

# O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática

Grupo Colaborativo em Matemática – Grucomat

**Adair Mendes Nacarato**  
**Iris Aparecida Custódio**  
Organizadoras

Biblioteca  
do Educador

Coleção SBEM

Volume **12**



Sociedade Brasileira de  
Educação Matemática

# O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica: Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática

GRUPO COLABORATIVO EM MATEMÁTICA – GRUCOMAT

ADAIR MENDES NACARATO

IRIS APARECIDA CUSTÓDIO

Organizadoras

2018



Sociedade Brasileira de  
Educação Matemática

Copyright 2018 Sociedade Brasileira de Educação Matemática.  
Todos os direitos reservados

*Organização*

Adair Mendes Nacarato / Iris Aparecida Custódio

*Projeto Gráfico e Editoração*

Templo Gráfica e Editora

*Revisão*

Leda Maria S. F. Farah / Camila P. C. Freitas

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

---

O Desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica [livro eletrônico] :  
compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará)  
matemática / organização Adair Mendes Nacarato, Iris Aparecida Custódio. -- Brasília  
: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. -- (Coleção SBEM ; 12) ;  
20 Mb ; PDF

Vários autores.

ISBN 978-85-98092-54-6

1. Álgebra 2. Educação básica 3. Educação matemática 4. Matemática – Estudo  
e ensino 5. Prática de ensino 6. Professores – Formação 7. Sala de aula – Direção I.  
Nacarato, Adair Mendes. II. Custódio, Iris Aparecida. III. Série.

18-20547

CDD-510.7

---

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Professores de matemática : Prática de ensino : Educação matemática 510.7  
Cibele Maria Dias – Bibliotecária – CRB-8/9427

*Esta obra é dedicada a todos os professores e estudantes que nos fazem acreditar que é possível ensinar e aprender Matemática com sentidos...*

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	8
O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: Algumas Reflexões Iniciais .....	13
Álgebra e Pensamento Algébrico.....	14
O Pensamento Algébrico na Perspectiva Histórico-Cultural .....	16
A Natureza das Tarefas para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Perspectiva Histórico-Cultural.....	23

### PARTE 1

#### DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO COM CRIANÇAS?...

<b>POSSIBILIDADES DE PRÁTICAS NA EDUCAÇÃO INFANTIL</b> .....	25
--	----

*Giancarla Giovanelli de Camargo / Juliana Bagne  
Marjorie Samira Ferreira Bolognani / Selene Coletti*

Discussões Iniciais: O Desenvolvimento da Percepção de Regularidades em Sequências Repetitivas .....	27
Um Corpo que Fala: O Lúdico e a Imaginação na Infância.....	29
<b>1 SEQUÊNCIA 1: Movimentos com o Corpo</b> .....	34
1.1 Tarefa: Dança circular – “Morava na Areia Sereia” .....	36
1.2 Tarefa: Imita e Crie .....	40
1.3 Tarefa: Sequência Corporal e Musical – Jogo do Tum pá.....	44
1.4 Tarefa: Descubra o Segredo .....	46
1.5 Tarefa: Amarelinha.....	49
<b>2 SEQUÊNCIA 2: Literatura Infantil</b> .....	52
2.1 Tarefa: Lá Vem História.....	53
1.2 Tarefa: Fotografando.....	56
<b>3 SEQUÊNCIA 3: Materiais Manipuláveis</b> .....	60

1.1 Tarefa: Centopeia .....	61
1.2 Tarefa: O fio de contas.....	64
<b>Para Encerrar</b> ... ..	70

## PARTE 2

### **A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL I: POSSÍVEIS TRABALHOS PARA A PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES E DE GENERALIZAÇÕES .....**

71

*Carla Cristiane Silva Santos / Cidinéia da Costa Luvison /*

*Kátia Gabriela Moreira*

Discussões Iniciais .....	73
A Organização da Sala de Aula para o Desenvolvimento das Tarefas .....	74

### **Eixo I – PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES .....**

79

#### **1 SEQUÊNCIA 1: Introduzindo o Vocabulário .....**

79

##### 1.1 Tarefa: As Estripulias de Pedrinho I .....

80

##### 1.2 Tarefa: As Estripulias de Pedrinho II.....

84

##### 1.3 Tarefa: As Estripulias de Pedrinho III.....

87

#### **2 SEQUÊNCIA 2: Sequências Manipulativas com Motivos Pré-Definidos .....**

95

##### 2.1 Tarefa: Sequências com Contas de Duas Cores .....

97

##### 2.2 Tarefa: Contas de Três Cores .....

102

##### 2.3 Tarefa: Sequências com Duas Cores e Repetição.....

108

##### 2.4 Tarefa: Sequência Criada pelos Alunos .....

113

#### **3 SEQUÊNCIA 3: “As Tiras Coloridas” .....**

118

##### 3.1 Tarefa: Tira de Números Coloridos .....

119

##### 3.2 Tarefa: Tira de Três Números Coloridos .....

126

##### 3.2 Tarefa: Produção Livre do Aluno (para Alunos de Anos mais Avançados) .....

128

#### **4 SEQUÊNCIA 4: Brincando com Sons .....**

136

##### 4.1 Tarefa: Cantigas & Batuque: Conhecendo Possibilidades.....

137

##### 4.2 Tarefa: Cantigas & Batuque: Produção dos Alunos .....

141

#### **5 SEQUÊNCIA 5: Sequências Manipulativas de Livre Criação.....**

146

#### **6 SEQUÊNCIA 6: Sequências Recursivas .....**

153

##### 6.1 Tarefa: Continuando com Palitos .....

154

##### 6.2 Tarefa: Continuando com Triângulos .....

159

##### 6.3 Tarefa: O Triângulo de Sierpinski.....

163

<b>Eixo II – PENSAMENTO RELACIONAL</b> .....	168
<b>1 SEQUÊNCIA 1: Explorando Contagens e Medidas</b> .....	168
1.1 Tarefa: Construindo o Varal .....	169
1.2 Tarefa: Atividades com o Varal.....	170
1.3 Tarefa: Reta Numérica .....	172
<b>2 SEQUÊNCIA 2: Explorando Relações Numéricas com <i>Cuisenaire</i></b> .....	176
2.1 Tarefa: Construções com o <i>Cuisenaire</i> .....	177
2.2 Tarefa: Construindo um Muro: Explorando as Diferentes Composições do Número 10 .....	182
2.3 Tarefa: “É o Mesmo Que”: Explorando o Sentido do Sinal de Igual .....	187
<b>3 SEQUÊNCIA 3: Balança</b> .....	188
<b>Para Encerrar</b> ... ..	196

### PARTE 3

<b>O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO</b> .....	197
--	-----

*Caio Leardini Grillo / Claudia Cristiane Bredariol Lucio  
Iris Aparecida Custódio / Rosangela Eliana Bertoldo Frare*

O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio .....	199
<b>1 SEQUÊNCIA 1: Sequência de Sons</b> .....	204
1.1 Tarefa: Criando uma Sequência de Sons.....	205
<b>2 SEQUÊNCIA 2: Sequência de Cores</b> .....	206
2.1 Tarefa: Fio de Contas com Duas Cores .....	207
2.2 Tarefa: Fio de Contas com Duas Cores .....	208
2.3 Tarefa: Elaboração de Sequências .....	211
2.4 Tarefa: Tira de Duas Cores .....	212
2.5 Tarefa: Tira de Três Cores .....	213
2.6 Tarefa: Elaborando uma Sequência.....	216
<b>3 SEQUÊNCIA 3: Sequência Decrescente</b> .....	217
3.1 Tarefa: Sequência de palitos.....	218
<b>4 SEQUÊNCIA 4: Saltos em Linha Reta</b> .....	221
4.1 Tarefa: O Pulo do Sapo.....	222
4.2 Tarefa: Saltos na Reta .....	227

<b>5 SEQUÊNCIA 5: Sequências Figurativas</b> .....	229
5.1 Tarefa: As Carinhas .....	230
5.2 Tarefa: Figuras em T.....	232
5.2 Tarefa: Sequência de Pontos .....	235
5.3 Tarefa: Os Muros .....	237
5.5 Tarefa: Construindo Frisa.....	242
5.6 Tarefa: Construção com Cubos .....	246
5.7 Tarefa: Sequência de Quadrados e Triângulos .....	250
<b>6 SEQUÊNCIA 6: Sequências Numéricas</b> .....	253
6.1 Tarefa: Construindo Sequências .....	254
6.2 Tarefa: Sequência de Aumento Constante .....	256
6.3 Tarefa: Outra Sequência Crescente .....	260
6.4 Tarefa: Completando a Sequência.....	262
6.5 Tarefa: Sequência de Decréscimo Constante .....	264
6.6 Tarefa: Sequência Numérica Crescente.....	265
6.7 Tarefa: A Festa na Casa de Maria.....	267
<b>7 SEQUÊNCIA 7: Truques Numéricos</b> .....	269
7.1 Tarefa: “Matemágica” com Números .....	270
<b>8 SEQUÊNCIA 8: Trabalhando com a Ideia de Equilíbrio e Trocas</b> .....	273
8.1 Tarefa: Equilibrando Barras de Cuisenaire .....	274
8.2 Tarefa: O equilíbrio na Balança de Dois Pratos .....	276
8.3 Tarefa: Cabo de Guerra .....	277
8.4 Tarefa: A Feira de Trocas.....	279
<b>9 SEQUÊNCIA 9: (Des)Equilíbrios Numéricos</b> .....	282
9.1 Tarefa: Inclínadas ou Equilibradas <sup>10</sup> .....	283
9.3 Tarefa: Desigualdades Numéricas <sup>12</sup> .....	286
9.2 Tarefa: Igualdades Numéricas <sup>12</sup> .....	286
9.3 Tarefa: Desigualdades Numéricas .....	288
9.4 Tarefa: Situação-Problema com Duas Variáveis .....	289
<b>10 SEQUÊNCIA 10: Comparando Situações</b> .....	290
10.1 Tarefa: A Tabela Como Ferramenta Para Resolver Situações de Comparação.....	291
<b>Para Encerrar</b> .....	301
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	302
<b>SOBRE OS AUTORES</b> .....	306



## APRESENTAÇÃO

Esta obra se destina ao professor que ensina matemática, da Educação Infantil ao Ensino Médio, e aos formadores de professores que atuam em cursos de Pedagogia, Licenciatura em Matemática ou em projetos de formação continuada.

Ela é resultado de seis anos de trabalho dos participantes do Grupo Colaborativo em Matemática – Grucomat, vinculado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco.

O grupo foi criado em 2003 e, até 2015, contou com a coordenação e a participação da Professora Regina Célia Grandó, a quem agradecemos pela competência profissional, pelo entusiasmo e pelo companheirismo durante sua permanência no grupo.

Do Grucomat participam professores que ensinam matemática na educação básica (da Educação Infantil ao Ensino Médio), estudantes da Pós-Graduação – também professores – e professoras da universidade. Nos primeiros anos de existência o grupo também contou com a participação de estudantes da licenciatura em Matemática.

O foco do nosso trabalho sempre foi a pesquisa com o professor, reconhecendo o seu protagonismo e dando visibilidade ao trabalho quase sempre invisível do professor. Uma das formas encontradas foi a produção e a publicação de narrativas dos professores. Para isso, a cada nova etapa de trabalho, o grupo elege uma temática para estudo; decorrentes desses estudos, os participantes elaboram, de forma colaborativa, tarefas para a sala de aula, que são amplamente discutidas no grupo e, quando concluídas, são desenvolvidas em sala de aula pelos diferentes participantes. Muitas vezes, uma mesma tarefa é trabalhada em anos e níveis diferentes. O professor responsável pelo seu desenvolvimento registra suas práticas com fotos, áudio ou videogravação e produz narrativas dessas aulas. Esse material é compartilhado e analisado no grupo. Muitas

vezes, as tarefas precisam passar por reelaborações, e novos trabalhos em sala de aula são realizados.

Nosso interesse é conhecer os discursos matemáticos dos alunos durante o desenvolvimento da tarefa e, simultaneamente, promover espaços formativos para o professor que ensina matemática. Nesses 15 anos de existência o Grucomat já conta com muitas produções coletivas. Em destaque, dois livros, resultados de projetos que contaram com financiamento do CNPq, na linha de fomento Universal: um sobre geometria (NACARATO; GOMES; GRANDO, 2008); outro sobre Estocástica – Estatística e Probabilidade (NACARATO; GRANDO, 2013). O terceiro livro, sobre Álgebra, está ainda em processo de elaboração e foi a gênese desta obra. Nesses livros são publicadas as narrativas de práticas dos professores participantes dos projetos, além das bases teóricas que subsidiaram a pesquisa. Pode-se dizer que há, no grupo, a prática da pesquisa colaborativa: cada texto produzido é compartilhado no grupo, passa pela avaliação dos pares, com reescritas até se chegar a uma versão final. Todo o processo é negociado colaborativamente.

Foram também desenvolvidas quatro dissertações e uma tese nesse contexto do grupo, além de artigos em periódicos e trabalhos em anais de congresso. Os participantes são incentivados a divulgar seus estudos em diferentes espaços da Educação Matemática, em forma de relatos de experiência, comunicações orais, minicursos, oficinas ou pôsteres.

Em 2012, quando iniciávamos o terceiro projeto do Universal que tinha como foco a formação do professor a partir da análise de aulas, os participantes decidiram tomar a álgebra como objeto de estudo, em razão da pesquisa de um de seus participantes, voltada aos anos finais do Ensino Fundamental. Nesse ano, o Ministério da Educação publicou o documento “Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental” (BRASIL, 2012), que visava subsidiar a elaboração do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC). Nele, identificamos pela primeira vez, nas discussões curriculares nacionais, a presença da álgebra nos anos iniciais, com o propósito de desenvolver o pensamento algébrico. Tal tendência se fez presente na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), cuja versão final foi aprovada em dezembro de 2017, na unidade temática “Álgebra”, desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

Naquele momento, em 2012, avaliamos que discutir o desenvolvimento do pensamento algébrico seria importante, para contribuir com a formação dos professores

que ensinam matemática, principalmente os dos anos iniciais, que não têm formação específica e, provavelmente, enfrentarão desafios para trabalhar essa unidade temática. Dedicamo-nos ao estudo da *early algebra*, com apoio de uma vasta literatura, principalmente internacional. À medida que estudávamos, já elaborávamos tarefas para a sala de aula; algumas eram retiradas dos textos lidos; outras, adaptadas; e outras, criadas pelo próprio grupo.

Nesse movimento e no âmbito do projeto que desenvolvíamos, “A videogravação de aulas de matemática como ferramenta para a pesquisa em formação docente: produção e análise de vídeos” (Projeto Universal CNPq – Processo 475848/2012-8), contamos com a interlocução de diferentes pesquisadores, na forma de encontros, seminários e palestras: Arthur Powell (Rutgers University/USA), Beatriz D’Ambrosio (Miami University/USA), Lurdes Serrazina (Escola Superior de Educação/ESE, Lisboa), Ana Maria Boavida (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal/Portugal), Paola Sztajn (North Carolina State University), Emmanouil Dafermakis (Manolis Dafermos – Universidade de Creta/Grécia) e Alessandro Ribeiro (UFABC). Como no grupo há professores e profissionais (coordenadoras e diretoras) de diferentes níveis de ensino, discutimos propostas que pudessem contribuir para a sala de aula da Educação Infantil ao Ensino Médio e, até mesmo, Superior, no que se refere às licenciaturas em Pedagogia e Matemática. Nosso maior desafio, sem dúvida, foi pensar em tarefas para os estudantes da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Concluído o projeto em 2015, os participantes do Grucomat sentiram-se mobilizados a compartilhar as tarefas produzidas. Foi aí que nasceu a ideia do presente livro. No início de 2016, avaliamos que precisaríamos elaborar mais tarefas para tentar abarcar diferentes ideias da álgebra. Essa foi a nossa incumbência nesse ano e no primeiro semestre de 2017. Os participantes do grupo foram subdivididos em três subgrupos, de acordo com o nível de atuação: Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental e anos finais do Ensino Fundamental/Ensino Médio.

À medida que as tarefas eram elaboradas, os professores as desenvolviam com seus alunos ou contavam com colegas parceiros para tal desenvolvimento, com o objetivo de avaliar sua pertinência e suas potencialidades, e também de reunir registros para ilustrar nosso livro. No entanto, nem todas as tarefas foram desenvolvidas em sala de aula. Os registros variaram de acordo com o nível de atuação dos professores: na educação infantil e nos anos iniciais tomaram a forma de narrativas – algumas até extensas, mas assim

mantidas para evidenciar os possíveis discursos matemáticos dos alunos, em interação com colegas e professores em sala de aula; nos anos finais e no ensino médio, há uma narrativa inicial de como foi o desenvolvimento da tarefa, seguida de registros dos alunos, selecionados cuidadosamente pelos professores participantes, de modo a evidenciar diferentes raciocínios algébricos dos estudantes. Optamos por manter o anonimato dos professores e das escolas envolvidas no projeto, que atendeu os requisitos do Comitê de Ética para a sua realização.

No segundo semestre de 2017 nos dedicamos a organizar o livro, complementar informações, compartilhar o trabalho de cada subgrupo e tomar, coletivamente, as decisões sobre a estrutura da obra.

O livro está organizado em três partes, além de um capítulo inicial, no qual discutimos alguns aspectos relacionados ao pensamento algébrico, tendo a perspectiva histórico-cultural como pano de fundo para a intencionalidade pedagógica em sala de aula, abordando princípios como: o papel da palavra e da linguagem para o desenvolvimento humano, a mediação pedagógica, as interações em sala de aula e o papel do outro para o processo de aprendizagem e desenvolvimento.

Cada uma das partes do livro destina-se a um nível de ensino. No entanto, essa classificação não é rígida, pois no Grucomat uma mesma tarefa, em alguns casos, foi desenvolvida nos três níveis de ensino, com diferentes raciocínios algébricos dos alunos, evidenciando que os estudantes, mesmo no início da escolarização, pensam algebricamente, conseguem perceber padrões e estabelecer generalizações com a língua materna. Mesmo estudantes de anos mais avançados, algumas vezes, explicitam seus raciocínios na língua materna e não na linguagem algébrica.

Ressaltamos que as sequências aqui propostas não são rígidas, podendo ter a sua ordem alterada, e não é necessário realizar todas as tarefas de uma mesma sequência. Também não foi nossa intenção esgotar todas as ideias da álgebra. Portanto, as tarefas propostas não cobrem a amplitude dessa unidade temática.

Nossa intenção é que esta seja uma obra a ser usada pelo (futuro) professor ou por formadores de professor. Por isso, buscamos um texto que seja dialógico com o professor e nos dirigimos diretamente ao usuário, com o uso do 'você'. Sempre utilizaremos a seção “🗉 Notas para o professor” para aproximar esse diálogo e apresentar alguma sugestão ou ideia que possa contribuir com o trabalho em sala de aula.

Assim, caro leitor, nosso desejo é que essa obra contribua para a formação inicial

e continuada de professores que ensinam matemática. Que ela seja lida, contestada, modificada..., mas que não se perca de vista que ela foi produzida por um grupo de professores que acredita no trabalho compartilhado e na socialização de práticas de sala de aula, colocando-se à escuta dos alunos e dos professores.

# O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: ALGUMAS REFLEXÕES INICIAIS

*Adair Mendes Nacarato*

*Iris Aparecida Custódio*

Muito já se tem produzido sobre o campo da álgebra. Uma rápida consulta nos *sites* de busca já evidencia a vasta literatura existente sobre essa unidade temática.

No final dos anos de 1980 e no início de 1990, quando se discutia o abandono do ensino da geometria, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) já denunciavam que o ensino de álgebra também mereceria ser investigado, e era preciso, até mesmo, refletir sobre o que se ensinava de álgebra na educação básica. Mesmo com a denúncia de um ensino mecanicista e destituído de significações para os alunos, pouca coisa se modificou. As reformas curriculares, ao final da década de 90, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, também não alteraram muito o cenário. Ainda é comum encontrarmos livros didáticos e até mesmo propostas de escolas que, por exemplo, introduzem equações no 7.º ano, sem que o aluno tenha discutido a linguagem simbólica, alfanumérica, da álgebra.

As discussões sobre a *early algebra* são bastante recentes no Brasil. Diríamos que elas começaram a ganhar força a partir de 2012, com o documento publicado pelo Ministério da Educação: *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental* (BRASIL, 2012). Nesse documento, a área de Matemática foi organizada por direitos de aprendizagem, eixos estruturantes e objetivos de aprendizagem por eixo, tendo sido estabelecidos cinco eixos: Números e operações, Pensamento Algébrico, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Desde então,

temos constatado um aumento no número de pesquisas nesse campo, com ênfase nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, na continuidade das reformas curriculares, a *Base Nacional Comum Curricular*, em suas diferentes versões, vai modificando o nome desse eixo, de ‘Álgebra e funções’ – já retirando a concepção de pensamento algébrico – a apenas ‘Álgebra’, como sendo uma das unidades temáticas do currículo de matemática.

Sem dúvida, no nosso entender, trata-se de um reducionismo na concepção de um campo tão amplo e complexo como é o do pensamento algébrico. Daí nossa opção, neste trabalho, pela utilização da expressão “pensamento algébrico”. Ao longo deste capítulo vamos fundamentar nossa opção.

## ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Concordamos com Squalli (2000) que é necessário que se faça a distinção entre álgebra e pensamento algébrico. Vamos trazer algumas concepções para fundamentar essa diferenciação.

Squalli (2000, p. 277) defende a álgebra como um “tipo de atividade matemática e o pensamento matemático um conjunto de habilidades intelectuais que intervêm nessas atividades”. Ele defende que a álgebra é formada por três componentes essenciais e indissociáveis:

- 1) construção e interpretação de modelos algébricos de situações reais ou matemáticas; 2) manipulação de expressões algébricas seguindo regras pré-definidas; e 3) elaboração e aplicação de estruturas (estruturas algébricas, estruturas de situações reais ou matemáticas) e de procedimentos (regras, algoritmos, heurísticas, etc.)

O pensamento algébrico é constituído por habilidades que possibilitam pensar analiticamente sobre cada um desses componentes. O autor centra ênfase nesse caráter analítico e defende que álgebra e pensamento algébrico são duas faces de uma mesma moeda; portanto, indissociáveis e complementares. É com esse conjunto de habilidades de pensamento analítico que os estudantes generalizam e abstraem relações, regras e estruturas, manipulam a linguagem algébrica. Sua constituição demanda tempo

e pressupõe no currículo de matemática, desde o início da escolarização, um trabalho contínuo que, por meio de diferentes tipos de exploração, vai se tornando complexo, à medida que as tarefas matemáticas e os conceitos também se complexificam.

Outro autor que diferencia álgebra de pensamento algébrico é Lins (1992). Para ele, o pensamento algébrico é compreendido como um meio de produção de significados, e a álgebra, um conteúdo que faz sentido a partir desse pensamento. É possível produzir sentido para a álgebra de muitas maneiras diferentes, e o pensamento algébrico é uma delas. “O pensamento algébrico é um meio de organizar o mundo ao modelar situações e manipular aqueles modelos de certa forma” (LINS, 1992, p. 11), ele é uma intenção, “um modo no qual eu quero fazer coisas, mesmo nos casos nos quais os conceitos ou métodos necessários para realizar não estejam disponíveis ou desenvolvidos” (p. 11).

Cyrino e Oliveira (2011, p. 103, grifos das autoras), numa revisão da literatura sobre os diferentes modos de interpretar o pensamento algébrico, sintetizam: “utilizamos o termo *Pensamento Algébrico* como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos”.

Há também, na literatura, diferentes autores que utilizam a expressão “raciocínio algébrico”. Kaput (2007), por exemplo, também faz distinção entre álgebra e raciocínio algébrico. Para ele, a álgebra pode ser considerada “como um corpo autônomo de conhecimento – como um artefato cultural” (p. 8), e o raciocínio algébrico considera a “álgebra como uma atividade humana” (p. 9). Tal distinção, segundo ele, tem implicações para as maneiras como pensamos sobre a álgebra. Aqueles que consideram a álgebra como raciocínio que emerge da atividade humana e depende dos homens, consideram os modos como os estudantes pensam, falam e conversam sobre matemática; para aqueles que consideram a álgebra como corpo de conhecimento herdado historicamente, suas leis e regularidades são da matemática em si.

Para Kaput (2000), há cinco formas sobrepostas e inter-relacionadas de raciocínio algébrico: generalização e formalização (dentro ou fora da matemática); manipulação de (opacos) formalismos; estudo de estruturas abstraídas de cálculos e relações; estudo de funções, relações e variação mútua; e modelação e linguagem de controle de fenômenos. Dentre essas, interessa-nos a discussão da álgebra como generalização e formalização de padrões.



A generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática e ao pensamento matemático. Pela generalização podemos estender o alcance do raciocínio ou da comunicação para além dos casos particulares, identificando o que há de comum entre eles. Essa comunicação pode ser feita por meio de diferentes linguagens: natural, simbólica, gestual. Em estudantes mais novos, os modos como eles expressam a generalidade ou justificam um caso particular precisam ser ouvidos atentamente pelo professor, visto que essa comunicação nem sempre é tão explícita quanto com estudantes de anos mais avançados. A generalização e a formalização podem ocorrer de situações internas (propriamente matemáticas) ou externas à matemática (mas que podem ser modeladas matematicamente).

Em síntese, as ideias desses autores evidenciam que a introdução da álgebra desde o início da escolarização precisa ser compreendida como o desenvolvimento de um modo de pensar que antecede o uso da linguagem algébrica. Daí nossa opção pelo uso da expressão ‘pensamento algébrico’. Tal opção também é decorrente da perspectiva que adotamos: a histórico-cultural, em que um dos pilares é a relação intrínseca entre pensamento e linguagem.

## O PENSAMENTO ALGÉBRICO NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Para discutir nossa concepção de pensamento algébrico, faz-se necessário explicitar a compreensão que temos sobre o desenvolvimento do pensamento. Daí nossa opção pela perspectiva histórico-cultural, pois entendemos que o desenvolvimento humano é um acontecimento social, em que a apropriação dos bens culturais é proveniente da relação entre pessoas (VIGOTSKI<sup>1</sup>, 1995, 2007). Tal apropriação acontece mediante os processos de domínio dos meios externos, constituídos historicamente, a partir do desenvolvimento da cultura e do pensamento – a linguagem oral, a escrita, o cálculo e o desenho –; e das funções psíquicas superiores – atenção voluntária, memória lógica,

---

1 A grafia do nome desse autor russo aparece de diferentes maneiras na literatura. Quando estivermos fazendo referência a alguma obra específica, utilizamos a grafia que nela se encontra; caso contrário, utilizaremos Vigotski.

formação de conceitos, etc. Para nós, interessa, em particular, a compreensão dos processos pelos quais passam os estudantes, quando inseridos num contexto de sala de aula que tem como foco o pensamento algébrico.

Inicialmente, é interessante destacar que compreendemos a cultura, assim como Pino Sirgado (2000, p. 54), como “prática social resultante da dinâmica das relações sociais que caracterizam uma determinada sociedade” e que sua natureza “[...] está relacionada com o caráter duplamente instrumental, técnico e simbólico, da atividade humana”. Desse modo, o desenvolvimento humano é mediado pelos signos, produzidos histórica, social e culturalmente, dentre os quais, a palavra assume o papel de signo por excelência. É por meio da linguagem que nos apropriamos dos processos de domínio dos meios externos e que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, tipicamente humanas.

Para Vigotski (2000, p. 398), o significado da palavra é um fenômeno do pensamento, desde que este se relacione à palavra e nela se materialize; e é um traço constitutivo da palavra, já que “a palavra desprovida de significado não é palavra, é um som vazio”, o que faz do significado a unidade do pensamento e da palavra. O autor defende que o primeiro não se exprime por meio da segunda, mas nela se realiza, em um movimento dialético do pensamento à palavra e da palavra ao pensamento.

Por isto, seria possível falar de formação (unidade do ser e do não-ser) do pensamento na palavra. Todo pensamento procura unificar alguma coisa, estabelecer uma relação entre coisas. Todo pensamento tem um movimento, um fluxo, um desdobramento, em suma, o pensamento cumpre alguma função, executa algum trabalho, resolve alguma tarefa. (VIGOTSKI, 2000, p. 409)

Nessa perspectiva, o pensamento depende da palavra do outro, mas também da nossa palavra. Ao ouvir e ao falar, o pensamento se forma, se transforma, se reformula, se realiza, se modifica. O mesmo acontece com o pensamento algébrico, que tem por característica o estabelecimento de relações de regularidades entre coisas, por meio de uma visão mais abstrata e generalizada. Aqui também, há a formação do pensamento na palavra e a partir dela. Para Vigotski (2000, p. 287) “[...] a álgebra liberta o pensamento da criança da prisão das dependências numéricas concretas e o eleva a um nível de pensamento mais generalizado [...]”.

Com relação às especificidades da linguagem oral e escrita, o autor pontua que a linguagem escrita é o mesmo que a álgebra da escrita. Para ele,

[...] da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído, de igual maneira a álgebra da escrita ou linguagem escrita introduz a criança no plano abstrato mais elevado da linguagem, reconstruindo, assim, o sistema psicológico da linguagem falada anteriormente constituído. (VIGOTSKI, 2000, p. 314)

Nessa perspectiva, há independência no processo de desenvolvimento e no processo de aprendizagem. Vigotskii (2010, p. 109, grifos do autor) parte do princípio de que *“a aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar. A aprendizagem escolar nunca parte do zero. Toda a aprendizagem da criança na escola tem uma pré-história”*. Para ele, a criança tem uma pré-escola de aritmética (no sentido de aprender antes da escola propriamente dita) e, podemos completar, ela tem uma pré-escola de álgebra, pois desde pequena consegue perceber semelhanças e diferenças entre objetos, abstrair suas características e perceber as regularidades. No entanto, o autor destaca que a aprendizagem que ocorre na escola não é a mesma de antes; ele quer é chamar a atenção para o fato de que *“aprendizagem e desenvolvimento não entram em contato pela primeira vez na idade escolar, portanto, estão ligados entre si desde os primeiros dias de vida da criança”* (VIGOTISKII, 2010, p. 110).

Na relação entre pensamento e linguagem e a formação de conceitos, Vigotski (2000) distingue os conceitos espontâneos (cotidianos), dados via inserção na cultura, de conceitos científicos, desenvolvidos por meio de relações intencionalmente organizadas – sendo estes últimos responsabilidade das instituições de ensino. O autor destaca que os novos estágios no desenvolvimento das generalizações ocorrem por meio da transformação dos estágios precedentes, pela generalização de elementos já generalizados anteriormente, e que

[...] o desenvolvimento dos conceitos tanto espontâneos quanto científicos é, no fundo, apenas uma parte do desenvolvimento da língua, exatamente o seu aspecto semântico, porque, em termos psicológicos, o desenvolvimento dos conceitos e o

desenvolvimento dos significados da palavra são o mesmo processo apenas com nome diferente; por isso há fundamentos para esperar que o desenvolvimento do significado das palavras como parte do processo geral de desenvolvimento da língua venha a revelar as leis próprias da totalidade. (VIGOTSKI, 2000, p. 368)

A aprendizagem escolar possibilita algo novo no desenvolvimento da criança. Mesmo admitindo a independência dos dois processos, “existe uma relação entre determinado nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem” (VIGOTSKII, 2010, p. 111). Para discutir essa relação, o autor utiliza-se dos conhecimentos de desenvolvimento real ou efetivo e desenvolvimento potencial. O desenvolvimento efetivo refere-se àquilo que já foi alcançado, um desenvolvimento já realizado, que possibilita o realizar sozinho das tarefas propostas. Aquilo que a pessoa consegue com o auxílio de outra mais experiente é o que o autor denomina de desenvolvimento potencial.

