CONCEPÇÕES DE ESTUDANTES DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE DEMONSTRAÇÕES E PROVAS

Marta Élid Amorim
Universidade Federal de Sergipe
martaelid@ufs.br

Ruy César Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo
rpietropaolo@gmail.com

Resumo:
Apresenta-se, neste artigo, uma interpretação de concepções explicitadas por um grupo de 10 estudantes do último ano da licenciatura em Matemática de uma universidade federal brasileira, sobre o papel das demonstrações e provas na formação de professores. Os dados examinados foram coletados pela aplicação de questionários, envolvendo questões relacionadas a provas presentes nos currículos da Educação Básica. Neste trabalho, examinamos apenas os dados referente ao Teorema de Pitágoras. Para a análise, utilizou-se as ideias de Ball, Thames e Phelps (2008), no que se refere ao Conhecimento do Conteúdo Especializado, e a noção de imagem conceitual definida por Tall e Vinner (1981). Apesar de os licenciandos já terem sido aprovados em disciplinas que exigem demonstrações rigorosas, quando solicitados não conseguem estabelecer relações ou construir uma prova com conteúdos já conhecidos. Uma possível explicação, é que as provas estudadas no curso são vistas de maneira isolada, favorecendo apenas à reprodução desses conhecimentos.

Palavras-chave: Demonstrações e Provas; Conhecimento do Conteúdo Especializado; Teorema de Pitágoras.

1. Introdução

O texto que apresentamos trata de um recorte de uma pesquisa desenvolvida cujo o objetivo foi investigar os conhecimentos necessários ao professor sob os pontos de vista do conteúdo, didático e curricular, para ensinar noções e procedimentos concernentes às demonstrações na Educação Básica.

Nosso estudo foi realizado com a colaboração de um grupo de 10 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de um *campus* de uma universidade pública federal do estado de Sergipe. Esse grupo era composto por jovens dispostos a atuar como professores de Matemática. A idade média desses futuros professores é 22,5 anos e são, em sua maioria, oriundos de escola pública. Todos já haviam realizado algum tipo de atividade no Ensino Fundamental, na disciplina de Estágio Supervisionado ou em programas como o de iniciação à docência (Pibid) ou o de consolidação das licenciaturas (Prodocência), entre outros.

Cabe ressaltar que, embora o tema *Conhecimentos necessários ao professor para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica* seja bastante amplo, optamos em apresentar aqui as concepções iniciais dos licenciandos referentes ao Teorema de Pitágoras, conquanto tivéssemos investigado, também, as concepções sobre provas envolvendo tópicos de álgebra, notadamente Equações Diofantinas.

As análises foram feitas sob a perspectiva do *Conhecimento do professor para o ensino*, segundo as categorias de Ball, Thames e Phelps (2008), mas neste trabalho apresentaremos os resultados relativos apenas a categoria *Conhecimento do Conteúdo Especializado*, além de discutir a ampliação da *imagem conceitual* do grupo, segundo Tall e Vinner (1981), sobre provas. Na fundamentação teórica apresentamos brevemente esses conceitos.

Os dados analisados nesse artigo são referentes ao instrumento diagnóstico, que teve com objetivo de identificar as concepções dos estudantes participantes a respeito do processo de ensino e aprendizagem de noções relativas à demonstração do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental. Vale salientar que, após esse diagnóstico, foi realizado um processo formativo de modo a atender aos interesses e demandas do grupo, com vistas a ampliar a base de conhecimentos e a imagem conceitual relativo ao tema.

Julgamos que essa pesquisa seja relevante, sobretudo porque a inclusão de um trabalho com argumentações e prova a partir do Ensino Fundamental vem ganhando força nos currículos brasileiros, da mesma forma que em outros países como Inglaterra e França, por exemplo. Pietropaolo (2005) destaca,

> Há uma tendência que vem ganhando força em alguns currículos: a inclusão de um trabalho com argumentações e provas já a partir do Ensino Fundamental. Apesar de não haver um absoluto consenso a esse respeito, pois as concepções sobre os significados desse trabalho não são exatamente as mesmas, tais recomendações estão razoavelmente explícitas nos currículos de alguns países. (p. 98)

ISSN 2178-034X

Convém também destacar a posição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM em relação a esse processo de formação, segundo as legislações decorrentes da LDB/96: posicionou-se contrariamente a alguns desses documentos, por considerar que na prática não havia garantia de superação de problemas já identificados por educadores e pesquisadores da formação de professores de Matemática, como os que seguem.

