UM ESTUDO SOBRE A ABORDAGEM DOS NÚMEROS IRRACIONAIS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Elisson dos Santos Morales
Universidade Católica de Brasília-UCB
elisson.morales@gmail.com

Jorge Cássio Costa Nóbriga
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC
jcassio@gmail.com

Resumo:
Nesta pesquisa estudamos como o conjunto dos números irracionais é abordado em três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. O estudo dos números irracionais é necessário para a construção do saber matemático, pois a partir dele podem ser resolvidos alguns problemas que tratam da incomensurabilidade de segmentos, completude da reta numérica, fórmulas de cálculo de perímetro, áreas, volumes, soluções de equações, entre outros. A análise foi feita tendo como suporte teórico a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. A seleção dos livros foi feita a partir do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Investigamos como são apresentadas as definições, representações, tarefas e notas históricas. A análise dos dados mostrou que os autores privilegiam a representação decimal, exercícios de classificação de número racional ou irracional, localização na reta e notas históricas com nomes e datas. Constatamos que isso não é suficiente para a compreensão dos irracionais.
Palavras-chave: Número irracional; Livro didático; Representação semiótica.

1. Introdução

Um conteúdo matemático difícil que é abordado no ensino básico é o conjunto dos números irracionais. Tal conteúdo envolve o conceito de dízima não periódica e infinita. Pensar em um objeto infinito que não tem nenhum padrão é difícil de compreender, pois crescemos em uma cultura privilegia o uso dos racionais. Ou seja, ao trabalhar com medidas no dia a dia é comum utilizamos números racionais ou aproximações racionais de números irracionais.

Os estudos históricos mostram que a descoberta de que $\sqrt{2}$ é irracional abalou a Sociedade Pitagórica que acreditava que no mundo tudo dependia dos números inteiros e suas razões. Poderíamos dizer que a descoberta de que $\sqrt{2}$ não é racional caracteriza um exemplo de obstáculo epistemológico. Não se tratam de obstáculos que se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento (PAIS, 2008, p.39). Obstáculos Epistemológicos dificultam o processo de construção do conhecimento e continuam a causar no processo de aprendizagem. É o caso dos números irracionais.

Apesar de ser um conceito complexo, encontram-se várias aplicações como por exemplos: padrão de crescimento de plantas, geometria fractal, espiral logarítmica, taxas de crescimento exponencial, entre outros. Assim, é importante que tal conceito seja de fato explorado no nível básico. Acreditamos que isso vem sendo feito de maneira equivocada e isso é verificado através das inúmeras dificuldades dos estudantes apontadas pelo trabalho de Penteado (2004).

A utilização do livro didático na aprendizagem dos números irracionais, que é o objeto desse estudo, deve ser uma fonte segura de informações e possibilidades para que o aluno possa se desenvolver. E ainda, o livro didático deve trazer informações coerentes com os potenciais do aluno e ao mesmo tempo de acordo com as definições matemáticas. Cabe ao professor ser o mediador do conteúdo apresentado no livro didático e das habilidades matemáticas a serem desenvolvidas. Para entendermos melhor a dificuldade sobre o conjunto dos números irracionais é necessário estudarmos como os livros didáticos abordam tal conteúdo. Assim, elaboramos as seguintes questões de pesquisa: *De que forma os livros didáticos abordam os números irracionais? Tal abordagem permite a compreensão de tal conceito?*

A partir dessa questão, elaborou-se o objetivo geral: *Analisar como o conjunto dos números irracionais é apresentado em livros didáticos do 1° ano do Ensino Médio.*

Com os seguintes objetivos específicos:

Identificar, nos livros didáticos, as diferentes representações dos números irracionais;

Analisar de que maneira os livros didáticos integram os diferentes registros de representações para a compreensão dos números irracionais.

2. Referencial teórico

2.1 O estudo dos Números Irracionais

Segundo Eves (1995) a descoberta dos números irracionais foi um marco na história da Matemática. Define-se o número racional como sendo um número da forma $\frac{a}{b}$ com a e b números inteiros e $b \neq 0$. Os pitagóricos foram os primeiros a provar que a diagonal de um

ISSN 2178-034X

quadrado de lado unitário é irracional[1] e com isso a noção de que a reta numérica é formada por pontos de números racionais caiu por terra. Isso criou um incômodo àqueles que seguiam a definição pitagórica de proporção. Pois, acreditavam que no mundo existiria uma unidade fundamental e ainda existia a crença de que qualquer grandeza seria expressa por um número racional. A consternação entre os pitagóricos sobre a irracionalidade da $\sqrt{2}$ foi tamanha que isso ficou em sigilo para que não fosse divulgada a existência de tal número.