O que a criança pode fazer hoje com o auxílio dos adultos poderá fazê-lo amanhã por si só. A área de desenvolvimento potencial permite-nos, pois determinar os futuros passos da criança e a dinâmica do seu desenvolvimento e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas também o que produzirá no processo de maturação. (VIGOTSKII, 2010, p. 113)

A essa distância entre o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial é o que o autor denominou de “zona de desenvolvimento proximal”, que não pode ser mensurada pelo professor, mas considerada na organização do trabalho pedagógico. É papel do professor assumir que os alunos se desenvolvem de maneiras diferentes e cada um a seu tempo.

Defendemos que cabe à instrução escolar o papel de promover aprendizagens aos estudantes, como forma de possibilitar seu desenvolvimento. Como afirma Vigotskii (2010, p. 115), “a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente”. A aprendizagem escolar é, pois, fonte de desenvolvimento, ela “orienta e estimula processos internos de desenvolvimento”. Com base nessas ideias, o autor formula o seguinte princípio: “o processo de desenvolvimento não coincide com o da aprendizagem, o processo de desenvolvimento segue o da aprendizagem, que cria a área de desenvolvimento potencial” (p. 116, grifo do autor).

Nessa perspectiva, cada disciplina escolar tem um papel fundamental para o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Como afirma Sforini (2015, p. 378), “a função principal da escola é a socialização do conhecimento produzido historicamente e consolidado nas diversas áreas do conhecimento”. O ensino precisa promover o desenvolvimento do aluno, o que só é possível, quando há uma atuação que leve em conta a zona de desenvolvimento proximal dos estudantes. Portanto, cabe ao professor “identificar os conhecimentos e capacidades que são comuns à turma, as aprendizagens que, de modo geral, já estão consolidadas e as que merecem investimento” (SFORINI, 2015, p. 383). Para a autora, mesmo considerando que o desenvolvimento de cada estudante seja singular, há traços comuns entre aqueles que pertencem a uma mesma sala de aula, e o ensino precisa ser construído com base nesses aspectos comuns. Numa sala de aula os alunos sinalizam seu processo de aprendizagem quando podem explicitar as suas ideias, com gestos ou linguagem oral. Para a autora, “tal explicitação verbal pode se apresentar como um diagnóstico da eficácia do ensino sobre a Zona de Desenvolvimento Próximo” (SFORINI, 2015, p. 385).

Portanto, defendemos a organização do trabalho pedagógico de forma intencional, desde a escolha das tarefas, a organização dos alunos, a mediação do professor, a socialização das hipóteses, à sistematização das significações produzidas pelo grupo.

As tarefas devem viabilizar o movimento do pensamento à palavra e da palavra ao pensamento. Por isso, a opção por propostas que possibilitem a elaboração de hipóteses e conjecturas é essencial, principalmente no que tange ao pensamento algébrico, que não se constitui na mera reprodução e repetição de técnicas, mas, principalmente, na percepção e na generalização de regularidades. As sequências elaboradas neste *ebook* propõem o trabalho com diferentes estratégias e, para isso, apresentamos tarefas que possibilitem a percepção de regularidades por meio do movimento corporal, de sons, sequências figurativas, sequências numéricas; o emprego de materiais manipulativos – que ajudem na percepção e na construção de sequências; o uso de balanças – que viabilizem o trabalho com a ideia de equivalência –; e o uso de tabelas que explicitem as relações funcionais. Isso porque acreditamos que um dos elementos primordiais ao desenvolvimento do pensamento algébrico é o emprego da imaginação, pois ela permitirá a elaboração de hipóteses que constituirão possíveis generalizações. Quando ao aluno é proposta, por exemplo, a identificação da figura  $n$  de uma dada sequência figurativa, ele é desafiado a empregar a imaginação para estabelecer relações que sejam válidas

para as figuras acessíveis, mas também para aquelas desconhecidas e não diretamente acessíveis naquele momento. O mesmo ocorre, quando solicitamos que seja criada uma sequência que siga determinado padrão. Além de criar uma sequência, o aluno se vê no movimento de garantir que ela siga um padrão lógico e compreensível. E, para criar, se faz necessário o apelo à imaginação. No entanto, a imaginação é haurida de elementos tomados da realidade e de vivências anteriores (VIGOTSKI, 2009); por isso, se não há a diversificação desses elementos, assim como das vivências possibilitadas no ambiente escolar, dificilmente os alunos conseguirão identificar e aguçar a percepção de regularidades, as relações funcionais e de equivalência, etc., e desenvolver o pensamento algébrico.

No campo da Educação Matemática, Mason (2007) e Radford (2012, 2013, 2014) discutem o pensamento algébrico na perspectiva histórico-cultural. Mason (2007) faz referências às maneiras de conceber a relação entre a palavra e o pensamento algébrico. Para ele, a generalização é o coração da matemática, e a palavra é fundamental para generalizar. A palavra representa um ato de generalização, e a álgebra não pode ser vista apenas como uma manipulação de símbolos, mas como uma linguagem flexível e sucinta, que exprime generalidade e restrição dessa generalidade.

A aritmética e a álgebra precisam ser vistas como “resultados naturais da aplicação de poderes humanos para contar e calcular” (MASON, 2007, p. 58), e o pensamento algébrico é requerido para produzir sentidos à aritmética, mais do que para desenvolver a álgebra instrumentalmente. Para ele, os seres humanos produzem sentidos para suas experiências e usam seus próprios poderes para coletar, classificar e, até mesmo, rejeitar sensações, sejam físicas ou imaginadas. Imaginação e imagens são significadas no decurso do desenvolvimento humano, o que empoderará os estudantes para pensar com imagens, diagramas ou símbolos. “O poder para imaginar e expressar necessita ser invocado na sala de aula, frequentemente e efetivamente, para encorajar estudantes a expressar generalidades percebidas, relações, conexões, propriedades, etc.”. (MASON, 2007, p. 60). Essa perspectiva se inter-relaciona com as discussões sobre imaginação na perspectiva vigotskiana, abordada anteriormente.

Esse desenvolvimento rumo aos processos de especialização e generalização só é possível pela linguagem, que, segundo o autor, é geral, pois o conceito está na palavra, que é generalizada: no início da escolarização, essa palavra é uma generalização de tipo mais primitivo; com o desenvolvimento intelectual da criança, ela é substituída

por generalizações de níveis mais elevados, e é esse processo que culmina na elaboração conceitual. Os processos de abstração e generalização são indissociáveis e complementares. Ao focalizar as características de um determinado objeto, algumas são observadas e outras, ignoradas; e esta é a base da abstração e da generalização. Nesse processo, a linguagem ocupa papel central. Daí a importância das interações em sala de aula e da possibilidade de que os alunos expressem seus pensamentos. Isso propicia que os alunos aprendam uns com os outros, apropriem-se das ideias dos colegas e atinjam generalizações mais elaboradas, empoderando-se e contribuindo para o empoderamento matemático dos colegas. Como afirma Mason (2007, p. 64-65): “o desafio para os professores é criar uma atmosfera na qual este poder natural é invocado e desenvolvido, porque ele é essencial para o próprio funcionamento do pensamento matemático, em geral, e o pensamento algébrico, em particular”. Para ele, desenvolver o pensamento algébrico desde o início da escolarização é uma forma de empoderar os alunos e inseri-los na atividade matemática, por nós entendida como a prática social escolarizada, que pressupõe: investigar, levantar hipóteses, questionar, experimentar, testar e validar hipóteses, justificar, ser capaz de expressar oralmente ou por escrito as ideias, argumentar e contra-argumentar.

Para Radford (2014, p. 267), o pensamento algébrico “pode ser considerado composto de componentes materiais e ideais: é constituído por formas ideológicas (internas e externas) de imaginação sensual, gestos, taticidade<sup>2</sup> e nossas ações reais com artefatos culturais”. O desenvolvimento da percepção é da mesma natureza que aquela do gesto ou da atividade simbólica, e eles se desenvolvem de maneira articulada. O pensamento pode ser considerado “uma prática social materializada no corpo (como ações cinestésicas, gestos, percepção, visualização), no uso de signos (exemplo, símbolos matemáticos, gráficos, palavras escritas e faladas) e artefatos de tipos diferentes (regras, calculadoras, etc.)” (RADFORD, 2012, p. 120). Para ele, portanto, o pensamento é uma unidade sistêmica que inclui múltiplas linguagens e formas cultural e historicamente constituídas e, por meio de mediações semióticas, pode ser desenvolvido em sala de aula. O desafio consiste em investigar como esses diferentes componentes (percepção, gestos, fala, artefatos e símbolos) são transformados nos processos de significação e a maneira pela qual eles se inter-relacionam, se organizam e reorganizam no desenvolvimento do

---

2 *Tactility* no original. Refere-se à qualidade de táctil.

pensamento algébrico desde os anos iniciais. Para Radford (2012, p. 121), não se trata de um processo inato, “é preciso considerar as condições contextuais que produzem novas formas de pensamento possível”.

## A NATUREZA DAS TAREFAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Nas seções anteriores explicitamos os pressupostos teóricos que nortearam nosso trabalho de elaboração das tarefas. Na perspectiva histórico-cultural, a intencionalidade pedagógica é central para o processo de ensino, pois este precisa visar ao processo de elaboração conceitual e acesso ao conhecimento científico. O planejamento do professor que tem como foco o “caráter ativo da aprendizagem” (SFORNI, 2015) precisa garantir que as tarefas elaboradas coloquem o estudante num contexto investigativo que permita o levantamento de hipóteses, o diálogo em sala de aula e a elaboração de sínteses, pelos alunos e pelo professor. Assim, apenas a escolha das tarefas não é suficiente para que seja criado um ambiente de apropriação e produção de conhecimentos, que viabilize o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A organização dos alunos é de extrema relevância, já que o trabalho em colaboração permite atuar nas zonas de desenvolvimento potencial. Dessa forma, alunos mais experientes podem colaborar com alunos menos experientes. As tarefas pressupõem que o trabalho em sala de aula seja em duplas ou pequenos grupos. Porém, ainda que se faça uma organização intencional dos modos de trabalho, o professor não se exime de seu papel como o mais experiente do grupo.

No desenvolvimento das tarefas, é de extrema importância a presença do professor, que organiza, problematiza, questiona e desestabiliza seus alunos, com vistas a alcançar avanços no processo de aprendizagem. A socialização das hipóteses criadas é, também, outro momento de extrema relevância, pois é nele que ocorre a interação entre os diversos grupos e entre as ideias desenvolvidas. Nessa etapa, o professor pode selecionar as diferentes estratégias e generalizações, compará-las e explorá-las, bem como lançar um



olhar para aquelas que não satisfazem as intenções propostas pelo problema. Novamente, ao socializar suas hipóteses, o aluno se vê no movimento do pensamento à palavra e desta ao pensamento.

A sistematização e as sínteses das significações produzidas compõem a parte de fechamento do processo, em que o professor organiza o que foi elaborado, tanto no desenvolvimento das tarefas como no momento de socialização, que pode gerar novas hipóteses, colocar à prova aquelas iniciais e, mesmo, reformulá-las.


Em cada um dos segmentos haverá orientações específicas para o desenvolvimento das tarefas em sala de aula.



Parte 1

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO  
ALGÉBRICO COM CRIANÇAS?...  
POSSIBILIDADES DE PRÁTICAS NA  
EDUCAÇÃO INFANTIL

GIANCARLA GIOVANELLI DE CAMARGO  
JULIANA BAGNE  
MARJORIE SAMIRA FERREIRA BOLOGNANI  
SELENE COLETTI





# DISCUSSÕES INICIAIS: O DESENVOLVIMENTO DA PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES EM SEQUÊNCIAS REPETITIVAS

Esta obra foi concebida a partir do pressuposto de que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde o início da escolarização. Já explicitamos anteriormente que concordamos com a distinção que alguns autores fazem entre álgebra e pensamento algébrico, embora sejam conceitos indissociáveis e complementares. Enquanto a álgebra pode ser pensada como uma linguagem, como um tipo particular da atividade matemática, o pensamento algébrico é um conjunto de habilidades intelectuais necessárias à álgebra (pensar analiticamente, generalizar, abstrair, etc.) (SQUALLI, 2000). Para este autor, é necessário um longo período de tempo para desenvolver esse pensamento.

Outro pressuposto que norteou o nosso trabalho é de que o pensamento algébrico pode se desenvolver antes do pensamento aritmético ou simultaneamente a ele; muitas vezes, acreditamos que estamos ensinando aritmética, mas, na verdade, estamos contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Portanto, um não é pré-requisito para o outro.

Tais pressupostos nos mobilizaram para discutir e refletir sobre as possibilidades de desenvolvimento de tarefas com crianças da Educação Infantil, visando identificar se elas percebem regularidades em sequências com padrão de repetição. Nesse sentido, o Grucomat fez seus primeiros ensaios em 2013, elaborando algumas tarefas e desenvolvendo-as com crianças de 4-5 anos. Os primeiros vídeos e registros das professoras já trouxeram indícios de que as crianças são capazes de perceber regularidades e falar sobre elas.

O desafio que tínhamos pela frente era: que tarefas poderiam mobilizar a criança para a percepção de regularidades? Se as regularidades estão presentes em sequências

de repetição, iniciar o trabalho pela própria compreensão do que seja uma sequência poderia ser um caminho promissor? Nossa aposta foi nesse sentido.

Evidentemente, acreditamos que nessa faixa etária não seja possível trabalhar com as diferentes funções da álgebra, mas qualquer tarefa que constitua a base para processos de generalização já constitui um modo de pensar algebricamente.

Como afirma Van de Walle (2009, p. 287), o pensamento algébrico “envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função”. Para esse autor, o pensamento algébrico penetra toda a matemática e faz parte de nosso cotidiano. A capacidade de prestar atenção e observar as regularidades existentes no nosso cotidiano leva-nos a fazer generalizações e aplicá-las a outras situações. Assim, nosso foco nesse nível de ensino foi na percepção de regularidades em sequências figurativas repetitivas (ou padrões), com o objetivo de que o aluno reconheça essa regularidade (ou padrão), seja capaz de descrevê-la, de dar continuidade a ela, de comparar com outras sequências e de criar as próprias sequências. Para isso, elaboramos sequências de tarefas que envolvem movimentos corporais, uso de materiais manipuláveis, uso de *tablet*, cantigas de roda, brincadeiras... A ideia é trabalhar com situações lúdicas, em que o corpo e o movimento estejam presentes.

Radford (2013) apresenta as características da generalização: aspecto fenomenológico e aspecto semiótico. São dois aspectos inter-relacionados, mas entendemos que nesse nível de escolarização, trabalhando apenas com sequências de repetição do motivo, os alunos estabelecem o raciocínio de indução e, dependendo da constância com que as tarefas são trabalhadas, por volta dos 5 anos, eles chegam à generalização aritmética, pois conseguem dizer quem são os próximos elementos da sequência, mas sempre necessitando do elemento figurativo.

Na perspectiva histórico-cultural, aqui assumida como base teórica de nosso trabalho, pensamento e linguagem são processos indissociáveis. Como afirma Radford (2014), o pensamento inclui a fala interior e a exterior, formas de imaginação, gestos, ritmos. Ele se compõe por meio de ferramentas culturais, produzidas historicamente, sempre mediadas pelos signos. Nesse sentido, a instrução dada pelo professor e o seu papel em sala de aula são fundamentais para o desenvolvimento desse pensamento. As mediações precisam contribuir para que o aluno desenvolva a capacidade de observar, perceber detalhes, semelhanças e diferenças entre os objetos, bem como utilizar-se de gestos para

expressar aquilo que está sendo percebido, mas, muitas vezes, falta a palavra adequada para expressá-lo. Por exemplo, para mostrar que um mesmo motivo numa sequência se repete, a criança poderá utilizar-se de gestos para explicitar essa regularidade. Entendemos que os gestos também fazem parte do processo de elaboração conceitual; muitas vezes, um gesto revela uma elaboração sofisticada que a criança está realizando (RADFORD, 2012). Portanto, nesse nível de escolarização, estamos entendendo que a criança inicia seu processo de construção do pensamento algébrico lançando mão de múltiplas linguagens, as quais precisam ser percebidas e estimuladas pelos professores.

O processo de análise e de abstração pressupõe que a criança se fixe em determinados atributos de um objeto em detrimento de outros, num movimento de focar e desfocar (MASON, 2007). Para esse autor, as crianças, desde pequenas, aprendem a discernir detalhes naquilo que escutam ou veem. Para ele, a capacidade de distinguir objetos ou características do objeto é que possibilita a própria aquisição da linguagem. O professor precisa se colocar à escuta da criança, ouvir o que ela está identificando num determinado contexto – por exemplo, se está buscando construir uma sequência de repetição com materiais manipuláveis, o que a leva a sequenciar os objetos numa determinada ordem – e não se apegar àquilo que havia sido previsto para a tarefa. Muitas vezes, o que um grupo de alunos identifica e generaliza numa tarefa pode não ser o mesmo que outros grupos identificam e generalizam.

Portanto, nessa faixa etária o trabalho na perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico deve priorizar o lúdico, a imaginação e o corpo como um todo. A seguir, algumas reflexões que subsidiaram o nosso trabalho.

## UM CORPO QUE FALA: O LÚDICO E A IMAGINAÇÃO NA INFÂNCIA

Apoiadas na perspectiva histórico-cultural, compreendemos que, à medida que o sujeito interage com o outro e com o meio, ele se apropria da dinâmica das relações sociais que marcam o grupo em que está inserido. A criança, sujeito de nossas reflexões constantes como educadoras da infância, possui, dentre tantas marcas peculiares, uma especialmente importante, objeto de nossas atenções: o brincar.

Para as crianças pequenas, brincar significa mais que momentos de passatempo e lazer: é uma forma específica de sistematizar os diferentes saberes experimentados na sua relação com seus pares diariamente e, especialmente, no mundo adulto. É importante ressaltar que o brincar auxilia na construção não apenas de elementos conceituais escolares, como também de noções a respeito da sociedade em que a criança vive, de relações com a cultura na qual está inserida, de relações familiares, entre outros. A criança é movimento, e, à medida que brinca e se movimenta, recria e repensa os acontecimentos à sua volta, e desenvolve a prática do respeito ao outro, da ética, além de habilidades cognitivas e motoras.

Ao ser exposta a uma brincadeira, ela constrói relações, conhece suas próprias limitações e supera seus limites. Assim, explicitada a relevância do brincar na apropriação dos conhecimentos e da cultura pelo sujeito, compreendemos que esta seria uma importante estratégia para tornar mais significativas as propostas experimentadas pelas crianças no percurso das tarefas.

Já em 2013, no início de nossas discussões sobre as tarefas que poderíamos propor para a Educação Infantil, sabíamos da importância do lúdico, da imaginação e da contação de histórias como base das propostas.

A perspectiva histórico-cultural atribui ao jogo de faz de conta papel central para o desenvolvimento da criança, pois brincar é a “atividade principal” para a criança e deve estar presente na prática cotidiana dessa etapa da educação. Cabe ressaltar que, segundo Leontiev (2010), a atividade principal não é a que ocupa maior tempo da criança, mas sim aquela na qual ocorrem as mais importantes mudanças no desenvolvimento psíquico infantil, que preparam caminho para um mais novo e elevado nível de desenvolvimento.

O lúdico amplia o desenvolvimento infantil: ao brincar, a criança passa a representar um personagem, age com objetos que simbolizam o que ainda não lhe é permitido, interage com padrões que ainda lhe são distantes, ultrapassa seus limites, incorporando a cultura do meio em que vive. Assim, não lhe sendo permitido dirigir um carro, a criança se apropria de objetos para representar o papel de motorista: age como ele e usa a linguagem, os movimentos, os conflitos próprios dele... Enfim, toda uma cultura passa a ser apropriada pela criança através da brincadeira e, conseqüentemente, propicia seu desenvolvimento.

Partindo dessa concepção, procuramos nas tarefas propostas à Educação Infantil

elementos lúdicos que motivassem as crianças, que lhes proporcionassem a aprendizagem e, conseqüentemente, seu desenvolvimento.

Percebemos claramente que muitas vezes, durante as tarefas já desenvolvidas em sala de aula, a criança se apropriou de conteúdos, pensou matematicamente, aprendeu e se desenvolveu. Um exemplo está no relato de uma das professoras colaboradoras sobre tarefa “Descubra o Segredo”, em que ela deixa claro que as crianças perceberam o “segredo”, ou seja, o padrão e, além disso, reconhece na atividade uma excelente *“oportunidade delas organizarem suas ideias com o objetivo de explicar o segredo descoberto”*. Neste caso, o uso da palavra “segredo” e não “motivo” aguça a curiosidade e o imaginário infantil.

A imaginação, assim como o lúdico, está fortemente presente nas brincadeiras entre as crianças, que misturam fantasia e realidade. Por essa razão, a imaginação foi considerada como essencial no planejamento das tarefas.

Segundo Vigotsky (2010), já na primeira infância (até os 3 anos) identificam-se processos de criação nas brincadeiras infantis. Ao brincar, a criança reelabora o que vivenciou e constrói uma realidade nova, que corresponde a seus anseios e necessidades. Vigotsky (2010) também pontua que a riqueza e a diversidade de experiência anterior da pessoa fazem toda a diferença na imaginação, ou seja, quanto mais rica a experiência, quanto mais a criança vir, ouvir ou vivenciar, maior será sua imaginação. É importante ressaltar que a infância é a fase em que a fantasia é mais livre e pode ser vivenciada de forma mais diversificada, mas não mais rica. Vigotsky (2010, p. 46) afirma: “a criança é capaz de imaginar bem menos do que o adulto, mas ela confia muito mais nos produtos de sua imaginação e os controla menos”.

A imaginação precisa fazer parte das práticas cotidianas da Educação Infantil, pois ela será fundamental para o desenvolvimento da criança. Segundo Lanner de Moura (1995, p. 22), a imaginação “é a base de toda tarefa criadora, aquela que possibilita a criação artística, científica e técnica”. Esta pesquisadora, em sua tese de doutorado, partiu de histórias com situações-problemas para trabalhar com medidas. Segundo ela, devem-se propor ações planejadas e organizadas, de forma a permitir a criação de significados culturais e a presença do lúdico, do imaginário e das representações simbólicas. Nesse contexto, acreditamos que desenvolver tarefas a partir de uma história com uma situação-problema, seria ideal para motivar e envolver as crianças e, conseqüentemente, possibilitar a aprendizagem.



Dessa forma, uma das tarefas propostas e desenvolvidas em sala de aula partiu de uma história conhecida das crianças: João e Maria, e outras situações-problema foram criadas, como na tarefa “O fio de contas”: “Um gigante precisa abrir a porta de seu castelo com sua chave mágica. Como ele é muito desastrado e deixou a chave cair, agora precisa arrumá-la de forma que fique certinha. Vamos ajudá-lo?”. Acreditamos que a criança se envolverá de forma mais significativa com a tarefa, já que se imagina como gigante, idealiza um castelo; assim, tem um problema *real* para resolver: abrir o *seu* castelo.

Como a atividade humana é aquela em que se cria algo novo, e a base para a criação é a imaginação, esta não poderia deixar de estar em nossa proposta.

Finalmente, não poderíamos deixar de mencionar a importância do registro das tarefas: ele é essencial para posterior avaliação, seja ele oral e tendo o professor como escriba, ou em forma de desenhos, fotos e vídeos. O registro oral permite que a criança organize logicamente seu pensamento, buscando argumentos para explicar a tarefa e sua resolução. Esse movimento permite a reflexão do grupo, que pode pensar a partir de diferentes estratégias de resolução.

O registro pictórico – desenho da tarefa – vai além, pois não só permite a reflexão sobre os diferentes pontos de vista e estratégias de resolução, durante a socialização dos desenhos, como também desenvolve a noção espacial, a proporcionalidade e a ação criadora exigida durante o processo.

O registro por fotos e vídeos permite a observação e a análise de todo processo de resolução, possibilitando análises, inferências e elaboração de novas estratégias. Além disso, o registro é um instrumento importante para você, professor, que o tem para analisar também a sua prática, podendo pontuar o que deu certo, o que faltou e, assim, replanejar a tarefa e aperfeiçoá-la.

Nas tarefas desenvolvidas, foram realizados diferentes tipos de registro, que certamente contribuíram muito para a reflexão do nosso grupo, pois, mesmo não estando presentes, pudemos acompanhá-las e, dessa forma, avaliar e replanejar as ações.

É importante também explicar que, embora esta parte do livro seja relativa à Educação Infantil, algumas vivências em sala de aula são narrativas de professoras do 1º ano, pois as tarefas aqui relatadas podem ser desenvolvidas por crianças de diferentes idades.

No entanto, é fundamental que não se percam as características dessa faixa etária, com ênfase no lúdico e na imaginação infantil. Embora valorizemos o registro da criança

a partir da tarefa desenvolvida, fica a seu critério em quais momentos fazê-lo. Muitas vezes, as crianças se envolvem na brincadeira, e o registro, que nem sempre se configura como uma atividade prazerosa para todas as crianças, deixa de ser feito. Lembre-se de que você conhece a sua turma.

Ao longo das sequências propostas, observará que valorizamos algumas práticas da Educação Infantil: a conversa na roda; a contação e a criação de histórias; os momentos de discussão após a realização da tarefa; o trabalho em colaboração entre as crianças; o seu papel como mediador e como escriba, quando a tarefa exigir algum tipo de registro escrito; e, principalmente, a valorização do trabalho da criança. Também constatará que valorizamos o seu registro, antes e após a realização da tarefa. Seu planejamento, como registro inicial, é fundamental. Você poderá fazer as modificações que julgar necessárias. O tempo previsto para cada tarefa também não é fixo, vai depender do movimento da sala de aula. O registro feito por você após a tarefa é uma possibilidade de (auto) avaliação: nele você poderá anotar o desenvolvimento e os avanços das crianças, mas também a sua observação de como foi a realização da tarefa.

A seguir, apresentaremos as propostas de tarefas desenvolvidas pelo Grucomat, com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil. Elas foram organizadas em sequências, que possuem justificativas, objetivos, notas de orientação e vivências em sala de aula, para que você possa ter um material de apoio que o auxilie no desenvolvimento das propostas e para que se aproxime do movimento experienciado pelo grupo na sua elaboração.

## 1 SEQUÊNCIA 1: MOVIMENTOS COM O CORPO

### Justificativa:

Existem várias danças, músicas e brincadeiras que trazem regularidades de movimentos do corpo ou da letra da música a ser cantada. Nesta primeira sequência sugerimos cinco tarefas que apresentam tais características: dança circular, criação de movimentos pelas crianças, jogo do Tum Pá, o segredo da fila e amarelinha. Essas tarefas visam à vivência da criança e não precisam acontecer, necessariamente, na ordem proposta.

O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil pressupõe o processo de vivenciar o padrão com ênfase em propostas que promovam o movimento do corpo, e será a partir da comunicação das ideias em rodas de conversa após as brincadeiras que poderemos levantar indícios sobre a percepção da regularidade pelas crianças.

Nesta primeira sequência não há expectativa do registro da criança, e fica a seu critério sugeri-lo ou não. No entanto, o seu registro, professor, é fundamental, e ele pode ser feito – além do registro escrito – também nas formas fotográfica ou videográfica, para ser projetado em momento posterior à brincadeira, para promover a discussão coletiva entre os alunos. Durante a brincadeira nem todas as crianças percebem, necessariamente, o motivo de repetição, e é no momento da discussão coletiva, com as suas intervenções, que algumas crianças explicitarão tais ideias.

A etapa da Educação Infantil não dispõe de instrumentos tradicionais de avaliação, portanto o ideal é que você organize o seu registro para documentar o desenvolvimento da criança. Assim, a cada tarefa sugerimos algumas possibilidades de registro, o qual poderá ser feito no semanário ou em um portfólio próprio, ou em outro que seja usual no seu contexto de trabalho.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- perceber a regularidade dos movimentos da dança e de brincadeiras;
- perceber e continuar um motivo de repetição ou de crescimento;
- perceber e repetir uma sequência de gestos ou de movimentos corporais.

**Nível a que se destina:**

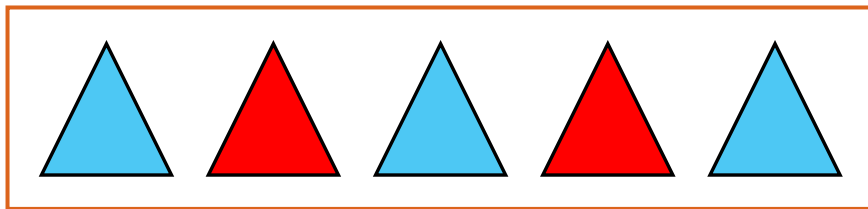
Educação Infantil (4-5 anos) e 1º ano do Ensino Fundamental.

**Tempo estimado:**

Cerca de 40 minutos para cada tarefa.

**👉 Notas para o professor:**

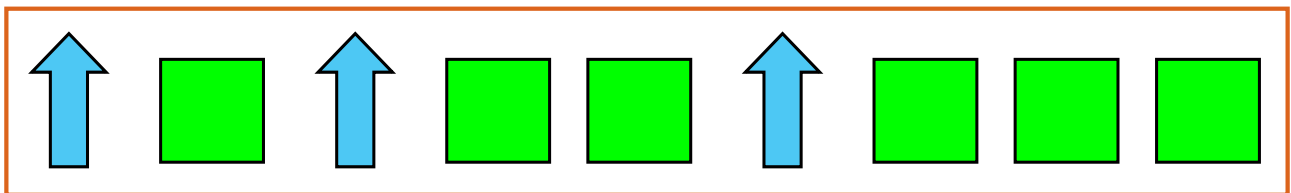
As propostas destas tarefas centram-se principalmente em **sequências de repetição**; os elementos que se repetem formam o motivo da **sequência**, como na Figura 1, em que o motivo de repetição é: triângulo azul e triângulo vermelho (Figura 1).



**Figura 1** – Exemplo de sequência de repetição

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Há também as **sequências recursivas**: aquelas em que cada novo elemento é o anterior ampliado, como na Figura 2.



**Figura 2** – Exemplo de sequência recursiva

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Nesse tipo de sequência não há um motivo de repetição. Alguns autores a denominam “sequência de crescimento”. Nessa sequência, o número de quadrados aumenta de um em um.

