

CONCEPÇÕES DE ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOBRE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS EM UMA UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

Maridete Brito Cunha Ferreira
PUC-SP
mbferreira@uneb.br

Resumo: Este trabalho tem por objetivo apresentar os principais resultados de um levantamento diagnóstico sobre as concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática a respeito de provas e demonstrações geométricas e corresponde a um estudo preliminar de uma pesquisa de doutorado em educação matemática intitulado ‘Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas’. A pesquisa foi realizada em 2013 com alunos de licenciatura em matemática de uma Universidade localizada no estado da Bahia. A coleta de dados se deu por meio de um questionário que foi respondido por alunos que já haviam cursado a componente Geometria Plana oferecida na universidade em que foi realizada a pesquisa. A interpretação dos dados baseou-se na revisão de literatura, na concepção de prova e demonstração proposta por Balacheff (2000) e nas funções da demonstração propostas por De Villiers (2001). Os resultados mostram que a maioria dos alunos investigados atribui a prova e demonstração o mesmo significado e estas são praticadas principalmente com a função de validação. Embora praticassem provas conceituais, os alunos demonstraram fragilidade em seu desenvolvimento e mostraram deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos. Foi observado também que estes reconhecem a importância da demonstração, mas não se sentem preparados para ensinar esse recurso matemático a seus futuros alunos.

Palavras-chave: prova; demonstração; geometria.

1. Introdução

O presente estudo é um recorte de uma pesquisa de doutorado e tem por objetivo apresentar os resultados de um levantamento diagnóstico sobre as concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática a respeito de provas e demonstrações.

Este estudo teve como ponto de partida uma revisão de literatura a qual nos permitiu observar que o desenvolvimento do raciocínio dedutivo tem sido preocupação de muitos pesquisadores da área de educação matemática desde a década de 1980 e que nos últimos anos as pesquisas envolvendo provas e demonstrações em muitos países têm crescido consideravelmente. As discussões em torno desse tema, nas mais variadas abordagens, envolvem pesquisadores conhecidos internacionalmente, dentre cuja produção podemos citar as de Balacheff (2000), Hanna (2000), Knipping (2008), Mariotti (2006), Hanna e Barbeau (2008) e De Villiers (2001).

As pesquisas revisitadas mostram a importância atribuída à demonstração no âmbito da Educação matemática, no entanto também confirmam a ausência de sua prática na Educação básica, como podemos observar em Nasser e Tinoco (2003).

Em parte essa ausência deve-se à falta de autonomia do professor em praticá-la em suas aulas uma vez que estudos apontam que os cursos de licenciatura em matemática não estão dando conta de preparar os futuros professores para trabalhar demonstrações. (DIAS, 2009).

Outro fator que pode contribuir para a ausência da prática da demonstração é a pouca importância dada pelos alunos a este recurso. Os estudos de Jahnke (2008) indicam que estudantes dos níveis secundário e terciário ficam mais convencidos da validação de um teorema matemático por argumentos empíricos que por meio de demonstração e o autor afirma ainda que isso pode contribuir para a falta de motivação do aluno em demonstrar

As pesquisas apontam que o ensino e a aprendizagem de demonstrações e provas nas escolas e universidades brasileiras fazem parte de um círculo vicioso em que os cursos de licenciatura não estão dando conta de formar professores com autonomia para desenvolver com seus alunos atividades que os preparem para o domínio do processo dedutivo. Esses alunos chegam à universidade com limitações e, nesse universo, a demonstração é praticada com uma abordagem que não motiva o licenciando a estudar, e muito menos a ensinar, demonstrações a seus futuros alunos.

Diante desse quadro observamos que o estudo das concepções dos alunos a respeito de provas e demonstrações pode contribuir para subsidiar propostas de ensino construídas com o intuito de mudar o panorama atual.

1. Quadro teórico

A história do desenvolvimento da demonstração mostra que ao longo dos séculos esse conceito esteve associado à ideia de verdade, e suas funções de validação e comunicação perduram até os dias atuais.

O desenvolvimento da matemática foi acompanhado do desenvolvimento da demonstração e suas transformações. Verificamos que a concepção de demonstração que temos hoje deriva do trabalho que Euclides concebeu em *Os elementos*, primeiro trabalho estruturado com perfil didático com fins de comunicação.

