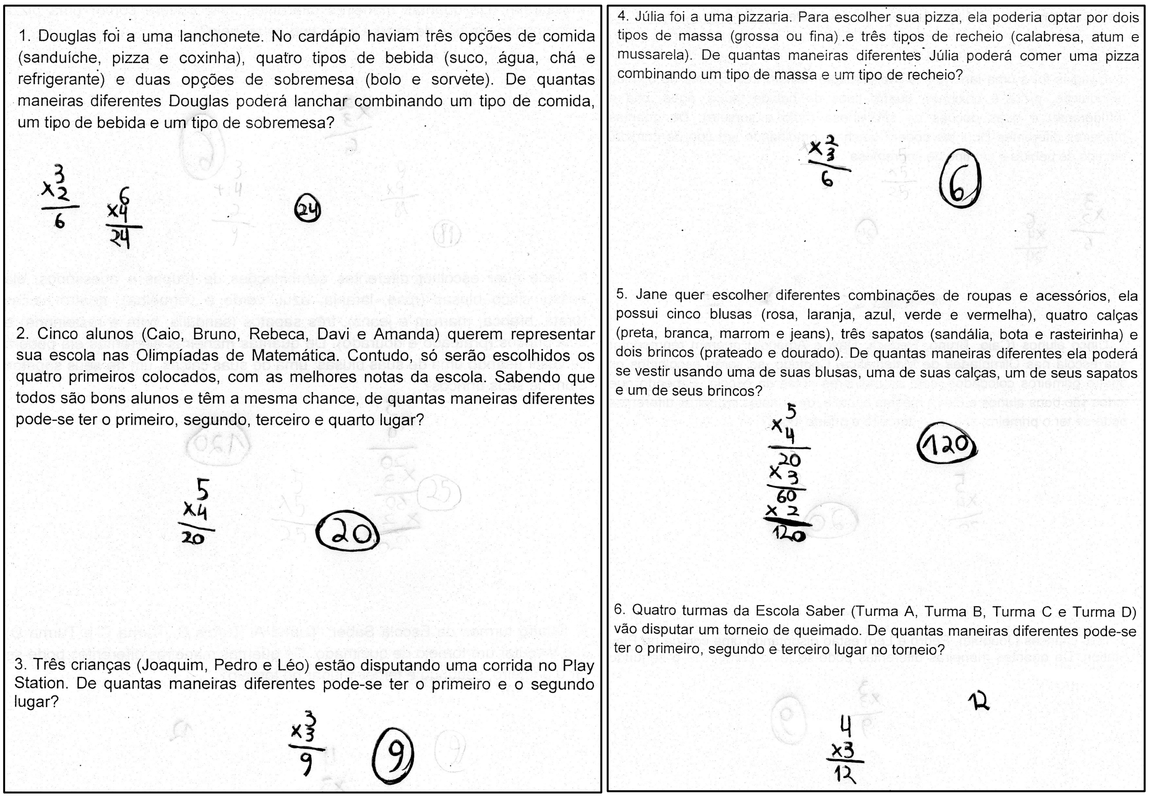
Essas estratégias de resolução foram analisadas por Pessoa e Borba (2009) para classificar a variedade de respostas que os alunos utilizaram ao deparar-se com problemas combinatórios. As autoras listam algumas das possíveis estratégias apresentadas pelos alunos, como: a não explicitação de um tipo de estratégia ou representação simbólica; adição ou subtração; desenho; árvore de possibilidades; diagrama ou quadro; listagem de possibilidades; multiplicação adequada ou inadequada; percepção de regularidade.

Nem todas as representações simbólicas classificadas pelas autoras citadas foram encontradas na pesquisa de Vega (2014). Percebeu-se que não há relação entre um determinado tipo de problema combinatório e uma representação simbólica ou estratégia específica, como também não há relação direta entre estratégias e representações utilizadas especificamente para duas, três ou quatro etapas de escolha. O que visualizou-se a variação das estratégias de acordo com o participante, ou seja, em geral, cada aluno usou a mesma representação simbólica e a mesma estratégia para responder todos os problemas de seu teste.