## 1.1 TAREFA: DANÇA CIRCULAR – “MORAVA NA AREIA SEREIA”

### Material necessário:

Vídeo disponível no *youtube*: <<https://www.youtube.com/watch?v=Jdx3kigK9vE>>



Figura 3 – Exemplo de brincadeira de roda

Fonte: Imagem da *internet*

### 📌 Notas para o professor:

- ✓ Letra da música “Sereia” (Rubinho do Vale) disponível em: <<https://www.letras.mus.br/rubinho-do-vale/1123115/>>

### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Inicialmente e na roda de conversa, apresente o vídeo uma vez; em seguida, converse com as crianças sobre a dança circular que aparece no vídeo. Ressaltamos que ainda não é o momento de destacar a regularidade.

**Etapa 2:** Proponha a dança às crianças e dance duas vezes com elas.

### 📌 Notas para o professor:

- **Sugestão para o movimento:** Em roda e de mãos dadas, inicie dando o primeiro passo com o pé que está dentro da roda. Caminhe dois passos. No refrão: “sereia”,

marque o passo dentro da roda com o pé de dentro, fazendo um balanço com o corpo. Recomece, iniciando sempre com o pé de dentro na roda.

- Durante a dança, acompanhe o movimento das crianças e a letra da música; verifique se elas conseguiram dançar e perceberam a regularidade presente no movimento e na letra.
- Esta é uma sequência de repetição. Os movimentos se alternam entre andar na roda e balançar o corpo em direção ao centro. Outra regularidade observada é a repetição da palavra “sereia” ao final de cada verso.

**Etapa 3:** Embora nossa intenção seja que a criança vivencie a brincadeira, você poderá, ao término da dança, colocar as crianças novamente na roda e conversar sobre o que observaram.

### Desdobramentos:

1. A dança pode ser repetida em outros momentos e até mesmo ensinada a outras turmas da escola.
2. Uma possível variação da dança é substituir a música, mantendo a sequência da palavra ‘sereia’. Exemplo:

*Se eu fosse um peixinho – sereia!*

*E soubesse a nadar – sereia!*

*Tirava a .... – sereia!*

*Do fundo do mar – Oh, sereia!*

3. Outras músicas possíveis para a dança:

- “A canoa virou”
- “Escravos de Jó”
- “Se eu fosse um peixinho”.

4. A dança também pode ser feita com parlendas. Exemplo: “Batatinha quando nasce”.

## Registro do professor:

O registro poderá ser aquele usual, em sua prática, como instrumento de avaliação da tarefa desenvolvida – por exemplo, anotar suas observações. É importante registrar se as crianças conseguiram dançar e perceberam a regularidade presente no movimento. Em momentos posteriores, se repetir a dança, observe se houve evolução na percepção da regularidade pelas crianças.

## Vivência em sala de aula:

Apresentamos duas vivências em sala de aula relativas a esta tarefa: uma na forma de relato; outra, como narrativa.

## Relato:

### Trabalhando com a música “Sereia”

A tarefa foi desenvolvida numa sala de aula de uma escola pública com 25 alunos, na faixa etária entre 4 e 5 anos.

Inicialmente foi garantida a apropriação da letra da música por todas as crianças e, diante da exploração dos movimentos juntamente com a letra proposta, elas conseguiram dançar, evidenciando, nos intervalos dos versos da música, o movimento correto, ao repetir o refrão. Perceberam, portanto, a regularidade da música.

No dia seguinte a professora propôs nova vivência da música e dos movimentos correspondentes. Em roda foram apresentadas as seguintes questões para o grupo de crianças:

1 – Como você explica como dançar essa música para um colega da classe da professora Sueli?

As crianças responderam, utilizando a linguagem corporal, girando em roda e, no refrão da música, balançando em direção ao centro da roda, dizendo “sereia”.

2 – O que na música se repete?

Para responder a essa questão, elas utilizaram novamente o movimento de dança e responderam “sereia”.

Em razão do pouco tempo disponível, a professora não explorou o outro movimento que se repetia na dança – o movimento de roda.

**Narrativa:**

“Se eu fosse um peixinho”

A tarefa foi desenvolvida numa turma de 1º ano, durante o momento da chamada. A professora utilizou a música tradicional, “Se eu fosse um peixinho”. Segue a narrativa da professora.

A narrativa refere-se à exploração da música “Se eu fosse um peixinho” numa classe de 1º ano. Nas classes do 1º ano são utilizadas diferentes estratégias para se fazer a chamada [verificação dos alunos presentes no dia da aula], explorando as letras do alfabeto e o nome, este tão significativo para as crianças.

A música “Se eu fosse um peixinho” é uma das utilizadas para trabalhar o nome. Por exemplo: “Se eu fosse um peixinho e soubesse nadar eu tirava a Ada...”. Os nomes das crianças são inseridos na ordem da chamada.

Depois da chamada, numa roda de conversa, comecei perguntando o que se repetia na música “Se eu fosse um peixinho”:

Lívia: *Pode repetir a mesma coisa...*

Profª.: *Qual é essa mesma coisa que se repete?*

Ariel: *“Se eu fosse um peixinho”.*

Livia: *A gente canta duas vezes a música igual, mas a pessoa não. [...]*

Profª.: *Então quais partes do “Se eu fosse um peixinho” são iguais, em todas as vezes que a gente canta?*

Petra: *[canta, colocando o nome da Gabrielly]*

Profª.: *Eu canto toda a vez Gabrielly?*

Lívia: *Se eu cantar 2 vezes, mil vezes, a música é igual, mas a pessoa não.*

Lívia compreendeu o que acontecia na música, porém percebi que muitos não estavam entendendo ainda, pois eu retomava (a fala da aluna) e continuavam cantando a música toda ou respondendo o nome dos alunos. Foi então que resolvi mudar a pergunta para qual parte da música que não se repetia. Arthur explicou que era quando tirava o nome (da chamada). Passei a outros questionamentos:

Profª.: *Hoje quando eu cantei “Se eu fosse um peixinho” na chamada e eu tirava o nome, como o Arthur disse, quantas vezes nós cantamos para tirar o nome de todo mundo da chamada?*



Matheus: *Um monte.*

Maria Luiza: *24 [estavam presentes 24 crianças naquele dia].*

Prof<sup>a</sup>.: *Se os outros quatro que estão em casa estivessem aqui, eu cantaria quantas vezes?*

Gaby: *28.*

Prof<sup>a</sup>.: *Se eu tivesse cantado 5 vezes, eu teria tirado o nome de todos?*

Alunos: *Não.*

Edson: *Olha aqui 1, 2, 3, 4, 5 [conta] e o restante ia ter faltado todos.*

Prof<sup>a</sup>.: *Se na classe estivessem 30 alunos e eu cantasse 10 vezes, eu tiraria todos?*

Livia: *Eu ia contar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e ia faltar.*

Prof<sup>a</sup>.: *Quantas vezes eu teria que cantar para tirar todos?*

Nicolas: *30 vezes.*

Num outro momento, quando fiz a chamada com a música “A canoa virou”, fiz questionamentos semelhantes e pude notar um número maior de crianças compreendendo a proposta.

## 1.2 TAREFA: IMITE E CRIE

### Descrição da tarefa:

Em roda, proponha uma brincadeira:

**Etapa 1:** Você faz um gesto, e a criança ao lado deve repetir e criar outro; a próxima criança deve fazer os dois gestos e criar um terceiro gesto; e assim, sucessivamente.

Essa é uma sequência recursiva (de crescimento). Sugere-se que haja um limite de crianças para realizar os movimentos e também algumas possibilidades para organização do grupo de crianças.

- 1 – A sequência será finalizada com o erro da criança. A criança que errou começará a nova sequência.
- 2 – Do 1º ao 5º elemento da roda são criados os movimentos crescentes; a partir do 6º começa uma nova sequência de movimentos.

- 3 – Você pode trabalhar com pequenos grupos, enquanto os demais alunos desenvolvem outra atividade.

A brincadeira pode ser repetida quantas vezes você quiser e em diferentes momentos.

### Registro do professor:

Fica a seu critério se fará a roda de conversa após a brincadeira, para formular questões, fazer intervenções do que foi vivenciado. Você poderá fazer o registro de suas observações sobre a brincadeira, pontuando quem conseguiu dar continuidade à sequência, a partir do motivo de repetição (caso a sequência tenha sido repetitiva); no caso de ter trabalhado com a sequência recursiva ou de crescimento, discuta com os alunos o que aconteceu a cada novo gesto criado.

### Vivência em sala de aula:

Na narrativa a seguir a professora colaboradora descreve o desenvolvimento da proposta em uma turma de 17 alunos – crianças com 5 anos – da Educação Infantil de uma escola pública. As Figuras 4, 5 e 6 revelam percepções dos alunos sobre a tarefa aqui relatada.

Nas primeiras vezes que brincamos, notei que a graça da brincadeira estava em fazer o próprio gesto, sem preocupação com a repetição dos movimentos anteriores, ou seja, as crianças não seguiam o padrão e usavam pouca criatividade para criar movimentos novos (palmas, bater o pé, levantar os braços, mostrar a língua, assobiar e estalar os dedos). Faltava repertório de ideias para conseguir acompanhar a dificuldade da brincadeira.

No dia seguinte, resolvi propor uma brincadeira mais simples, fazer uma roda e brincar de imitação: Em pé na roda, cada um, na sua vez, deveria criar um movimento que todos deveriam repetir. Foi interessante, pois surgiram muitas ideias para novos movimentos (saltar, pular, abaixar, bater nas pernas, fazer polichinelo, rodopiar, sacudir as mãos, estender os braços para frente e para trás, etc.).

Dentro dessa grande roda, formamos um grupo menor com apenas cinco crianças e retomamos a regra da brincadeira “Imite e Crie”, pois achei que dessa maneira seria mais fácil memorizar a sequência. Deixei que as próprias crianças

se agrupassem e, nessa configuração, alguns grupos conseguiram memorizar os movimentos sem esquecer nenhum nem a ordem. Alguns deles ajudavam os colegas, repetindo a sequência; no entanto, outros faziam apenas o seu.

Alguns alunos se apoiavam na professora ou nos colegas –para eles o grau de dificuldade da brincadeira foi alto; outros perceberam a necessidade de concentrar-se e conseguiam completar a sequência dentro dos grupos pequenos com apenas cinco pessoas.

Retomamos a brincadeira em outro dia, dessa vez na grande roda, e combinamos que quem errasse começaria uma nova sequência. Foi possível notar que a concentração foi maior, conseguiram seguir um padrão de crescimento envolvendo até sete ou oito crianças.

Voltamos para a sala, onde propus que registrassem a brincadeira (Figura 4), uma dinâmica sempre muito interessante de se fazer. Nesse dia estavam presentes 15 alunos, e eu participei da brincadeira.



**Figura 4** – Desenho da aluna Yasmin

**Fonte:** acervo da professora

Yasmin disse que preferia brincar no grupo menor, pois considera mais fácil repetir o movimento do amigo e criar o seu (Figura 5).



**Figura 5** – Desenho da aluna Heloisa

**Fonte:** acervo da professora

O desenho da Heloisa é rico em detalhes, a maioria das crianças fez uma representação parecida com a dela, em que todos os participantes representados estão fazendo o mesmo movimento (Figura 6).



**Figura 6** – Registro de João Pedro

**Fonte:** acervo da professora

É interessante notar o registro de João Pedro, que ainda não consegue acompanhar a dificuldade da brincadeira; no entanto, contempla em seu registro todos os 15 colegas e mais a professora.

Quando a brincadeira fica difícil demais, ela frustra, quando fica fácil demais ela entedia. Você deve mediar essa situação, mantendo os alunos em uma linha

intermediária durante a experiência da brincadeira, de forma que eles fiquem imersos em um constante estado de desafio.

### 1.3 TAREFA: SEQUÊNCIA CORPORAL E MUSICAL – JOGO DO TUM PÁ

#### Material necessário:

Vídeos disponíveis no *youtube*:

<<https://www.youtube.com/watch?v=eVSrfdVf1Jw>>

<<https://www.youtube.com/watch?v=37OP-SOe9dY>>

#### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Em roda, apresente para as crianças o vídeo “Jogo do Tum pá”, do grupo musical Barbatuques. O vídeo tem duas versões; você poderá escolher uma delas. Ou, então, trabalhar com as duas.

**Etapa 2:** Converse sobre a sequência apresentada no vídeo e proponha que brinquem, imitando os gestos.

**Etapa 3:** Após a brincadeira, converse sobre a regularidade dos movimentos.

Possíveis questões:

– O que acontece nessa brincadeira?

Resposta esperada: repete alguns gestos, numa certa ordem.

– O que tem que acontecer para a brincadeira dar certo?

Resposta esperada: todos têm que fazer os gestos ao mesmo tempo.

**Etapa 4:** Divida a turma em grupos de cinco crianças cada. Proponha que cada grupo crie uma sequência de sons e movimentos que se repetem:

Após essa primeira exploração, cada grupo deverá apresentar sua criação para o restante da turma – em um tempo predeterminado.

As crianças serão convidadas a analisar coletivamente as sequências criadas pelos grupos. Perguntas que podem ser feitas:

– Os colegas conseguiram criar uma sequência com repetição de gestos?

– O que se repete na brincadeira criada?

Para o momento de socialização também poderão ser feitos vídeos de cada grupo para serem projetados e discutidos pela turma.

Outra possibilidade é fotografar cada etapa do movimento e depois, com o uso de um *tablet*, fazer a sequência de gestos. Essa seria uma forma de um grupo ensinar a outro como fazer a sequência de sons e movimentos.

### Variações:

1. Você encontrará no *youtube* outros vídeos que também poderão ser usados.

Exemplo: **Yapo**, com o grupo Palavra Cantada, disponível em:

<<https://www.youtube.com/watch?v=AtDjQblhIK8>>

2. Se não for possível o acesso à Internet, há algumas músicas conhecidas do repertório dos docentes da Educação Infantil. Exemplos:

– “Cabeça, ombro, joelho e pés”;

– “A boneca de lata” – essa é uma sequência recursiva, com crescimento da quantidade dos gestos realizados ao longo da música:

*Minha boneca de lata caiu com a cabeça no chão*

*Levou mais de uma hora pra fazer a operação*

*Desamassa aqui, pra ficar bom*

*Minha boneca de lata caiu com um braço no chão*

*Levou mais de duas horas pra fazer a operação*

*Desamassa aqui, desamassa aqui, pra ficar bom*

*Minha boneca de lata caiu com o outro braço no chão*

*Levou mais de três horas pra fazer a operação*

*Desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui pra ficar bom*

*Minha boneca de lata caiu com uma perna no chão*

*Levou mais de quatro horas pra fazer a operação*

*Desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, pra ficar bom*

*Minha boneca de lata caiu com a outra perna no chão*

*Levou mais de cinco horas pra fazer a operação*

*Desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, pra ficar bom*

*Minha boneca de lata caiu com o corpo no chão  
Levou mais de seis horas pra fazer a operação  
Desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, pra ficar bom  
Minha boneca de lata caiu com o bumbum no chão  
Levou mais de sete horas pra fazer a operação  
Desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, desamassa aqui, pra ficar bom  
Ficou bom!*

Além das músicas sugeridas, você também poderá utilizar músicas do seu cotidiano.

### Registro do professor:

Você poderá analisar as videogravações e as fotografias produzidas durante a brincadeira, avaliando se as crianças atingiram o objetivo proposto. No caso do trabalho com diferentes tarefas, avalie se os alunos estão avançando nas ideias e na capacidade de perceber regularidades, identificando o motivo, quando houver sequências repetitivas.

## 1.4 TAREFA: DESCUBRA O SEGREDO

### Descrição da tarefa

**Etapa 1:** Esta brincadeira consiste em organizar uma fila, de modo que haja um motivo de repetição. A Figura 7 ilustra a sequência.



**Figura 7** – Modelo de sequência corporal na fila

**Fonte:** Imagem da *internet*

Exemplos de motivo de repetição:

- em pé, agachado, em pé, agachado;
- menino, menina, menino, menina;
- de sandálias, de tênis, de sandálias, de tênis;
- calçado, descalço, calçado, descalço.

Pode-se iniciar a brincadeira coletivamente com toda a turma ou parte dela e, enquanto uma turma organiza a fila sob o seu comando, a outra observa a fila; ao final, trocam-se os papéis. Você pode começar a organização da fila, dispondo as crianças segundo um motivo. A sugestão é que o motivo tenha apenas dois ou três elementos. Após a repetição de dois ou três motivos, você solicita aos demais alunos que entrem na fila, seguindo o segredo iniciado. Explore a ideia de que o segredo se refere aos elementos que se repetem numa mesma posição.

**Etapa 2:** Em roda, coletivamente, você explica a brincadeira: duas crianças sairão da sala, pois elas terão que descobrir o segredo da fila que as demais crianças criarão.

A brincadeira pode ser repetida enquanto as crianças estiverem envolvidas.

**Etapa 3:** Ao final, você poderá propor uma roda de conversa, discutindo com as crianças o que elas observaram e quais segredos (motivos de repetição) foram criados.

**Etapa 4:** Esta tarefa poderá ser registrada pelas crianças desta forma: ao final da roda de conversa, proponha que desenhem uma das filas organizadas na brincadeira. A expectativa não é de avaliar se os alunos desenham de forma ideal, mas se conseguem colocar, no desenho, elementos que indiquem a compreensão do motivo de repetição na brincadeira. Esse registro poderá ser compartilhado com os colegas da classe. Você pode aproveitar esse momento para fazer intervenções com questões que ajudem os alunos a explicitar suas ideias.

**Registro do professor:**

Você poderá fotografar as filas organizadas pelas crianças e projetar as fotos no momento da roda, para discussão dos motivos criados. E, ainda, registrar os avanços



dos alunos; o quanto conseguem perceber os motivos de repetição e falar sobre eles. Caso tenha sido solicitado o desenho, anote as principais características dos desenhos, os avanços das crianças, a forma como elas explicam, etc. Diante da exposição dos desenhos e das ideias das crianças a respeito da brincadeira, você poderá realizar registros e comparar as observações das crianças quanto à construção da sequência em si e à apropriação – ou não – do motivo da sequência.

### Vivência em sala de aula:

Esta narrativa relata o desenvolvimento da tarefa em uma sala de aula da Educação Infantil com crianças de 5 anos de idade:

#### Descubra o Segredo

Na primeira vez em que brincamos, a dupla sorteada – Bruno e Pedro – demorou para perceber a sequência. Perguntei qual era o segredo daquela fila. Primeiro, Bruno descreveu as posições, criança por criança. Quando perguntei quantas posições eles estavam vendo, Bruno contou quantas crianças estavam com os braços para cima e quantas estavam com os braços para baixo, no total (8 e 7). Quando insisti, dizendo “Expliquem, então, qual é a ordem, a sequência, como esta fila foi organizada”, é que eles disseram, mais uma vez imitando com o corpo, o segredo da brincadeira. Desta vez, até para mostrar como se brinca, dei vários exemplos de sequências que poderiam ser feitas.

No segundo dia, iniciamos, retomando as regras da brincadeira. Elisa e Lucas falaram que duas pessoas são sorteadas e têm que se esconder fora da sala de aula. Bruno falou: “*Tem que fazer uma fila com uma sequência*”. Foram sorteados Paulo e Laura, que foram se esconder.

Wagner sugeriu “*braços abertos e braços fechados*”. Para as crianças se organizarem, fui perguntando uma por uma, e cada criança foi se posicionando de acordo com a sequência combinada. Nem todas sabiam a posição que fariam. Ana precisou que retomássemos a sequência do começo, até chegar nela.

Paulo e Laura foram chamados. Ao ver a fila, Laura já falou no ouvido de Paulo como era a sequência, mostrando com seus braços as posições que observava na fila. Pedi que nos explicassem. Laura se adiantou a falar, imitando a posição de Ana – o primeiro da fila –, colocando-se a sua frente e falando “*Assim*”, na frente de Raquel “*A Raquel também*” [com os braços abertos], “*A Elisa assim e a Laura assim*” [todos com os braços abertos].

Questionei: “*Como é que vocês podem explicar quantas posições diferentes vocês estão vendo?*”. Laura e Paulo foram contando “1, 2, 3, 4, 5...”, um por um. Perguntei: “*Tem 12 posições diferentes?*”. Ana respondeu: “*Tem duas*”.

Depois foi a vez de Paulo explicar. Também mostrou, imitando, a posição dos amigos, quando perguntei quantos jeitos diferentes de braços as crianças fizeram.

Os próximos sorteados foram Emily e Bruno, que foram se esconder. Laura sugeriu mãos para cima. Perguntei quantas coisas diferentes poderíamos fazer. Laura respondeu três, e já começamos a organizar a sequência. João sugeriu mãos nas orelhas, e Ana falou “*Assim*” [imitando patinhas de coelho]. Novamente todos foram se posicionando... Como Emily e Bruno são duas crianças muito espertas, não foi tão difícil para eles descobrirem a sequência, apesar da estranheza inicial de ser um padrão de repetição com três posições.

Neste dia, nossa diretora colaborou, ao filmar a brincadeira. Esta forma de registro me possibilitou resgatar as falas e atitudes – minhas e das crianças – que seriam impossíveis de recordar somente através da memória. Além disso, pude perceber quais palavras eu poderia ter utilizado para melhor entendimento das crianças. Um exemplo: quando eu perguntava qual o segredo da brincadeira, enfatizando **quais** e **quantos** jeitos, posições,... estavam vendo na fila, a maioria das crianças entendia o total de posições **iguais**; por isso Bruno e Laura contaram quantas crianças estavam na mesma posição. Quando passei a falar quantas posições **diferentes** estavam vendo, ficou mais claro para elas visualizarem o padrão de repetição.

Respondendo à pergunta “*As crianças identificaram o padrão que se repete na fila?*”: Sim, elas foram capazes. E, além disso, a brincadeira foi uma grande oportunidade para elas organizarem suas ideias, com o objetivo de explicar (verbalizar) o segredo descoberto. E estavam brincando!

## 1.5 TAREFA: AMARELINHA

### Descrição da tarefa:

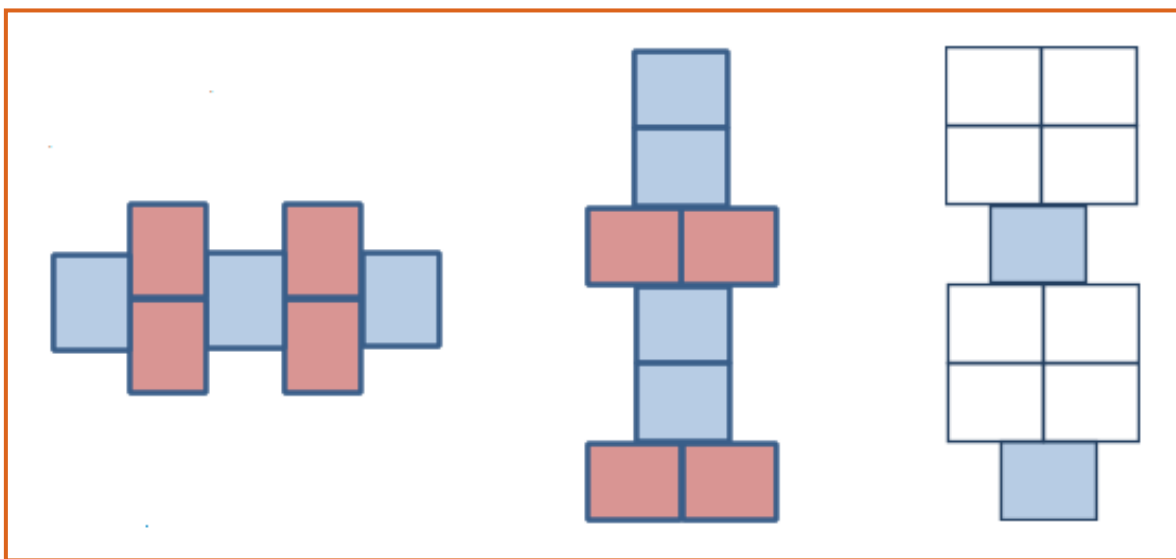
**Etapa 1:** A amarelinha é uma brincadeira presente na maioria das culturas infantis e bastante usada nas escolas. Em muitas instituições há diferentes modelos de amarelinha pintados no chão. Você poderá iniciar a brincadeira numa roda de conversa, indagando

os alunos se eles conhecem a amarelinha, quais tipos conhecem e os nomes que ela pode ter. Dependendo do país ou da região, a amarelinha tem diferentes nomes: macaca (Portugal, Pará e Bahia), sapata (Rio Grande do Sul), pular maré (Minas Gerais), avião (Rio Grande do Norte), etc.

**Etapa 2:** As crianças pulam a amarelinha com as regras que elas conhecem.

**Etapa 3:** Apresente outras possibilidades do jogo da amarelinha para as crianças. Você poderá desenhar a amarelinha tradicional no chão, e elas próprias criam a regra para pular. Ou desenhe modelos diferentes, e elas criam as regras. As amarelinhas não devem ser numeradas (Figura 8), para não induzir as crianças à criação de regras tradicionais, bem como para analisar se elas escolhem qualquer uma das extremidades para iniciar a brincadeira.

No momento da brincadeira você poderá videografar ou fotografar as regras criadas e as respectivas regularidades.



**Figura 8** – Exemplos de traçados de amarelinha

**Fonte:** Acervo do Grucomat

**Etapa 4:** Após a brincadeira, discuta com as crianças as regularidades no traçado das amarelinhas e nas regras criadas. Caso você tenha feito o registro da brincadeira, ele poderá mediar a discussão das regularidades, com a apresentação dos vídeos ou fotos.

A brincadeira poderá ser realizada em outros dias, com outras variações. As próprias

crianças poderão criar os traçados das amarelinhas e você discute se elas trazem ou não regularidades.

### Registro do professor:

Você poderá fotografar ou videografar as amarelinhas e projetar o vídeo ou as fotos no momento da roda para discussão dos motivos criados. Poderá, ainda, registrar os avanços dos alunos e o quanto conseguem perceber os motivos de repetição e falar sobre eles.

### Vivência em sala de aula:

A narrativa desta tarefa foi escrita por um dos componentes do grupo, a partir da observação da aula de uma professora colaboradora, em uma escola de Educação Infantil, com crianças de 5 anos.

A professora desenhou previamente três tipos de amarelinhas no chão da área externa da escola e levou as crianças até o local para que elas experimentassem a proposta. Nesse momento, subdividiu o grupo de crianças em três, e cada grupo brincou em uma amarelinha.

Em seguida a professora pediu que os alunos pulassem segundo uma regra determinada. O primeiro grupo deveria pular na seguinte sequência: “com um pé”, “com dois pés”; “com um pé”, “com dois pés”, até o final da amarelinha. O segundo grupo deveria pular nesta outra sequência: “com um pé”, “com um pé”, “com dois pés”; “com um pé”, “com um pé”, “com dois pés”. O terceiro grupo deveria pular na seguinte sequência: “com dois pés”, “com dois pés”, “com um pé”; “com dois pés”, “com dois pés”, “com um pé”. Um desafio que se apresentou ao grupo de crianças foi a questão do equilíbrio. Foi necessário um bom tempo de experimentação da brincadeira. Finalizada a brincadeira, a professora sentou com o grupo no mesmo local e realizou o seguinte questionamento com as crianças: *“Se eu quiser continuar o desenho da amarelinha, como devo desenhar os próximos quadradinhos?”*

Nesse momento, as crianças foram convidadas a levantar e desenhar a continuação da amarelinha, tal qual haviam sugerido. De maneira geral, as crianças compreenderam a ideia da repetição da sequência apresentada. Quando uma criança era convidada a desenhar e não dava sequência ao padrão proposto na amarelinha, outras crianças pontuavam para o colega a forma correta.

## 2 SEQUÊNCIA 2: LITERATURA INFANTIL

### Justificativa:

A criança da Educação Infantil tem um grande envolvimento com o lúdico e o imaginário. As histórias infantis, os contos de fadas e as fábulas, por exemplo, estão presentes nas práticas desse nível de escolarização. Acrescente-se a isso o interesse das crianças pelo uso de tecnologias. Tendo isso em conta, propomos duas tarefas envolvendo contação/criação de histórias e o uso do *tablet*. Caso você não disponha de *tablet*, a tarefa poderá ser fotografada e editada num computador.

Essas tarefas, que visam trabalhar com a noção de sequência como sucessão de acontecimentos, sem a existência de motivo de repetição, partiram de uma experiência já realizada no grupo, que revelou o envolvimento e a criatividade das crianças.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- recriar sequências de histórias conhecidas, a partir de planejamento e seleção de cenas que as compõem;
- criar histórias a partir de cenas fotografadas do cotidiano escolar.

### Nível a que se destina:

Educação Infantil (4-5 anos) ou 1º ano do Ensino Fundamental.

### Tempo estimado:

40 minutos (para cada etapa).

### Material necessário:

*tablet* (ou máquina fotográfica), tecidos, adereços.

## 2.1 TAREFA: LÁ VEM HISTÓRIA...

### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Inicialmente, proporcione às crianças a exploração do *tablet* para que se familiarizem com esse instrumento.

**Etapa 2:** Em roda de conversa, explique a elas a atividade que será realizada. Esclareça que, com alguns adereços, recriarão cenas de uma história clássica conhecida (“João e Maria”, “Chapeuzinho Vermelho”...).

Após a escolha da história a ser recriada, os alunos explorarão objetos disponíveis na escola, como tecidos, tiaras, coroas, máscaras, fantasias (de acordo com a história escolhida) e em seguida retomarão a história. Defina, coletivamente, os alunos que representarão os personagens e caracterize-os, usando tecidos e acessórios. Aqueles que não serão personagens terão o papel de fotógrafos. Escolha os que contarão a história para os outros grupos de crianças, utilizando-se do *tablet* para mostrar as cenas e a história elaborada.

Após este momento, explique que cada criança fotografará um local da escola, de forma a representar uma cena da história escolhida. Exemplo: para trabalhar com “João e Maria” – para a cena da floresta, devem fotografar um local com árvores e plantas, e assim por diante.

Você pode mediar, lembrando as cenas principais que devem ser fotografadas, acompanhando a turma no momento de fotografar.

**Etapa 3:** Após o registro das cenas da história escolhida, os alunos devem organizar, com a sua mediação, as imagens em sequência.

O grupo deve analisar se as fotos são suficientes ou se faltou alguma cena importante, se é preciso criar novas imagens para contemplar a história escolhida. Você ajuda a turma a editar no *tablet* a sequência das cenas.

Os alunos elaboram a história oralmente ou, se preferirem, podem registrá-la, tendo você como escriba.

Essa primeira contação pode ser feita para a própria classe.

**Etapa 4:** Apresentem a história para outras salas da escola.

## Registro do professor:

Você, além de organizar e mediar todo o processo, poderá acompanhar o envolvimento dos alunos, avaliando se eles conseguiram: recriar a história na sua sequência, recontá-la e criar as cenas. O registro poderá ser feito no seu semanário ou em outro instrumento utilizado para esse fim. Também poderão ser feitas fotos das crianças trabalhando ou mesmo videogravando a contação da história.

