CALCULANDO ÁREAS E VOLUMES: DO MÉTODO DE EXAUSTÃO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Juan Carlo da Cruz Silva
IFRN – Campus Canguaretama,
juan.cruz@ifrn.edu.br

Francisco do Nascimento Lima
IFRN – Campus Canguaretama,
francisco.lima@ifrn.edu.br

Cristiane Carvalho Bezerra de Lima
Secretária Estadual de Educação - SEE - PB
profacristiane@yahoo.com.br

Resumo:
O princípio de Cavalieri é uma ferramenta bastante utilizada durante o Ensino Médio para demonstrar as fórmulas de cálculo de volumes dos sólidos, contudo não há utilização do princípio com relação ao cálculo de áreas. Neste trabalho demonstraremos como obter as fórmulas para calcular áreas e volumes utilizando o princípio de Cavalieri e um método de exaustão diferente do grego, desenvolvido por Kepler (1571-1630). Compreendemos que conhecer métodos desenvolvidos ao longo da história para se demonstrar o cálculo de áreas e volumes ampliam as possibilidades dos professores de utilizar a história como recurso didático, bem como tomar decisões mais apropriadas para a prática em sala. Além disso, os métodos descritos servem para introdução de noções, competências e habilidades necessárias à compreensão do cálculo integral. Assim, discorremos sobre os contextos históricos onde se desenvolveram os métodos e, em seguida os apresentamos na linguagem atual, como técnicas para ensinar Geometria Espacial.

Palavras-chave: Calculo de áreas; Cálculo de Volumes; História da Matemática; Método da Exaustão; Princípio de Cavalieri.

1. Introdução

Os problemas de cálculo de áreas e volumes estão, provavelmente, entre os mais antigos e comuns da História da Matemática, pois têm imediata aplicação nos contextos de sociedade construídas pela humanidade. Contudo, no processo educativo escolar, por diversas vezes limitamos esses problemas a situações tão simplistas que não surgem no cotidiano social. Diversas justificativas são dadas para esse fato, tais como a necessidade de transposição didática ou a distinção entre a matemática escolar e a matemática prática.

Acreditamos que, com o recurso à História da Matemática, no tocante a esses problemas de áreas e volumes, podemos ter essa situação amenizada, levando o processo de ensino-aprendizagem a situações mais concretas e, fazendo com que o conhecimento desenvolvido ao longo da história auxilie na atribuição de significado e no desenvolvimento de habilidades e métodos por parte dos atores da educação em sala de aula.

Assim, nosso trabalho apresenta métodos desenvolvidos ao longo da história que são úteis para a resolução e compreensão dos problemas de área e volumes convencionais e não-convencionais. Discutiremos, ao longo deste artigo, o contexto histórico no qual se desenvolvem tais métodos, a utilidade do uso da História da Matemática no ensino à luz das funções atribuídas a ela e das vantagens e desvantagens para os professores que a utilizam e, por fim, apresentaremos os métodos e suas potencialidades, inclusive para ampliação do conhecimento e construção das fórmulas de áreas e volumes aquém do que é usualmente apresentado nos livros didáticos do ensino médio.

2. Contexto histórico

A matemática, em especial a geometria, vem fascinando os povos desde a Antiguidade. No antigo Egito e na Babilônia se utilizava da geometria para resolução dos problemas de forma prática, ou seja, problemas cujas demandas encontravam-se no cotidiano da sociedade, alguns dos quais se encontram no papiro de Rhind (documento histórico cujo nome foi dado em homenagem ao escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, e que havia sido reescrito em 1650 a.C pelo escriba Ahmes). Segundo Katz (2009), os escribas egípcios já sabiam calcular as áreas dos retângulos, triângulos e trapézios da mesma forma que calculamos atualmente e já tinham uma aproximação de = 3,16.