De acordo Eves (1995) o único número irracional conhecido era a $\sqrt{2}$[2] e Teodoro de Cirene (c. 425 a. C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ são números irracionais. Apenas em 1872 com Dedekind surge a definição moderna de números irracionais: *"Um número real é irracional se, e somente se, sua representação decimal é infinita e não periódica"*. O conceito de número irracional está ligado ao conceito de número real. Assim, quando se estuda os conjuntos numéricos, explora-se o estudo dos números irracionais para poder chegar aos números reais.

Em documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 1999) e Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM (BRASIL, 2009) há recomendações do que se espera que o estudante tenha desenvolvido em termos de habilidades relacionadas com os números irracionais. Na matriz do novo Enem na competência: *Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais* há as habilidades que estão relacionadas com os irracionais:

- Habilidade 1: reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais;
- Habilidade 2: identificar padrões numéricos ou princípios de contagem;
- Habilidade 3: resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
- Habilidade 4: avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

---

[1] Uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ se encontra em Eves (1995)
[2] A razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, o número áureo, talvez tenha sido o primeiro irracional conhecido.

As habilidades 1, 3 e 4 são exploradas no contexto de situações-problemas em que podem aparecer números irracionais, como por exemplos, achar as raízes de uma equação do segundo grau, problemas de geometria e construção de gráfico. Já na habilidade 2, podemos ver como os números irracionais aparecem em algumas sequências. Uma das mais famosa é a sequência de Fibonacci em homenagem a Leonardo “Fibonacci” da Pisa (1170 – 1250), onde cada termo é a soma dos dois precedentes e a razão entre eles tende para:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para que tais habilidades sejam desenvolvidas pelos estudantes, são sugeridos diferentes tipos de atividades. Percebe-se que grande parte delas usa as representações figurais e simbólicas para a construção do conceito. Vejamos como isso pode ser feito, a partir de um quadrado unitário.

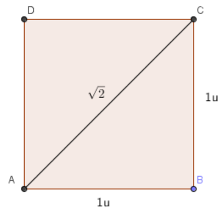


Figura 1: Quadrado unitário

E dispor os números irracionais na reta real.

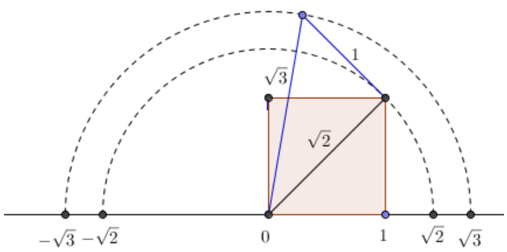


Figura 2: Disposição de números irracionais na reta numérica

As representações feitas nas figuras 1 e 2 servem para auxiliar a compreensão de que a $\sqrt{2}$ não é racional, mostrando que a reta contém elementos que não são racionais, mas será que são suficientes para a compreensão do conceito de irracionalidade? Cada representação traz algum tipo de informação que as demais podem não trazer. Por exemplo, a diagonal do quadrado unitário não está relacionada diretamente com a reta numérica. Assim, é preciso relacionar as diferentes representações para proporcionar a compreensão mais aprofundada do

ISSN 2178-034X

objeto. As representações são essenciais para a compreensão em Matemática. Veremos isso mais detalhadamente no tópico seguinte.

2.2 As representações semióticas

Como foi dito anteriormente as representações são necessárias para a compreensão do conjunto dos números irracionais. Mas, estamos considerando os Registros de Representações Semióticas. Antes de apresentarmos tal conceito, é preciso entender o que é Semiótica. Segundo Santaella (2002, p. 2) a "semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido".

Com relação aos Registros de Representação Semiótica, Duval (2009, p. 32) diz que

> [...] a especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma "mudança de forma".