## Vivência em sala de aula:

Essa tarefa foi desenvolvida em uma turma de 15 alunos da Educação Infantil, com idades de 5 e 6 anos. A história selecionada foi “João e Maria”, que as crianças já trabalhavam de forma interdisciplinar em sala de aula.

A narrativa a seguir foi desenvolvida pela pesquisadora, ao observar a aula de uma das professoras colaboradoras.

Após a socialização da proposta da tarefa com o grupo e a manipulação e a exploração do *tablet* pelas crianças, estas definiram quem seriam as personagens e quem seriam os fotógrafos, criaram as personagens, a partir do material da sala do “faz de conta”, e selecionaram as cenas que seriam fotografadas, de modo a permitir o entendimento da história, e os espaços da escola para compor as cenas.

Com o planejamento finalizado, fantasias definidas, personagens e fotógrafos escolhidos, se dirigiram aos locais escolhidos para produzir as fotos das cenas com o *tablet*. A professora preferiu realizar as fotos na sequência da história, mesmo sabendo que isso não seria o mais prático, mas permitiria um melhor entendimento por parte das crianças. Os fotógrafos realizaram várias fotos de cada cena, para que depois selecionassem a que melhor representaria.

Na Foto 1, vemos a bruxa sendo fotografada na cena da prisão de João e Maria; percebe-se a pose das personagens e a colega fotografando a cena com o *tablet*. Os alunos utilizaram um antigo depósito de gás da escola.



**Foto 1** – Cena da bruxa prendendo João e Maria na “gaiola”

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Na Foto 2, podemos ver as crianças na cozinha da escola, quando elas utilizaram o forno para compor a cena em que Maria consegue empurrar a Bruxa para o forno.



**Foto 2** – Maria consegue empurrar a bruxa no forno

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Todos os momentos da atividade tiveram intensa participação das crianças, elas realmente se envolveram com as atividades e gostaram muito de realizá-las.

No dia seguinte, as imagens foram visualizadas no *notebook*. As crianças viam as fotografias e optavam por qual era melhor para representar determinada



cena. Houve também um momento de discussão sobre se havia faltado alguma parte importante da história a ser fotografada; para isso recontaram a história, utilizando as imagens já selecionadas e consideraram que as imagens produzidas bastavam para representar e permitir o entendimento da história.

Com as imagens escolhidas, passaram a contar a história com o auxílio do *tablet*, em um ensaio para apresentarem para outra sala, o que ocorreu no dia seguinte.

Consideramos que foi uma tarefa muito interessante e pertinente para a Educação Infantil, que certamente permitiu às crianças a percepção da importância da sequência.

## 1.2 TAREFA: FOTOGRAFANDO

### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Em roda de conversa, os alunos explorarão o *tablet*. Após esse momento, explique que cada criança fotografará um local da escola de sua preferência: salas, parque, cozinha, pessoas... É importante que todas possam manusear o *tablet* e fotografar.

Em seguida, percorra a escola em pequenos grupos ou com a sala toda, conforme sua preferência e a disponibilidade de pessoas para auxiliá-lo. Registre com o *tablet* os locais e as pessoas, de acordo com a escolha de cada criança.

**Etapa 2:** Terminada a etapa das fotografias, você, com o uso de um *datashow*, faz a projeção delas. Os alunos devem observar as imagens e coletivamente selecionar as fotos que comporão a história. Elas deverão ser separadas e organizadas na sequência que eles decidirem.

As crianças, a partir das fotos, irão criar uma história. Você mediará todo o processo de discussão e criação dessa história para que haja coerência, ajudará na organização das ideias e, como escriba, anotarà na lousa a versão final.

Terminada a produção, você lerá a história criada e, com a ajuda de uma ou duas crianças, fará a composição das fotos e do texto, avaliando a adequação ou a necessidade de alterações no texto ou na sequência de imagens.

**Etapa 3:** Coletivamente, escolha alunos para contar a história, utilizando-se do *tablet* para mostrar as imagens e a história elaborada. É importante oportunizar a participação de todos nesse movimento de contação. Dessa forma, eles estarão ensaiando para apresentar a outras classes.

**Etapa 4:** Apresentem para outras salas a história elaborada.

### Registro do professor:

Você, além de organizar e mediar todo o processo, poderá acompanhar o envolvimento dos alunos, avaliando a criatividade deles para a escolha do local ou objeto a ser fotografado, bem como a seleção das fotos e a própria criação da história. O registro poderá ser feito no seu semanário ou em outro instrumento utilizado para esse fim. Também poderão ser feitas fotos das crianças trabalhando e, mesmo, videograções da contação da história.

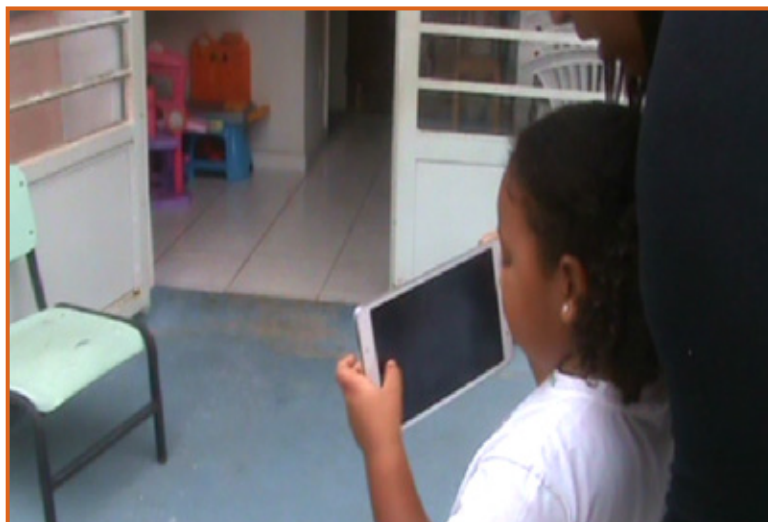
### Vivência em sala de aula:

Esta tarefa foi desenvolvida numa escola pública municipal, em uma sala de Educação Infantil com 16 alunos, crianças de 4-5anos.

A narrativa seguinte foi elaborada pela pesquisadora, após a observação da aula de umas das professoras colaboradoras. A proposta foi apresentada às crianças, que, já no início, gostaram da ideia e se mostraram curiosas, principalmente em relação ao uso do *tablet*, que foi manipulado por elas – sentadas em círculo na sala de aula – logo no primeiro momento da tarefa.

Após a exploração, a sala foi dividida em duas turmas: a primeira saiu para fotografar os locais de preferência e os demais alunos permaneceram em sala com a inspetora de alunos.

As crianças, em sua maioria, preferiram fotografar o parque, a rua, o pátio, ou seja, espaços externos. Uma criança chamou nossa atenção por querer fotografar uma cadeira quebrada que servia para segurar uma porta, evitando que essa se fechasse (Foto 3).



**Foto 3** – Criança fotografando uma cadeira quebrada

**Fonte:** Acervo do Grucomat

A segunda turma também teve preferência por fotografar os espaços externos da escola – parque, rua, flores pintadas no chão do pátio, plantas no parque –, além de uma cadeira quebrada, um urso de pelúcia e um colega na sala de brinquedos. Várias crianças fotografaram a rua e o parque.

No dia seguinte, lançamos a proposta: transformar as imagens em uma história! Para iniciar, as imagens foram visualizadas pelas crianças, que, dentre as várias do parque e da rua, escolheram uma de cada, definindo, dessa forma, as fotos da futura história.

Dando continuidade, ao serem questionados como e com qual foto iniciariam a história, rapidamente optaram por começar pelo menino, o colega fotografado na sala de brinquedos. Havia grande curiosidade de nossa parte sobre o que fariam com a foto da cadeira quebrada. Mas, para nossa surpresa, foi a foto que quiseram usar em seguida, pois uma aluno incluiu na história que o menino tinha quebrado a cadeira. Iniciou-se assim uma discussão, pois algumas crianças não queriam que a história tivesse um menino que quebrava a cadeira.

Resolveram a questão, dizendo que o menino tinha ficado com medo que achassem que ele tinha quebrado a cadeira, mas, na verdade, não tinha sido ele. E, assim discutindo, chegaram a esta história:

*Era uma vez um menino que morava na cidade, daí ele percebeu que a cadeira quebrou.*

*Ele saiu correndo e foi parar na floresta. Lá ele conheceu um urso e o urso era bonzinho. Ele cuidava de uma flor, para ninguém roubar.*

*Daí o urso chamou o menino para brincar no parque e eles ficaram amigos.*

A história, bem simples, traz em seu enredo todos os elementos fotografados, demonstrando ser possível lançar um desafio como este a crianças de 4-5 anos.

Após a elaboração da história, ensaiaram e apresentaram para os demais alunos da escola, utilizando o *tablet* para mostrar as imagens, como podemos ver na Foto 4:



**Foto 4** – Momento da apresentação da história criada para os demais alunos da escola

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Certamente os objetivos foram alcançados, e a tarefa revelou-se pertinente e motivadora para os alunos da Educação Infantil.

### 3 SEQUÊNCIA 3: MATERIAIS MANIPULÁVEIS

#### Justificativa:

O material manipulável faz parte do cotidiano da Educação Infantil. Geralmente as escolas possuem materiais diversificados, como: brinquedos, materiais pedagógicos (massas de modelar, blocos lógicos, barras *Cuisenaire*, blocos de encaixe, miniaturas de animais ou carros, coleções diversas), os quais poderão ser utilizados para composição de sequências repetitivas.

As sequências com materiais manipuláveis permitem um movimento mais dinâmico, pois, uma vez criadas, podem ser discutidas com os colegas e com você, professor, e podem ser refeitas, caso não tenham um motivo de repetição.

Lembre-se do seu papel central nos questionamentos e nas problematizações que faz ao grupo, de forma que os alunos possam explicitar qual é o motivo da sequência. E, no caso de equívocos, você poderá fazer mediações, propiciando o possível desenvolvimento do pensamento algébrico.

#### Objetivos:

- reconhecer o motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade;
- dar continuidade a uma sequência repetitiva;
- identificar os discursos matemáticos dos alunos, que emergem das tarefas.

#### Nível a que destina:

Educação Infantil (4-5 anos) ou 1º ano do Ensino Fundamental.

#### Tempo estimado:

40 minutos (para cada tarefa/etapa).

#### Material necessário:

Massa de modelar, pedaço de barbante (ou similar) e miçangas ou contas de diferentes cores.

## 1.1 TAREFA: CENTOPEIA

### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Você cria uma centopeia com massa de modelar para que os alunos, em roda, identifiquem como as cores se repetem no **corpo** da centopeia, ou seja, o motivo da sequência. Em seguida, solicita aos alunos que continuem o motivo, aumentando o corpo da centopeia, como representado na Foto 5.



**Foto 5** – Exemplo de uma centopeia com massa de modelar

**Fonte:** Acervo do Grucomat

No modelo apresentado na Foto 5, optamos por colocar a cabeça na centopeia. Observe que foi utilizada uma cor diferente para a cabeça. No entanto, se você julgar que a colocação da cabeça pode interferir na percepção do motivo, pode tirar a cabeça ou combinar com o grupo que a sequência será apenas para compor as partes do corpo.

**Etapa 2:** Em duplas, as crianças criam centopeias com um motivo de repetição, para o colega descobrir e continuar.

**Etapa 3:** As crianças poderão fazer o registro de uma das sequências criadas.

### Registro do professor:

No desenvolvimento da tarefa você acompanha as crianças trabalhando nos pequenos grupos, observando como produzem as sequências, fazendo questionamentos

para se certificar de que há compreensão do que seja o motivo de repetição. Nesse momento, as diferentes estratégias poderão ser revistas com as suas mediações.

Uma opção interessante é fotografar as sequências produzidas pelas duplas e projetar para discussão posterior de toda a turma. As discussões poderão ser encaminhadas com questões como: há um segredo (ou motivo de repetição) nessa sequência? Qual é? Se você fosse continuar a sequência criada pelos colegas, qual cor usaria para o corpo da centopeia?

No seu registro pessoal poderá anotar aspectos da participação das crianças: se elas utilizaram o material manipulativo de forma lúdica; se foram capazes de criar sequências com motivos de repetição; se conseguiram dar continuidade à sequência, explicitando o motivo. E avaliar se elas manifestaram avanços na percepção de regularidades.

### **Vivência em sala de aula:**

A narrativa aqui transcrita refere-se à experiência realizada com uma turma de 1º ano (5-6 anos) de uma escola pública. A classe tinha 27 alunos, e eles trabalharam em pequenos grupos nas etapas 1 e 2 da tarefa.

Seguindo a proposta do Grucomat, propus a atividade da centopeia. Inicialmente, na roda de conversa, relembrei a tarefa das fotos, nas quais as crianças criaram padrões nas filas que foram fotografadas para a outra classe adivinhar. Expliquei que iria fazer uma centopeia com a massinha, mas que eles deveriam adivinhar qual seria o segredo da arrumação que eu havia feito no corpo da centopeia. Rapidamente responderam corretamente, e fui perguntando como seria a continuidade da sequência que eu havia feito.

Propus, então, que no cantinho da massinha, em duplas, criassem uma centopeia para que a outra dupla descobrisse. Solicitei que fosse diferente da que eu havia apresentado.

Nesse primeiro cantinho Maria Clara e Maria Luiza produziram a centopeia abaixo para que Edson e Lívia, a outra dupla, adivinhassem o segredo. Eles também produziram uma (Foto 6):



**Foto 6** – Crianças elaborando uma sequência

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Centopeias terminadas, comecei a questioná-los, como pode ser acompanhado no diálogo a seguir:

Prof.: *Maria Luiza, qual o segredo corpo da centopeia deles?*

Maria Luiza: *Rosa, verde, rosa, verde...*

Prof.: *Se você fosse continuar, qual seria a próxima bolinha?*

Maria Luiza: *Rosa.*

Prof.: *Essa? [Pegando uma bolinha rosa]. E depois?*

Maria Luiza: *Verde.*

Prof.: *E você, Maria Clara, concorda com ela?*

Maria Clara: *Tem um padrão.*

Prof.: *Tem um padrão? E qual?*

Maria Clara: *Rosa, verde. Rosa, verde. Rosa, verde.*

Prof.: *É esse o segredo? O padrão é esse?*

[Maria Clara confirmou sua fala e perguntei para a outra dupla, se elas haviam acertado o segredo. A dupla explicou que sim e passamos a explorar a outra produção, a que havia sido produzida por Maria Luiza e Maria Clara].

Edson: *É colorido.*

Prof.: *Sim, é colorido. Mas qual é o segredo?*

Edson: *O padrão é cor de pele, rosa e azul. Cor de pele, rosa e azul. Cor de pele, rosa... [Haviam parado aqui].*

Prof.: *E qual vai ser a próxima?*

Edson: *Rosa.*



Prof.: *Depois deste rosa, outro rosa?* [Estava confundindo os dois tons de rosa].

Edson: Não [Repetiu a sequência novamente: cor de pele, rosa e azul]. É rosa e depois azul.

Prof.: *Você concorda com ele?*

[Lívia pensou e, depois que a professora repetiu o que Edson havia dito, concordou.]

Solicitei que produzissem outras sequências diferentes daquelas feitas inicialmente. As duplas produziram novas sequências e conseguiram, diante dos meus questionamentos, explicitar quais os padrões e a continuidade da sequência. Ao explicar, usaram novamente a palavra “padrão” ao invés de “segredo”. Alguns exemplos na Foto 7.



**Foto 7** – Alunos elaborando sequências

**Fonte:** Acervo do Grucomat

## 1.2 TAREFA: O FIO DE CONTAS

### Descrição da tarefa:

**Etapa 1:** Entregue para as crianças, em pequenos grupos, miçangas/contas e fios de barbantes ou similar para que manuseiem livremente. Questione o que fizeram com o material.

**📌 Notas para o professor:**

O material precisa ser selecionado cuidadosamente, certificando-se de que: os buracos das contas permitem a passagem do fio; os alunos dessa faixa etária conseguirão manusear; o material não traz riscos para as crianças (pôr na boca, no ouvido ou no nariz, comer...). Uma substituição do material seria possível com o uso de círculos de EVA recortados ou canudos coloridos cortados.

**Etapa 2:** Você apresenta aos alunos uma sequência pronta, preferencialmente com duas cores de conta. Por exemplo: uma azul e uma vermelha. Reproduza o motivo por três vezes e inicie a quarta repetição (Figura 9).



**Figura 9** – Modelo de sequência de contas

**Fonte:** Acervo do Grucomat

É importante que você não amarre as pontas do barbante, para não dar a ideia de colar ou pulseira. As pontas poderão ser presas separadamente com fita crepe, para que as contas não se soltem.

Apresente o fio de contas aos alunos e questione:

- I) Observem o fio de contas. Quais as cores que se repetem?
- II) Se vocês fossem continuar, qual seria a cor da próxima conta? Como vocês sabem disso?

Outra proposta para essa tarefa seria a contação de uma história, como forma de despertar o interesse e motivar a turma.

Por exemplo: “Um gigante precisa abrir a porta de seu castelo com sua chave mágica. Como ele é muito desastrado e deixou a chave cair, agora precisa arrumá-la de forma que fique certinha. Vamos ajudá-lo? A chave precisa ter 10 contas”. A Figura 10 traz o modelo da chave.



**Figura 10** – Modelo da chave

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Proponha, então, que os alunos reproduzam a chave feita (o fio que pode ser construído com pedaços de ‘macarrão’ de piscina) e continuem até chegar na décima conta da sequência.

Ao final, faça perguntas para se certificar de que houve compreensão e que as sequências foram montadas corretamente. As questões anteriores poderão ser utilizadas.

**Etapa 3:** As crianças elaboram as sequências.

Organize as crianças em duplas e distribua o material para que criem sequências para outra dupla descobrir o segredo. Use duas ou três cores diferentes.

**📌 Notas para o professor:**

Se você considerar que os alunos não conseguirão criar a sequência, poderá levar outros modelos já iniciados, com três ou quatro cores, para que as crianças continuem.

**Etapa 4:** Proponha a troca das sequências entre as duplas, caso elas tenham sido criadas pelas próprias crianças.

**Registro do professor:**

No desenvolvimento da tarefa, você acompanha as crianças trabalhando nos pequenos grupos, observando como produzem as sequências, fazendo questionamentos para se certificar de que compreenderam o motivo de repetição. Nesse momento, as diferentes ideias poderão ser revistas com as suas intervenções.

No momento da socialização das sequências, você precisa dar oportunidades para que todos possam expor o raciocínio utilizado. Lembre-se de que falar como pensou é uma das formas de desenvolver o pensamento algébrico.

No seu registro pessoal, você poderá anotar se a criança utilizou o material

manipulativo de forma lúdica, se foi capaz de criar motivos de repetição, se conseguiu dar continuidade à sequência, explicitando o motivo. E poderá também avaliar se elas manifestaram avanços na percepção de regularidades.

### Vivência em sala de aula:

A narrativa a seguir refere-se à tarefa 2, “Fio de Contas”, realizada em uma turma do 1º ano em uma escola pública.

Trouxe para a classe do 1º ano a tarefa 2 “Fio de Contas”. Mostrei para a classe as contas coloridas e perguntei o que achavam que era. Lívia disse que era algo de costura, Pedro disse se tratar de coisas para fazer colar e outra criança disse “*ser coisas para fazer pulseira*”. Expliquei o nome e para que serviam.

Expliquei que iria formar duplas e iria dar uma tira de barbante e colocaria nas mesinhas um tanto de contas amarelas e um tanto de vermelhas e eles poderiam fazer o que quisessem com elas (momento de exploração do material).

Fui passando nas duplas, perguntando o que iriam fazer: a maioria optou por fazer colar, apenas duas escolheram pulseira. Observei que neste momento de exploração inicial todos faziam usando as duas cores, montando uma sequência, utilizando como critério o vermelho e o amarelo e vice-versa. Percebi que algumas duplas colocavam as cores de ambos os lados, seguindo o critério de cores estabelecido pela dupla, amarelo e vermelho.

Depois de prontos, fomos até a roda e conversamos sobre o que cada um havia feito. Fui questionando um a um, se havia um critério usado para formar a sequência. Responderam que sim, as cores amarela e vermelha. Algumas crianças, quando faço esta pergunta, acabam repetindo toda a sequência.

Peguei um dos colares e perguntei: “qual o critério de cor utilizado?”, um aluno disse que era amarelo e vermelho; já Pedro disse que era vermelho e amarelo. Perguntei por que cada um estava dando uma resposta diferente. Pedro explicou que estava olhando “desse lado”, apontando o que começava pelo vermelho, e o outro havia começado pelo outro lado, amarelo e vermelho.

Lembrei com eles outra tarefa na qual tentamos adivinhar os segredos através das fotos e, conforme o lado que começávamos, descobríamos um segredo (critério) diferente.

Na sequência, expliquei que desta vez não íamos fazer um colar (prendendo as pontas como haviam feito), mas sim um fio, já que não iríamos amarrar. Disse

que iria prender um dos lados com a fita crepe na mesa para que a sequência não se desmanchasse. Pedi que olhassem o fio que eu estava montando (coloquei três amarelas e uma vermelha), como na Foto 8, e perguntei:



**Foto 8** – Sequência montada pela professora

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Prof.: *Quais cores foram usadas nesta sequência?*

Crianças: *Amarelo e vermelho.*

Pedro: *Na verdade são três amarelas e uma vermelha.*

Prof.: *Se eu fosse continuar, quais cores deveria colocar?*

[Alice vem mostrar, apontando com os dedinhos mais duas amarelas e uma vermelha, três amarelas e uma vermelha...]

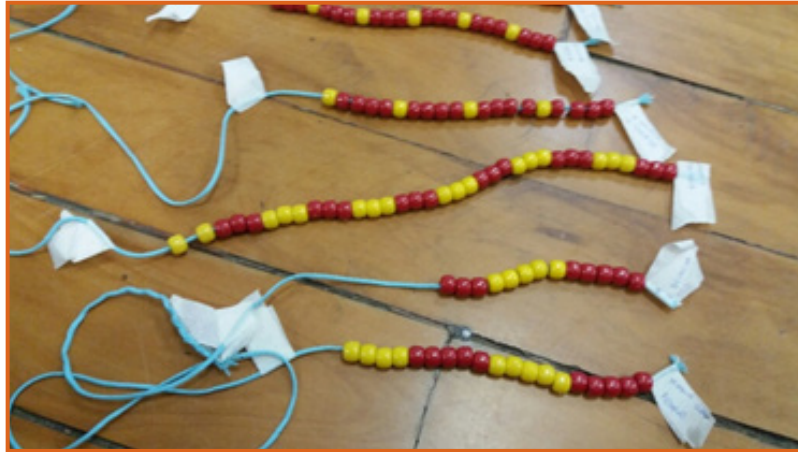
Chamei outras crianças para certificar se estavam compreendendo o solicitado e pedi que, em duplas, fizessem como o meu fio e continuassem até a 13ª conta.

Enquanto as duplas estavam trabalhando, fiz alguns questionamentos como: “qual a cor da pedrinha número 15?” e “a vermelha será qual número?”

Quando terminaram, voltamos para a roda e repeti os mesmos questionamentos feitos para algumas duplas. Para a primeira pergunta, “qual a cor da pedrinha número 15?”, muitas crianças diziam que seria amarela; quando perguntei por quê, Pedro explicou, mostrando os dedinhos “tem uma amarela, 13, mais duas 14, 15, são duas amarelas”. Fui chamando outras crianças, que também deram explicações semelhantes. Colocamos as duas pedras amarelas e contamos.

Para a pergunta: “qual o número da vermelha na sequência?”, Pedro rapidamente, disse que era 16 já que estava no 15 e, com mais uma, 16. Depois fizemos e conferimos para ver se Pedro estava certo.

A terceira proposta foi que cada dupla fizesse um fio com um critério diferente do que havíamos feito até o momento (Foto 9), pois não poderia mais ser como eu havia feito e nem como a do colar e da pulseira, para que outra dupla adivinhasse.



**Foto 9** – Colares produzidos pelas duplas para serem trocados

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Fui passando nas mesinhas e perguntando sobre o critério pensado e a possível continuidade. Depois de prontas, no dia seguinte, na roda, mostrei algumas e questionei qual o era o critério utilizado e como seria a continuidade. Pude perceber que muitos não apresentavam dificuldades para concluir a proposta.

## PARA ENCERRAR...

Você deve ter observado, principalmente na leitura das vivências em sala de aula, a importância das boas perguntas do professor e do ambiente organizado para realização da tarefa. Como destacamos em vários momentos do texto, as sequências – e nem mesmo todas as tarefas de uma mesma sequência – não precisam ser realizadas, necessariamente, na ordem aqui proposta. São nossas sugestões.

Muitas vivências apresentadas são de turmas de 1º ano. Isso não significa que as tarefas realizadas com essas turmas não possam ser desenvolvidas com alunos de 4-5 anos. O que muda são as problematizações, os tipos de pergunta que o professor pode elaborar e o tipo de resposta esperada.

Nessa primeira parte não estamos apresentando quais seriam as respostas esperadas para as tarefas; optamos por deixar que você se coloque à escuta de seus alunos, para ouvir o que eles têm a dizer sobre o assunto. Colocar-se à escuta da criança é valorizar seu conhecimento e atribuir-lhe protagonismo no seu próprio processo de aprendizagem. Algumas dessas vivências foram videogravadas, e os vídeos apresentados e discutidos no Grucomat, revelando o quanto as crianças se envolvem em tarefas que lhes fazem sentido. Elas participam, têm o que dizer e sabem ouvir os colegas.

Trata-se de empoderar as crianças, possibilitando-lhes o desenvolvimento do pensamento algébrico.



## Parte 2

# A CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL I: POSSÍVEIS TRABALHOS PARA A PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES E DE GENERALIZAÇÕES

CARLA CRISTIANE SILVA SANTOS  
CIDINÉIA DA COSTA LUVISON  
KÁTIA GABRIELA MOREIRA







## DISCUSSÕES INICIAIS

À luz da perspectiva vigotskiana, entendemos a educação como um processo de humanização. A escola, por sua vez, é responsável pela difusão dos conhecimentos científicos construídos ao longo da história pela humanidade. Esses saberes possibilitam ao sujeito uma nova visão de mundo. Para que a criança se aproprie deles, há que se desenvolver um trabalho intencional.

O indivíduo se apropria dos conhecimentos por meio das relações sociais, mediadas pelas palavras. Nesse processo, há a internalização das significações a partir da interpretação do contexto. Dito de outro modo, o sujeito se apropria dos conhecimentos à medida que lhes atribui significados; se constitui por meio da relação com o outro.

A comunicação, expressa pela palavra, é um elemento central no processo de aprendizagem, visto que, por meio dela, são manifestadas as significações, e o ato de comunicar possibilita novas (re)significações. Além disso, a palavra assume um papel essencial na elaboração conceitual.

A intencionalidade do processo educativo deve centrar-se na apropriação teórica por parte dos alunos. Portanto, a função da prática pedagógica é promover a transformação dos sujeitos por meio da internalização das ações realizadas e dos conceitos científicos, cuja apropriação gera transformações qualitativas no desenvolvimento cognitivo. Assim, o professor é responsável por criar um ambiente de investigação em que haja negociação de significados mediante a comunicação.

A aprendizagem se dá por meio das trocas, da mediação do outro. Tais trocas podem partir do professor ou acontecer entre os próprios alunos. Logo, destacamos a

importância de construir um ambiente que favoreça as trocas entre os sujeitos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.

Para Vigotski (2009), a inserção do sujeito no contexto social é o que possibilita a internalização das práticas culturais, as quais se tornam construções individuais. Para esse estudioso, tal processo só ocorre por meio da zona de desenvolvimento proximal, compreendida entre duas esferas: o desenvolvimento potencial e o real. Este último pode ser definido como aquilo que a criança já conhece ou sabe desempenhar sozinha, sem a mediação do outro. Já o desenvolvimento proximal se caracteriza por aquilo que a criança consegue fazer a partir da mediação do outro – colega mais experiente ou professor. Por fim, o desenvolvimento potencial é o que a criança pode aprender.

O papel do professor é possibilitar situações favoráveis à apropriação do conhecimento científico por meio do planejamento de tarefas que atuem na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, ou seja, que partam do desenvolvimento real com vistas ao desenvolvimento potencial. Se queremos que os alunos estejam imersos nessa construção de saber e a entendemos, efetivamente, como um processo, há que se criar uma cultura de sala de aula que permita o desenvolvimento.

Partindo de uma perspectiva vigotskiana, acreditamos que os múltiplos saberes que circulam dentro de uma classe, a prática docente e as relações que se estabelecem dizem respeito à cultura de sala de aula e ao aprendizado dos alunos. O papel do professor é muito importante, pois sua intencionalidade no planejamento das aulas de matemática promoverá o sucesso ou o insucesso de aprendizagem de seus alunos. Segundo Hiebert et al. (1997), a postura intencional e problematizadora do professor começa nas escolhas que ele faz ao elaborar tarefas desafiadoras e potencializadoras do conceito que quer desenvolver com seus alunos.

## A ORGANIZAÇÃO DA SALA DE AULA PARA O DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS

Van de Walle (2009) pondera que, nas aulas de matemática, além da postura problematizadora do professor, a potencialidade das tarefas e o modo como estas serão conduzidas precisam ser planejados antes mesmo de elas serem entregues para os alunos. Esse planejamento inclui três momentos: antes, durante e depois.

O momento *antes* seria aquele em que o professor, diante da necessidade de aprendizagem dos alunos, prepara a tarefa de maneira intencional, tendo em vista o ponto de chegada, a clareza dos objetivos, os conceitos que serão trabalhados e as possíveis perguntas que fará para que o aluno se coloque no movimento de reflexão e estabelecimento de relações. Notamos aqui a importância de o docente refletir sobre a tarefa que irá propor para os alunos. Nesse momento, há que se pensar em questões como: “Quem é minha turma? Onde os estudantes estão? Aonde quero chegar? Quais os instrumentos possíveis para a mediação?”.

O segundo momento, chamado de *durante*, seria o início e a realização da tarefa. Nele, o professor apresenta a proposta para os alunos e deixa que eles protagonizem a investigação, levantando as hipóteses e encontrando suas resoluções. Aqui é importante que o professor ande pela sala observando o raciocínio dos alunos e, caso haja necessidade, faça mediações que possibilitem avanços. Essa etapa é crucial, pois é nela que o docente perceberá como os estudantes estão compreendendo a tarefa e pensando sobre ela; sendo assim, as respostas dos alunos ajudarão o professor na condução da atividade e impulsionarão as discussões da socialização.

O último momento, o *depois*, seria o da socialização das resoluções dos alunos. Nele, o professor seleciona alguns destes para apresentar suas ideias. Nessa etapa, a intencionalidade e a mediação também têm um papel importante, pois o docente oferece espaço para os estudantes argumentarem e contra-argumentarem seus achados. É nessa fase que o discente colocará em xeque o que está entendendo da situação proposta, em um movimento de ir e vir do pensamento. Além disso, o professor também poderá problematizar no coletivo as ideias apresentadas, partindo sempre daquela resolução dos alunos que não chegaram ao conceito e se contrapondo à resposta que mais se aproxima do conceito. Por fim, é fundamental que o professor sistematize as ideias referentes ao conceito trabalhado.

