A CONSTRUÇÃO NÃO LINEAR E OS ASPECTOS OPERACIONAIS E ESTRUTURAIS DO CONCEITO DE GRUPOS NOS TRABALHOS DE EULER E GAUSS

Christian James de Castro Bussmann
Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Luiz Meneghel
christian@uenp.edu.br

Michelle Andrade Klaiber
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana
michelle@utfpt.edu.br

Resumo:
Este artigo apresenta uma abordagem histórica epistemológica, com base nos trabalhos de Euler e Gauss, envolvendo o conceito de Grupos, que analisamos sob a luz das ideias de Bachelard (1995, 2005), a respeito do conhecimento científico, e Anna Sfard (1991), a qual argumenta que qualquer conteúdo matemático possui dois aspectos: o operacional e o estrutural; destacando a existência de etapas tais como interiorização, condensação e reificação no processo de construção do conceito de Grupos, com intuito de promover uma aprendizagem significativa e contextualizada deste conceito.
Palavras-Chave: educação matemática; conceito de grupos; construção do conceito, concepções epistemológicas.

1. Introdução

Acreditamos, em acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), que o professor ao apresentar a seus estudantes as motivações para o surgimento da matemática, as necessidades e problemas de diferentes povos, em diferentes épocas, permite que estes estudantes desenvolvam atitudes e valores significativos para a aprendizagem do conhecimento matemático.

Para Brandemberg (2010), um maior conhecimento sobre a origem e o desenvolvimento das estruturas algébricas colabora para o ensino da Álgebra em especial nos cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, uma análise histórico-epistemológica de estruturas algébricas pode contribuir e ser um elemento motivador da aprendizagem, bem como mudar as perspectivas, quando se tem o primeiro contato com esses conceitos. Segundo Bachelard (1995), a produção do conhecimento matemático se dá por meio de uma perspectiva histórica de forma não linear e não previsível contrariando a forma estática como os conceitos são apresentados na maioria dos livros, assim, a realização de estudos críticos destas produções pode ser significativa para entender os caminhos que levam a construção deste conhecimento.

Desta forma, neste trabalho, apresentamos alguns aportes históricos e teóricos a respeito do conceito de Grupos, o qual é evidenciado em vários momentos não só do curso de Matemática (Ensino Superior), mas também da Educação Básica, pois os professores, ao trabalharem com os conjuntos numéricos, matrizes e suas operações, ou com permutações, estão intuitivamente/inconscientemente trabalhando com Grupos.

2. Abordagem teórica das concepções de Sfard e Bachelard na teoria de Grupos

Livros didáticos que abordam o conceito de Grupos, em sua maioria, apresentam esse conteúdo de forma estática, ou seja, sem relacioná-lo com outros tópicos e em momento algum fazem referência aos aspectos históricos deste. Apresentam-no como um objeto e não como um processo, como diria Sfard (1991), que argumenta que as noções abstratas podem ser classificadas como: *estruturais* (como um objeto) ou *operacionais* (como um processo). Na concepção estrutural, um conceito matemático é concebido a partir do momento em que o estudante começa a tratar este conceito como um objeto, olhando-o como um todo sem se prender a detalhes. Já a concepção operacional ocorre na execução do conceito, ou seja, é vista como um processo. Pode-se inferir que a concepção estrutural é estática, instantânea e integradora e a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada.

Sob uma perspectiva histórica Sfard (1991) afirma:

> Parece, portanto, que a abordagem estrutural deve ser considerada como o estágio mais avançado de desenvolvimento do conceito. Em outras palavras, temos boas razões para esperar que no processo de formação de conceitos, concepções operacionais precedem a estrutural (SFARD, 1991, p.10, tradução nossa).

Ainda na mesma perspectiva, Dreyfus (1991) argumenta que estes processos são importantes para o avanço do pensamento matemático, pois é por meio destes que se pode fazer várias conexões, como descobertas, intuições, verificações, provas, definições e outros.

Sendo assim, entendemos que a definição de Grupos seria estrutural, pois se apresenta estática e instantânea e a concepção operacional aparece no desenvolvimento desse conceito, advindo da busca de soluções para equações algébricas, de permutações e de trabalhos com conjuntos numéricos. Neste sentido, Sfard (1991) afirma ainda que:

> As representações algébricas podem ser facilmente interpretadas de ambas as maneiras: podem ser explicadas operacionalmente, como uma descrição concisa de alguns cálculos, ou estruturalmente, como uma relação estática entre duas magnitudes. (SFARD, 1991, p.6, tradução nossa).