Enquanto que no Egito e na Babilônia se utilizava da geometria de forma prática, na Grécia antiga ocorreram algumas mudanças importantes como o tratamento axiomático iniciado com Tales de Mileto e com as demonstrações creditadas a Pitágoras de Samos. Outro nome em destaque na História da Matemática é Euclides que escreveu os Elementos e organizou toda a geometria que havia em sua época. Sua obra fez com que grande parte das obras anteriores aos Elementos fossem esquecidas. Agora, o considerado maior matemático da antiguidade é Arquimedes (225 a.C.) que demonstrou como calcular a área do círculo utilizando método de exaustão em que fazia uso da dupla redução ao absurdo.

ISSN 2178-034X

Kepler é outro que, além de Arquimedes, também recebe este título de precursor do cálculo, mas só veio aparecer quase 2000 anos depois, e segundo Boyer e Merzbach (2012), junto com Galileu, utilizou um método semelhante ao método da exaustão, pois para eles não interessavam o rigor nas demonstrações matemáticas e sim sua aplicabilidade.

Outro destaque é Bonaventura Cavalieri, que nasceu em Milão, em 1598, e foi aluno de Galileu. Muito versátil, deixou algumas obras na matemática, óptica e astronomia. Porém, o que realmente lhe trouxe visibilidade foi o livro *Geometria Indivisibilibus* publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Ele considerava que uma porção plana pode ser formada por uma infinidade de cordas paralelas e um sólido pode ser formado por uma infinidade de secções planas paralelas. Essas ideias deram origem aos chamados princípios de Cavalieri.

Segundo Eves (2011, p. 426) "os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno". Depois da aceitação desses princípios, a matemática pôde resolver muitos problemas de mensuração que, até então, eram recorridos a técnicas avançadas de cálculo para a sua resolução. Contudo, segundo Carvalho e Roque (2012), baseado nas ideias de Cavalieri, porém com algumas modificações, Fermat e Pascal, para calcular áreas sob uma curva, imaginavam infinitos retângulos ao invés de cordas, facilitando o cálculo das áreas as quais eles sabiam sua equação. Este método diferencia do método da exaustão por utilizar uma prova direta, enquanto que na exaustão de Arquimedes mostrava que duas áreas eram iguais usando o raciocínio por absurdo.

3. A História da Matemática: um recurso pedagógico aos professores

Atualmente já se consolidou na área da Educação Matemática a consciência que o uso da história da Matemática no processo de ensino-aprendizagem é uma poderosa ferramenta para desenvolver nos discentes as mais diversas habilidades e competências para uma compreensão eficaz e ampla da Matemática. Diversos trabalhos de pesquisas consolidam esse entendimento. Gutierre (2004), tomando como fio condutor a tese de Antônio Miguel (1993), descreve e analisa doze funções atribuídas ao uso da história no ensino, são elas: história com fonte de motivação, história como fonte de seleção de problemas, história como fonte de objetivos para o ensino, história como fonte de métodos de ensino, história como instrumento de desmistificação da matemática, história como fonte de formalização de conceitos, história como instrumento de constituição do pensamento, história como instrumento promotor de atitudes, história como instrumento promotor de aprendizagem significativa e história como instrumento de resgate da identidade cultural.

Nossa proposta compreende-se, fundamentalmente e não de modo excludente, nas funções da história como fonte de métodos adequados ao ensino, como instrumento de formalização de conceitos, de desmitificação da matemática e como instrumento de promoção da aprendizagem significativa. De fato, compreendemos que, no tocante aos métodos usuais de demonstração/justificativa das chamadas fórmulas de áreas e volumes comumente difundidos nos livros didáticos do Ensino Médio, uma análise mais aprofundada através de métodos distintos e mais adequados de obtenção dessas fórmulas pode não apenas facilitar a compreensão, mas despertar o interesse dos discentes no fazer matemático, introduzindo-os no processo de desmistificação que torna a matemática uma prática do fazer humano. Além disso, colocar os discentes no processo de agir para demonstrar/justificar conceitos de modo mais adequado e compreensivo para eles consolida o processo cognitivo de formalização dos conceitos em questão, trazendo-os a atribuição de um significado a esses conceitos, mesmo que não diretamente ligados ao seu contexto social.