Não há como prescrevermos uma receita ou um método fixo do trabalho em sala de aula; no entanto, defendemos que, por meio de um ambiente dialógico, em que haja trocas e negociação de significados, ocorre a transformação dos sujeitos envolvidos. Logo, as tarefas propostas aos alunos precisam colocá-los no movimento de pensar e refletir acerca dos conceitos matemáticos. Para tanto, elas precisam ser desafiadoras, provocar dúvidas, comunicações e reflexões.

Além disso, há que se desenvolver uma cultura de aula capaz de fazer com que os

alunos se sintam coautores no processo de ensino e de aprendizagem. Isso não significa deixá-los livres para suas explorações e construções, de modo que descubram, como em um passe de mágica, novas ideias matemáticas. Pelo contrário, a maneira pela qual a cultura de aula é estabelecida tem um impacto sobre o que é ensinado e o quanto há de compreensão (VAN DE WALLE, 2009).

Outro fator importante a ser discutido é o uso de ferramentas ou modelos como mediadores do processo de aprendizagem. Tais artefatos podem ser definidos como materiais manipulativos, recursos computacionais, desenhos, linguagem (oral/escrita/corporal). Embora muito comuns nas aulas de matemática, faz-se necessária a compreensão de que os materiais podem ajudar ou não as crianças a construírem ideias matemáticas, visto que esses recursos não são efetivamente os conceitos, estes são construídos por meio das relações estabelecidas.

Logo, os materiais possibilitam a “visualização” dessas relações, mas não são os conceitos. Nas palavras de Van de Walle (2009, p. 51), “um modelo para um conceito matemático se refere a qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito possa ser imposta”. No entanto, o autor é pontual ao afirmar que

é incorreto dizer que um modelo “ilustra” um conceito. Ilustrar implica mostrar. Isso significaria que quando você olhasse o modelo, você veria um exemplo do conceito. Tecnicamente, tudo o que você vê, de fato, com seus olhos são os objetos físicos; apenas a mente pode impor a relação matemática sobre os objetos. (VAN DE WALLE, 2009, p. 51)

Nesse sentido, para uma criança que ainda não tenha desenvolvido o pensamento conceitual, o modelo não pode ilustrar o conceito. Por esse motivo, há que se pensar na escolha do material a ser utilizado nas aulas de matemática, visto que ele pode ser significativo apenas para o professor, que já tem o conceito formado e pode visualizá-lo no objeto. Então, não se pode simplesmente lançar mão deste ou daquele material, é preciso refletir acerca de como o modelo poderá ajudar no estabelecimento de relações.

Entendemos o trabalho com o pensamento algébrico nos anos iniciais como um movimento de construção dos conceitos algébricos enquanto processo, promovendo formas particulares de pensamento (MESTRE, 2014). Com isso, nossa proposta se centra no trabalho com propriedades dos números e das operações, igualdades numéricas,

percepções de regularidades. Buscamos não introduzir, necessariamente, uma linguagem convencional algébrica, mas sim utilizar a linguagem natural (língua materna) para expressar ideias algébricas.

Concordamos com Blanton et al. (2007 apud MESTRE, 2014) quando defendem que a introdução da álgebra nos anos iniciais se centra em dois pontos: o uso da aritmética como domínio para a expressão e a formalização de generalizações de aritmética e padrões numéricos ou geométricos para descrever relações funcionais.

Nossa proposta de trabalho visa colocar os alunos em contato com sequências e regularidades, ainda que não se tenha a expectativa de que exista pensamento algébrico. Desse modo, é possível estabelecer relações importantes com os padrões e as regularidades, sobretudo, em um ambiente favorável às generalizações matemáticas, lançando mão de formas de representação simbólica.

Sendo assim, organizamos nossa proposta de trabalho visando ao desenvolvimento do pensamento algébrico para o Ensino Fundamental I em dois eixos. O primeiro é intitulado *Percepção de regularidades*; nele, apresentamos tarefas com sequências repetitivas e recursivas. O segundo, por sua vez, denomina-se *Pensamento relacional*.

Utilizamos a ideia de pensamento relacional, tomando como base o trabalho de Célia Mestre. De acordo com essa autora, Carpenter et al. (2005 apud MESTRE, 2014, p. 56-57) alegam que a aritmética generalizada pode ser sintetizada na expressão “pensamento relacional” e consideram que este diz: “respeito à capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes”. (Grifo dos autores).

Nesse sentido, propomos algumas tarefas em que os alunos precisam identificar as relações que existem nos membros de uma igualdade. Por exemplo, qual número que pode ser colocado no espaço vazio da igualdade “ $18 + 12 = 20 + \underline{\quad}$ ” sem utilizar procedimentos algorítmicos.

Vale ressaltar que, embora o material receba a organização por eixos, um não é pré-requisito de outro, os dois podem ser trabalhados concomitantemente. Isso também vale para a organização das sequências por segmentos, visto que entendemos que as tarefas podem ser utilizadas em todos os níveis de ensino, desde que recebam as adaptações do contexto, respeitando as especificidades de cada turma.

Dentro de cada sequência de tarefas, apresentamos uma *justificativa* seguida dos *objetivos* da atividade. Expomos o *nível a que se destina*, baseado na complexidade

imposta na tarefa, que pode ser alterada de acordo com a necessidade da turma de trabalho. Estipulamos o *tempo estimado*, que também pode ser relativo, na medida em que irá se concretizar de acordo com a cultura de sala de aula específica. Indicamos o *material necessário*, que ampara o planejamento e a organização da aula. Também mostramos o *desenvolvimento*, que apresenta recursos para os encaminhamentos das tarefas e as *respostas esperadas*, baseadas nos objetivos das sequências. Além disso, em algumas tarefas, relatamos as *vivências em sala de aula*, frutos de compartilhamentos de experiências de professores que desenvolveram as tarefas e evidenciam especificidades de seus contextos. Por fim, em alguns momentos, há as *notas para o professor*, compostas por sugestões extras, conteúdos conceituais e explicativos.

## EIXO I – PERCEPÇÃO DE REGULARIDADES

### 1 SEQUÊNCIA 1: INTRODUZINDO O VOCABULÁRIO

#### Justificativa:

Na perspectiva histórico-cultural, que é o suporte de nosso trabalho pedagógico, a palavra constrói o pensamento. A produção de significados das palavras requer um trabalho pontual no decorrer das discussões de um conteúdo matemático a ser desenvolvido. Portanto, defendemos a introdução de um vocabulário próprio ao pensamento algébrico desde o início das tarefas. Assim, esta sequência introduz conceitos como: motivo e regularidade.

#### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- identificar o motivo de repetição em uma sequência;
- explorar a compreensão do significado da palavra “motivo”;
- desenvolver a compreensão de regularidade.

#### Nível a que se destina:

1º ao 3º ano.

#### Tempo estimado:

4 aulas para a sequência completa.

#### Material necessário:

Cópia da tarefa para distribuir aos alunos.



## 1.1 TAREFA: AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO I

Pedrinho é um menino que adora fazer estripulias e criar mistérios com enigmas. Sempre que pode, inventa mil e uma histórias com segredos para seus amigos descobrirem. Olha lá o Pedrinho:



Ele resolveu criar seu primeiro segredo! Olha o que ele fez com as imagens que tinha em seu computador:



Que tal descobirmos o segredo que Pedrinho usou para criar essas imagens?

**Alguns questionamentos que você pode fazer:**

- O que observam nessas imagens?
- As imagens se repetem em alguma ordem? O que você descobriu?
- Você acha que foi esse o segredo que Pedrinho usou?

**Respostas esperadas:**

- A expectativa é que os alunos percebam que há a repetição das imagens do cachorro e do urso.
- Essas imagens se repetem nesta ordem: cachorro-panda.
- Neste item, analise as respostas dadas pelos alunos, buscando chegar ao

consenso de que a repetição das fotos na ordem indicada foi o segredo que Pedrinho usou.

## Vivência em sala de aula:

A Tarefa 1, nomeada como “As estripulias de Pedrinho”, foi desenvolvida no mês de maio de 2017 com uma turma de 3.º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública municipal. A sala de aula era composta por 30 alunos, crianças na faixa de etária de 8 a 9 anos.

Com o objetivo de que os estudantes entrassem em contato com o vocabulário próprio do pensamento algébrico, o foco estava em introduzir os conceitos de motivo e regularidade. Assim, os alunos identificariam o motivo de repetição na sequência e compreenderiam sobre as questões de regularidade.

Iniciei o trabalho<sup>1</sup> entregando a folha impressa das tarefas para as crianças, que estavam em duplas. Expliquei o objetivo da atividade e enfatizei que nossa missão seria descobrir um “segredo” construído por um menino chamado Pedrinho. Esses mistérios, criados por esse personagem, faziam parte de uma das metas que teríamos para decifrar esse enigma. Acredito que criar esse ambiente de fantasias e expectativas mobiliza-os a refletir acerca da tarefa e, ao mesmo tempo, a envolver-se em um contexto problematizador.

Ao observar as imagens, alguns alunos já enfatizaram que os desenhos se repetem e disseram que essa repetição fazia parte de uma sequência; enquanto outros afirmaram que havia alguns desenhos iguais na imagem: três cachorros e dois ursos. Perguntei às crianças qual seria o significado da palavra “sequência”, e elas me disseram que se tratava de algo que se repetia, como alegado por Roberta<sup>2</sup>: “*assim, prô: cachorrinho, urso, cachorrinho, urso, cachorrinho, urso e assim vai*”. Aproveitei para questionar o que seria a expressão “*e assim vai*”, e Roberta me disse que a imagem continuaria sempre do mesmo jeito. Mesmo com a explicação da aluna, insisti na palavra *sequência* e perguntei se eles já tinham ouvido esse termo em algum outro momento. A aluna citada afirmou que sim e explicou: “*é igual sequência de números, prô, de fila, de carteira...*”, o que mostra

---

1 As vivências são narradas a partir do ponto de vista das professoras ou das pesquisadoras que aplicaram a tarefa na sala de aula. Nessas seções, portanto, é usada a primeira pessoa do singular.

2 Nos relatos, utilizo nomes fictícios para preservar a identidade dos alunos.

que as vivências que alguns alunos já possuíam os auxiliaram na compreensão da tarefa.

Após a solução de cada questão, dos itens a, b e c, percebi que a palavra *sequência* já estava presente nos registros das crianças. Em sua resposta, André, por exemplo, expôs (Figura 1):

A) O QUE OBSERVAM NESSAS IMAGENS?  
 UMA SEQUÊNCIA QUE SE REPETE COM  
 CACHORROS E PANDAS.

**Figura 1** – Registro do André

**Fonte:** Acervo da professora

Já Roberta e Jonas utilizaram, além da palavra “sequências”, o verbo “se repetem” (Figura 2):

A) O QUE OBSERVAM NESSAS IMAGENS?  
 ELAS SE REPETEM, E VÃO EM SEQUÊNCIAS.

**Figura 2** – Registro de Roberta e Jonas

**Fonte:** Acervo da professora

Para Natália e Douglas, há um acréscimo em seu registro, com a expressão “em ordem” (Figura 3):

A) O QUE OBSERVAM NESSAS IMAGENS?  
 QUE REPETEM EM ORDEM

**Figura 3** – Registro de Natália e Douglas

**Fonte:** Acervo da professora

A presença da linguagem algébrica no registro começa a se revelar. Isso também pode ser visualizado na resposta de André ao item b, quando o aluno apontou que, além de repetir, as imagens seguem uma ordem, como mostra a Figura 4:

B) AS IMAGENS SE REPETEM EM ALGUMA ORDEM? O QUE VOCÊ DESCOBRIU?

SIM REPETEM EM ORDEM?

**Figura 4** – Registro de André

**Fonte:** Acervo da professora

Roberta e Jonas também indicaram a questão da repetição (Figura 5).

B) AS IMAGENS SE REPETEM EM ALGUMA ORDEM? O QUE VOCÊ DESCOBRIU?

SIM. DESCOBRIMOS QUE AS FOTOS SE REPETEM.

**Figura 5** – Registro de Roberta e Jonas

**Fonte:** Acervo da professora

No decorrer da socialização, essas palavras se tornaram muito presentes, e as crianças afirmaram que a repetição, a ordem e a sequência mostravam esse padrão de repetição. Ao final de toda a discussão, como já faz parte de nossas práticas, registramos coletivamente as primeiras conjecturas da turma sobre essa tarefa:

- 1) Existe uma ordem, uma sequência, nessas imagens, que seria: cachorro, panda, cachorro, panda, cachorro...
- 2) O aluno Kevin descobriu que o próximo animal que apareceria na sequência seria o panda e depois continuava infinitamente deste modo: cachorro, panda, cachorro, panda, cachorro. Essa colocação foi confirmada por Rebeca, que disse: *“igual aos números”*, que também são infinitos. A Janaína também havia percebido isso.
- 3) Os estudantes chegaram à conclusão de que realmente Pedrinho queria colocar os desenhos em ordem e que esse seria o segredo.

De maneira geral, noto o quanto as crianças tiveram facilidade em realizar a tarefa e, ao mesmo tempo, em discutir a respeito do padrão, trazendo à tona a linguagem algébrica e estabelecendo relações com os números ao dizer que tanto os padrões quanto os números continuam infinitamente. Agora, será importante observar nas “Estripulias de Pedrinho II” se outras relações irão aparecer.

## 1.2 TAREFA: AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO II

Pedrinho não parou por aí, vejam só!



- Nessas imagens, o que observam?
- Os piões são todos iguais?
- Os piões se repetem em alguma ordem? O que você descobriu?
- Você acha que foi esse o segredo que Pedrinho usou?
- Usando o segredo que você descobriu, quais seriam as próximas figuras?

### Respostas esperadas:

- A expectativa é que os alunos percebam que os quatro primeiros piões constituem o motivo de repetição. Assim, na sequência, há a repetição de dois motivos e o início do terceiro motivo.
- Os piões são iguais, mas estão em posições diferentes. Dois deles estão virados para a esquerda; e dois, para a direita.
- Sim, há uma ordem de repetição: dois virados para a esquerda e dois para a direita.
- Esperamos que haja o consenso de que foi esse o segredo que Pedrinho usou.
- Se a continuidade da sequência for na extremidade direita, a expectativa é que os alunos desenhem um pião virado para a esquerda e dois para a direita. Se essa

continuidade for na extremidade esquerda, eles desenharão dois piões virados para a esquerda e dois para a direita. Eles poderão repetir o motivo quantas vezes quiserem.

### Vivência em sala de aula:

No dia 17 de maio de 2017, desenvolvi a tarefa “Estripulias de Pedrinho II”. A tarefa foi realizada com um 3º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública municipal do interior do estado de São Paulo. A sala era composta por 30 alunos.

O objetivo dessa tarefa era que as crianças compreendessem o motivo de repetição da sequência e percebessem que os piões são iguais, mas estão em posições diferentes – *dois virados para a esquerda* e *dois virados para a direita*. Ou seja, existia uma ordem de repetição e uma continuidade nessa sequência.

As crianças estavam organizadas em duplas; e, à medida que iam observando a sequência, muitas delas estabeleciam relações com a sequência “cachorro, panda, cachorro, panda”, proposta na tarefa 1 (“As estripulias de Pedrinho I”). Alguns alunos, no item a que questiona sobre o que observam na imagem, enfatizaram que seriam “piões”, expomos algumas colocações deles: “Os piões, um tá pra cá e outro pra lá”; “Os piões estão dois para um lado e dois pro outro, e assim indo”; “Que tem vários piões”; “9 piões”; “Uma sequência de nove piões”. Já outros sinalizaram a presença do motivo da sequência, registrando: “Eu descobri que tem 2 para esquerda e 2 para a direita, 2 para esquerda e 2 para direita”; “Uns estão do lado [esquerdo] e outros do lado [direito]”; “Pedrinho organizou os piões iguais, esquerda e direita”.

Mesmo que alguns alunos não tenham assinalado a questão das posições, perceberam que existe uma sequência e que esta possui suas especificidades em relação às posições, mas não conseguem nomear, talvez pela dúvida sobre a posição “esquerda” e sobre a “direita”. Essa marca torna-se presente em muitos dos registros das crianças. Outro ponto a destacar seria a continuidade, indicada quando um dos alunos utiliza a expressão “e assim indo”.

No decorrer da socialização, eles explicaram que a sequência não teria fim, da mesma forma que ocorreu na Tarefa I, por isso as palavras “assim indo” representam a continuidade da sequência. Indaguei sobre o motivo e perguntei o que seria um motivo de uma sequência. Inicialmente, fizeram indagações sobre a própria palavra e fui tentando aproximá-los dessa relação a partir de outros questionamentos.

Uma de minhas afirmações foi: “*Quero saber o motivo da sequência*”. Marcelo me disse que seria a sequência que se repete e me deu um exemplo utilizando a lata de lixo da classe. Explicou que o motivo, dentro da sequência “*uma lata de lixo aberta, uma lata de lixo fechada, uma lata de lixo aberta, uma lata de lixo fechada*”, seria “*lixo aberto, lixo fechado, [assim como] na tarefa, dois pião para esquerda e dois para a direita*”.

A fala de Marcelo foi de extrema importância nesse momento. Ajudou os colegas a compreender que existia realmente uma ordem de repetição e que nela havia um motivo.

Em relação ao item b, no qual se questiona se os piões eram todos iguais, a maioria das crianças respondeu que eram, pois se basearam nas características da ilustração em si. Outras duplas tiveram o cuidado de observar a posição, cito a resposta de Taiane e Igor: “*não, porque uns estão à esquerda e outros à direita*”. Essa relação vem a confirmar a resposta do item c, que pergunta se os piões se repetem em alguma ordem. Rayssa e Julio, por exemplo, asseveraram: “*Sim, que uns estão de um lado e outros de outro*”. Nádia e Vitória registraram: “*Sim, que os piões têm dois virados para direita e esquerda*”.

É interessante perceber que, para as crianças, ficou muito claro que havia uma sequência e que esta seria a utilizada por Pedrinho na organização dos piões. Porém, algo que me chamou atenção foi que, mesmo notando que essa relação acontecia, os alunos esbarraram nos conceitos de esquerda e direita. Isso fica explícito no item e, no qual se pergunta quais seriam as próximas figuras da sequência. Muitas crianças me diziam a próxima é “*pra lá*”, referindo-se à esquerda, ou ainda diziam “*pra direita*” e “*pra esquerda*”, oscilando em relação ao próximo elemento da sequência, não por não compreenderem o motivo, mas sim pela dúvida sobre a palavra “*esquerda*”.

De modo geral, percebo o quanto as discussões sobre as palavras *sequência* e *motivo* e a compreensão de sua regularidade têm se ampliado. Ao mesmo tempo, observo o quanto a elaboração conceitual faz parte de todo um processo. Ela está aliada ao desenvolvimento da linguagem e amparada nos debates possibilitados em sala de aula, nas boas tarefas e nas problematizações destas.

### 1.3 TAREFA: AS ESTRIPULIAS DE PEDRINHO III

Pedrinho resolveu fazer estripulias com as fotos de suas amigas: Juju, Bia, Cacau, Pati, Manu e Mel.



- E nessas imagens, o que observam?
- Qual foi o segredo que ele usou para fazer essa estripulia?
- Ainda faltam colocar quatro amigas: Carol, Dani, Fabi e Gabi. Como ficaria a montagem dessas fotos?
- Pedrinho resolveu tirar da brincadeira Pati, Manu e Mel e deixou as amigas Juju, Bia e Cacau. Ao tirar a fotografia das amigas, resolveu fazer mais uma de suas estripulias. Veja como ficou e continue a sequência.



#### Respostas esperadas:

- As crianças poderão identificar diferentes regularidades quanto à posição do corpo, das mãos ou dos pés, ao formato das mãos (com dedos e sem dedos), às pintinhas no rosto, ao tipo de cabelo, etc. No entanto, quaisquer que sejam as características identificadas pelos alunos, o que precisa ser observado é se elas se repetem em sequência. Só constituirão uma sequência repetitiva se houver esse tipo de motivo.



A riqueza da tarefa está nas discussões que surgirão.

- b) O motivo será aquele de consenso da classe.
- c) A continuidade depende do motivo escolhido pelos alunos.
- d) Agora o motivo da sequência ficou definido. Visualizamos duas possibilidades; no entanto, as crianças poderão encontrar outras, desde que haja um motivo de repetição. Seriam elas: 1) repetição dos nomes: Juju, Bia e Cacau; 2) a posição do corpo e das mãos: em pé com as mãos para cima, de ponta cabeça com as mãos para baixo, em pé com as mãos para baixo.

### Notas para o professor:

Em uma sequência de repetição, o que chamamos de *segredo* recebe o nome de *motivo*. Você poderá voltar nas três sequências anteriores e discutir com os alunos qual é o motivo de cada uma delas.

### Vivência em sala de aula:

A tarefa 3, nomeada como “As estripulias de Pedrinho III”, foi desenvolvida no dia 18 de maio de 2017 com uma turma do 3º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública municipal, a mesma turma em que as Estripulias de Pedrinho I e II foram realizadas. Nesse dia, estavam presentes 25 alunos, com faixa etária entre 8 e 9 anos.

O objetivo da tarefa seria a identificação do motivo de repetição da sequência. Também tencionava explorar a compreensão do significado da palavra “motivo” e a compreensão do que seria uma regularidade.

De forma particular, essa tarefa suscitava uma série de questões. Primeiramente, isso decorre de ela ser cercada por uma grande riqueza de detalhes, o desenho que representa as amigas de Pedrinho (Juju, Bia, Cacau, Pati, Manu e Mel) dá margem a inúmeras discussões, como o formato das mãos, os tipos de cabelo, as pintinhas no rosto, a posição do corpo, das mãos e dos pés, o que, de certa forma, possibilita que as crianças ampliem as relações diante das características dessa sequência. Embora esses traços propiciem essas diferentes leituras, meu foco estava em levar os alunos a pensar se tais aspectos realmente se repetiam em sequência, fazendo os estudantes refletirem acerca da repetição dos nomes, da posição do corpo e das mãos: em pé com as mãos para cima, de ponta cabeça com as mãos para baixo e em pé com as mãos para baixo.

Ao observar as discussões entre os alunos, percebo que a questão do corpo e de sua posição e os gestos que as amigas de Pedrinho estão fazendo ficaram marcadas. Exemplos disso são os registros de alguns alunos. Roberta escreveu: “Cada uma usou uma pose”. Valéria afirmou: “Tem quatro de sapatos e duas descalças”. Marcelo, por sua vez, atentando para o motivo da sequência, assinalou: “Uma tem pintinha na bochecha, outra não tem, e a outra tem pintinha também”.

Outros pontos que chamaram a atenção dos estudantes no decorrer dos registros estão visíveis nas respostas ao item a, que interroga: “O que observam nas imagens?”. Renan registrou a presença dos nomes (Figura 6):

A) E NESSAS IMAGENS, O QUE OBSERVAM?

JUJU - BIA - CACAU - PATI - MÂNU - MEL - JUJU - BIA ...

**Figura 6** – Registro de Renan

**Fonte:** Acervo da professora

O aluno explicitou a continuidade da sequência, prova disso é que, logo em seguida, Mel colocou Juju, Bia e “reticências”, indicando a continuidade. Ao questioná-lo, Renan disse que Cacau e todas aquelas que viessem depois iriam estar iguais a elas, ou seja, “em pé com as mãos para cima, de cabeça para baixo e em pé de mãos para baixo”. Essa relação também foi feita por Eduarda (Figura 7):

A) E NESSAS IMAGENS, O QUE OBSERVAM?

QUE TEM A JUJU QUE ESTÁ EM PÉ BIA QUE ESTÁ DE PONTA CABEÇA  
ÇA O CACAU ESTÁ EM PÉ PATI TAMBÉM ESTÁ EM PÉ A MÂNU  
ESTÁ DE PONTA CABEÇA E A MEL ESTÁ EM PÉ.

**Figura 7** – Registro de Eduarda

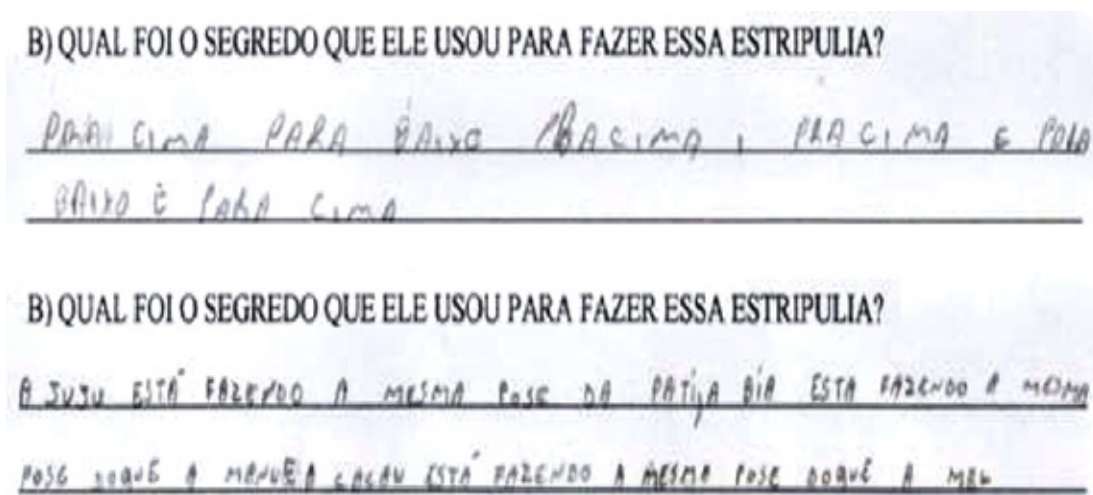
**Fonte:** Acervo da professora

Eduarda destacou o motivo afirmando que as amigas de Pedrinho estavam: “em pé, de ponta cabeça e em pé”. Essas relações apresentadas por Renan e Eduarda já me apresentaram indícios de que estavam compreendendo que havia um motivo nessa sequência. E, como o foco da tarefa seria destacar efetivamente

essa relação, busquei, durante as discussões, enfatizar essas questões e trazer à tona essas conexões, lembrando também as tarefas 1 e 2. Procurei, nesse momento, destacar o que seria o motivo de uma sequência e, mais especificamente, o segredo que Pedrinho utilizou para continuar sua sequência.

Sobre a tarefa 1, as crianças frisaram que o motivo seria: “o cachorrinho e o panda”. Quanto à tarefa 2, assinalaram que o segredo seria: “dois piões para esquerda e dois piões para a direita”. Com isso, questionei: “E na tarefa 3, que estamos fazendo agora?”. Marcelo respondeu: “Braço pra cima, braço pra baixo, braço pra cima”. Em seguida, Carlos esclareceu que também poderia ser: “em pé com braços para cima, de ponta cabeça e em pé com braços para baixo”.

Essas compreensões se fizeram presentes também no item b, que pergunta qual teria sido o segredo dessa estripulia. Os registros de Vitor e Sandra proporcionam indícios desse entendimento (Figura 8):



**Figura 8** – Registros de Vitor e Sandra

**Fonte:** Acervo da professora

Quando Vitor e Sandra registram que seria “pra cima pra baixo pra cima”, têm o cuidado de colocar a vírgula depois do motivo para enfatizar sua continuidade. Quando os questionei em relação a isso, Vitor passou o dedo e leu em voz alta seus primeiros escritos e, ao chegar à vírgula, disse, deixando indícios de sua compreensão: “*agora começa outro*”. Sandra, diferentemente de Vitor, afirmou: “*A Juju está fazendo a mesma pose da Pati, Bia está fazendo a mesma pose do que a Manu, e a Cacau está fazendo a mesma pose do que Mel*”. Quando perguntei a ela por que isso ocorria, ela assinalou que o segredo estava nas três primeiras amigas.

Essas discussões foram tão importantes no decorrer da socialização que muitos alunos, no item c, no qual solicitei a inclusão as amigas Carol, Dani, Fabi e Gabi na sequência, já haviam refletido acerca desse motivo e continuado a sequência de acordo com ele. Um exemplo disso são os registros de Mario e Tainá. No primeiro caso, o aluno desenhou a sequência e sua continuidade, conforme proposto no enunciado, a partir do motivo da sequência (Figura 9):



**Figura 9** – Registro de Mario

**Fonte:** Acervo da professora

Mario explicou sua ilustração. Disse: “*Em pé de braços para cima, de cabeça para baixo, em pé de braços para baixo e em pé de braços para cima*”.

Já o registro de Tainá me chamou a atenção pela ordem das quatro amigas de Pedrinho (Figura 10):



**Figura 10** – Registro de Tainá

**Fonte:** Acervo da professora

Perguntei a ela por que havia colocado Gabi, Dani, Fabi e Carol em vez de Carol, Dani, Fabi e Gabi. Tainá respondeu: *“Eu resolvi colocar assim porque ficou mais legal e eu escolhi o lugar que iam ficar, mas não mudei a sequência!”*. É muito interessante perceber o quanto as crianças são dinâmicas em suas reflexões, pois, em momento algum, no enunciado da tarefa, dissemos que as quatro novas amigas deveriam estar obrigatoriamente nessa sequência, apenas pedimos a representação de “como ficaria a montagem dessas fotos”, ou seja, queríamos saber se haviam compreendido o motivo e se o continuariam, o que Tainá realizou com sucesso. Foi muito interessante! Na socialização, vários argumentos foram feitos a ela, mas até o final ela insistiu: *“mas não mudei a sequência!”*.

O último item solicitado aos alunos foi o trabalho especificamente com o motivo da sequência, incluindo os desenhos apenas de Juju, Bia e Cacau. A solicitação seria para que continuassem a ilustração. Alguns alunos compreenderam que, após a Juju, viria a Bia e realizaram o desenho logo em seguida; enquanto outros partiram da própria Juju para posteriormente desenhar a Bia e a Cacau. É como se não considerassem, no final da linha, a presença de Juju e copiassem os desenhos observando as imagens acima. Essas discussões foram trazidas à tona na socialização e foram muito proveitosas. Isso mostra, mais uma vez, o quanto o conceito é perpassado por esse *ir e vir* constante, envolvendo o amadurecimento, a reflexão, a volta constante às discussões, enfim, um espaço que garanta às crianças trocas, argumentações, problematizações, para que consigam avançar em suas hipóteses.

É importante destacar que, além da continuidade da sequência, foi de total relevância conversar acerca do próprio desenho, pois, se estávamos continuando a sequência, esta deveria, segundo as crianças, estar *“igualzinha”*, de modo que não poderia haver roupas, cores, gestos e penteados diferentes, o que garantiria que o motivo fosse realmente mantido. Selecionei dois registros que explicitam esse processo de forma muito evidente e que, ao serem observados, confundem-se com os desenhos iniciais, pois tiveram a preocupação de preservar a maioria dos detalhes (Figuras 11 e 12).