> - O perfil de professor de Matemática exigido hoje: deve ser um profissional com grande competência para formular questões que estimulem a reflexão de seus alunos, além de ser criativo para criar ambientes e situações de aprendizagem matematicamente ricos.
>
> - A construção da identidade própria dos cursos: a identidade dos cursos deve ser construída com base em elementos constitutivos do processo de construção do conhecimento profissional como: vinculação da formação acadêmica com a prática profissional, ênfase no conhecimento didático-pedagógico da matemática a ser ensinada e promover, durante a licenciatura, práticas investigativas que promovam a articulação entre teoria e prática.
>
> - A seleção de conteúdos e sua abordagem: os cursos de licenciatura devem adotar uma perspectiva que inclui a preparação para a docência, o que compreende o tratamento especial aos conteúdos matemáticos da educação básica, além de conteúdos ampliadores do conhecimento matemático, como: os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, da Análise Matemática, da Álgebra, da Geometria, da Estatística, da Análise Combinatória, da Probabilidade etc., que devem ser selecionados de forma a possibilitar, ao professor em formação, conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática (SBEM, 2003, p. 4-10).

Consideramos que essas discussões apresentadas pela SBEM (2003) concebem os cursos de Licenciatura em Matemática na perspectiva de rompimento da dicotomia entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos específicos, configurando a não dissociabilidade entre teoria e prática. Ou seja, os professores seriam formados em uma perspectiva da Educação Matemática. Essa proposta da SBEM considera que os estudantes, futuros professores, precisariam experimentar, discutir e modelar situações semelhantes àquelas que os seus futuros educandos deveriam vivenciar.

2. Fundamentação Teórica

Para ensinar Matemática, compartilhamos do pressuposto que todos os professores deveriam saber justificar os procedimentos que ensinam, ter formas de prover significados aos tópicos estudados e ter explicações e ilustrações para os conceitos que abordam, entre outros. Para Ball, Thames e Phelps (2008) esses conhecimentos fazem parte da categoria denominada *Conhecimento do Conteúdo Especializado*. Esse domínio envolve o conhecimento da matemática descompactada, ou seja, aquela que revela a razão de ser dos objetos estudados, e não somente a síntese das ideias sobre os conteúdos que os alunos irão aprender. Desse modo, o professor necessita ter habilidades para falar sobre e explicitar como a linguagem matemática é usada, como escolher e usar representações matemáticas de forma efetiva e como explicar e justificar conceitos e ideias matemáticas. Assim, o conhecimento para o ensino vai além de uma sólida compreensão do conteúdo.

Deveria fazer parte do Conhecimento Matemático Especializado do professor que irá ensinar o Teorema de Pitágoras, saber que existem várias demonstrações, conhecer algumas delas, não no sentido de decorar todos os passos, mas sim os conceitos e propriedades envolvidas e a ideia geral do que e como fazer. Esses conhecimentos favorecem a proposição de atividades que podem contribuir para o aprendizado do aluno, alargar os argumentos do professor e prever erros dos alunos, identificando prováveis causas.

Para a análise das respostas dos licenciandos aos questionários, além da categoria apresentada por Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos também a noção de imagem conceitual, definida por Tall e Vinner (1981). Esses autores consideram essa noção como estrutura cognitiva que se desenvolve na mente de uma pessoa em relação a um determinado conceito matemático, a partir de experiências e estudos que envolvem esse conceito. “Essa imagem envolve impressões, representações visuais, exemplos, aplicações e descrições verbais relativas a propriedades e processos concernentes àquele conceito” (CAMPOS e PIETROPAOLO, 2013, p. 65).

Assim, ter imagem conceitual de um tema não é apenas ter domínio das noções envolvidas mas, também, perceber as relações entre elas. Desse modo, entendemos que uma imagem conceitual rica dos licenciandos, relativa a provas, resultante possivelmente de experiências vivenciadas ao longo do seu curso de graduação e, talvez, como estudantes da educação básica, pode favorecer sobremaneira aos seus futuros alunos a construção de uma imagem conceitual igualmente rica sobre esse tema.

3. Discussão e Análise dos dados

A fim de identificar os conhecimentos dos licenciandos em relação ao enunciado e demonstração do Teorema de Pitágoras, propusemos a seguinte questão:

Você sabe demonstrar o teorema de Pitágoras? Caso afirmativo, apresente uma demonstração.