Nesta perspectiva, o conceito de Grupos pode apresentar essas duas concepções. Por exemplo, na atividade de verificar se o conjunto dos números reais munido da operação $x*y = x+y - 7$, é um grupo, pode-se interpretar a operação dada como uma identidade entre duas magnitudes (estrutural), mas também pode-se entender como um comando (computacional) necessário para executar operações (operacional).

Sfard (1991) afirma que as concepções estrutural e operacional podem ser percebidas no desenvolvimento histórico do conceito, e ainda argumenta que a concepção operacional, em muitos casos, ocorre antes da estrutural, sendo que a história apresenta algumas situações em que se percebe tal evento.

A mesma autora acredita que alguns destes desenvolvimentos históricos se deram em um processo cíclico, e que a cada ciclo surgia algo novo. Da mesma forma, segundo registros históricos, deu-se o desenvolvimento do conceito de Grupos, ou seja, da atividade de se resolver equações algébricas cada vez mais complexas.

Assim como Sfard, Bachelard propõe que a construção do conhecimento não é linear e tampouco previsível, dedutível de uma lógica interna de funcionamento, remetendo que o processo histórico constitui-se como um elo fundamental entre o conhecimento antigo e o novo. Esse processo cíclico não linear pode evidenciar alterações do operacional para estrutural, e ainda contribuir para identificarmos em que momento histórico se deu esta mudança. Isso pode ser significativo na formação de professores, pois o futuro professor pode entender como determinados conteúdos são apresentados e porque são abordados de tal maneira, e ainda, de acordo com os parâmetros curriculares nacionais:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1997, p. 30).

Nesse aspecto, Sfard (1991) acredita que alguns desenvolvimentos históricos de conteúdos matemáticos se deram como:

> [...] um longa corrente de transição do operacional para estrutural: e vice-versa, os processos executados em objetos abstratos, foram convertidos e compactados ou reificados (do latim a palavra rei – uma coisa) para se transformar em um novo tipo de construção estática e auto-suficiente. (SFARD, 1991, p.14, tradução nossa).

Apesar de toda esta discussão de transição do operacional para o estrutural, esta pode configurar-se lenta, tornando-se um processo difícil. No entanto, na maioria das vezes a concepção operacional é a primeira que se evidencia quando do aprendizado estudantil. Desta forma, "... o esquema que foi desenvolvido historicamente pode ser usado na descrição dos processos de aprendizagem" (SFARD, 1991, p. 16), e remetendo a trabalhos de Piaget, temos que:

> [...] a abstração [matemática] deriva-se não do objeto sobre qual se atua, mas da própria ação. Parece-me que esta é a base da abstração lógica e matemática. (PIAGET, 1978, p.50)

Sendo assim, podemos assegurar que um determinado conteúdo, em certo nível, é operacional, no entanto, este mesmo conceito poderá ser concebido de maneira estrutural em um nível superior.

A partir desta discussão é que Sfard (1991) afirma existirem três fases na formação do conceito, denominadas como "degraus de estruturação" definidos como: *interiorização, condensação* e *reificação.* Apresentaremos uma breve explanação de cada uma destas fases.

Interiorização é o estágio no qual o estudante adquire uma familiaridade com o novo conteúdo. Os processos que são executados nesta fase, com os objetos matemáticos, são de um grau de dificuldade inferior, pois assim o novo conceito pode ser organizado de maneira mais fácil.

Condensação, neste estágio o estudante começa a pensar sobre o processo como um todo, sem ficar preso a detalhes que no processo de interiorização são importantes, ou seja, é o momento em que ele começa a fazer compactações das sequências de operações. Acreditamos que é nesta fase que nasce um conceito. Nesse momento, torna-se mais "fácil" elaborar generalizações, comparações e combinações com outros processos.