**Figura 11** – Registro de Tainá

**Fonte:** Acervo da professora



**Figura 12** – Registro de Vitória

**Fonte:** Acervo da professora

De forma geral, percebo que, ao final dessas três tarefas (Estripulias de Pedrinho I, II e III), muitas crianças já conseguiam compreender o que seria o motivo em um padrão de repetição, posicionar-se em relação a ele e observar

a importância de manter as características. Outras continuaram considerando o motivo como a sequência toda, e isso se destacou em alguns registros e falas das crianças. É nesse momento que considero de total importância a socialização, pois é a partir dela que os estudantes têm a possibilidade de repensar seus registros e, ao mesmo tempo, amadurecer suas hipóteses. Como já enfatizei, são nesses ambientes de discussões e reflexões que os alunos têm a possibilidade de caminhar para a elaboração conceitual a partir de diferentes linguagens.

### Notas para o professor:

- ✓ Em sequências repetitivas, a continuidade pode ocorrer tanto na extremidade direita quanto na esquerda. Algumas experiências têm mostrado que os alunos continuam a sequência nos dois sentidos; assim, você poderá negociar com eles se desejar. Por outro lado, a não negociação pode gerar ricas discussões na classe.
- ✓ Você trabalhará inicialmente com a linguagem, estabelecendo, a partir da análise de imagens, os critérios presentes em cada uma delas. Formule questões para o grupo, fazendo uma de cada vez. Alguns exemplos de questões são:
  - O que você acha que é uma sequência?
  - Toda sequência precisa ter um segredo?
  - As três sequências têm um segredo?
- ✓ No caso da tarefa 3, há diferentes motivos. Qualquer um deles é válido, desde que esteja na sequência. Precisa haver pelo menos a repetição de dois motivos e o início do terceiro para a caracterização da sequência.
- ✓ No 1º ou no 2º ano, se os alunos ainda não estiverem alfabetizados, a tarefa pode ser feita oralmente. Nesse caso, dê um tempo para os desenhos e, em seguida, organize-os em uma roda para formular as questões. Outra possibilidade é fazer as intervenções no próprio grupo, à medida que as crianças forem terminando.
- ✓ Nas demais turmas, na organização das duplas e dos trios, se possível, agrupe crianças não alfabetizadas com as alfabetizadas. Destacamos, assim, a importância da leitura da tarefa pelas próprias crianças.
- ✓ É importante que o planejamento da aula preveja todas as etapas, incluindo a socialização das tarefas.
- ✓ Ao final da sequência, é fundamental que o professor elabore um texto coletivo com os alunos, fazendo uma síntese das ideias que emergiram na sala de aula.

## 2 SEQUÊNCIA 2: SEQUÊNCIAS MANIPULATIVAS COM MOTIVOS PRÉ-DEFINIDOS

### Justificativas:

Nas tarefas aqui propostas, os alunos continuarão manipulando objetos; no entanto, o motivo já vem estabelecido. Na tarefa de criação, de acordo com as vivências em sala de aula, constatamos que os alunos tomam as sequências já exploradas como referência. A definição desses motivos visa contribuir para que o processo de generalização comece a ser trabalhado, isto é, para que a lei de formação da sequência repetitiva seja apropriada. Esta pode, por exemplo ser vista na seguinte sequência de contas: vermelha, branca, vermelha, branca, vermelha. Essa sequência figurativa pode ser associada com números ímpares e pares: os ímpares correspondem à cor vermelha, e os pares equivalem à branca. A percepção dessa regularidade possibilita que o aluno identifique que uma conta na posição 51 será vermelha, pois 51 é um número ímpar. Esse tipo de trabalho deve ser feito com o vocabulário próprio da faixa etária. Nessas tarefas, também já iniciamos o estabelecimento de relações entre sequências figurativas e numéricas.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- reconhecer o padrão/motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade;
- generalizar o motivo de uma sequência;
- identificar, a partir das falas dos alunos, os discursos matemáticos que emergem das tarefas.

### Nível a que se destina:

1º ao 5º ano.

### Tempo estimado:

4 aulas para a sequência completa.



**Material necessário:**

- cordão (pode ser barbante);
- contas coloridas (com três cores diferentes) e furadas (para passar o barbante).

O total de contas necessárias dependerá do número de alunos de sua turma; garanta que haja material para todos os grupos.

## 2.1 TAREFA: SEQUÊNCIAS COM CONTAS DE DUAS CORES

Tarefa a ser impressa e entregue a cada dupla/trio:

Você irá construir um fio de contas colocando uma conta **VERDE**, uma **AMARELA**, uma **VERDE**, uma **AMARELA**, até completar 13 contas.

- Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?
- Qual é o motivo da sequência?
- Qual seria a cor da 20<sup>a</sup> conta? Como você sabe disso?
- Qual seria a cor da 51<sup>a</sup> conta? Como você sabe disso?

### Desenvolvimento da tarefa:

- Organize os alunos em duplas (ou trios).
- Distribua para cada grupo:
  - ✓ Pedaco de barbante;
  - ✓ 7 contas verdes e 6 contas amarelas.
- Os alunos trabalharão em duplas (ou trios) e realizarão os registros. No caso de turmas não alfabetizadas, você poderá ler a tarefa com eles.
- Mesmo que os alunos solicitem mais contas para continuar a sequência, não as forneça, pois o objetivo é que eles comecem a ser capazes de estabelecer relações entre a cor e sua posição.
- Quando todos os grupos terminarem, é importante fazer a socialização da tarefa.
- Você pode repetir as questões acima para a turma e formular outras de acordo com a observação que você fez durante o trabalho nos pequenos grupos.
- É fundamental que você faça uma síntese coletiva. É significativo que os alunos anotem-na. Outra opção seria fazer essa síntese oralmente, e você, como escriba, grafá-la na lousa, em um papel pardo, no *flipchart*, etc. Esse registro pode ficar fixado em sala de aula para posteriores consultas.

### Respostas esperadas:

- a) A próxima cor é verde.
- b) O motivo é verde e amarelo.
- c) A 20<sup>a</sup> conta é amarela. Socialize as diferentes respostas e verifique quais estratégias os alunos utilizaram: continuaram contando no próprio fio de contas, associaram com o ímpar e o par, fizeram o desenho, contaram nos dedos, etc.
- d) A 51<sup>a</sup> conta é verde. Proceda como indicado acima.

### Vivência em sala de aula:

No dia 7 de junho de 2017, iniciamos as discussões sobre a sequência de tarefas do cordão de contas coloridas. Os objetivos dessa sequência manipulativa com motivos pré-definidos seriam: reconhecer o padrão/motivo da sequência a partir da percepção de sua regularidade, generalizar o motivo e identificar, com as colocações dos alunos, os discursos matemáticos que emergem das tarefas.

Os estudantes que participaram das discussões eram do 3º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal, localizada em uma cidade do interior de São Paulo. A classe tinha um total de 30 alunos. No dia da atividade, estavam presentes 28, organizados em duplas e um trio.

Iniciei explicando às crianças que elas realizariam mais algumas tarefas envolvendo padrões. Entreguei o material, um conjunto de 13 contas, sendo 7 verdes e 6 amarelas, e a cópia da tarefa. O objetivo da limitação do número de contas era estimular os alunos a estabelecer relações entre a cor e a posição. Assim, quando os desafiasse a refletir sobre números maiores como 20 e 51, os estudantes já seriam mobilizados a desenvolver estratégias e a buscar essas relações.

Em um primeiro momento, foi interessante observar o quanto o material manipulativo foi significativo para eles, pois, de maneira geral, conseguiram perceber como esse cordão ia se formando e, ao mesmo tempo, compreenderam que havia uma continuidade, aliada ao motivo do cordão. Embora o material se mostrasse de suma importância, cada dupla ou trio buscou encontrar caminhos, sem o material, para chegar à cor da 20<sup>a</sup> e da 50<sup>a</sup> conta, o que foi de extrema importância para eles.

No decorrer da leitura, não percebi dificuldades na compreensão das questões, nem mesmo na linguagem matemática presente, tal como *motivo da sequência*.

Apresentar a palavra *motivo*, nesse instante, foi essencial para que observassem o colar e buscassem relações entre a palavra e a conta verde e a amarela.

O item a questionava qual seria a próxima cor da conta após a composição do cordão. Exponho nas Figuras 13, 14, 15 e 16, as respostas de alguns alunos.

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

AMARELA, PORQUE CEFUOCA PARA CONTINUAR TINHA QUE SER AMARELA

**Figura 13** – Registro dos alunos Tainá e Igor

Fonte: Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

AMARELO PORQUE NO NÚMERO 13 É O VERDE.

**Figura 14** – Registro dos alunos Marcelo, Renan e Wagner

Fonte: Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

SERIA A A COR AMARELA, PORQUE ACABOU COM VERDE ENTÃO É AMARELO.

**Figura 15** – Registro dos alunos Marcos e Joana

Fonte: Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

AMARELA, PORQUE AS DUAS PONTAS DO FIO TERMINAM EM VERDE

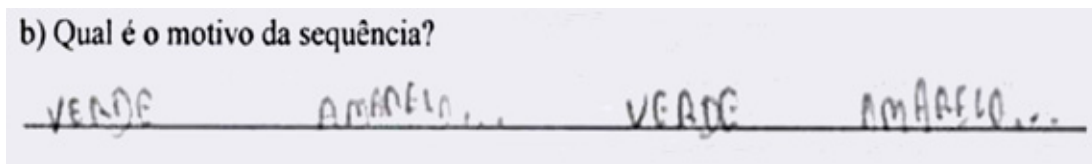
**Figura 16** – Registro dos alunos Roberta e Jonas

Fonte: Acervo da professora

É interessante perceber que as crianças trazem à tona, em seus registros, a continuidade da sequência e a próxima cor da conta, afirmando que esta seria amarela. Para justificar, apontaram: “se fosse continuar tinha que ser *amarela*”; “*porque no número 13 é o verde*”; “*acabou com verde então é amarelo*”; “*as duas*

pontas *do fio* terminaram em verde”. Essas explicações evidenciam a regularidade existente na sequência – depois de uma conta verde haveria uma amarela.

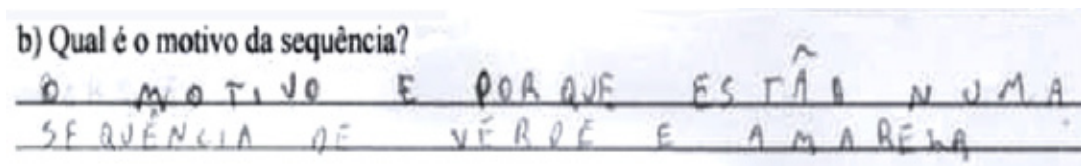
Ao questioná-los sobre o motivo dessa sequência, Marcelo, Renan e Wagner assinalaram (Figura 17):



**Figura 17** – Registro de Marcelo, Renan e Wagner

**Fonte:** Acervo da professora

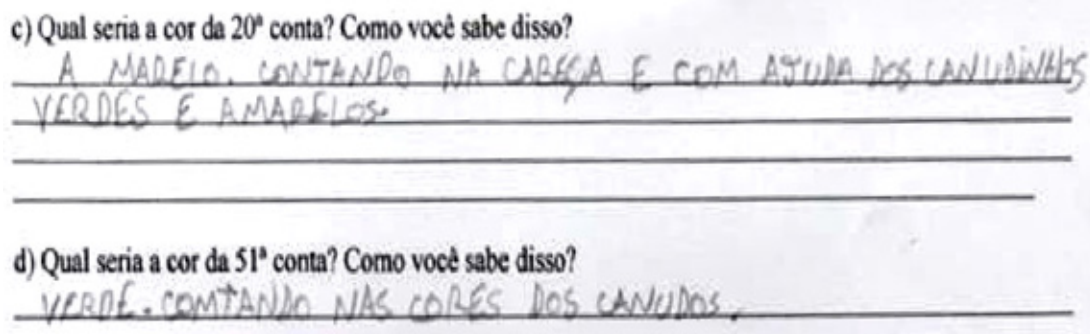
A presença das *reticências* separando o motivo me fez perguntar o porquê de registrarem dessa forma. Marcelo explicou que a ordenação *verde e amarelo* é o motivo, que continua infinitamente. Já Roberta e Jonas relataram que o motivo está em uma sequência de verde e amarelo (Figura 18):



**Figura 18** – Registro de Roberta e Jonas

**Fonte:** Acervo da professora

Como o motivo já havia ficado claro às crianças, tanto no decorrer dos registros quanto nas discussões, solicitei que refletissem acerca da 20ª e da 51ª conta no cordão. Elas buscaram desenvolver diferentes estratégias; porém, aquela que mais ficou evidente entre os alunos foi a contagem. Alguns contavam de um em um a partir da 13ª conta; outros somavam a partir da 13ª a quantidade que faltava para atingir o número desejado. Certos estudantes utilizaram a contagem nos dedos ou no próprio colar ou o desenho com lápis de cor, um verde e um amarelo, que foi intercalado conforme realizavam a contagem. Apresento, Figura 19, o registro de Raquel e Mirela:



**Figura 19** – Registro de Raquel e Mirela

**Fonte:** Acervo da professora

O próprio cordão de contas foi utilizado pela dupla para chegar ao resultado. As alunas esclareceram que, para chegar mais rápido ao resultado, usaram, posteriormente, como estratégia a contagem de 10 em 10. Mirela afirmou: “10 é amarelo, mais 10 é 20 e também amarelo [...] 10, mais 10, mais 10, mais 10, mais 10, todos são amarelos, mais 1, 51, é verde!”. Essas relações estabelecidas pela aluna foram um avanço para a discussão, pois ampliaram as relações da contagem de 1 a 1 para a de 10 em 10, percebendo que havia uma regularidade.

Essas conexões desenvolvidas até o momento foram importantes para que os alunos refletissem sobre a próxima sequência. Esta será apresentada na seção seguinte.

### Notas para o professor:

- ✓ Embora os alunos usem diferentes estratégias, é fundamental que, ao final da socialização, você estabeleça a relação da cor da conta com sua posição ímpar ou par. Muitos alunos já chegam a essa relação com o trabalho das sequências anteriormente propostas.
- ✓ Como a relação ímpar-par faz parte das brincadeiras cotidianas dos alunos, no trabalho com sequência, ela poderá aparecer. Daí surge a questão do zero: ele é par ou ímpar? Na brincadeira, geralmente o zero não é considerado, e isso pode gerar discussões interessantes em sala de aula. Uma possibilidade de introduzir, nesse momento, que o zero é par, é fazer a relação progressiva e regressiva da sequência “ímpar – par – ímpar – par...”, levando os alunos a perceberem que o par vem antes e depois de um ímpar; portanto, se um é ímpar, o número antes dele (zero) é par.

## 2.2 TAREFA: CONTAS DE TRÊS CORES

Tarefa a ser impressa e entregue a cada dupla ou trio:

Você irá construir um fio de contas. Coloque uma conta **VERMELHA**, uma **VERDE**, uma **AMARELA**, uma **VERMELHA**, uma **VERDE**, uma **AMARELA** e uma **VERMELHA** até completar 10 contas.

- Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta?  
Como você sabe disso?
- Qual é o motivo da sequência?
- Qual seria a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?
- Qual seria a cor da 31ª conta? Como você sabe disso?

No caso de um 4º ou 5º ano, as perguntas podem ser mais complexas. Exemplos:

- Como eu posso fazer para saber a cor de uma conta em uma posição qualquer?
- Paula é uma aluna do 5º ano. Ela disse que a cor da conta tem relação com a tabuada do 3. O que você sabe disso?

### Desenvolvimento da tarefa:

- Organize os alunos em duplas (ou trios).
- Distribua para cada grupo um pedaço de barbante, quatro contas vermelhas, três verdes e três amarelas.
- Os alunos trabalham em duplas ou trios e realizam os registros. No caso de turmas não alfabetizadas, o professor poderá ler a tarefa com eles.
- Quando todos os grupos terminarem, é importante fazer a socialização da tarefa.
- Você pode repetir as questões acima para a turma e formular outras de acordo com a observação que fez durante o trabalho nos pequenos grupos.
- É fundamental que você faça uma síntese coletiva. Também é importante que os alunos a anotem. Outra opção seria fazer essa síntese oralmente, e você, como

escriba, irá redigi-la na lousa, em um papel pardo, no *flipchart*, etc. Esse registro pode ficar fixado em sala de aula para posteriores consultas.

### Respostas esperadas:

- a) A próxima cor é verde.
- b) O motivo é: vermelha, verde e amarela.
- c) A 20<sup>a</sup> conta é verde. Você precisa socializar as diferentes respostas e verificar quais estratégias os alunos utilizaram: continuaram contando no próprio fio de contas; associaram a sequência com múltiplos de três, pois a sequência tem três elementos no motivo; fizeram o desenho; contaram nos dedos, etc.
- d) A 31<sup>a</sup> conta é vermelha. Proceda como orientado nas possibilidades anteriores.
- e) Essa resposta já exige que os alunos tenham estabelecido relação com os múltiplos de três. No entanto, se isso não aconteceu, você precisa trabalhar com eles a questão do *item f* que induz o estudante a pensar na tabuada do três, ou seja, nos múltiplos de três.
- f) Esta questão fecha a discussão sobre a lei de formação da sequência: se a posição da conta for de um número múltiplo de três, esta será amarela; caso contrário, se sobrar o resto um, a conta será vermelha, e se sobrar dois, será verde.

### Vivência em sala de aula:

No dia 7 de junho de 2017, aproveitamos para dar continuidade às tarefas, neste caso, iniciamos a tarefa 2. Como os alunos do 3<sup>o</sup> ano já haviam refletido a respeito da tarefa 1, estavam envolvidos para realizar as discussões posteriores e ampliá-las, focando no motivo da sequência, que, neste caso, tinha a presença de mais uma cor e seria: “vermelha, verde e amarela”. O objetivo era que reconhecessem o padrão/motivo da sequência a partir da percepção de sua regularidade e o generalizassem.

Nesse dia, dos 30 alunos, estavam presentes 28, os quais novamente foram organizados em duplas e um trio. Entreguei às crianças um conjunto de 10 contas – sendo 4 vermelhas, 3 verdes e 3 amarelas – e a cópia da tarefa. A limitação do número de contas, como mencionado anteriormente, tinha como objetivo a generalização e a percepção da regularidade, sem fazer o uso do material manipulativo.



As questões sobre a continuidade do fio de contas e o motivo da sequência foram mantidos, tal qual na tarefa 1. Além disso, perguntei a respeito da 20ª e da 31ª conta do cordão, sempre os estimulando a refletir e explicar como fizeram para chegar à resposta. Observo que as discussões anteriores foram imprescindíveis para que conseguissem estabelecer algumas relações. A palavra *motivo*, por exemplo, ficou, de modo geral, clara para eles, que conservaram as mesmas estratégias utilizadas na tarefa 1 para encontrar a cor da conta solicitada na tarefa 2.

Quando questionados, no item a, acerca da continuidade do fio de contas, os alunos deixaram claro em seus registros, Figuras 20, 21 e 22, a regularidade da sequência.

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

VERDE PORQUE SEPAROU NO VERMELHO

**Figura 20** – Registro dos alunos Tainá e Ivan

**Fonte:** Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

VERDE PORQUE SE A 10ª COR É VERMELHA ENTÃO  
A 11ª COR SERIA VERDE

**Figura 21** – Registro dos alunos Marcelo, Renan e Wagner

**Fonte:** Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

VERDE PORQUE ESTÁ EM UMA SEQUÊNCIA.

**Figura 22** – Registro dos alunos Roberta e João

**Fonte:** Acervo da professora

Os três registros revelam intensamente a presença da regularidade. Isso fica claro quando Tainá e Ivan mencionaram que, se havia parado na conta vermelha, a próxima seria verde, respeitando a continuidade. Da mesma forma, Marcelo, Renan e Wagner partiram da última conta, a 10ª, e, ao mesmo tempo, pontuaram

que a 11ª só poderia ser verde, já que a 10ª era vermelha. Como podemos ver, a compreensão do motivo da sequência tornou-se muito presente nas respostas das crianças. No decorrer da socialização, quando questionei a razão de afirmarem que seria o verde e não outra cor, Marcelo enfatizou: “*Tem um motivo, não tem? Então, tem que seguir até o infinito, não pode mudar, por isso que só podia ser verde!*”.

Essa compreensão é evidenciada na resposta ao item b, que pergunta qual seria o motivo da sequência. A maioria dos alunos registrou: “vermelho, verde e amarelo”. Além disso, muitos deles utilizaram as *reticências* com o objetivo de sinalizar que o colar continuaria e o motivo também, como mostra o registro de Tainá e Ivan (Figura 23):

b) Qual é o motivo da sequência?

A photograph of a student's handwritten response on lined paper. The text reads "VERMELHA, VERDE, AMARELA, ..." written in blue ink. The question above it is "b) Qual é o motivo da sequência?".

**Figura 23** – Registro de Tainá e Ivan

**Fonte:** Acervo da professora

É interessante perceber que as crianças, no decorrer da socialização, pontuaram principalmente a questão de essa sequência ser infinitamente organizada. Marcelo, Jonas e Antonio apresentaram um exemplo:

Marcelo: *É assim, prô, como se fosse os números, mas é cores.*

Prof.ª: *Como assim, Marcelo? Você poderia dar um exemplo?*

Marcelo: *Por exemplo, se fosse números, ficaria: um, dois, três, um, dois, três, um, dois, três e até o infinito, ou senão um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e vai continuando. Tem um segredo.*

Prof.ª: *E qual é o segredo?*

Jonas: *No primeiro, prô, os números tão repetindo, um, dois, três, um, dois, três.*

Prof.ª: *Então, qual é o motivo?*

Jonas: *Um, dois, três.*

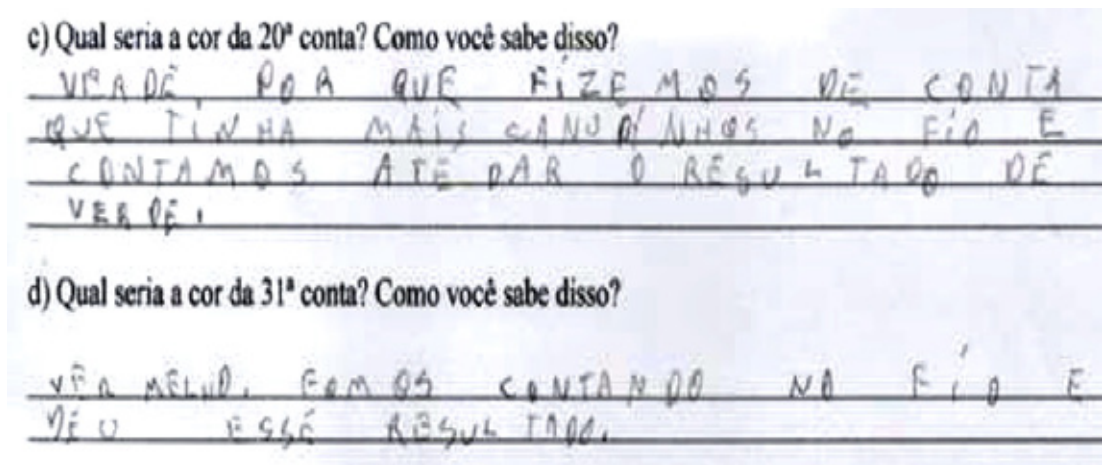
Antonio: *Mais o segundo não é, então não dá!*

Marcelo: *Dá sim: 1, 2, 3, 4, 5, 6 vai de 1 em 1; é a mesma coisa se fosse 2, 4, 6, 8, 10, vai de 2 em 2; ou 3, 6, 9, 12, vai de 3 em 3. Tá vendo? É uma sequência. Não é, prô?*

Prof.ª: *Sim, Marcelo! É uma sequência e que tem um motivo.*

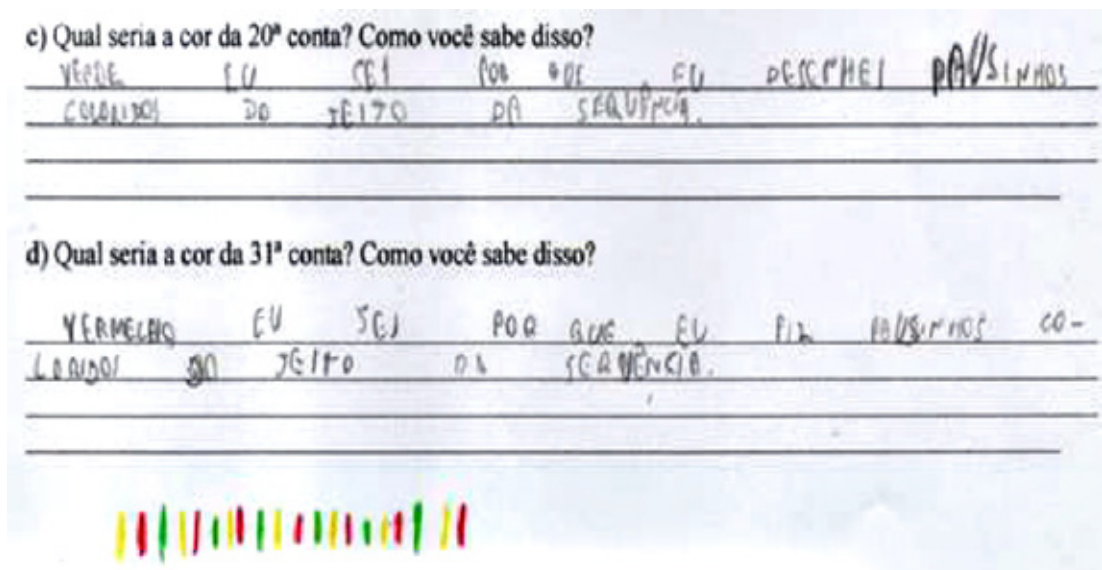
Nessa discussão, entre os alunos, observo o quanto se tornaram presentes nas falas das crianças não só o motivo da sequência, mas também as relações entre a sequência figurativa (que envolve o material manipulativo) e a numérica. Foram também abordados múltiplos quando as crianças apontaram que estes podem ir de um em um, dois em dois ou três em três.

Nos itens c e d, quando solicitado que os alunos explicassem qual a cor da 20.<sup>a</sup> e da 31.<sup>a</sup> conta, eles utilizaram, assim como na tarefa 1, a contagem mediante o próprio cordão, lápis de cor ou registros pictóricos. As Figuras 24 e 25 seguem evidenciam isso:



**Figura 24** – Registro dos alunos Roberta e João

Fonte: Acervo da professora



**Figura 25** – Registro dos alunos Marcelo, Renan e Wagner

Fonte: Acervo da professora

Embora os alunos buscassem encontrar caminhos para resolver os problemas, não trouxeram à tona, no momento do registro, outras relações em sua composição. Ainda utilizaram como estratégia a contagem de um a um ou o registro pictórico, fazendo uso das cores.

Ao questioná-los, no decorrer da socialização, se haveria outra forma de resolver ou mesmo de encontrar qual seria a cor sem contar ou desenhar toda a sequência, afirmaram que, com as estratégias já utilizadas, seria mais fácil e que fizeram desse modo apenas para confirmar se estava correto. Nesse momento, perguntei se, antes dessa constatação, haviam encontrado o resultado de outra forma, e Marcelo apontou que tinha percebido que a cada 10 mudaria a cor. Questionei de que maneira isso aconteceria, e ele descreveu que o 10 seria vermelho, pois essa cor acaba a sequência, mas que o 20 seria verde, o 30 amarelo e assim sucessivamente. Embora Marcelo tenha generalizado, não utilizou essas relações que estabeleceu no momento do registro. Com isso, pensei que talvez a tarefa 3 fosse um caminho para criar e retomar essas possibilidades.

#### Notas para o professor:

- ✓ Embora os alunos usem diferentes estratégias, é fundamental que, ao final da socialização (até o item d), você estabeleça a relação da cor da conta com os múltiplos de três.
- ✓ No entanto, no início do trabalho, você ainda pode aceitar outras estratégias, mas sempre procure destacar essa relação. Percepções de regularidades e leis de formação mais complexas vão depender de um trabalho contínuo com sequências desse tipo. A construção do pensamento algébrico ocorre em um longo período, nem todos os alunos chegam às mesmas percepções ao mesmo tempo.
- ✓ Retomando a perspectiva teórica histórico-cultural, lembramos que o processo de elaboração conceitual ocorre por avanços e recuos, não é linear. Ademais, sempre dependerá das mediações do professor e dos colegas da turma. Por isso, os momentos de socialização precisam ser marcados por intensas discussões e diálogos do professor com alunos e dos estudantes entre si.

## 2.3 TAREFA: SEQUÊNCIAS COM DUAS CORES E REPETIÇÃO

Tarefa a ser impressa e entregue a cada dupla ou trio:

Seu fio de contas deve ter 1 conta **VERMELHA**, 2 contas **VERDES**, 1 conta **VERMELHA**, 2 **VERDES**, 1 conta **VERMELHA**. Use todas as contas que o grupo recebeu.

- Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?
- Qual é o motivo da sequência?
- Caio disse aos colegas que a conta na posição 20 é vermelha. Você concorda com Caio?

No caso de um 4<sup>o</sup> ou 5<sup>o</sup> ano, as perguntas podem ser mais complexas. Exemplos:

d) Qual é a cor da conta na:

- 33<sup>a</sup> posição?
- 40<sup>a</sup> posição?
- 47<sup>a</sup> posição?

2. Como você faz para saber qual é a cor de uma conta em uma posição qualquer?

### Desenvolvimento da tarefa:

- Organize os alunos em duplas (ou trios).
- Distribua para cada grupo:
  - ✓ Pedaco de barbante;
  - ✓ 6 contas vermelhas e 10 contas verdes.
- Os alunos trabalham em duplas ou trios e realizam os registros. No caso de turmas não alfabetizadas, você poderá ler a tarefa com eles.
- Quando todos os grupos terminarem, é importante fazer a socialização da tarefa.
- Você pode repetir as questões acima para a turma e formular outras de acordo com a observação que fez durante o trabalho nos pequenos grupos.

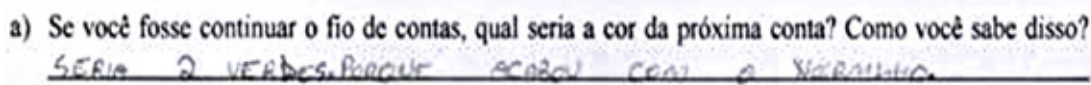
- É fundamental que você faça uma síntese coletiva. É importante que os alunos a anotem. Outra opção seria fazer essa síntese oralmente, e você, como escriba, escrevê-la na lousa, em um papel pardo, no *flipchart*, etc. Esse registro pode ficar fixado em sala de aula para posteriores consultas.

### Vivência em sala de aula:

No dia 12 de junho de 2017, iniciamos o trabalho com a tarefa 3. Novamente a atividade foi desenvolvida com a mesma turma do 3º ano do Ensino Fundamental. Nesse dia, estavam presentes 21 alunos dos 30 matriculados na sala. Ter a oportunidade de desenvolver uma sequência de tarefas e garantir discussões com as crianças que possibilitem relações com o mesmo conceito é de extrema importância para a ampliação progressiva deste; além disso, propicia aos alunos a oportunidade de entrar em contato com reflexões acerca do pensamento algébrico desde cedo.