No entanto, séculos de desenvolvimento fizeram com que a demonstração passasse por transformações e padrões de aceitabilidade. Em determinada época, por exemplo,

matemáticos já estabeleceram verdades por meio de observações. Após *Os elementos*, a ideia de verdade passou a ser associada ao método dedutivo.

Mariotti (2006) expõe que, embora a ideia de verdade considerada pelos matemáticos tenha sofrido transformações, a relação entre compreensão e aceitação não sofreu mudanças radicais e ainda constitui um elemento de caracterização da matemática. O modelo euclidiano até hoje continua presente nos livros didáticos e nas aulas reproduzidas por professores de geometria.

Embora no âmbito da matemática a demonstração seja única forma de validação e os termos ‘demonstração’ e ‘prova’ sejam utilizados como sinônimos, na educação matemática alguns pesquisadores fazem a distinção entre esses termos, ampliando o conceito de prova de modo que não só a validação por meio de encadeamento de argumentos lógicos seja aceita, mas também outras formas de provas produzidas pelos alunos ao validar suas afirmações.

Essa importância atribuída à prova e demonstração também no âmbito da educação matemática faz com que alguns pesquisadores, como Balacheff, defendam que as provas devem ser trabalhadas desde as primeiras séries. Balacheff (2004) leva em consideração conteúdo e contexto ao se referir a uma prova e afirma que no ensino e aprendizagem de provas matemáticas devem-se considerar regras e critérios específicos – ou seja, o grau de exigência de uma prova deve corresponder à situação ou nível em que o aluno se encontra. Propõe-se geralmente que nas primeiras séries sejam trabalhadas atividades que envolvam argumentações, que levem os alunos a conjecturar e a sentir a necessidade e reconhecer a importância da validação para a matemática.

Muitos alunos recorrem a exemplos para justificar resultados. Valorizando esse tipo de produção dos alunos, Balacheff (2000, p. 4) distingue dois tipos de provas: as pragmáticas, “que têm o recurso à ação real ou apresentações” (exemplos, desenhos) e as conceituais, “que não envolvem ação e são caracterizadas por formulações de propriedades e as relações entre elas”.

Em ambas, Balacheff (2000) identifica níveis de prova, assim classificados:

- Empirismo ingênuo: Consiste em assegurar a validade de uma proposição após verificar para alguns casos. É considerado uma das primeiras formas de processo de generalização.
- Experimento crucial: Consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, para o qual se assume que, se funciona para este, então funcionará sempre.

- Exemplo genérico: Descreve o processo de verificação de uma proposição após efetuar operações ou transformações sobre um objeto na qualidade de representante característico de uma classe.
- Experimento de pensamento: Invoca a ação, interiorizando-a, mas afasta-se de sua execução sobre um caso particular. (p. 218-219)

Como podemos observar, os dois primeiros tipos de prova (empirismo ingênuo e experimento crucial) não estabelecem a verdade de uma proposição e não podem ser considerados como demonstrações, a não ser por quem os executa. O que se espera é que os alunos partam das provas experimentais e consigam desenvolver provas conceituais. Mas isto não ocorre tão facilmente. Atingir o nível de rigor exigido pela matemática é muito raro entre estudantes, inclusive os universitários, como identificado por Nasser e Tinoco (2003), por Jahnke (2008) e por Knipping (2008).

Embora reconhecendo a importância de considerar as produções dos alunos da educação básica em diferentes níveis, acreditamos ser necessário que, ainda nesse âmbito, o aluno seja levado a perceber que exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é necessária.

Para valorização da prova na educação básica, o professor deve estar consciente da ampliação do conceito de prova e estar apto a elaborar situações que levem o aluno, no momento oportuno, a realizar demonstrações. Nesse caso, seria coerente, no âmbito da formação inicial, considerar prova e demonstração com significados distintos, para que o futuro professor esteja preparado para, na educação básica, trabalhar provas e demonstrações considerando o nível de escolaridade do aluno.

A necessidade de provar está, de modo geral, associada à necessidade de convencer – a si próprio, isto é, verificar a validade de uma afirmação; e aos outros, que é o aspecto social da prova. Entretanto, na maioria das vezes, em matemática, os alunos se convencem de uma proposição a partir de verificações empíricas. Esse fato foi confirmado por Ordem (2015) e também por Jahnke (2008).