Observou-se que 82% dos alunos utilizaram uma mesma representação simbólica e estratégia em todos os tipos de problema e em todas as etapas de escolha. O aluno que iniciou usando uma representação escrita como a listagem, por exemplo, tendia a utilizá-la em todos os problemas. Os demais alunos, não explicitaram a estratégia utilizada ou deixaram em branco, não sendo possível analisar sua resposta.

As estratégias mais utilizadas foram: cálculo (adição, subtração, multiplicação e divisão), listagem, quadro, desenho e uso de fórmulas. A tendência era que o aluno escolhesse uma destas estratégias e a utilizasse em todos os problemas que resolveu, demonstrando assim, perceber que todos os problemas poderiam ser resolvidos da mesma maneira, visto que havia regularidades entre eles por serem todos problemas combinatórios.

Com base nesses tipos de representações simbólicas, se buscou entre os estudantes, extratos das resoluções utilizadas ao responderem os diferentes tipos de testes e com distintas etapas de escolha. Percebeu-se que nenhum aluno relaciona uma determinada estratégia de resolução para um tipo de problema diferente, o que se verificou foi o emprego de uma determinada estratégia de resolução, como por exemplo, a multiplicação, para responder a todos os diferentes tipos de problemas do teste, como pode ser visto no extrato a seguir.


1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

3 x 2 = 6   6 x 4 = 24   24

2. Cinco alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar?

5 x 4 = 20   20

3. Três crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar?

3 x 3 = 9   9

4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

2 x 3 = 6   6

5. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui cinco blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha), quatro calças (preta, branca, marrom e jeans), três sapatos (sandália, bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

5 x 4 = 20   20 x 3 = 60   60 x 2 = 120   120

6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

4 x 3 = 12   12

Figura 1: Respostas de um aluno que utilizou a multiplicação para a resolução de todos os problemas apresentados