Brito, Neves e Martins (2004) apresentam as possibilidades que a história da matemática traz aos professores, quando esses têm contato aprofundado com o conhecimento do campo histórico. Os autores apontam possibilidades de reflexões na orientação das escolhas metodológicas e didáticas; nos fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos; nas possibilidades de articulação do seu trabalho pedagógico com outras áreas de conhecimentos; sobre a diversidade cultural da produção do conhecimento; e sobre as potencialidades e limitações do recurso à história da matemática para o ensino.

Assim, partindo do pressuposto, apresentado pelos autores, de que o conhecimento histórico possibilita melhor orientação das escolhas metodológicas e didáticas, acreditamos que é de fundamental importância que os docentes de Matemática conheçam vias distintas e desenvolvidas ao da história para resolução de problemas de área e volumes. Portanto queremos evidenciar os Métodos de Exaustão (grego antigo e o desenvolvido por Kepler no final do século XVI), além do Princípio de Cavalieri como possíveis para o processo de ensino de áreas e volumes no Ensino Médio. Acreditamos que, difundindo tais conhecimentos ampliamos o arcabouço dos profissionais para o ensino de Matemática mais efetivo e significativo.

4. Os Métodos de Exaustão e o Princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e volumes

Nossa proposta é mostrar algumas opções de se trabalhar em sala de aula demonstrando as fórmulas de algumas áreas de algumas figuras não convencionais para o Ensino Médio e volumes de alguns sólidos, como pirâmide e esfera. Nosso tratamento terá um contexto histórico ao qual nos basearemos, utilizando fórmulas de indivisíveis proposto por Cavalieri e os indivisíveis utilizado por Kepler, Fermat e Pascal, por exemplo. Para algumas demonstrações teremos que fazer uso de resultados conhecidos que, atualmente são demonstrados pelo Princípio da Indução Matemática.

Segundo Eves (2011), credita-se que os babilônios já sabiam calcular $1+2+3+...+n=\frac{n\ (n+1)}{2}$ e que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\ (n+1)(2n+1)}{6}$. Tais fórmulas nos serão bastante úteis, já que são bastante usadas para calcular de algumas áreas e volumes.

Vejamos como mostrar que volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e altura, utilizando o princípio de Cavalieri.

Para a sua prova, temos que demonstrar que a razão entre as áreas das secções transversais paralelas à base e a base da pirâmide de base triangular é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. Para isto, considere uma pirâmide de base triangular ABC, vértice V e altura H, e um plano que corta paralelamente a base da pirâmide a uma distância h de V, formando a pirâmide $A'B'C'V$. Sejam L e l as alturas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente, com relação as bases AB e $A'B'$. Daí, como podemos observar na figura 1, abaixo, fica fácil ver que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=k$ $\overline{AB}=k\ \overline{A'B'}$, por outro lado, temos que

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$ $\overline{AB} = k\ \overline{A'B'}$, o que nos permite dizer que $\frac{Área\ (ABC)}{Área\ (A'B'C')} = \frac{\frac{\overline{AB}\ L}{2}}{\frac{\overline{A'B'}\ l}{2}}$, ou seja,

$\frac{Área\ (ABC)}{Área\ (A'B'C')} = k^2$. Como $\frac{H}{h} = k$, então $\frac{Área\ (ABC)}{Área\ (A'B'C')} = \frac{H}{h}^{2}$.

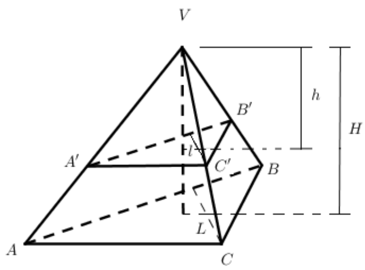

Figura 1.Elaborada pelo autor

Agora, vamos mostrar que a razão entre as áreas da secção transversal paralela à base, e da base de uma pirâmide qualquer, é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