É possível que a preferência por verificações empíricas se justifique pelo fato de atribuir à demonstração a única função de validação. Verificar a veracidade de uma proposição é uma função da demonstração que, para o aluno, pode se tornar desnecessária caso este fique convencido por meio de verificações empíricas. De Villiers (2001) acredita que tomar consciência de outras funções da demonstração pode motivar o aluno à prática de provas matemáticas. As funções da demonstração listadas em De Villiers (2001) são:

- Verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação).

- Explicação (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira).
- Sistematização (organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas).
- Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados).
- Comunicação (transmissão do conhecimento matemático).
- Desafio intelectual (realização pessoal ou gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Além dessas funções, Hanna (2000) acredita que as provas são portadoras de conhecimentos matemáticos em sala de aula e afirma que a maior importância da prova não é atestar uma verdade matemática, e sim fornecer novos métodos, estratégias e conceitos que permitam resolver problemas.

Balacheff (2004) destaca a importância de que em toda pesquisa esteja clara a concepção de prova adotada e também de haver unidade a respeito de seu significado para que se possam compartilhar de forma mais significativa os resultados dos trabalhos desenvolvidos sobre esse tema. Portanto, as concepções de prova e demonstração adotadas neste estudo serão: o termo ‘prova’ para designar uma explicação que convence uma comunidade, mesmo não convencendo outra, e o termo ‘demonstração’ para designar uma prova restrita ao âmbito da matemática, composta de raciocínios feitos a partir de axiomas e propriedades já demonstradas.

2. Aspectos metodológicos

Este artigo propõe apresentar os resultados obtidos ao investigar as concepções de alunos de um curso de licenciatura em matemática a respeito de provas e demonstrações geométricas.

Para a realização dessa investigação, foram distribuídos 80 questionários, dos quais apenas 45 foram respondidos.

No curso pesquisado o componente ‘Geometria Plana’ é oferecido no segundo semestre e o critério utilizado para selecionar os alunos que responderiam ao questionário foi o de que deveriam já ter concluído esta disciplina. Portanto, todos eles já haviam concluído ou estavam concluindo o 2.º semestre.

O questionário se compunha de sete questões objetivas com opções *sim* e *não*, contendo espaço reservado para comentários sobre a resposta; quatro questões abertas em que

o aluno era solicitado a expressar seus conhecimentos sobre o sistema dedutivo, seus elementos e a importância atribuída a estes; e três questões específicas de geometria, envolvendo conhecimentos sobre o método dedutivo.

Inicialmente solicitou-se aos alunos que informassem o semestre que cursavam. Como o questionário foi aplicado no final do 2.º semestre de 2013, o semestre indicado foi considerado concluído.

A interpretação dos dados baseou-se na revisão de literatura, na concepção de prova e demonstração proposta por Balacheff (2000) e nas funções da demonstração propostas por De Villiers (2001).

3. A pesquisa

O conhecimento e as crenças de alunos e professores a respeito de provas e demonstrações são fatores a considerar ao se promover uma intervenção para o ensino desses objetos (KNUTH, 2002).

Estudos como os de Ponte (1992), de Knuth (2002) e de Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) investigaram as concepções de estudantes e professores. Balacheff (2000) acredita que as concepções de prova e seu papel nos processos de ensino e de aprendizagem são fundamentais para um bom desempenho dos alunos. Para Ponte (1992):

As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Atuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão. (p. 1)

Nesta pesquisa, adotaremos para o termo ‘concepção’ a definição proposta por Artigue, que a considera como:

[...] um ponto de vista local sobre um dado objeto, caracterizado por:

- situações que lhe servem de ponto de vista de partida: situações ligadas à aparição da concepção ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado;
- sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas;
- propriedades, invariantes, técnicas de treinamento, métodos específicos (implícitos e explícitos). (ARTIGUE *apud* ALMOULOU, 2010, p. 154)

Almouloud (2010, p. 154) completa ainda que “as concepções são modelos construídos pelo pesquisador para analisar as situações do ensino e os comportamentos cognitivos dos alunos”.