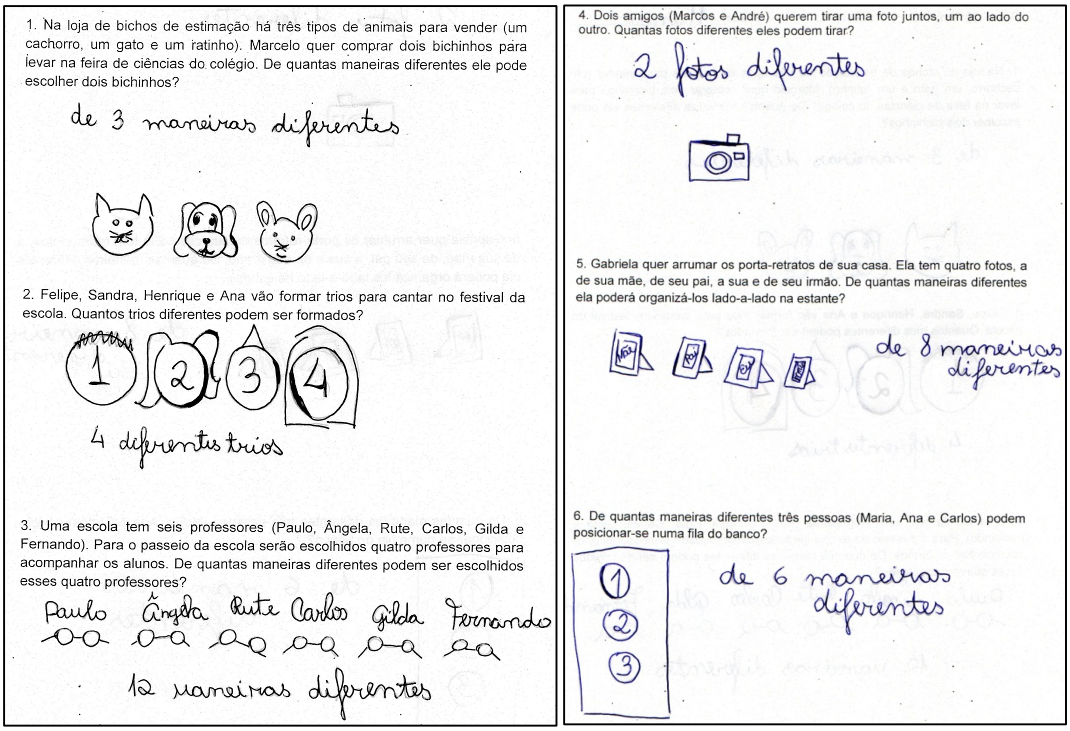
ISSN 2178-034X

No extrato da Figura 1 o aluno utilizou a multiplicação, ora de forma adequada, ora de forma inadequada, visto que é preciso observar os invariantes presentes em cada problema combinatório. Dos seis problemas respondidos, três estavam corretos, visto que as respostas a esses problemas são respectivamente, 24, 120, 6, 6, 120 e 24.

Os acertos foram observados apenas nos problemas de *produto cartesiano*, Problemas 1, 4 e 5. Já nos problemas de *arranjo*, o aluno iniciou sua resolução de forma correta, como pode ser visto no Problema 2, contudo ele interrompe a multiplicação 5 x 4, pois, na realidade, como são primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar, ele deveria multiplicar 5 x 4 x 3 x 2. O mesmo erro é cometido no Problema 6. Percebe-se que o aluno escolheu uma forma de representar (por escrito) e uma estratégia (a multiplicação dos valores descritos nos enunciados), independentes do tipo de situação combinatória e essa escolha ora levou a acerto, ora a erro, já que o tipo de problema pode requerer estratégias diferenciadas.

Buscando também analisar a relação entre as representações simbólicas explicitadas pelos estudantes e o número de etapas de escolha dos problemas combinatórios respondidos, percebeu-se, novamente, que nenhum aluno relacionou uma determinada estratégia de resolução com o número de etapas de escolha das situações apresentadas.

O que se verificou foi o emprego de uma determinada estratégia de resolução, como por exemplo, o desenho, para responder a todos os diferentes tipos de problemas do teste. Quando o aluno utiliza o desenho como estratégia de resolução demonstra, grande parte das vezes, compreender o que é solicitado nos problemas, como pode ser visto a seguir.


1. Na loja de bichos de estimação há três tipos de animais para vender (um cachorro, um gato e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

de 3 maneiras diferentes

2. Felipe, Sandra, Henrique e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

1 2 3 4

4 diferentes trios

3. Uma escola tem seis professores (Paulo, Ângela, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?

Paulo Ângela Rute Carlos Gilda Fernando

12 maneiras diferentes

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar?

2 fotos diferentes

5. Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem quatro fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los lado-a-lado na estante?

de 8 maneiras diferentes

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

1 2 3

de 6 maneiras diferentes

Figura 2: Respostas do Aluno 78 – com desenhos

O interessante desse tipo de estratégia é que ela pode ser utilizada por estudantes de diferentes idades, desde os mais novos até os mais velhos, incluindo alunos do 6º ano, como exemplificado aqui. O estudo de Pessoa e Borba (2009) mostra que até alunos do Ensino Médio, utilizam desenhos na resolução de problemas combinatórios.

Através do desenho, o Aluno 78 pôde obter êxito em quatro dos seis problemas presentes no teste Tipo 4. O aluno conseguiu acerto parcial nos problemas de *combinação* e *permutação*, ambos com quatro etapas de escolha, ou seja, apresentou algumas alternativas corretas, mas não o número total de possibilidades. Nos demais – problemas de duas e três etapas de escolha – o aluno alcançou acerto total. As respostas corretas de cada problema podem ser visualizadas no Quadro 1.