Existe uma variedade de representações semióticas. Neste trabalho estamos interessados nos registros de representação que compõem o Sistema Semiótico dos objetos matemáticos. Eles podem ser classificados em Registro de Representação Linguístico (língua materna), Registro de Representação Simbólica (álgebra, aritmética) e Registro de Representação Visual (figuras, gráficos, tabelas, entre outros).

Para a compreensão, é importante que as mudanças de registros em matemática deveriam ocorram de forma natural para o aluno, já que esta ciência é criada com o entendimento de diferentes registros. Ou seja, quando estamos trabalhando com atividades em matemática, diferentes registros trazem novos entendimentos e perspectivas. Duval (2011) classifica as transformações no registro em dois tipos: tratamento e conversão. No caso do tratamento, as mudanças ocorrem em um mesmo registro. Por exemplo, para determinar se $\sqrt{20}$ é número irracional, pode-se utilizar a fatoração para chegar a $2\sqrt{5}$. Já a conversão é quando ocorre mudança de registro. Um exemplo de mudança de registro é a utilização do termo "raiz de dois" e o registro simbólico $\sqrt{2}$, passamos de um registro na língua materna para o registro notação matemática. Outros exemplos aparecem quando utilizamos a letra grega π para representar o valor de 3,14..., o número neperiano $e = 2{,}718 \ldots$

Nos processos de conversão há os fenômenos de congruência e não congruência. De acordo com Duval (2009) o fenômeno de congruência acontece quando a passagem da representação de partida para representação de chegada é feita de forma direta. Vejamos um exemplo de caso de congruência:

"o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abcissa"

$$y > x$$

Dizemos que a conversão é congruente nesse caso, pois existe uma relação termo a termo entre a representação de partida e a de chegada. Note que, quando utilizamos o termo "ordenada" temos o seu correspondente na representação algébrica, y. E os termos "é maior que a" e "abcissa" os seus correspondentes são respectivamente ">" e "x".

Agora outro exemplo:

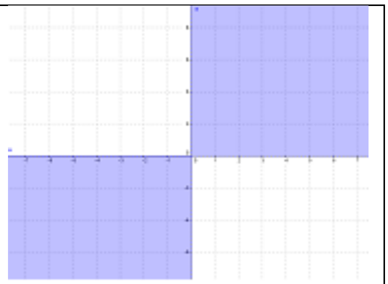
O conjunto dos pontos cujas abcissa <u>e</u> ordenada têm o **<u>mesmo sinal,</u>**	$x \cdot y > \mathbf{0}$	
	O produto da abcissa pela ordenada **é maior que 0**.	Dois quadrantes planos determinados pelos eixos das abcissas e das coordenadas.

Tabela 1: Comparação de três representações não congruentes (Duval, 2009, p. 122)

As representações são não congruentes, pois para representação *mesmo sinal* não existe uma única representação simbólica que permite designar. Daí é preciso utilizar uma combinação entre os símbolos para a conversão: o sinal de maior (>) e o zero. Assim, "> 0".

Os casos de não congruências são facilmente encontrados na matemática. Então, sem uma aprendizagem adequada nas formas de se fazer conversões, o ato de efetuá-las e compreendê-las pode ser impraticáveis. Duval (2011) alerta que alguns professores ao resolver problemas, acabam escolhendo os de conversões congruentes e deixando os problemas de conversões não congruentes para os alunos. Com isso, sem a ferramenta e o entendimento necessário para solucionar o problema o estudante acaba desmotivado. No caso do conjunto dos números irracionais, as situações são, na maior parte casos de não congruência.

3. Metodologia

Para responder a nossa questão de pesquisa, a saber, *de que forma os livros didáticos abordam os números irracionais? Tal abordagem permite a compreensão de tal conceito?*

Optamos por uma pesquisa bibliográfica. De acordo Fiorentini e Lorenzato (2006) pesquisa bibliográfica é aquela que se faz preferencialmente sobre documentação escrita.

> Apesar da crítica de que geralmente a amostra não é representativa e de que toda análise é sempre subjetiva, o exame de documentos pode ser uma técnica útil de investigação se o pesquisador conseguir categorias de análise, constituídas pelos itens principais, mais frequentes e diferentes que surgem nos dados. As categorias, no entanto, devem refletir os propósitos da pesquisa. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 103)

Assim, foram selecionados três livros de matemática do 1° ano do Ensino Médio. O critério de escolha foi o *ranking* de distribuição, ou seja, os livros mais distribuídos para as escolas públicas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no ano de 2015.