Nesta proposta, retomei algumas questões sobre a continuidade do fio de contas e sobre o motivo da sequência. Ao mesmo tempo, os estudantes tinham o desafio de encontrar a cor de algumas posições no fio. O item d e a questão 2 foram planejadas para alunos do 4º e do 5º ano do Ensino Fundamental, mas busquei, nesse momento, desafiar os estudantes a refletir sobre o item d, que os questionava a respeito da 33ª, da 40ª e da 47ª posição no cordão de contas. O objetivo era que percebessem a relação com os múltiplos e refletissem sobre os números pares e ímpares.

Como já mencionado anteriormente, nas tarefas 1 e 2, a compreensão da continuidade da sequência, bem como o motivo, foram apropriados pelos alunos. Os estudantes conheciam com clareza essas ideias. Prova disso é que tanto durante as discussões nas duplas quanto nos registros, Figuras 26 e 27, essas marcas estiveram presentes.



a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?  
SERIA 2 VERDES PORQUE ACABOU COM O VERDE

**Figura 26** – Registro dos alunos Eduarda e Kevin

**Fonte:** Acervo da professora

a) Se você fosse continuar o fio de contas, qual seria a cor da próxima conta? Como você sabe disso?

VERDE PORQUE DEPOIS DE VERMELHO É VERDE

**Figura 27** – Registro dos alunos Vânia e Felipe

**Fonte:** Acervo da professora

Observo que os alunos mencionaram a continuidade da sequência, em especial, quando escreveram: “porque acabou com o vermelho” e “depois de vermelho é verde”. Ao mesmo tempo, Eduarda e Kevin esclareceram que haveria duas contas verdes, enfatizando a presença do motivo, que seria uma conta vermelha e duas verdes. Esse aspecto também foi abordado pela maioria dos alunos na resposta ao item b, que pergunta a respeito do motivo da sequência (Figuras 28 e 29).

b) Qual é o motivo da sequência?

1 CONTA VERMELHA 2 CONTAS VERDES...

**Figura 28** – Registro dos alunos Marcelo e Renan

**Fonte:** Acervo da professora

b) Qual é o motivo da sequência?

PORQUE COMEÇA COM VERMELHO DEPOIS VEM O VERDE E ASSIM VAI INFINITAMENTE

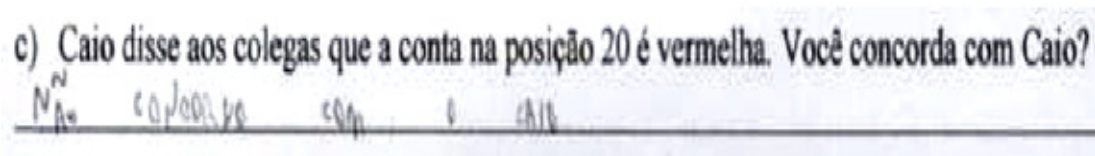
**Figura 29** – Registro dos alunos Natália e Vitor

**Fonte:** Acervo da professora

Os registros acima expõem dois pontos iniciais importantes, que são as colocações: “1 conta vermelha 2 contas verdes...” e “assim vai infinitamente”. Esses fatores mobilizam a pensar tanto no motivo quanto na continuidade da sequência, por conta do uso das reticências e da palavra *infinitamente*.

Essas relações estiveram presentes quando os estudantes foram questionados a respeito da posição e da cor da conta. O item c pergunta se a 20ª conta

seria realmente vermelha. Vejamos o registro de Marcelo e Renan (Figura 30):



**Figura 30** – Registro de Marcelo e Renan

**Fonte:** Acervo da professora

Durante a socialização, Marcelo e Renan esclareceram seu ponto de vista:

Prof.<sup>a</sup>: *Marcelo e Renan, fiquei pensando na resposta de vocês, alguns alunos disseram que concordam com Caio, outros, inclusive vocês, disseram que não concordam. Fiquei pensando: "E agora? Quem está certo, Caio ou vocês?"*

Marcelo: *Nós acertamos, prô! Porque o 20 nunca seria vermelho.*

Prof.<sup>a</sup>: *Por quê? Me explica como você pensou.*

Renan: *Nós fizemos pauzinhos e contamos, deu vermelho.*

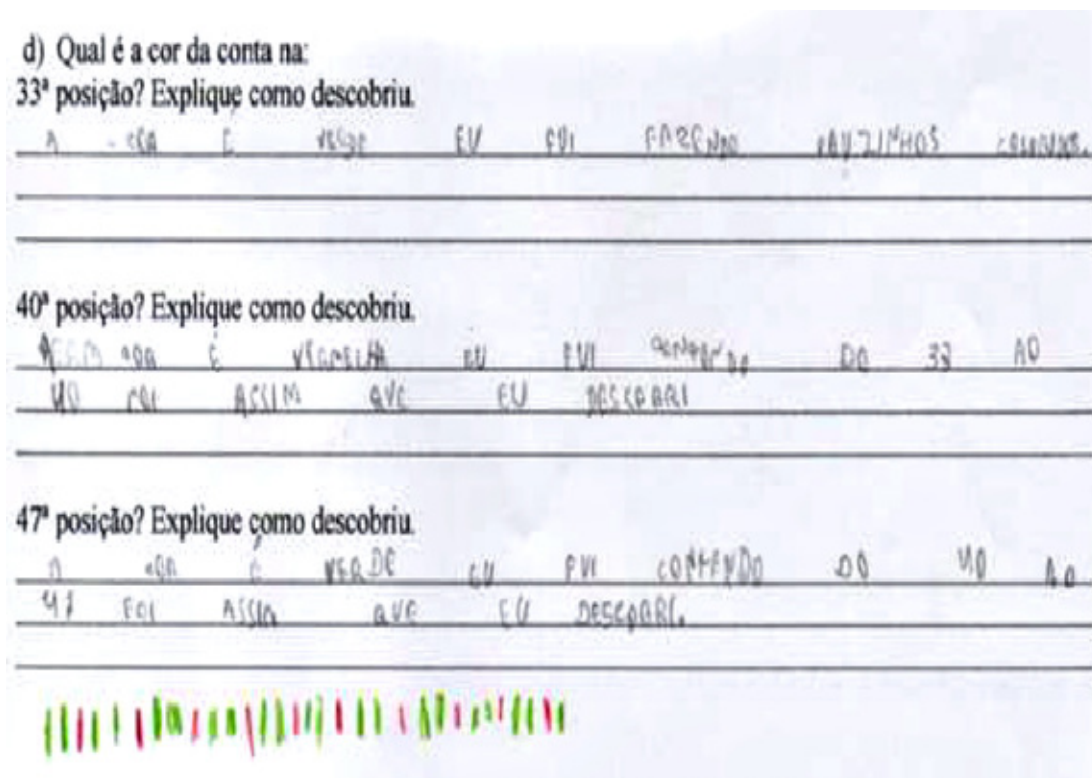
Marcelo: *De três em três é vermelho, prô, pode contar.*

Prof.<sup>a</sup>: *Você pode dar um exemplo para os outros entenderem melhor?*

Marcelo: *Assim, o 1 é vermelho, 2 e 3 verde, o 4 é vermelho, o 5 e 6 verde, então o 7 é vermelho, o 13, o 16, o 19, o 22 e assim vai, então, do 22, tira dois verde, fica vermelho.*

Marcelo e Renan tanto pontuaram a questão da contagem quanto estabeleceram uma generalização ao pensar na sequência de três em três, o que contribuiu para os demais alunos refletirem sobre outras formas de encontrar a cor, além da contagem um a um. Quando questionados a respeito da 33<sup>a</sup>, da 40<sup>a</sup> e da 47<sup>a</sup> posição, Marcelo e Renan, em seus registros (Figura 31), deixaram clara a questão da posição, prova disso seria o ponto de partida para realizar a contagem.





## 2.4 TAREFA: SEQUÊNCIA CRIADA PELOS ALUNOS

Tarefa a ser impressa e entregue a cada dupla ou trio:

Você e seus colegas irão criar um fio de contas com duas ou três cores. Elabore questões para que os colegas de outro grupo respondam. Atenção: a sequência precisa ter um motivo.

### Desenvolvimento da tarefa:

- Organize os alunos em duplas (ou trios).
- Distribua para cada grupo:
  - ✓ Pedaco de barbante e contas coloridas a partir da solicitação dos grupos.  
Deixe disponível em sua mesa a caixa com as contas.
- Os alunos trabalham em duplas (ou trios) e realizam os registros. No caso de turmas não alfabetizadas, você poderá ler a tarefa com eles.
- Quando todos os grupos terminarem, eles devem trocar as tarefas entre si. O grupo que recebeu responde às questões propostas e devolve a folha com a atividade ao grupo que elaborou a sequência para que este possa fazer a conferência.
- Suas intervenções podem ser individuais, em cada grupo, ou coletivas, com a sala toda.

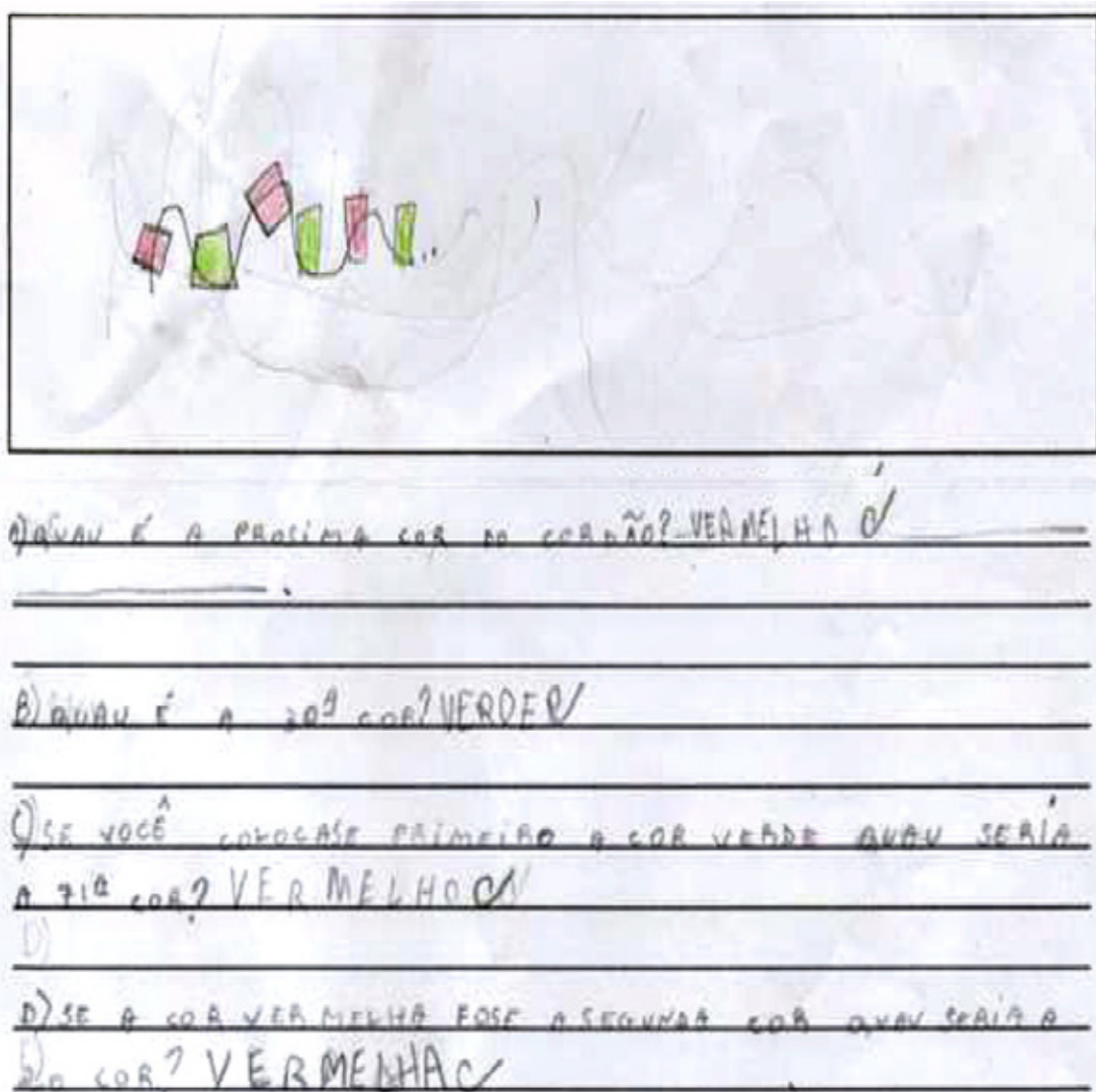
### Vivência em sala de aula:

No dia 12 de junho de 2017, aproveitamos para finalizar a sequência de tarefas do cordão de contas. O objetivo era criar um cordão com duas ou três cores e elaborar questões para outros grupos resolverem. A tarefa foi desenvolvida com a mesma turma do 3º ano do Ensino Fundamental. Nesse dia, estavam presentes 21 dos 30 alunos matriculados. Os estudantes foram organizados em duplas.

Foi difícil selecionar as tarefas, já que muitos alunos conseguiram elaborar questões e elaborar o motivo de forma extremamente interessante. Dentre as

tarefas, selecionei três: duas abordavam uma sequência repetitiva, e a outra usava uma de crescimento.

A primeira tarefa elaborada foi dos alunos Marcos e Samanta. Ela foi respondida por Tainá e Michel (Figura 32).



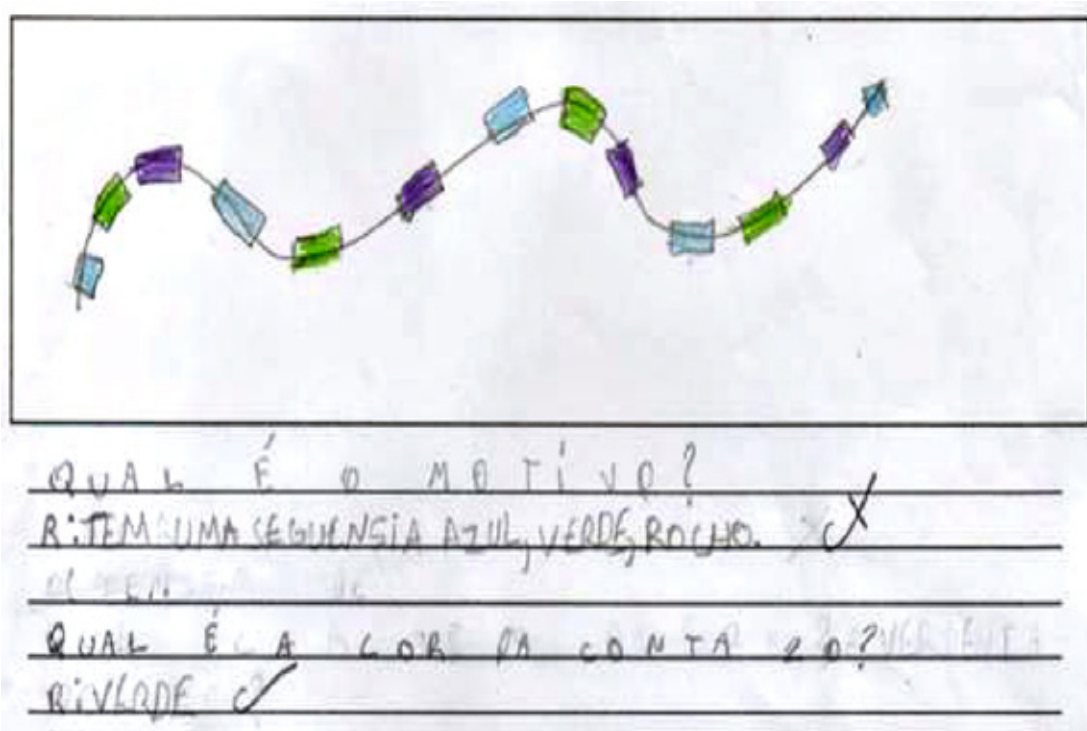
**Figura 32** – Tarefa elaborada por Marcos e Samanta e respondida por Tainá e Michel

**Fonte:** Acervo da professora

É importante destacar nos registros de Marcos e Samanta a presença do motivo da sequência, conforme solicitado na tarefa 4. Além disso, as crianças tentaram recuperar os enunciados presentes nas tarefas já desenvolvidas, mas de uma forma muito particular: propuseram uma resolução de problemas extremamente interessante nos itens c e d. Nestes, questionaram: “se você colocasse primeiro a

cor verde” e “se a cor vermelha fosse a segunda cor”. Com isso, desestabilizaram os alunos que realizaram a tarefa, levando-os a pensar além do motivo proposto, o que Tainá e Michel fizeram com competência.

A segunda proposta selecionada foi dos alunos João e Roberta. Eles fizeram um motivo com três cores – azul, verde e roxo – e finalizaram a sequência com uma conta azul para propor a ideia de continuidade. Os alunos que responderam a essa tarefa foram Mariana e Raquel (Figura 33).



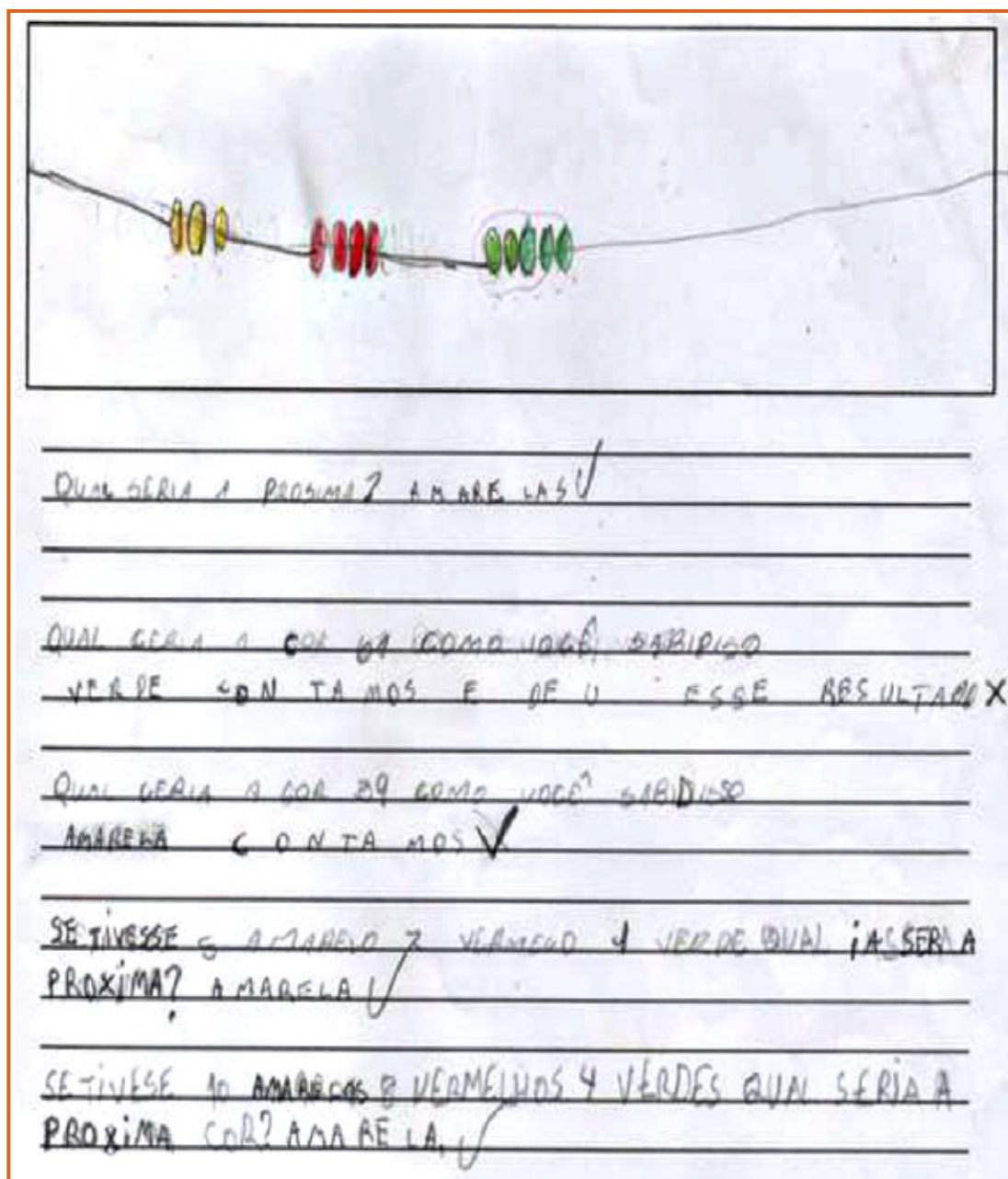
**Figura 33** – Tarefa elaborada por João e Roberta e realizada por Mariana e Raquel

**Fonte:** Acervo da professora

A presença da questão sobre o motivo da sequência é a primeira pergunta que aparece, o que auxiliou Mariana e Raquel a pensar na sequência *azul, verde e roxo* e, posteriormente, a encontrar qual seria a 20ª cor do fio de contas. No próprio fio, eles se limitaram a usar 13 contas, o que considero muito importante, já que poderiam ter feito as 20. Segundo Mariana e Raquel, para a produção das respostas, contaram no próprio fio, “*indo e voltando*”.

A terceira tarefa foi elaborada pelos alunos Mariana e Luciana e respondida por Roberta e João. O que me chamou atenção nessa tarefa é que os alunos organizaram uma sequência na qual aparecem três contas amarelas, quatro

vermelhas e cinco verdes, ou seja, montaram um padrão de crescimento dentro do motivo, como mostra o registro, Figura 34:



**Figura 34** – Tarefa elaborada por Mariana e Luciana e respondida por Roberta e João

**Fonte:** Acervo da professora

É interessante observar inicialmente a limitação do número de contas presentes no fio e a primeira questão, “qual seria a próxima?”. Além disso, as alunas desafiaram Roberta e João a pensarem a respeito da cor da 39ª conta.

Ao mesmo tempo, as alunas, em duas questões, propuseram uma resolução de problemas, trazendo à tona reflexões que vão além do cordão: “Se tivesse 5 amarelas, 7 vermelhas e 1 verde, qual seria a próxima?”; “Se tivesse 10 amarelas, 8 vermelhas e 4 verdes, qual seria a próxima cor?”.

Roberta e João explicaram que nem precisaram contar, foi só compreender a questão e descobrir qual seria a próxima. Para resolver qual seria a 39ª posição, resolveram a partir da sequência, que segue sucessivamente, 3, 4, 5, 3, 4, 5 e somaram os números até atingir o desejado ou próximo a ele.

Dar oportunidades para que as crianças desenvolvessem uma atividade foi importante para que recuperassem algumas relações já trabalhadas no decorrer das tarefas 1, 2 e 3. Ao mesmo tempo, mostra o quanto a organização da tarefa exige dos alunos uma apropriação de conceitos construídos ao longo das discussões e revelados no momento de sua organização.

### 3 SEQUÊNCIA 3: “AS TIRAS COLORIDAS”

#### Justificativas:

Esta sequência, embora seja semelhante à anterior, diferencia-se dela por não utilizar material manipulável. O motivo das cores já é pré-estabelecido, mas a sequência numérica é infinita. O desafio posto aos alunos é que eles sejam capazes de relacionar a sequência numérica com as cores, explorando as ideias de par-ímpar com múltiplos de dois ou de três.

#### Objetivos:

Espera-se que o aluno seja capaz de:

- identificar o padrão proposto na tira, estabelecendo relações entre a cor e sua posição;
- reconhecer números pares e ímpares e generalizar sequência numérica par-ímpar-par-ímpar;
- compreender a ordem de distribuição desses números na fita, antecipar e perceber a regularidade dos números, tomar consciência das diferenças e das semelhanças entre estes números.

#### Nível a que se destina:

Alunos do Ensino Fundamental.

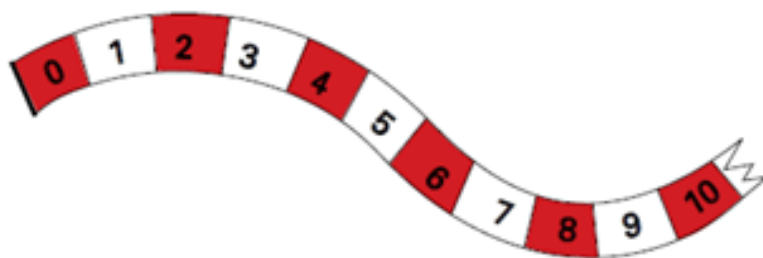
#### Tempo Estimado:

4 aulas para a sequência completa.

### 3.1 TAREFA: TIRA DE NÚMEROS COLORIDOS

Folha impressa a ser entregue aos alunos<sup>3</sup>:

#### Tarefa 1: Tira de números coloridos



Observe a tira de papel que inicia no número zero. Ela alterna números nas cores vermelha e branca.

1. Note que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica?

2. Ainda prestando atenção nas cores dos números, responda:

a) O que os números que estão nos espaços brancos da tira de papel têm em comum?

b) Pense em um número bem grande que não está representado na tira. Registre esse número. \_\_\_\_\_. Esse número ocupa um espaço branco? \_\_\_\_\_ Como você sabe disso?

c) O que os números que estão nos espaços vermelhos têm em comum?

#### Desenvolvimento da tarefa:

- Organize os alunos em pequenos grupos.
- Distribua uma folha da tarefa para cada grupo.
- Estabeleça um tempo para realização da tarefa ou acompanhe o desenvolvimento desta.
- Quando os alunos a concluírem, faça a socialização das diferentes respostas.

3 Tarefa adaptada de Kindt et al. (2006b).



Nesse momento, as diferentes respostas precisam ser valorizadas, mas as intervenções do professor são fundamentais, seja questionando ou devolvendo a resposta dada por um determinado grupo aos demais alunos para eles a analisarem. Você poderá fazer anotações na lousa para que as ideias não se percam.

- É possível que os alunos percebam a relação entre as cores da fita e os números pares e ímpares. Se eles realizaram a tarefa das contas coloridas, essa possibilidade é mais evidente. No entanto, o desafio para eles é identificar que o zero é um número par. Novamente fica a sugestão de trabalhar com a regularidade. Para tanto, pergunte: um número par vem antes ou depois do número ímpar? Eles deverão concluir que, assim como um é ímpar, o zero é par.

### Respostas esperadas:

1. A ponta da tira foi recortada, por isso está diferente.
2. a) Os números brancos são ímpares.  
b) 1005, por exemplo, será branco, pois é um número ímpar.  
c) Os números vermelhos são pares.

### Vivência em sala de aula:

A tarefa das fitas coloridas foi desenvolvida no ano de 2014 com uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal do interior de São Paulo<sup>4</sup>. A classe era composta por 27 alunos. Nesse dia, eles estavam organizados em duplas e trios.

Como de costume, deixei que os alunos realizassem as tarefas, refletissem sobre as questões, lessem-nas autonomamente e, ao mesmo tempo, ajudassem aqueles que precisassem. Conforme ia circulando pela sala, via o entusiasmo das crianças e, ao mesmo tempo, as relações que estavam emergindo dessas discussões. Alguns diziam que já haviam encontrado “o segredo” e que os números eram pares e ímpares, outros ainda enfatizavam que se tratava de uma sequência,

---

4 Para maiores detalhes ver Luvison (2017).

de um padrão. Leonardo, com toda a convicção, dizia que era um padrão numérico e que este ia de um em um.

Algumas duplas e alguns trios se mostravam muito confiantes em suas hipóteses, alguns apontavam que “os números começavam e terminavam [referindo-se ao 0 e ao 10] com pares” e abordavam que o padrão continuaria “porque não tem fim”, “não termina os números”, “há uma continuidade” e porque “a fita está rasgada então deve ter muitos números”, dizeres que estavam presentes nos registros das tarefas das crianças. Outro aspecto que me chamou a atenção foi a escrita de um número “bem grande” na proposta do item b, em que colocaram 18, 20, 50, 90, 100, 1000, 190.000, curiosamente todos números pares, pois, segundo eles, os vermelhos eram pares.

Um dos grupos com que conversei no decorrer das discussões foi o de Eduarda, Henrique e Jaqueline. Lembro-me de que esses alunos conseguiram generalizar pelas relações que estabeleceram de 10 em 10, em que afirmavam que, a cada 10, haveria um vermelho e, portanto, seria fácil descobrir. Ao questioná-los sobre como chegaram a essa conclusão, Eduarda enfatizou:

Eduarda: *O vermelho é par, e os brancos são ímpares.*

Prof.<sup>a</sup>: *Entendi... Estou vendo que vocês colocaram um número bem grande... O número 1000 ... Ele é branco ou vermelho?*

Jaqueline: *Vermelho..., porque ele vai de 10 em 10.*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum...E por que ele vai de 10 em 10? Me explica melhor?*

Jaqueline: *Vai de 10, 20, 30, 40...*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum... Entendi..., porque o 10 é o último, e é vermelho, então vocês foram contando de 10 em 10... E toda vez que dá 10 é vermelho?*

Jaqueline: *Sim.*

Prof.<sup>a</sup>: *Qual é o próximo?*

Jaqueline: *30, 40, 50..., vai subindo.*

Prof.<sup>a</sup>: *Entendi... Então, se fosse um número maior, seria fácil de descobrir?*

Eduarda: *Verdade.*

Prof.<sup>a</sup>: *E se fosse 10.000, que cor seria?*

Jaqueline: *Vermelho também.*

Prof.<sup>a</sup>: *Por quê?*

Jaqueline: *Porque vai de 10 em 10 e é vermelho.*

Prof.<sup>a</sup>: *E como você soube disso? Você foi contando?*

Jaqueline: *Eu olhei e já percebi.*

Prof.<sup>a</sup>: *O que chamou sua atenção no número para você perceber isso?*

Jaqueline: *Vai de 10 em 10..., nem precisei contar porque olhei e já percebi que o 10 é vermelho, não é? ... Já dá para perceber..., então é vermelho...*

Jaqueline, nesse momento, foi crucial para chamar a atenção dos colegas para essa relação, pois, para ela, a cada 10 haveria um vermelho; porém, isso não seria possível, ao pensar no 5, por exemplo, pois, de acordo com Jaqueline, se fosse de 5 em 5, ficaria 5 ímpar, 10 par, 15 ímpar, 20 par e assim sucessivamente. A aluna não só conseguiu generalizar, significar, como também ressaltou que sua hipótese seria possível de 10 em 10, mas essa não seria uma regra para os demais números. Suas generalizações ampliaram-se à medida que refletia sobre a palavra. Há dois aspectos importantes: o primeiro é a ideia de regularidade, e o segundo refere-se aos múltiplos, visível no exemplo da sequência 5, 10, 15 e 20 e em sua associação com ímpares e pares, o que também esteve presente ao falar a respeito dos outros números.

Outro aspecto abordado foi a ponta direita da fita, que parecia estar rasgada.