Reificação acontece no momento em que se torna possível identificar um conceito como um objeto, entendemos reificação como sendo a transformação de um conceito num objeto; é a partir desse momento que o estudante deixa de ver um conjunto numérico por meio de uma operação usual e suas propriedades e passa a observá-lo como uma estrutura que pode ser aplicada em outros entes. Assim,

> [...] enquanto interiorização e condensação são mudanças graduais mais quantitativas do que qualitativas, a reificação é um salto quântico instantâneo: um processo que se solidifica num objeto, numa estrutura estática. Várias representações do conceito se tornam semanticamente unificadas por esta construção abstrata, puramente imaginária. O novo conceito é logo separado do processo que o produziu e começa a formular seu significado: de ser membro de uma determinada categoria. Em algum momento, esta categoria mais que qualquer tipo de construção concreta se torna a mais nova base para sustentar a existência de um novo objeto. (SFARD, 1991, p.19-20, tradução nossa).

No caso do conceito de Grupos, identificamos as fases de interiorização, condensação e reificação como sendo:

Interiorização é a manipulação de objetos familiares, no caso, conjuntos numéricos, resolução de equações algébricas, propriedade associativa, elemento neutro e simétrico, mas sem a obrigatoriedade de ter uma ordem estabelecida.

Condensação busca resolver problemas envolvendo o conceito de Grupos e suas propriedades, mas agora respeitando a ordem de como o conceito é apresentado.

Reificação é um tratamento isolado do objeto, ou seja, não há necessidade de um exemplo, o estudante começa a enxergar o conjunto com determinada operação como sendo uma estrutura de Grupos.

Ainda sob a perspectiva histórica, Sfard (1991) argumenta que em determinando momento histórico os matemáticos e filósofos estavam cientes que muitas das descrições surgiram de forma intuitiva, mas que todas estas necessitavam de uma definição que justificasse a sua utilização. Sob o nosso entendimento estes estavam em busca de uma reificação, no entanto a autora argumenta que este não é um processo fácil de fazer, ou seja, encontrar uma versão estrutural de um determinado conceito.

Assim como Sfard, Bachelard acredita que a formação do conhecimento também passa por três fases denominadas por ele como sendo: o estado concreto, o concreto abstrato e o abstrato.

No estado concreto, o indivíduo começa a gerar as primeiras imagens e a partir disto se iniciam as primeiras concepções sobre um determinado assunto. Já no estado concreto abstrato, o indivíduo inicia um processo de generalização de um determinado assunto e no estado abstrato já consegue fazer determinadas problematizações e a partir de suas experiências, gerar novos conhecimentos.

Já nos atos que o autor denomina como obstáculos, estes fazem com que haja uma estagnação e uma regressão no processo de evolução da ciência. "É no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma série de imperativo funcional, lentidões e conflitos" (BACHELARD, 1995, p.24).

De acordo com Kummer (1999),

> [...] a teoria bachelardiana prevê que todo o saber científico deve ser reformulado, pois assim a ciência se mostrará viva, pois se reconstrói através de retificações. Quando os erros são corrigidos ou retificados é que chegamos à verdade. (In: Dominguini e Silva p.3).

Com esta breve apresentação de ambas as teorias podemos perceber que existem algumas similaridades entre elas, Sfard comenta sobre a questão da interiorização como sendo um primeiro contato, uma familiarização com determinado conteúdo, Bachelard o identifica como sendo um estado concreto, neste caso, para ambos os autores seria um primeiro contato com uma determinada teoria.

Tanto na condensação como no estado concreto abstrato o estudante começa estabelecer algumas compactações e generalizações sobre um conceito bem como construir sequências de operações, sem se prender a determinados fatos que são importantes no processo de interiorização denominado por Sfard e no estado concreto, denominado por Bachelard.

O que na reificação a autora denomina como a possibilidade de ver a transformação de um conceito em um objeto, Bachelard entende em seu estado abstrato como sendo a construção de uma problematização e a partir desta a construção de novos conhecimentos.

Nesta parte do processo pode haver algumas diferenciações, pois no processo de reificação o conceito já está bem claro para o estudante e este não se prende a determinados pontos, enquanto que para Bachelard este estado permite a construção de novos conhecimentos. Nesta perspectiva, também é possível inferir que existe algo em comum, pois para que haja a construção de um novo conceito existe a necessidade de que um conceito anterior esteja bem claro, que seja como um objeto estático.

Com base nesta breve apresentação de ambas as teorias e suas similaridades discutiremos como estas concepções se mostraram no desenvolvimento histórico do conceito de Grupos.

3. Noções históricas e os desenvolvimentos operacional e estrutural do conceito de Grupos nos trabalhos de Euler e Gauss

Sempre que nos referimos ao conceito de Grupos, um dos ícones é Evariste Galois com seu trabalho sobre permutações na tentativa de resolver equações algébricas por radicais, bem como Augustin Cauchy, em seus estudos notamos a importância do conceito de Grupos pela própria ideia do conceito; e de Arthur Cayley, com a noção abstrata de Grupos.