O fato de os livros serem avaliados pelo Ministério da Educação (MEC) e o número de escolas que adotam essas coleções nos faz acreditar que o critério de escolha para a análise é coerente. Os livros de matemática do Ensino Médio mais distribuídos no ano de 2015 foram:

- Livro 1: Matemática: Contexto e aplicações; [3]
- Livro 2: Novo Olhar: Matemática;[4]
- Livro 3: Matemática Ciências e Aplicações: ensino médio.[5]

Em cada livro identificamos os capítulos que tratam dos números irracionais. A partir disso, fizemos nossas análises, buscando responder as seguintes questões:

- Como são apresentados os irracionais? Forma simbólica? Discursiva? Visual?
- É feita alguma abordagem histórica e como é feita?
- Como são feitas as conversões?
- Como são feitos os tratamentos?

4. Resultados e discussões

Começamos nossa análise, seguindo a ordem de como os livros apresentam o assunto. Assim, a sessão do livro que trabalha os números irracionais está dentro do capítulo de

[3] DANTE, L. R. Matemática: Contexto e aplicações. 5ª Edição. São Paulo: Ática, 2011. V. 1
[4] SOUZA, J. R. Novo Olhar: Matemática. 2ª Edição. São Paulo: FTD, 2013. V. 1
[5] IEZZI, G. et al. Matemática Ciências e Aplicações: ensino médio. 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2014. V. 1

conjuntos numéricos, segundo capítulo dos livros. O primeiro capítulo de todos os livros é sobre conjuntos.

No segundo capítulo são estudados primeiramente os conjuntos dos números naturais, em seguida inteiros, racionais e reais. Os números irracionais são apresentados dentro da sessão dos números reais. Este conjunto é a união dos conjuntos racional e irracional. Vejamos como o livro 1 (Dante, 2011) aborda esse fato.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\mathrm{r} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\mathrm{r}\} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Figura 3: Representação dos números reais (DANTE, 2011, p.45)

Neste recorte, vemos que o autor utilizou de tratamento e conversão. O tratamento aparece quando utiliza a representação algébrica com os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, e um operador matemático, $\cup$, para mostrar que era igual (=) a outra expressão, $\{x|x \in \mathbb{Q}\ ou\ x \in \mathbb{I}\}$. Já a conversão, aparece na segunda igualdade em que é usada a representação na língua materna.

Ainda em relação à como o número real é apresentado, vamos analisar um outro recorte.

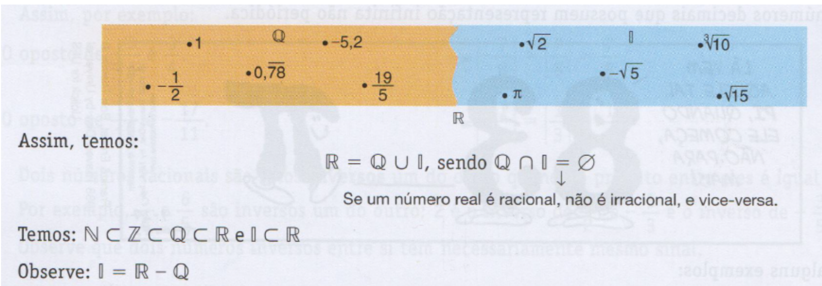


Figura 4: Diagrama dos números reais (IEZZI, 2014, p. 34)

O livro 3 (IEZZI, 2014) mostra através de duas representações: Visual (diagrama) e Simbólica (expressão algébrica), que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são disjuntos, ou seja, possuem interseção vazia. E ainda na figura 4, na penúltima e última linha se reforça a ideia de que os números naturais e inteiros são racionais que estão nos reais e que não são irracionais. O livro 2, também utiliza de diagrama para mostrar que os números irracionais são disjuntos aos racionais.

Nos três livros, os autores se preocuparam em mostrar que $\sqrt{2}$ e π são irracionais, apresentando a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional e comentando que a expansão decimal de π já ultrapassou a casa de bilhão. Porém, em nenhum momento é dado um recurso para o leitor identificar se um número é irracional ou não, o mais próximo de um método foi dado por Iezzi (2014) mostrado na figura 5.