Para isto, considere uma pirâmide de base poligonal, $A_1 A_2 ... A_n$, de n lados, de vértice V e altura H, e um plano que corta paralelamente a base da pirâmide a uma distância h de V, formando, assim, uma nova pirâmide de base $A_1' A_2' ... A_n'$. Daí, formamos n 2 pirâmides de bases triangulares, $A_{i\ 2} A_{i\ 1} ... A_i$. Como $\frac{H}{h}^{2} = \frac{Área\ (A_{i\ 2} A_{i\ 1} A_i)}{Área\ (A'_{i\ 2}\ A'_{i\ 1}\ A'_i)}$, de acordo com as propriedades das potências $\frac{H}{h}^{2} = \frac{Área\ (A_1 A_2 ... A_n)}{Área\ (A'_1\ A'_2\ A'_n)}$.

Agora, vamos mostrar que pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm mesmo volume.

Considere duas pirâmides de mesma base triangular ABC, de vértices V e V' e altura H. Traçando um plano que corta paralelamente as duas pirâmides a uma distância h de V e V', obtendo, assim, as bases $A'B'C'$ e $A''B''C''$. Logo, temos que:

$$\frac{Área\ (ABC)}{Área\ (A'B'C')} = \frac{H}{h}^{2} \text{ e } \frac{Área\ (ABC)}{Área\ (A''B''C'')} = \frac{H}{h}^{2}$$

Portanto, $\acute{A}rea\ (A'B'C') = \acute{A}rea\ (A''B''C'')$

Observe que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Para isto, seja dado um prisma de base triangular de vértices A, B, C, A', B' e C', como ilustra a figura abaixo.

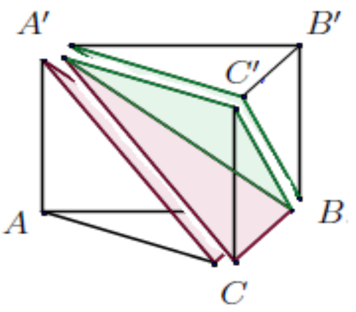

Figura 2: Elaborada pelo autor

Dividindo o prisma em três pirâmides obtemos as seguintes $ABCA'$, $A'B'C'B$ e $A'C'BC$, em que $ABCA'$, $A'B'C'B$ possuem o mesmo volume, já que as áreas das bases são iguais e possuem o mesmo altura. E, como $BCC'B'$ é um paralelogramo e $C'B$ é a diagonal, então $\acute{a}rea\ (C'BC) = \acute{a}rea\ (C'BB')$, logo possuem o mesmo volume, já que possuem a mesma altura.

Agora, finalmente, considere uma pirâmide de base poligonal, $A_1A_2...A_n$, de n lados, de vértice V e altura H. Assim, podemos decompor a pirâmides em pirâmides de bases triangulares de vértice V e altura H. Logo, pela proposição 3, temos que o volume da pirâmide é dado por

$$Volume = \frac{\acute{A}rea\ (A_1A_2A_3)\ \ H}{3} + \frac{\acute{A}rea\ (A_2A_3A_4)\ \ H}{3} + .. + \frac{\acute{A}rea\ (A_{n-2}A_{n-1}A_n)\ \ H}{3}$$

Colocando em evidência $\frac{H}{3}$, temos que a soma das áreas é igual a área da base da pirâmide. Portanto, a o volume da pirâmide é dada pela fórmula $Volume = \frac{\acute{A}rea\ (A_1A_2...A_n)\ \ H}{3}$.

Para demonstrar a fórmula do cálculo do volume de um cone de raio R e altura H, por exemplo, fica bastante simples, pois basta considerar uma pirâmide de base retangular de comprimento   , largura R e altura H.

Além da demonstração do cálculo de volume há também o cálculo de áreas utilizando o princípio. Por exemplo, vamos demonstrar em sala como calcular a área da elipse e a área da parábola. Cálculo este que também faremos utilizando o método semelhante ao método da exaustão, que fora utilizado por Kepler. Agora, para demonstrar por este método, temos que fazer uso de fórmulas que Segundo Eves (2011), já era utilizado 300 a.C., que é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, e o é a soma dos n primeiros números quadrados, dados por $\overset{n}{\underset{k=1}{}} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vejamos como demonstrar o fórmula do cálculo do volume de uma pirâmide.