Adotando o termo ‘concepção’ segundo Artigue, procuramos fazer um levantamento das concepções dos alunos do curso pesquisado a respeito de demonstrações e provas. Para tanto, elaboramos um questionário contendo 14 questões e o aplicamos a esses alunos, visando investigar:

- a experiência dos alunos com demonstrações e com geometria na formação básica;
- seu conhecimento a respeito de um sistema dedutivo e de seus elementos;
- suas concepções de provas e demonstrações;
- a importância que atribuem ao raciocínio dedutivo;
- sua opinião sobre sua própria autonomia para ensinar provas a seus futuros alunos;
- sua opinião sobre a proposta dos livros de geometria indicados em seu curso.

3.1. Análise das atividades

Nossa pesquisa de doutorado teve como principal objetivo elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permitisse minimizar as dificuldades de alunos de licenciatura em matemática com relação às demonstrações geométricas. Buscando subsídios para elaboração da organização didática foi feito um estudo preliminar das concepções dos alunos de licenciatura sobre provas e demonstrações geométricas. Neste texto selecionamos apenas duas questões para apresentar alguns aspectos de nossa análise e exibiremos os principais resultados do estudo das concepções dos alunos a respeito de provas e demonstrações geométricas. A análise detalhada pode ser observada em Ferreira (2016).

Ao perguntarmos: *Você se sente preparado para ensinar demonstrações a seus futuros alunos?* Notamos que 34 alunos responderam negativamente. Observamos que a autonomia para ensinar demonstrações aos futuros alunos é maior entre aqueles que cursaram mais da metade do curso.

Vejamos alguns comentários de alunos que se sentem preparados para ensinar demonstrações:

1. *Sinto que estaria preparado! Mas, não sei se isso significa estar seguro. Nesse caso, já envolveria outras questões.*
2. *Pois não será trabalhado da mesma forma que eu aprendo.*
3. *Hoje tenho a capacidade de pegar uma demonstração do livro de ensino fundamental/médio e entender o processo e as propriedades utilizadas.*

Verificamos que mesmo aqueles que afirmam estar preparados para ensinar demonstrações, em sua maioria, mostram insegurança, afirmando que precisam buscar formas de se preparar para essa prática ou que terão os livros didáticos como referência.

Quanto aos alunos que afirmam não estar preparados para incluir a demonstração em sua futura prática observamos que grande parte atribui esta dificuldade à complexidade da mesma. Vejamos algumas respostas apresentadas:

1. *Não estou preparada e muito menos segura.*
2. *Pois eu não gosto de demonstração.*
3. *Tenho muita dificuldade com demonstração, pois só vi isso aqui na faculdade.*
4. *Tenho grande dificuldade em iniciar uma demonstração, então não sei como farei isso se não sei dar um ponto de partida*
5. *Não. Porque do jeito que é ensinada na Universidade os meninos não iriam entender.*
6. *Acho que não saberia passar de maneira clara, o que iria dificultar o entendimento*

Diante das respostas dos alunos, há indícios de que as situações relacionadas às demonstrações, vivenciadas por eles são as provas conceituais, segundo a classificação de Balacheff (2000), próprias das disciplinas cursadas. Analisando as respostas explicitadas pelos alunos, há possibilidade dos mesmos compararem suas dificuldades com as possíveis dificuldades dos futuros alunos e interpretar que as demonstrações não devam ser praticadas na educação básica.

Observamos que outras pesquisas obtiveram resultados semelhantes, a exemplo de Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) que concluíram que os professores investigados não se sentem preparados para ensinar provas. As pesquisadoras atribuíram essa insegurança à pouca ênfase dada às provas na formação inicial e pelo fato de não encontrarem muitas atividades envolvendo esse tema nos livros didáticos. Afirmam ainda que na formação inicial dos participantes da pesquisa não foram contemplados aspectos pedagógicos relacionados ao ensino e a aprendizagem de provas, apropriados para alunos da educação básica.

Perguntamos sobre as concepções de provas e demonstrações apresentadas pelos alunos; 19 afirmaram haver diferença entre demonstração e prova, enquanto 21 não consideraram haver diferença e cinco não responderam.

A maioria dos respondentes que não vê diferença entre demonstração e prova define demonstração como um método de validar uma afirmação. Conceber a demonstração apenas com a função de validação pode não ser motivador, uma vez que, na maioria das vezes, antes de demonstrar uma proposição, já temos consciência de sua veracidade, segundo De Villiers (2001), Hanna, Jahnk e Pulte (2010) e Nasser e Tinoco (2003).