Observação

Se a é um número racional não nulo e b é um número irracional qualquer, temos que:

- $a + b$ é irracional;
- $a \cdot b$ é irracional;
- $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ são irracionais.

Por exemplo, sendo $a = 3$ e $b = -\sqrt{2}$, temos:

- $3 + (-\sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} \in \mathbb{I}$
- $-3 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{I}$
- $-\frac{3}{\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{I}$

Figura 5: Propriedades dos irracionais (IEZZI, 2014, p. 34)

Nesta observação, os autores usam representações simbólicas (expressões algébricas) e linguística para mostrar propriedades dos irracionais. O a é um número racional e b irracional. E se utilizarmos desses números em operações de soma, multiplicação e divisão o resultado será um número irracional. Aqui cabe uma observação em relação aos números escolhidos como exemplos: 3 e $-\sqrt{2}$. Não foi feito nenhum tipo de cálculo para mostrar que a adição, multiplicação e divisão gerava um irracional. Com isso o aluno fica sem ferramentas claras de como diferenciar um número racional de um irracional. Ou seja, como os estudantes poderiam compreender de fato tal propriedade?

Analisemos como os autores apresentaram os exercícios sobre essas propriedades.

EXERCÍCIOS

21. Represente, na reta numerada, os seguintes números reais:
$\sqrt{20}$, 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{\pi^2}{2}$, 5, $\frac{17}{4}$
Entre os números acima, quais são irracionais?

22. Classifique cada número real seguinte em racional ou irracional:

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{7^2}$
c) $1 + 2\pi$
d) $(\sqrt{3} + 1)^2$
e) $\sqrt{\frac{20}{80}}$
f) $0{,}25 : 0{,}\overline{25}$
g) $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$
h) $(0{,}\overline{3})^2$
i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
j) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$
k) $\sqrt{2 + 7}$

Figura 6: Exercícios (IEZZI, 2014, p. 35)

No exercício 22 da figura 6, é pedido para que o aluno classifique se o número é racional ou irracional. Mas a forma com que são apresentados os exemplos nos leva a pensar que antes de utilizar as propriedades da figura 5, o aluno precisaria fazer algumas transformações (tratamentos) no registro simbólico para poder usar as propriedades. O tratamento seria a fatoração. Por exemplo, o item "a" da figura 6.

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

Como é um produto de um número racional com um irracional podemos afirmar que $\sqrt{50}$ é um número irracional. Foi necessário fazer um tratamento para conseguir a informação necessária. A mesma situação acontece nos outros dois livros.

Os exercícios pedem para o aluno identificar se o número é racional ou irracional e não dão nenhum tipo de recurso para que a atividade seja realizada de forma consciente.

Ainda em relação à apresentação dos números irracionais, os autores dos livros analisados se preocuparam em explicar, utilizando figuras, que com a união dos números racionais e com os irracionais obtemos a reta dos números reais.

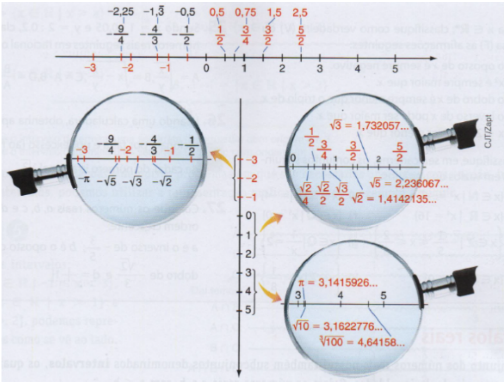


Figura 7: Reta numérica (IEZZI, 2014, p. 35)

Analisando como os autores associaram o estudo dos números irracionais com sua história é interessante notar que cada um aborda de uma maneira diferente. Explicitando que o assunto aparece em diferentes momentos da história da Matemática. Vejamos os exemplos que estão nos livros escolhidos.