As respostas indicaram que os licenciandos pouco sabem sobre demonstrações e estratégias para ensinar teoremas que estão presentes nos currículos do Ensino Fundamental. Provavelmente os licenciandos não estudaram, ao longo do Ensino Fundamental e Médio, conteúdos que permitissem a resolução de questões envolvendo geometria. Dessa forma, esse resultado pode ser reflexo do abandono que o ensino de geometria vem sofrendo nas escolas de Educação Básica ao longo das últimas décadas no Brasil. Para Pavanello (1993),

> A ausência do ensino de geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. (p. 16)

O licenciando (J) apresenta como demonstração uma verificação empírica, utilizando um caso particular e a partir disso generaliza para todo triângulo retângulo.

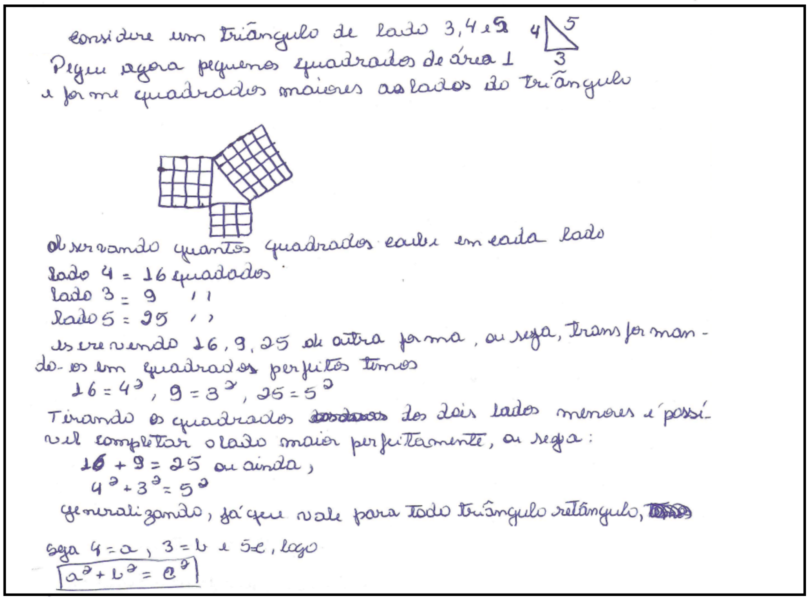

considere um triângulo de lado 3, 4 e 5
Pegue agora pequenos quadrados de área 1
e forme quadrados maiores aos lados do triângulo
observando quantos quadrados cabe em cada lado
lado 4 = 16 quadrados
lado 3 = 9 ''
lado 5 = 25 ''
escrevendo 16, 9, 25 de outra forma, ou seja, transformando-os em quadrados perfeitos temos
$16 = 4^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$
Tirando os quadrados dos dois lados menores é possível completar o lado maior perfeitamente, ou seja:
$16 + 9 = 25$ ou ainda,
$4^2 + 3^2 = 5^2$
generalizando, já que vale para todo triângulo retângulo,
seja $4 = a$, $3 = b$ e $5 = c$, logo
$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Figura 1 – Protocolo Lic. (J)

O licenciando (J) não levou em conta que os lados do triângulo poderiam ser incomensuráveis, e que nesse caso essa verificação não seria válida, ou seja, não é possível generalizar partindo dessa verificação. Provavelmente o licenciando (J) apresentaria esse argumento como justificativa ou até mesmo como demonstração do Teorema de Pitágoras para os seus alunos, quando professor da Educação Básica.

Na resposta apresentada por ele está embutida a ideia de que sempre irá existir uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em cada lado do triângulo. Resultados apresentados por Corbo (2005) em sua pesquisa, que teve por objetivo “refletir sobre as possibilidades de abordagem da noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, pela exploração das características e propriedades do retângulo áureo”, indicam que licenciandos em Matemática no último ano de um curso não dominavam noções importantes relacionadas à incomensurabilidade de grandezas.

Posteriormente Corbo (2012), que desenvolveu uma pesquisa com um grupo de professores que atuam no Ensino Fundamental II e Médio, mostra que “o conceito de incomensurabilidade de grandezas e a relação entre números irracionais e grandezas incomensuráveis se revelam ausentes do repertório do grupo de professores” (p. 254).

Provavelmente, o licenciando (J) acredita que todos os triângulos retângulos têm as mesmas características que o caso particular de lados 3, 4 e 5, incluindo assim a comensurabilidade e, dessa forma, a possibilidade de pegar quadradinhos de mesma área para cobrir os quadrados construídos a partir dos catetos e da hipotenusa. No entanto, cabe ressaltar que esse licenciando conseguiu fazer uma interpretação geométrica para o teorema.