Agora, para demonstrar que o volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e altura, um outro métodos de indivisíveis, muito semelhante, segundo alguns autores, ao método da exaustão, diferenciando do método que Arquimedes usava, já que para provar que sua construção estava correta ele usava a dupla redução ao absurdo.

O que faremos para demonstrar esta proposição é algo semelhante ao usado por Kepler quando demonstra a área do círculo. Para isto, considere uma pirâmide qualquer de base A e altura H.

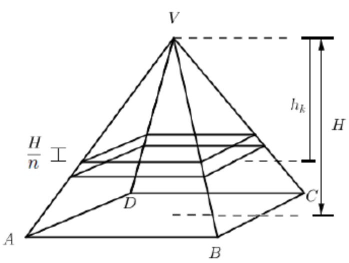

Figura 3: Elaborada pelo autor

Dividindo-a em n partes iguais, teremos n 1 troncos de pirâmides, os quais, para n suficientemente grande, terá sou volume tendendo ao volume de prismas de mesma base e mesma altura, como podemos observar na figura abaixo.

ISSN 2178-034X

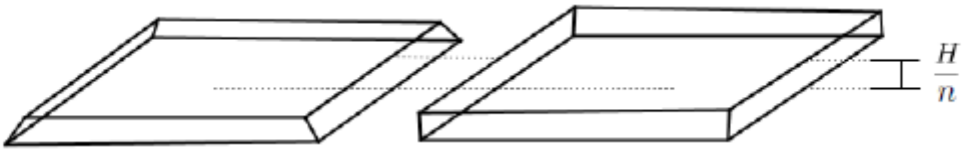

Figura 4: Elaborada pelo autor

Considere esses troncos como sendo prismas de mesma base e mesma altura. Seja k um número inteiro positivo, em que k representa a quantidade de troncos acima do tronco de base A_k da pirâmide de altura $\frac{H}{n}$, o volume de $V_k = \frac{A_k \frac{H}{n}}{3}$. Sabemos que a altura da pirâmide de base $A_k = k\frac{H}{n}$, então $\frac{A_k}{A} = \left(\frac{k\frac{H}{n}}{H}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, ou seja, $A_k = A\left(\frac{k}{n}\right)^2$. Daí,

$$V_k = A\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{H}{n} = A\ H^2\ \frac{k^2}{n^3}.$$

Sendo assim, o volume da pirâmide será

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k = \frac{A\ H^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{A\ H^2}{n^3}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{A\ H^2}{\cancel{n}^3}\ \frac{\cancel{n}^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

Portanto, para n suficientemente grande, temos $V = \frac{A\ H^2}{3}$.

Será mostrado que na esfera a demonstração será mais simples, assim como a demonstração de áreas da parábola, elipse e, além disso, ficará bastante simples a demonstração da área da lateral do cone e da esfera.

Faremos agora uma comparação entre os dois métodos para o cálculo de áreas. Vamos mostrar que a área de uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é igual a ab, utilizando o processo de indivisíveis que era usado por Fermat. Para isto, vamos considerar um quarto da elipse em que os eixos x e y são não negativos e $a > b$. Isolando y na equação obtemos

$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Dividindo a em n partes iguais, formando, assim, n retângulos de base igual a $\frac{a}{n}$ e altura igual a $f\left(k\frac{a}{n}\right) = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$, como ilustra a figura 1, em que k representa o k-ésimo retângulo.