Os que afirmam haver diferença entre esses objetos os definiram por meio de uma de suas funções. Algumas respostas confirmam nossa análise:

1. *[...] a veracidade ou não de uma afirmação, fazendo uso das propriedades. Não existe diferença entre provar e demonstrar em matemática.*

2. Demonstrar e provar são as mesmas coisas, ou seja, mostrar que uma afirmação é falsa ou verdadeira, através de dados verdadeiros e consistentes.

Atribuindo à demonstração a função de explicação, alguns alunos afirmam que:

- 1. Provar e demonstrar é saber como se chega no resultado. E não existe diferença entre demonstrar e provar.*
- 2. Mostrar o porquê de algo ocorrer. Para mim, provar e demonstrar na matemática dá no mesmo.*

Com função de sistematização, outro aluno afirma que:

Até agora aprendi que demonstrar e provar são a mesma coisa, ou seja, vamos utilizar axiomas, teoremas já demonstrados para demonstrar alguma coisa.

Pudemos observar também, em nossa pesquisa, a desmotivação para a prática da demonstração, como pode ser observado na seguinte afirmação:

Nunca consigo provar nada, então não vejo significado nenhum. Acho tudo isso uma tortura.

Entre os alunos que afirmaram haver diferença entre demonstração e prova, podemos observar que na maioria das concepções apresentadas a prova está mais relacionada à informalidade, ao próprio convencimento por meio de argumentos empíricos. Já a demonstração está na maioria das vezes relacionada a algo mais formal ou a uma generalização. As falas seguintes confirmam nossa análise:

- 1. Demonstrar é dar resultado. Mostrar de onde e como surgiu. Provar é mostrar o resultado exato, sem nenhuma exigência.*
- 2. Demonstrar vale para todas as situações. Provar é só um exemplo.*
- 3. Demonstrar é um conjunto de ideias que provam uma determinada teoria. Provar é usar um exemplo qualquer.*

Diante das pesquisas revisitadas, há indícios de que para os alunos de licenciatura compreenderem e ensinarem demonstrações, acreditamos que estas devam ser praticadas nos cursos de licenciatura, devendo os licenciandos tomar conhecimento das diferentes funções e diferentes níveis de prova. Nesse sentido, Pietropaolo (2005) acredita que para o licenciando desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e também incluir demonstração em sua prática futura, esses cursos devem imprimir às demonstrações um caráter mais amplo. Em sua opinião, a demonstração, além de utilizada em uma perspectiva matemática, deve ser focalizada sob uma perspectiva didática, curricular e histórica.

No tópico que se segue apresentaremos os principais resultados obtidos ao investigar sobre as concepções de provas e demonstrações dos alunos pesquisados.

3.2. Principais Resultados

Nesse artigo buscamos apresentar os principais resultados de um estudo que investigou as concepções dos alunos sobre provas e demonstrações. Estudo que fez parte de um trabalho de doutorado que foi desenvolvido com objetivo de elaborar, aplicar e analisar uma organização didática com intuito de minimizar as dificuldades de alunos de licenciatura em matemática em uma universidade no estado da Bahia em compreender demonstrações geométricas.

Fundamentados na análise do questionário, verificamos os seguintes resultados:

1. Os alunos pesquisados foram envolvidos em tarefas que exigiam demonstração na graduação, porém não com participação ativa na construção da mesma. Isto é, há indícios de que os alunos não foram envolvidos em tarefas que os permitissem construir demonstrações, indicando que a abordagem da demonstração vivenciada pelos mesmos foi a reprodução das demonstrações encontradas nos livros ou apresentadas pelo professor.
2. A maioria dos alunos, embora afirmasse conhecer o método dedutivo, não foi capaz de defini-lo.
3. A maioria dos alunos investigados reconhece a importância da demonstração, mas não se sente segura para ensiná-la a seu futuro aluno e o principal motivo apresentado é a dificuldade relacionada à prática da demonstração.
4. Os alunos que afirmam estar seguros para ensinar demonstração aos seus futuros alunos indicam que buscarão apoio no livro didático.
5. As respostas dos alunos indicam que para eles um bom livro é aquele que traz as demonstrações de forma detalhada, permitindo sua compreensão.
6. A maioria dos alunos não reconhece diferença entre demonstração e prova atribuindo à prova a única função de validação.
7. As produções apresentadas pelos alunos, ao responderem o problema proposto, apontam dificuldades relacionadas a conceitos e propriedades geométricas, bem como dificuldade em utilizar argumentos válidos, em manipular as hipóteses e teses do problema, organizar logicamente os argumentos e concluir um raciocínio corretamente.