Convém destacar que nas produções apresentadas pelo grupo de licenciandos, sujeitos da nossa pesquisa, o uso de argumentos que permitissem a discussão sobre a incomensurabilidade de segmentos não foi nada frequente. A prática mais comum foi erroneamente o uso da tese como argumento na tentativa de demonstrar o teorema de Pitágoras. Esse fato pode ser observado nos protocolos que seguem.

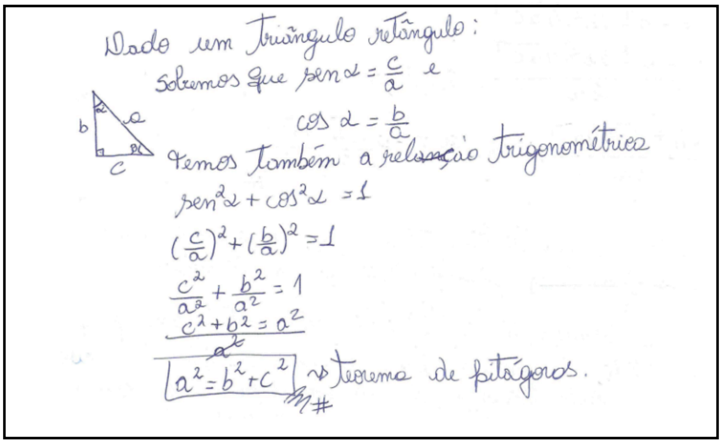
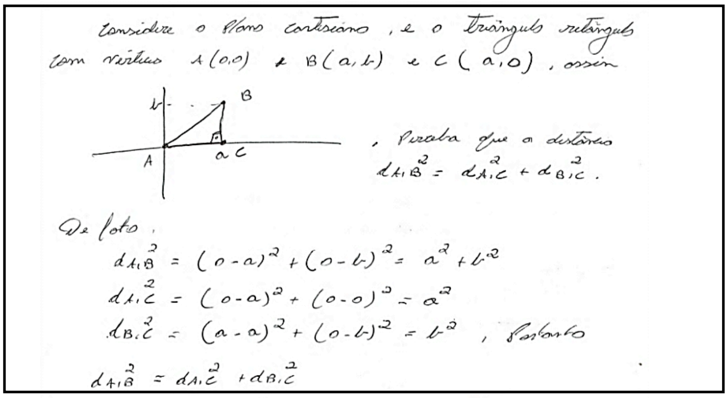


Figura 2 – Protocolo Lic. (F)

ISSN 2178-034X



Considere o plano cartesiano, e o triângulo retângulo com vértices $A(0,0)$ e $B(a,b)$ e $C(a,0)$, assim

, Prova que a distância $d_{A,B}^2 = d_{A,C}^2 + d_{B,C}^2$.

De fato,

$d_{A,B}^2 = (0-a)^2+(0-b)^2 = a^2+b^2$

$d_{A,C}^2 = (0-a)^2+(0-0)^2 = a^2$

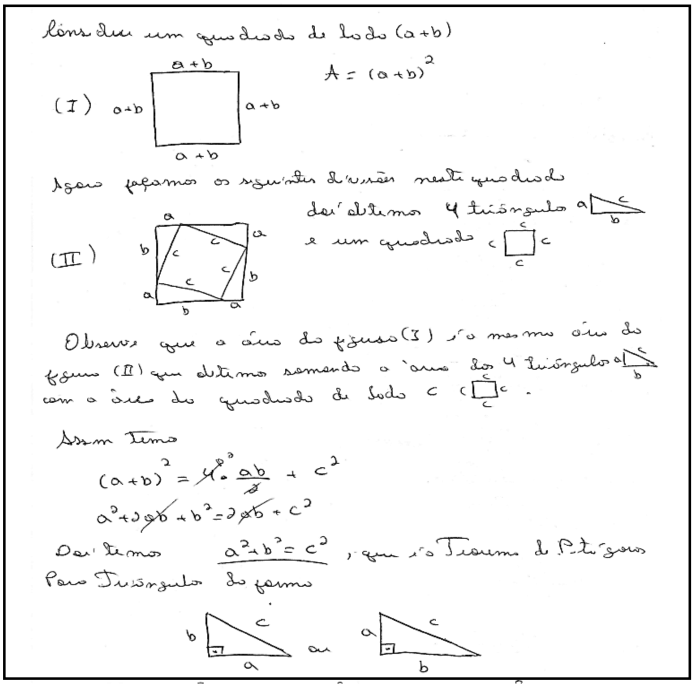
$d_{B,C}^2 = (a-a)^2+(0-b)^2 = b^2$, portanto