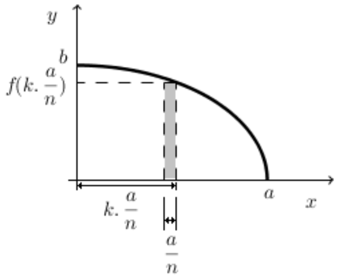

Figura 5: Elaborada pelo autor

Sendo assim, a área do retângulo k, A_k, é dada por $A_k = \frac{a}{n} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$, ou seja, $A_k = a \cdot b \cdot \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$. Logo, a área da elipse será 4 vezes o somatório de todos os retângulos, ou seja, a área da elipse será

$$A_e = 4\sum_{k=1}^{n} A_k = 4 \cdot a \cdot b \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}. \qquad (1)$$

Por outro lado, se considerarmos uma circunferência de equação igual a $x^2 + y^2 = a^2$ e isolarmos a variável y teremos $y = g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, já que vamos considerar o primeiro quadrante da circunferência. Agora, dividindo a em n partes iguais, formaremos n retângulos de base $\frac{a}{n}$ e altura igual a $f\left(k\frac{a}{n}\right) = a\frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n}$. Sendo assim, a área do círculo será dada por : $A_c = 4\sum_{k=1}^{n} B_k = 4 \cdot a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.

Como sabemos que a área do círculo é dada por $A_c = \pi a^2$, sendo assim, $4 \cdot a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} = \pi a^2$, daí temos que

ISSN 2178-034X

$$= 4 \ {}_{k=1}^{\ n} \frac{\sqrt{n^2 \quad k^2}}{n^2} \ . \qquad (2)$$

Portanto, substituindo (2) em (1), podemos afirmar que a área da elipse, de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, é $A_e = \quad ab$.

Este mesmo exemplo usando o princípio de Cavalieri aparenta ser mais simples. Contudo, precisamos do auxílio de uma circunferência de raio a. Assim termos a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$, com $a > b$, com o mesmo centro, como mostra a figura abaixo.

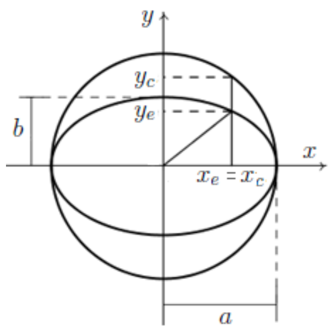

Figura 6: Elaborada pelo autor.

Observe que isolando o y da circunferência, que chamaremos de y_c, obteremos $y_c = \sqrt{a^2 \quad x^2}$ e isolando o y da elipse, que chamaremos de y_e obteremos $y_e = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 \quad x^2}$

Assim, substituindo y_c em y_e obtemos $y_e = \frac{b}{a} y_c$. Como a área da elipse é a soma de todos os seguimentos y_e e a área do círculo é a soma de todos os y_c. Sabendo que $A_c = \quad a^2$, então $A_e = \frac{b}{a} \ A_c$. Portanto $A_e = \quad ab$.

5. Considerações Finais

Diante do exposto, percebemos que existem outros métodos, construídos ao longo da História da Matemática, possíveis de serem utilizados no processo educativo escolar para o desenvolvimento do conhecimento de áreas e volumes. Estes métodos são potencialmente mais úteis, pois favorecem a resolução de problemas não-convencionais, ou seja, problemas menos simplistas e mais próximos a realidade.

Reforçamos a nossa certeza que, o conhecimento histórico amplia as possibilidades para que o professor possa melhor exercer sua prática, auxiliando-o no processo de mediar atribuição de significado, por parte do aluno, ao conhecimento matemático e as habilidades e competências do fazer matemática.

6. Referências

BOYER, C. B., MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRITO, A.J.; NEVES, L.S.; MARTINS, A.F.P. A história da ciência e da Matemática na formação de professores. In: NUNEZ, I.B.; RAMALHO, B.L. (Orgs) **Fundamentos do Ensino-aprendizagem das Ciências Naturais e da Matemática: O novo ensino médio**. Porto Alegre: Sulina, 2004.

CARVALHO, J. B. P., ROQUE, T., **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

GUTIERRE, L. S. História da Matemática e suas potencialidades pedagógicas. In: FOSSA, J. A. (Org) **Presenças Matemáticas**. Natal, RN: EDUFRN, 2004.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: An Introduction.** 3 Ed. Boston, MA: Pearson Education, 2009.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. Faculdade de Educação. Unicamp. Campinas, 1993. (Tese de Doutorado).