Contudo, as primeiras ideias sobre o conceito de Grupos, segundo Milies (1992), aparecem nos trabalhos de Leonhard Euler, Karl F. Gauss, Joseph L. Lagrange e Niels H. Abel. Nesse desenvolvimento histórico encontramos dois objetos que consideramos fundamentais para o surgimento do conceito de Grupos, sendo um deles, segundo Milies (1992), o Teorema de Fermat estudado na teoria dos números, e o outro a resolução de equações algébricas. Destacamos que o Teorema de Fermat foi estudado por Euler e Gauss, enquanto a resolução de equações algébricas foi abordada por Lagrange, Cauchy, Abel e Galois.

É neste sentido que enfatizamos os estudos de Bachelard a respeito da questão da não linearidade, pois notamos que Euler e Gauss estavam preocupados com a demonstração do Teorema de Fermat enquanto que Lagrange, Cauchy, Abel e Galois estavam interessados na resolução de equações algébricas, e a partir de objetivos/interesses diferentes foi delineando-se a teoria de Grupos. Historicamente, isso evidencia que o processo de constituição do conhecimento é cíclico e que há uma transição do conceito operacional para o estrutural.

Na tentativa de demonstrar o Teorema de Fermat, Euler trabalhou com a teoria dos números e, segundo Katz (1998), acredita-se que por volta de 1750, começou a escrever o *Tractarus de numerorum doctrina* (Tratado da doutrina dos números). Neste trabalho, a parte mais importante, segundo Katz (1998), está no conceito de congruência módulo, Euler define o resíduo de um número *a* por um número *d* como sendo *r* na divisão de a por d, ou seja, a = md + r, e nota que existem "*d*" possibilidades para o resíduo e que estes podem ser separados em classes de restos ou classes de congruência.

> [...] as ideias básicas da teoria de Grupos são evidentes na discussão de resíduos, desenvolvidos por Euler, de uma série em uma progressão aritmética 0, b, 2b, ..., Euler mostra que o módulo d e o número b são primos entre si, então a série contém elementos de cada uma das d diferentes classes de resíduos. Consequentemente, b tem um "inverso" com relação a d, um número p tanto que o resíduo de pb é igual a 1. Por outro lado, se a maioria dos divisores comuns de d e b são g > 1, então somente em $\frac{d}{g}$ que aparece diferentes resíduos tais que não existe inverso (KATZ, 1998, p. 618, tradução nossa).

Fica evidente que neste trabalho há indícios do conceito de Grupos, pois seria o início dos estudos das classes de restos módulo um inteiro positivo m. Além disso, na prova do Teorema de Fermat, é possível inferir que ocorrem as três fases citadas por Sfard (1991) e por Bachelard (1995), pois durante o estudo do referido teorema estava sendo feita a interiorização ou estava se construindo um estado concreto; enquanto que na tentativa de provar o teorema, acreditamos que houve o entendimento sobre o mesmo, mas ainda necessitava-se de algum objeto mental, sendo assim estava ocorrendo a condensação ou também a evolução para um estado concreto-abstrato. Finalmente, quando se iniciam os estudos dos resíduos nas séries aritméticas ocorre a reificação bem como o desenvolvimento de um estado abstrato.

Segundo Brandemberg (2010):

> [...] Euler usou o resultado em uma demonstração do "pequeno Teorema de Fermat", essa prova era superior a uma prova anterior baseada na expansão da série $(a + b)^{n}$, no sentido em que estabelece um resultado "numérico-teórico", a partir de um método "numérico-teórico". Nesse sentido, a prova é para Euler mais natural (BRANDEMBERG, 2010, p. 56).

Assim, transfere-se de uma concepção operacional, na qual aparecem todas as fases de Sfard, a uma concepção estrutural.

Ainda de acordo Brandemberg (2010), a teoria das potências residuais estava avançada para seu tempo, aparecendo somente três anos depois no trabalho de Gauss intitulado *Disquisitones Aritmeticae* em 1801, e, segundo Milies (1992), foi parte essencial das inovações contidas neste. Neste trabalho encontramos a definição de congruência de inteiros com respeito a um módulo m e sua notação, sendo esta utilizada ainda hoje.