Verificamos que em sua maioria os licenciandos pesquisados tiveram seu primeiro contato com demonstrações na graduação, usando-a como ferramenta de validação. Para a maioria desses alunos, o papel da demonstração se reduz ao de validar uma afirmação. A

maioria atribui a prova e demonstração o mesmo significado, o que é lícito no âmbito da matemática, mas não no da educação matemática. Dos 45 respondentes, apenas oito sinalizaram em suas respostas que atribuem um caráter prático à prova, distinguindo-a da demonstração.

Embora pratiquem provas conceituais, os alunos demonstraram fragilidade em seu desenvolvimento e mostraram deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos.

Outro fato constatado é que, apesar de aprovarem os livros de geometria indicados no programa da disciplina ‘Geometria plana’, os alunos ofereceram respostas que indicam que a proposta didática desses livros não lhes permite compreender as demonstrações.

Os respondentes reconhecem a importância da demonstração, mas não se sentem preparados para ensinar esse recurso matemático a seus futuros alunos. Este fato está provavelmente associado à influência da prática da demonstração vivenciada por esses licenciandos.

Diante dos resultados observados neste estudo verificamos que estes assemelham-se aos encontrados por Ordem (2015) que investigou alunos de licenciatura e Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007) que investigou professores em exercício. Estas constatações nos fornecem elementos para afirmar que as concepções de provas e demonstrações apresentadas na licenciatura podem se perpetuar ao longo da carreira docente e assim manter o ciclo vicioso entre educação básica e a graduação.

Diante desse resultado, uma intervenção didática subsidiada pelo estudo das concepções dos alunos e fundamentada nas teorias da educação matemática pode contribuir para a mudança desse quadro, que é o que está apresentado em nosso trabalho de doutorado.

4. Referências

ALMOULOU, S.A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2010.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em <<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>>. Data do acesso: 12 de Janeiro de 2013.

BALACHEFF, N. **The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof**. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, n. 109, Grenoble, 2004. Disponível em: <<http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>>. Data do acesso: 12 de janeiro de 2013

DE VILLIERS, M.D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Shetchpad. Tradução de Eduardo Veloso. **Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-36, 2001. Disponível em

< <http://www.apm.pt/apm/revista/educ63/Para-este-numero.pdf>>. Data de acesso: 20 de janeiro de 2013.

DIAS, M.S.S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática:** uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 214 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA, Maridete B. C., **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** 342f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

HANNA, G., Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in mathematics**, 44 (1-2), p. 5-23, 2000.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proofs as bears of mathematics knowledge. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, n. 40, p. 345-353, 2008

JAHN, A.P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre Prova e seu Ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In **Reunião da ANPED**, 30, Caxambú, ANAIS ELETRÔNICOS. Caxambú: 2007. Disponível em:
<http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/concepcoes.pdf> Acesso em: 14 nov. 2013.

JAHNKE, H.N. Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. **ZDM**, Essen, Germany, v. 40, n. 3, p. 363-371, 2008.

KNIPPING, C. A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. **ZDM**, NS - Canadá, v. 40, n. 03, p.427-441, 2008.

KNUTH, E.J. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 95, n. 7, p. 61-88, 2002.

MARIOTTI, M.A. Proof and Proving in Mathematics Education. **Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future**, p.173-204, 2006.

NASSER, L.; TINOCO, L.A. **Argumentação e prova no ensino de matemática.** Instituto de Matemática (Projeto Fundão), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana:** concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique. Tese (Doutorado) 325p. – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **(Re) significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática.** 2005, 388f. Tese (Doutorado). PUC – SP, São Paulo, 2005.

PONTE, J. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. Matos e J. Ponte (Coords.), **Educação Matemática** (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992.