$d_{A,B}^2 = d_{A,C}^2 + d_{B,C}^2$

Figura 3 – Protocolo Lic. (G)

O licenciando (F) utilizou a identidade trigonométrica e o licenciando (G) a fórmula da distância. Ambos usaram variações do Teorema de Pitágoras no corpo da demonstração, ou seja, fizeram uso da tese para "demonstrar" o resultado. É importante destacar que o licenciando (E) utilizou o mesmo argumento do licenciando (G). Porém, nos parece que a falta de conhecimento por parte dos licenciandos estava em não saberem que essas fórmulas são decorrentes do Teorema de Pitágoras, e não do fato de acreditarem que pudessem usar a tese para demonstrar o teorema.

Os licenciandos (B) e (I) foram os que apresentaram produções mais próximas de uma demonstração formal, porém afirmaram ter subdividido um quadrado maior em 4 triângulos congruentes e um quadrado menor. Segue, com exemplo, o protocolo do licenciando (B).



Considere um quadrado de lado $(a+b)$

(I) $A = (a+b)^2$

Agora façamos as seguintes divisões neste quadrado

(II) daí obtemos 4 triângulos e um quadrado

Observe que a área da figura (I) é a mesma área da figura (II) que obtemos somando a área dos 4 triângulos com a área do quadrado de lado c.

Assim temos

$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$

$a^2+\cancel{2ab}+b^2 = \cancel{2ab}+c^2$

Daí temos $a^2+b^2=c^2$, que é o Teorema de Pitágoras

Para triângulos da forma

ou

Figura 4 – Protocolo Lic. (B)

Assim como nas provas apresentadas por Cabassut (2005), retiradas de livros didáticos da França e Alemanha, os licenciandos utilizaram o argumento de que o quadrilátero construído da subdivisão do quadrado de lado (a+b) é um quadrado, sem se certificarem desse fato.

A seguir, organizamos em um o quadro síntese as respostas apresentadas pelos dez licenciandos como sendo a prova do Teorema de Pitágoras.

Quadro 1 – Síntese das respostas apresentadas pelos licenciandos

Quantidade de licenciandos	Demonstrações apresentadas para o Teorema de Pitágoras
1	Não respondeu
3	Dizem não lembrar a demonstração
1	Utilizou uma verificação empírica para “provar” o teorema.
3	Utilizaram a tese como argumento para a construção da “demonstração”.
2	Utilizaram uma demonstração frequente. Porém, não provaram afirmações utilizadas ao longo da demonstração.

4. Considerações Finais

Apesar de os licenciandos já terem cursado disciplinas que exigem demonstrações rigorosas, visto que são estudantes do último ano do curso de Licenciatura em Matemática, as disciplinas são vistas no curso de maneira isolada, levando-os à reprodução do conhecimento. Dessa forma, quando solicitados não conseguem estabelecer relações ou construir uma prova mesmo com conteúdos que julgam conhecidos.

Garnica (1996) destaca em seus estudos sobre formação de professor de Matemática que “não são tratadas – ao menos não explícita e/ou detidamente – as interconexões entre essa formação e a prova rigorosa” (p. 14). De fato, não podemos desvincular tais questões, caso contrário, incorremos no risco da prática pedagógica do futuro professor de Matemática estar calcada em atividades pouco significativas, sem objetivos claros ou extremamente ligadas ao formalismo.

5. Referências

BALL, *D*., THAMES, M.H., & PHELPS, G. "*Content knowledge for teaching*: What makes It special?" In: *Journal of Teacher Education*, 59(5), 2008. p. 389-407.

BRASIL. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Das diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União. Brasília, 1996.

CABASSUT, R. *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Thèse, Université Paris 7. 2005.

CAMPOS. T; PIETROPAOLO, R.C. "Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais". In: *Processos de ensino e aprendizagem em educação matemática*: v. 1. Recife: Ed. Universitária da UFPE, p. 55-91, 2013.

CORBO, O. *Seção Áurea: um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP: 2005

_______. *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNIBAN/SP: 2012.

GARNICA, A. V. M. *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na Formação do professor de Matemática.* In: Zetetiké, v.4, n.5, p.7-28, 1996.

PAVANELLO, M. R. *O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências.* In: Zetetiké, v. 1, n.1, p. 7-17, 1993.

PIETROPAOLO. R. C. *(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* 249f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

SBEM, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. *Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática*: uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003.

TALL, D. & VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, 1981.