Gauss utilizou a mesma estrutura que Euler para separação de termos da sequencia a^0, a^1, a^2, ..., contudo, por meio da congruência, foi mais sucinto que Euler:

> Se p é um primo que não divide a, e a^t é a menor potência de a congruente com 1 módulo p, então t é igual a p – 1 ou um divisor deste número (BRANDENBERG, apud WUSSING, p. 57)

Gauss investigou a congruência $x^n \equiv a \bmod m$ com (a, m) = 1, se referindo ao termo ‘a’ como sendo a n – ésima potência residual ou não residual. Provou que se (a, m) =1, então existe um expoente t tal que $a^t \equiv 1 \bmod m$. Ainda demonstrou um teorema: se d é um divisor de p – 1, então existem exatamente φ(d) números que pertencem a d.

Brandenberg (2010) complementa ainda que:

> [...] isso implica em uma raiz primitiva módulo p, isto é, um número g tal que $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ e segue independentemente da ordem, que os restos das potencias g^0, g, g^2, ..., g^{p-2} são 1, 2, ..., p – 1. Assim, as potências de g formam um grupo abeliano finito e cíclico. Além disso, para todo a, podemos sempre encontrar um α, tal que $a \equiv g^{\alpha} \bmod p$. Em termos de “grupos – teóricos” isso é simplesmente uma representação básica de um grupo abeliano cíclico. (BRANDENBERG, 2010, p. 58)

Notemos que, com esse trabalho, Gauss apresentou as características de Grupos, pois temos um conjunto, uma operação, e esta goza das propriedades de Grupos. Além disso, apresentou a comutatividade, ou seja, construiu um Grupo abeliano e dois exemplos de Grupos: o Grupo aditivo dos inteiros e o multiplicativo dos racionais não nulos.

Assim, as categorias apresentadas por Sfard (1991) e por Bachelard (1995) são evidenciadas no trabalho de Gauss: necessitou de um “objeto real” (no caso o resíduo) e assim temos tanto a interiorização como o estado concreto, ao apresentar as ideias de congruência, acreditamos que foi feita a condensação ou de acordo com Bachelard o desenvolvimento do estado concreto-abstrato.

Para Katz (1998), Gauss considerava o seu trabalho tão importante que apresentou seis diferentes provas para o teorema da reciprocidade quadrática[1], nessa perspectiva, é provável que tenha sido realizada a reificação, ou seja, a utilização do conceito de congruência em outra situação que não era a de congruência.

---

[1] A lei de Gauss sobre a reciprocidade quadrática fornece um algoritmo que permite se a quadrado módulo p onde a é um inteiro e p um número primo.

4. Considerações Finais

Texto Como podemos notar a construção do conhecimento científico, e no caso deste estudo, do conceito de Grupos, é não linear e ocorre de forma cíclica, como defendido tanto por Bachalerd como por Sfard e evidenciado em nossas análises.

A abordagem descontextualizada que encontramos nos livros didáticos que tratam do assunto não contempla aspectos históricos essenciais que estão por traz do conceito de Grupos. Dessa forma a aprendizagem foca no processo estático do conceito, ou seja, na concepção estrutural. No entanto, notamos que do ponto de vista histórico este desenvolvimento surgiu de uma situação operacional, passando por todas as fases de interiorização, condensação e reificação até chegar a um contexto estrutural.

Acreditamos que o professor ao fazer uma análise histórica epistemológica do conceito de Grupos, evidenciando os processos de interiorização e condensação, contribui dando significado a aprendizagem deste conteúdo, permitindo assim que os estudantes avancem nos níveis de pensamento e cheguem a uma reificação do conteúdo abordado.

5. Referências

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

_______. **O novo espírito científico.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1995.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológico do conceito de grupo.** 1ª Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DOMINGUES, H. H. e IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking process. In: **Advanced Mathematical Thinking.** Edited by David Tall. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo: EDUSP, 1970.

KATZ, V.J. **A history of mathematics:** an introduction. 2.ed. London: Addison Wesley, 1998.

MILIES, F. C. P. Uma breve introdução à história da teoria de grupos. In: **Atas da XII Escola de Álgebra**, Sociedade Brasileira de Matemática, Minas Gerais, 1992.

PIAGET, J. **A epistemologia genética; sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de psicologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides for the same coin. **Educational Studies in Mathematics**. Vol 22, pp. 1-36, 1991.