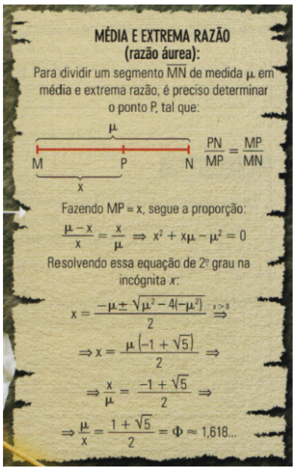


Figura 8: Razão áurea por média e extrema razão (IEZZI, 2014, p. 38)

ISSN 2178-034X

Iezzi (2014) diz que a razão áurea é obtida quando se divide um segmento de reta em média e extrema razão.[6] Porém, não é explicado o que é uma "média e extrema razão", usando a representação linguística.

Dessa forma, o aluno terá que fazer a interpretação do termo "média e extrema razão" na forma em que é apresentada no livro, através da representação figural e algébrica. Acreditamos que o uso integrado da representação linguística, figural e simbólica poderia permitir uma melhor compreensão. Pois, poderia ver que há uma divisão e com quais segmentos essa divisão ocorre. O autor faz a conversão da representação geometria para uma representação algébrica. E com isso, utiliza de operações algébricas para encontrar e solucionar a equação do segundo grau. O resultado da equação é o número φ, o número de ouro, que como foi dito no começo desde trabalho também é obtido como o limite da razão dos termos da sequência de Fibonacci. Tal sequência aparece na espiral do nautilus, na espiral formada pela folha de uma bromélia, reprodução das abelhas

5. Considerações finais

Tivemos como objetivo mostrar como os números irracionais são apresentados em livros didáticos do 1° ano do ensino médio, com quais tipos de representações semiótica os autores trabalharam e como essas representações possibilitam uma aprendizagem significativa de tal conjunto. O trabalho foi elaborado com base em três livros, selecionados da listagem do PNLD. A análise foi com base na teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval.

Nos textos, encontramos características comuns aos autores: demonstrar/verificar que $\sqrt{2}$ é irracional, imagens da reta numérica e aproximar números irracionais por racionais. Há ainda nos exercícios dificuldade de contextualização, pois constatou-se que as atividades eram, em sua maioria, para verificar se o número era irracional ou não e o dispor na reta.

Com relação às representações, os autores as tratam de forma superficial. Vemos isso quando é pedido para julgar se o número é irracional ou não. Apenas um livro, o do Iezzi, trouxe algum tipo de critério, que no caso era fazer tratamentos em raízes quadradas.

Outra situação que podemos destacar é o fato dos livros trazerem a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional e afirmam que o segmento (diagonal do quadrado) é incomensurável. Mas carece de uma explicação do que é um "segmento incomensurável".

[6] Média e extrema razão é quando a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual a razão entre o maior e o segmento todo.

Historicamente os números irracionais aparecem de uma questão geométrica e hoje sabemos que aparecem em outras áreas da matemática. Para trabalhar esse conceito é necessário explorá-lo ao máximo, estudando em diversas representações. Os autores dos livros precisam levar isso em consideração para que não caiam em certas armadilhas como mostrar apenas π e certas raízes quadradas como números irracionais, poucos exemplos e quase não utilizar recursos geométricos. Explorar as representações enriquece o saber matemático e pode ajudar a formar alunos críticos, por saberem visualizar um mesmo objeto em diferentes perspectivas.

6. Referências

DANTE, L. R. Matemática: Contexto e aplicações. 5ª Edição. São Paulo: Ática, 2011. V. 1

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização de Tânia MM Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, v. 1, 2011.

______. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.(Trad.). Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, v. 2, 2009.

EVES, Howard Whitley. Introdução à história da matemática. Unicamp, 1995.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos. Autores Associados, 2006.

IEZZI, G. et al. Matemática Ciências e Aplicações: ensino médio. 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2014. V. 1

NÓBRIGA, J. C. C., GGBOOK: Uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de Narrativas Matemáticas Dinâmicas, Tese de Doutorado em Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Autêntica Editora, 2001.

PENTEADO, C. B. Concepções do Professor de Ensino Médio relativas à densidade do Conjunto dos Números Reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade. Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica–PUCSP, 2004.

SANTAELLA, L. O Que é Semiótica. São Paulo: BRASILIENSE, 2002.

SOUZA, J. R. Novo Olhar: Matemática. 2ª Edição. São Paulo: FTD, 2013. V. 1