Quadro 1: Respostas do Aluno 78 aos problemas do teste Tipo 4.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Combinação	2 etapas	3	**3**
2. Combinação	3 etapas	4	**4**
3. Combinação	4 etapas	15	12
4. Permutação	2 etapas	2	**2**
5. Permutação	4 etapas	24	8
6. Permutação	3 etapas	6	**6**

É possível verificar através do Quadro 1 e da Figura 2, a eficácia da estratégia de resolução – desenho – no desempenho do aluno. Contudo, o desenho, nesse caso, parece ter sido utilizado somente como ilustração do enunciado de alguns problemas, pois as combinações parecem ter sido realizadas mentalmente. Isso pode ser visto no Problema 1, no qual uma combinação com duas etapas de escolha, o aluno desenhou os três animais que poderão ser escolhidos pelo menino. Nesse caso, o desenho deixou claro as possíveis combinações entre os animais, contudo, o aluno não desenhou, nem listou essas combinações. De alguma forma, entretanto, essa forma de representação – desenho – parece ter auxiliado o aluno no seu levantamento de possibilidades.

Por meio da análise das estratégias utilizadas pelos alunos, verificou-se não haver diferença entre as categorias classificadas por Pessoa e Borba (2009) e as encontradas no presente estudo, nem tampouco, houve relação entre a estratégia utilizada e o tipo de problema ou, ainda, o número de etapas de escolha. Percebeu-se que ao utilizar uma mesma estratégia em todos os tipos de problemas, os alunos parecem ter demonstrado perceber regularidades presentes nos problemas combinatórios, mas não compreenderam que há diferenças claras entre os diferentes tipos de problemas.

Considerações Finais

Observou-se no estudo que a tendência era de que cada aluno participante respondesse todos os problemas que lhe eram apresentados utilizando uma mesma forma de representação (tal como representações escritas) e uma mesma estratégia (tais como a operação de multiplicação ou desenhos das situações colocadas). O uso de mesma forma de representação e de mesma estratégia parecem indicar que os estudantes percebiam que as situações apresentadas possuíam aspectos em comum, ou seja, eram problemas nos quais se solicitava o levantamento de possibilidades resultantes da combinação de elementos.

Entretanto, o uso de mesma representação e mesma estratégia para diferentes situações combinatórias não era garantia de sucesso na resolução dos distintos problemas, pois além do reconhecimento de aspectos em comum dos diferentes tipos de problemas é preciso entender que há diferentes relações envolvidas em problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação* e que é possível generalizar estratégias utilizadas para resolver situações com duas etapas de escolha para outras com três, quatro, ou qualquer outro número de etapas de escolha.

Os resultados obtidos no estudo reforçam o defendido por Vergnaud (1996) e Duval (2009) de que representações simbólicas são instrumentos poderosos que podem auxiliar a resolução de problemas matemáticos, desde que se entenda o papel dos registros para identificar aspectos essenciais dos conceitos envolvidos nas situações; que se seja capaz de tratar adequadamente as representações utilizadas; e que se possa converter apropriadamente representações de um sistema de registro – tal como a linguagem natural de enunciados – para outros sistemas – tais como registros pictóricos e operações matemáticas, como multiplicações que podem resolver corretamente situações combinatórias.

No ensino da Matemática o papel de representações simbólicas ainda parece não ser devidamente entendido e valorizado e estudos como o presente chamam a atenção da necessidade de mais estudos em Educação Matemática que investiguem como representações podem ser empecilhos ao avanço da compreensão de conteúdos matemáticos ou como podem facilitar o aprendizado da Matemática.

5. Referências

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (Sèmiosis et Pensèe Humaine: Registres Semiotiques et Apprentissages Intellectueis). (Fascículo I)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ.** Cempem, FE, Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PONTES, Danielle Avanço Vega; BORBA, Rute. A influência das etapas de escolha e das representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. 16º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM. **Anais...** Canoas, 2012.

VEGA, Danielle Avanço. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação?** Dissertação de Mestrado da Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, 2014. http://www.gente.eti.br/edumatec/

VEGA, Danielle Avanço. BORBA, Rute. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** v.7, n.3, 2014. Disponível em: http://pgsskroton.com.br/seer//index.php/jieem/article/view/70

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

ISSN 2178-034X