Prof.<sup>a</sup>: *“Observe que a ponta direita é diferente da ponta esquerda. O que vocês acham que isso indica?”* [leitura da tarefa]. *O que vocês poderiam falar sobre isso?*

Tadeu: *Que essa ponta está rasgada.*

Alexandre: *Que esta ponta está rasgada, porque arrancaram uma... Era 11.*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum... O que mais vocês pensaram sobre isso?*

Luísa: *Seria mais que 11.*

Prof.<sup>a</sup>: *Por quê?*

Gustavo: *Seria mais do que 11, porque os números continuam.*

Prof.<sup>a</sup>: *Esse “a mais” seria até aonde?*

Leonardo: *Até o infinito!*

Prof.<sup>a</sup>: *Como você chegou a esta conclusão?*

Leonardo: *Porque nunca acaba os números...*

Prof.<sup>a</sup>: *E aí continuaria essa fita?*

Leonardo: *Sim! Muito!*

Prof.<sup>a</sup>: *Interessante... Alguém pensou diferente?*

Tadeu: *Eu pensei que ia até o 20.*

Prof.<sup>a</sup>: *Por que você pensou até o 20?*

Tadeu: *Porque vai assim...* [faz gestos com as mãos indicando a continuidade da fita, dando a ideia de movimento com as mãos, representando com os gestos o próprio contorno da fita].

Prof.<sup>a</sup>: *Será que você fez o desenho até o final da folha? No seu limite, então?*

Tadeu: *Sim... Parei até a folha.*

Wilson: *Vai até o 15.*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum... Você contou e foi até o 15?*

Wilson: *Ou 19, por aí...* [refere-se ao 19, pois, conforme conversávamos a respeito da continuidade, o aluno continuou desenhando os quadradinhos na fita e colocando os números até finalizar o espaço].

Prof.<sup>a</sup>: *Hum... Tenho uma pergunta para fazer para vocês que fiquei aqui pensando, mas antes vou deixar o Jonas falar...*

Marina: *No meu deu 25.*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum...O que aconteceu?*

Jonas: *É até o infinito, poderia ser mais, mas essa fita poderia ir até 100..., mas eles pensaram que não, mas pode continuar...*

Joaquim: *Até 18...*

Prof.<sup>a</sup>: *Por que cada um foi até um número?*

Antonio: *Porque a folha tem limite, não dá.*

Gustavo: *O número pode ser maior, ou menor... então pode dar menos, ou mais* [estava se referindo à escrita, ao tamanho do numeral que cada aluno fez].

Wilson: *Eu fiz a largura certinha do quadrado...* [Chama a atenção para o tamanho dos quadradinhos, pois isso, segundo ele, poderia criar essas diferenças].

Prof.<sup>a</sup>: *E se eu não respeitar a largura certinha do quadrado, vai dar alguma diferença?*

Gustavo: *Vai a mais...*

Wilson: *Ou a menos!*

Prof.<sup>a</sup>: *Então vocês chegaram em duas conclusões no item a:* [começo a registrar na lousa as primeiras hipóteses dos alunos]. *Os números continuam e nessa continuação pode ter duas coisas: os números podem ir até o fim da folha...*

Alexandre: *Ou até o infinito! Mas eles continuam...*

Luísa: *Até a metade da folha...*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, se os números vão até o final da folha, isso vai depender do tamanho da folha e dos quadrados; e a outra seria ir ao infinito... é isso?*

Gustavo: *Eles nunca acabam!*

Jonas: *A conclusão deles não tá errada, porque cada um colocou até o limite que a folha deu...*

Gustavo: *Igual, você pega: quando estamos fazendo matemática, não pode apagar o nosso pensamento, porque... não tem certo e nem errado...*

Prof.<sup>a</sup>: *São os caminhos que cada um faz, né, Gustavo?*

Esse primeiro momento de discussões me fez refletir sobre o quanto conseguiram se apropriar de alguns aspectos discutidos em tarefas anteriores sobre padrões, como a regularidade, a sequência do padrão e a infinidade de números que o compõe. Recuperar a palavra “infinito” significava confirmar, nesse momento, que os padrões possuíam uma continuidade, o que lhes possibilitou generalizar, apontando outros termos e, ao mesmo tempo, levar a linguagem numérica para essas relações. Eles poderiam, em algum momento, ter mencionado, na discussão, que a fita iria até o limite que a folha criava, mas eles defendiam que havia um momento que essa fita alcançava “seu fim”, ao relacioná-la ao espaço da folha de sulfite. Contudo, compreendiam que esses números continuariam infinitamente.

Esse limite criado por eles partiu de Wilson e Gustavo, que haviam desenhado essa continuidade, naquele momento, até 15, mas percebi que, à medida que apontavam suas hipóteses com a turma, continuavam desenhando a fita até chegar a 18 e atingir o limite da folha. Por isso, em sua fala, Wilson disse “*Ou 19, por aí...*”, estimando uma quantidade de acordo com o espaço que ainda possuía.

Nesse momento, os alunos, envolvidos por suas enunciações e pelas dos outros, na escuta no decorrer da socialização, foram mobilizados a continuar, pois, se falavam que a fita continuava e ainda restava um espaço em branco, por que pará-la em 15? Seria como passar por cima de seus próprios dizeres. Isso os levou a continuar desenhando e escrevendo os números. Da mesma forma, Tadeu e Natália, Marina e Antônio, Samuel, Nuria e Luísa eram envolvidos pela fala de Gustavo e Wilson, que tinha sentido para eles, pois também haviam seguido o mesmo raciocínio, procurando ocupar de forma diferente o espaço da fita que faltava, com tamanhos e formas repletas de estilo e particularidades.

As validações a que chegaram nesse momento eram duas, mas se completavam. Segundo eles, a fita teria uma continuidade, pois os números não

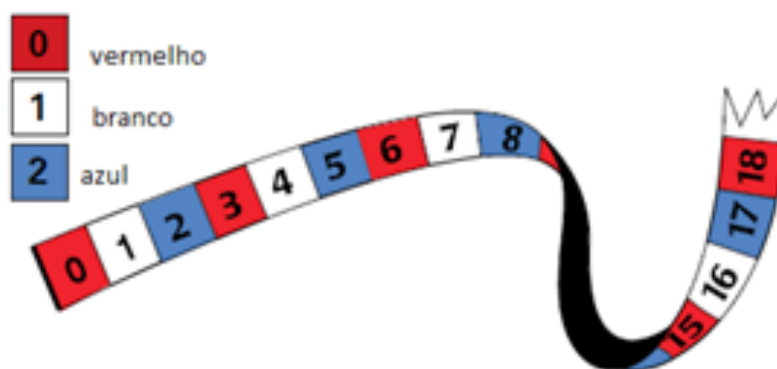
terminam, são infinitos, mas, pensando no limite que a folha criava e em alguns fatores já apresentados em aula, essa continuidade variava entre os alunos. Isso me levou à reflexão sobre o enunciado da própria tarefa: “Observe que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica?”. A leitura da tarefa nos provoca uma ação diante do texto: as colocações “é diferente” e “o que acha que isso indica” nos possibilitam ir além, refletir e criar, levantar hipóteses, estabelecer analogias com o que já se discutiu em momentos anteriores. Esse “rasgo” significava, nas palavras dos alunos, “*continuidade*”, “*infinito*”, “*nunca acaba*”, “*sim, muito!*”.

Assim, eles conceberam a ideia da regularidade do padrão, da identificação posterior dos números pares e ímpares e de sua ordem de distribuição na fita, que eles também já haviam compreendido. As palavras tinham sentidos naquele contexto, naquelas experiências; o conceito estava pulsante em suas ações; e as relações que estabeleceram entre os números pares, vermelhos, e os ímpares, brancos, mediarão as discussões e as generalizações que estabeleceram.

### 3.2 TAREFA: TIRA DE TRÊS NÚMEROS COLORIDOS

Folha impressa a ser entregue aos alunos<sup>5</sup>:

#### Tarefa 2: Tira de três números coloridos



Esta é uma tira diferente, repete as cores em uma sequência: vermelho, branco, azul; vermelho, branco, azul.

1. Observando as cores que os números ocupam, responda:

- O que a sequência de números nos espaços brancos tem em comum?
- Entre o 7 e o 16, quais números ocupam os espaços brancos?
- O que a sequência de números vermelhos tem em comum?
- Qual é a cor do espaço do número 51? \_\_\_\_\_ Como você sabe disso?
- Qual é a cor do espaço do número 37? \_\_\_\_\_ Como você sabe disso?

#### Desenvolvimento da tarefa:

Como feito na tarefa anterior, organize os alunos em pequenos grupos e distribua uma folha da tarefa a cada um destes. Você pode acompanhar o desenvolvimento do trabalho nos grupos, fazendo intervenções e questionamentos que os ajudem a avançar nas ideias matemáticas. Nossas vivências têm nos mostrado que há uma primeira tendência a relacionar as cores com números pares e ímpares. Assim, as questões do

5 Adaptada de Kindt et al. (2006b).

professor podem direcionar a percepção de que essa regularidade, presente na tarefa 1, não se aplica a esta tarefa.

Depois da conclusão, o professor faz as socializações. Pode ser que algum grupo perceba que agora, a relação de cores, varia de três em três. Dependendo do ano, os alunos ainda não têm o conceito de múltiplo, pois podem usar a expressão “vai de três em três”. Ao final da socialização, uma síntese coletiva poderá ser produzida pelo professor, contando com as ideias dos alunos.

### **Respostas esperadas:**

- a) Os números brancos são ímpares e pares e aumentam de três em três.
- b) Os brancos são: 10, 13 e 16.
- c) Os números vermelhos são pares e ímpares e, com exceção do zero, sempre há dois números vermelhos depois de um branco.
- d) Pode-se compreender a sequência de 3 em 3: vermelho, branco, vermelho. Assim, é possível pensar nos múltiplos de 3. Como 51 é múltiplo de 3, é vermelho.
- e) O número 37 não é múltiplo de 3; quando se divide 37 por 3, há o resto 1; portanto, o número é vermelho.



## 3.2 TAREFA: PRODUÇÃO LIVRE DO ALUNO (PARA ALUNOS DE ANOS MAIS AVANÇADOS)

Agora é sua vez! Crie uma tira com quatro cores.

Sua tira deverá ter uma regularidade. Esta será identificada por seus colegas da classe. Formule questões para que eles possam responder.

### Desenvolvimento da tarefa:

Os alunos deverão trabalhar em pequenos grupos e criar uma tira. Esta será trocada entre os grupos para que eles identifiquem as regularidades (ou não) e respondam às questões propostas pelos estudantes que as elaboraram.

Há a possibilidade de a tira criada não ter uma regularidade. Assim, o grupo que ficar responsável por ela deverá argumentar sobre a não existência de uma regularidade e propor a reorganização da tira.

### Vivência em sala de aula:

A presente narrativa refere-se a algumas experiências vividas em 2015, com uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública municipal do interior de São Paulo. A classe era composta por 30 alunos. No dia dessas vivências, estavam presentes 29 estudantes, organizados em 13 duplas e 1 trio.

Os alunos ficaram motivados ao saber que se tratava de uma tarefa investigativa e que poderiam argumentar, levantar hipóteses, discutir em grupos e socializar com todos suas ideias. No decorrer da resolução, alguns alunos argumentaram que a sequência seria de três em três e que as cores iam se alternando. Outros ainda defenderam que todo número par seria vermelho (tomando como referência o zero) e que todo número ímpar seria branco (tendo o um como referência). A primeira hipótese foi refutada por alguns alunos, que afirmavam que isso não daria certo nessa tarefa, já que havia três cores e não duas, como na primeira tarefa das fitas.

Na pergunta inicial, que tratava da sequência dos números brancos, observei duas formas de resolução. Na primeira, os brancos seguiam uma sequência de três em três. Já a segunda considerava a sequência “ímpar, par” como válida; um exemplo seria o registro de Maria, que expôs: “vai depois do número branco um par,

um ímpar, um ímpar, um par e assim vai indo”. Durante a socialização, retomamos essas questões:

Roberto: *É assim, prô: a sequência vai de três em três e continuando, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, cada um de uma cor.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, você acha que o padrão é de três em três?*

Otávio: *É, também tem assim ó [apontando para fita]: um, dois, três.*

Prof.<sup>a</sup>: *Zero, um, dois, três, é isso?*

Otávio: *É, e no final vai indo sempre nessa sequência.*

Prof.<sup>a</sup>: *Mas foi fácil para vocês olharem essa fita e descobrir que número não tinham?*

Ricardo: *9, 10, 11, 12, 13, 14.*

Gabriela: *É isso mesmo.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, Gabriela, o nove é de que cor?*

Alunos: *Vermelho.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o 10?*

Alunos: *Branco.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o 11?*

Alunos: *Azul.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o 12?*

Alunos: *Vermelho.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o 13?*

Alunos: *Branco.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o 14?*

Alunos: *Azul.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, foi fácil descobrir essa sequência? Como descobriram tão fácil assim?*

Roberto: *Porque aqui [mostrando a fita] tem uma continuação, vermelho, branco, azul.*

Ivan: *E aqui tem uma pontinha que é vermelho, aí continua vermelho, branco, azul, que para no azul, e aí continua vermelho, branco, azul.*

Prof.<sup>a</sup>: *Ivan você percebeu que tem uma parte que parece que está rasgada novamente? [Retomo o que foi discutido na tarefa 1 das fitas, proposta anteriormente]. O que isso indica, de acordo com o que conversamos?*

Ivan: *Que o número é infinito e continua.*

D: [inaudível]

Prof.<sup>a</sup>: [Recapitulo a fala do aluno D] É que vocês não escutaram, mas o D disse assim: “que, olhando para o número 18, o número 0, ele percebeu que o vermelho é par”. E agora, será mesmo que o vermelho é par?

Alunos: Não.

Gabriela: Não, é um par, um ímpar, par, ímpar...

Ivan: É, vai assim, intercalando.

Prof.<sup>a</sup>: Então, o que o azul é?

Gabriela: É o que eu ia falar, é a mesma sequência, par, ímpar, par, ímpar..., a mesma sequência que o vermelho, só o branco que não, ele é ímpar, par, ímpar, par.

No decorrer da discussão, os alunos estabeleceram relações com a tarefa 1, que foi realizada anteriormente e possuía apenas duas cores (os números pares seriam vermelhos; e os ímpares, brancos). Ao mesmo tempo, já iniciavam algumas hipóteses, afirmando que havia uma sequência, que o padrão mudava de três em três e que as cores estavam ligadas a essa mudança, ou seja, seguiriam a sequência “vermelho, branco e azul”.

A ausência dos números também foi um aspecto que os alunos compreenderam com facilidade. A aluna Gabriela já começava a refletir acerca dos vínculos entre os números pares e ímpares e as cores, afirmando: “o azul é par, ímpar, par, ímpar..., a mesma sequência que o vermelho, só o branco que não, ele é ímpar, par, ímpar, par”. A “mesma sequência” quer dizer que tanto o vermelho quanto o azul apresentavam uma série de números pares e ímpares, o que não acontecia com o branco, que seria ímpar e par sucessivamente. Essas relações estabelecidas por Gabriela foram extremamente ricas para seguirmos a sequência dos números brancos.

Outro episódio que chamou a atenção envolve o número 51. Vejamos a discussão:

Prof.<sup>a</sup>: *Vocês conseguiriam descobrir qual é a cor do número 51? Como você descobriu?* [Várias crianças começam a falar sua resposta.] *Ouvi várias respostas, mas o que me chamou atenção é que alguns dizem que é vermelho, outros, branco, e outros ainda, azul. Mas não podemos ter três respostas para essa pergunta.* [Peço a eles que sinalizem quem escreveu que é branco e lhes pergunto a justificativa].

Adriana: *Pensamos no número que termina; como é 51 e termina com um, é branco.*

Gabriela: *Mas esse não dá, porque são três cores.*

Adriana: *Não tem nada a ver.*

Prof.<sup>a</sup>: *O que vocês acham pessoal?*

Adriana: *Eu acho que o azul vai com o par, porque só tem ímpar e par e não tem mais outra coisa.*

Prof.<sup>a</sup>: *Será Gabriela que é isso?*

Gabriela: *Não é, o vermelho é par, e o branco é ímpar.*

Felipe: *Mas aqui na fita o um tá branco.*

Prof.<sup>a</sup>: *Mas é somente o um que está branco?*

Felipe: *Não.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, como vocês me provariam isso?*

Ronaldo: *O branco não é só ímpar, é par também, pois, quando alguma coisa termina com um, não dá para saber assim, porque tem outros números.*

Ivan: *Então não é, porque no branco também tem par.*

Roberto: *Assim, prô, poderia fazer: vermelho, branco, azul, vermelho, branco, azul [...] [e continua narrando a sequência].*

Gabriela: *Nós contamos assim, ó: 18, 19, 20. E fomos indo até o 51, contando no dedo.*

Ivan: *Eu fiz assim: o meu deu vermelho, aqui é branco [mostrando a parte rasgada da tira: azul, vermelho, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50 e 51. Utiliza a própria fita para ir contando, seguindo a sequência dos números].*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, vocês foram contando para descobrir que era o vermelho?*

Ricardo: *E eu, prô, fui contando nessa parte [legenda das cores] e descobri que era branco.*

Gabriela: *Prô, eu posso tentar provar na lousa se é vermelho mesmo?*

Prof.<sup>a</sup>: *Pode.*

Gabriela: *Eu vou provar de uma maneira. [Gabriela vai até a lousa e começa a fazer os números, seu objetivo é expor os números de 0 a 51 e contar: vermelho, branco, azul. Mas Gabriela poderia encontrar outro caminho...]*

Prof.<sup>a</sup>: *Vou te desafiar: você teria uma forma mais rápida de chegar a esse resultado? Otávio, o que poderia ser feito?*

Otávio: *De 10 em 10.*

Prof.<sup>a</sup>: *E como você faria isso?*

Gabriela: *Otávio, 10 é branco.*

Otávio: *Ou de 11 em 11 para ficar mais fácil o 1. 10 mais 10.*

Prof.<sup>a</sup>: *É 20, o 10 seria branco e o 20?*

Ronaldo: *Azul.* [Peço que represente isso na lousa].

Ivan: *Coloca apenas o b de branco, é mais rápido.*

Ricardo: *E o 30 será vermelho.*

Ivan: *E 40 é branco.*

Ricardo: *50 é azul, e o 1 é vermelho.* [Gabriela volta a registrar, porém de outra forma...]. *Ela tá indo de três em três, acho.*

Prof.<sup>a</sup>: *Mas porque você começou com o 18?*

Gabriela: *Tá aí: eu provei que é vermelho. Porque o 18 tá aqui [mostrando a fita] e é vermelho, depois o 19, 20 e o 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51.* [Os números destacados são os vermelhos. Gabriela os enfatiza durante sua narração. Os números do intervalo, os que não estão destacados, foram apenas contados nos dedos; ao chegar aos vermelhos, encosta com o dedo indicador sobre o número na lousa, além de aumentar a voz].

Prof.<sup>a</sup>: *Otávio, não seria interessante você deixar registrado também o que pensou?* [Otávio registra o 10, e pergunto de que cor seria].

Ivan: *Coloca só a letra.*

Prof.<sup>a</sup>: *Ok, Ivan, vamos fazer isso, Otávio?* [Otávio registra 10B]. *Ronaldo, e o 20?* [Otávio registra 20 A] *E agora, Ricardo?*

Ricardo: *O 30 é vermelho.* [Otávio registra 30 V]

Prof.<sup>a</sup>: *E agora, Otávio?*

Otávio: *É 40.*

Prof.<sup>a</sup>: *E que cor é?*

Otávio: *Branco.* [Registra B; em seguida, coloca 50 e A].

Prof.<sup>a</sup>: *Faltou quanto?*

Gabriela: *1, o 51 é vermelho. Eu disse!*

[Otávio registra o 1 e o V]

Otávio: *De 11 em 11, ia dar 51.*

Prof.<sup>a</sup>: *Bem, vamos fazer. O 11 seria que cor?*

Gabriela: *Azul. Agora vem o 21, que é vermelho, tá aí, ó* [se referindo a suas anotações na lousa].

Prof.<sup>a</sup>: *E agora?*

Gabriela: *O 31 é branco, porque o 30 é vermelho; então, o 31 é branco.*

Ivan: *Depois vem o 41, prô, que é azul.*

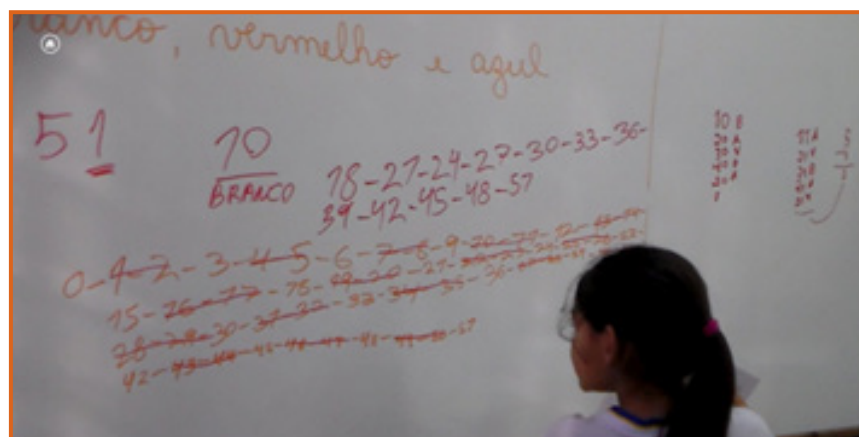
Gabriela: *E o 51 é vermelho.* [Enquanto isso, Otávio realiza seu registro na lousa, Foto 1].



**Foto 1** – Registro de novas estratégias do aluno Otávio

**Fonte:** Acervo da professora-pesquisadora

[Enquanto vários alunos, que já estavam na lousa, discutiam sobre os registros de Otávio e tentavam encontrar outras estratégias, Gabriela voltou à lousa, a fim de encontrar outros caminhos para a resolução, pois Nicolas não tinha se convencido com os registros de Gabriela e de Otávio e defendia que a cor seria branca e não vermelha (Foto 2).]



**Foto 2** – Registro da aluna Gabriela: momento de convencimento

**Fonte:** Acervo da professora-pesquisadora

[Gabriela numerou de 0 a 51 na lousa e riscou os números que seriam brancos e azuis, deixando apenas os vermelhos em evidência.]

Gabriela: *Eu fui contando até chegar no 18 e depois fui continuando. Então, nós [se referindo ao Otávio e ao Ricardo] provamos que o 51 é vermelho.*

Prof.<sup>a</sup>: *E aí, Nicolas, o que você achou?*

Nicolas: *Que não é vermelho, é branco.*

Gabriela: *Então, Nicolas, faz do seu jeito pra mim ver.*

[Nicolas começa a registrar na lousa de 10 em 10 até totalizar 50 e termina com o 1. Nicolas defende que, se olhar para o 10, que é branco, todo número 10 será branco]

Gabriela: *Nem dá para olhar só o 0, porque tem três cores.* [Percebo a importância de minha intervenção nesse instante...]

Prof.<sup>a</sup>: *Nicolas, que cor é o 10?*

Nicolas: *É branco.*

Prof.<sup>a</sup>: *E o outro 10?*

Nicolas: *É branco [e indica que os demais também são brancos].*

Prof.<sup>a</sup>: *Mas qual é a sequência de cores? Vermelho, branco, azul. O 10 é branco, mas o 20 é que cor? Azul, pois aqui 10 mais 10 é 20.* [Mesmo assim, Nicolas não se convenceu. Pedi para que registrasse comigo. Voltei à contagem e mostrei a ele que – apesar de ser de 20 em 20, como agora seria registrado – o 20 seria azul e não branco. O 40 seria branco, o 50 seria azul, e o 51, vermelho]

Várias foram as reflexões realizadas nesse episódio. Primeiramente, observo que a defesa das crianças foi a de que não havia a possibilidade de conservar o último número do 51, pois, apenas observando o 1, não teria como apontar que seria branco, já que o branco possuía não apenas números ímpares, mas também pares, o que foi muito enfatizado pela aluna Gabriela. Ao longo dos registros, muitas estratégias surgiram. Gabriela, *a priori*, buscava confirmar suas hipóteses sobre o vermelho escrevendo todos os números e contando até chegar ao 51. Porém, ao iniciar, propus que pensasse se haveria outra forma mais rápida para resolver.

Gabriela ficou reflexiva, enquanto Otávio entrava na discussão e dizia a ela que a contagem poderia ser feita tanto de 10 em 10 quanto de 11 em 11. Ao registrar na lousa, Otávio ainda estava um pouco inseguro; porém, a cumplicidade de todo

o grupo o mobilizou a refletir sobre a forma como poderia realizar essa contagem. Mesmo assim, o aluno pensava no registro de 11 em 11, já que, segundo ele, tratava-se de um número ímpar. Essa participação de Otávio foi muito importante, pois o estudante conseguiu vencer suas inseguranças e ir até a lousa para conjecturar sobre suas ideias.

Gabriela também procurou continuar seus registros e encontrar outros caminhos para a mesma resolução, foi quando decidiu partir do 18 e evidenciar os números vermelhos. Contudo, isso não seria suficiente, já que o aluno Nicolas ainda não havia se convencido de que o 51 poderia ser vermelho – segundo sua resolução, este seria branco. Mesmo a aluna utilizando outros caminhos para explicar, Nicolas precisava compreender como esse processo estava acontecendo. Para isso, pedi que registrasse suas hipóteses. Com isso, percebi que ele tinha feito de 10 em 10, mas se fixava sempre no 10, que seria, na fita, branco.

Como distribuí 10, 10, 10, 10, 10, 1, não compreendia que 10 mais 10 seria 20 e que, portanto, a cor mudaria, sendo azul. Ele insistia em levar em conta apenas o 10 e sua cor na fita. Considero que esse momento foi extremamente rico para todo o grupo, mas principalmente para Nicolas, pois, ao recuperar seus registros e compartilhá-los com todos, pudemos perceber quais eram as justificativas e os caminhos utilizados por ele para obter essa resposta. Caso essa recuperação não tivesse sido feita, talvez a tarefa continuasse sem fazer sentido para Nicolas.

É importante perceber o quanto as crianças utilizam diferentes estratégias para justificar suas resoluções, tendo como princípio identificar a cor e o motivo. Acredito que as tarefas investigativas são potencializadoras nas aulas de matemática, pois elas conseguem fazer com que as crianças se aproximem dessa disciplina de forma extremamente singular, produzindo significados para a linguagem e para a elaboração conceitual.



## 4 SEQUÊNCIA 4: BRINCANDO COM SONS

### Justificativa:

Existem algumas atividades lúdicas que se apresentam como contextos favoráveis para a percepção de regularidades. Citamos algumas delas: brincadeiras, danças rítmicas e sequências de sons ou de gestos. Nesta seção, apresentaremos algumas tarefas que trabalham com sequências de sons.

### Objetivos:

- identificar a sequência de sons em uma cantiga;
- produzir uma sequência de sons;
- reconhecer o padrão/motivo de uma sequência por meio da percepção de sua regularidade;
- generalizar o motivo de uma sequência;
- perceber os discursos matemáticos dos alunos que emergem a partir das tarefas.

### Nível a que se destina:

A partir dos 5 anos.

### Tempo Estimado:

3 aulas.

### Material necessário:

Equipamentos para a reprodução de vídeos e para as produções dos alunos.

## 4.1 TAREFA: CANTIGAS & BATUQUE: CONHECENDO POSSIBILIDADES

### Desenvolvimento:

Inicialmente apresente alguns vídeos de cantigas de roda, com sons e movimentos (pés e mãos). Destacamos algumas sugestões:

- Samba Lelê – Barbatuques | Tum Pá  
<[https://www.youtube.com/watch?v=\\_Tz7KROhuAw](https://www.youtube.com/watch?v=_Tz7KROhuAw)>
- Peixinhos do Mar – Barbatuques | Tum Pá  
<<https://www.youtube.com/watch?v=xV1KB1iQsWM>>
- Jogo do Tum Pá – faixa “Tum Pá” | Barbatuques  
<<https://www.youtube.com/watch?v=37OP-SOe9dY>>
- Kererê – Barbatuques | Ayú  
<<https://www.youtube.com/watch?v=Xe4fLgzA2Vc>>
- Cabeça, ombro, joelho e pé – LittleBabyBum  
<[https://www.youtube.com/watch?v=ERWuS4Tou\\_A](https://www.youtube.com/watch?v=ERWuS4Tou_A)>

Após a exposição desses materiais, apresente o vídeo “Leãozinho Pauleco e Sandreca”<sup>6</sup>. Em seguida, converse com os alunos sobre os movimentos realizados pelos personagens que aparecem no vídeo (garoto e leãozinho). E problematize:

1. Há uma sequência no movimento dos pés e mãos?

Em seguida, repita o vídeo com o objetivo de que eles prestem atenção nas sequências destacadas e identifiquem outras sequências. Posteriormente, questione:

2. Os movimentos do garoto e do leãozinho são os mesmos? Eles são simultâneos (ocorrem ao mesmo tempo)? Quais são esses movimentos?

### Respostas esperadas:

- a) Tencionamos que os alunos reconheçam a regularidade existente nos movimentos realizados pelos personagens e o ritmo da música.
- b) Queremos que os alunos reconheçam a sincronia entre os movimentos dos

6 Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=zt93UvnesEc>>. Acesso em março de 2018.

personagens e o ritmo da música. A maioria dos movimentos segue um padrão: dois passos/movimentos para esquerda e dois passos/movimentos para direita.

### Vivência em sala de aula:

A proposta foi realizada na segunda quinzena do mês de setembro de 2016, em um 3º ano do Ensino Fundamental, com uma turma com 22 alunos, em uma escola pública da zona rural. Os trabalhos foram iniciados a partir da apresentação dos vídeos de cantigas de roda sugeridos na descrição da tarefa; depois, foi eleito o vídeo “Leãozinho” para a análise.

Logo no início da apresentação do vídeo, foi possível notar que as crianças começaram a imitar o movimento corporal que se baseava em dois tempos para o lado esquerdo e dois tempos para o lado direito. Com isso, foi possível entender que as crianças já haviam reconhecido o padrão repetitivo presente na cantiga. No entanto, tal identificação surgiu em um contexto de brincadeira, do contato com a sonoridade da música. Ou seja, os alunos não estavam envolvidos em uma análise matemática em busca do padrão presente na música; eles estavam brincando! Além disso, apresentei os vídeos sem solicitar que as crianças realizassem qualquer tipo de análise, pois a ideia inicial era que apenas entrassem em contato com eles.

Para dar continuidade à tarefa, fiz um questionamento, que levou à seguinte discussão:

Prof.<sup>a</sup>: *O que a gente já sabe sobre sequências?*

Adriano: *Sequência é quando repete as coisas. Quanto tem coisa igual e vai repetindo.*

Prof.<sup>a</sup>: *Uma sequência é quando...* [aluno interrompe a fala]

Eduardo: *Tem tamanho também!*

Adriano: *Tamanho, cor...*

Juliana: *Também é tamanho, cor, forma...*

Prof.<sup>a</sup>: *Tem um jeito certo de se produzir uma sequência?*

Alunos: *Não!*

Eduardo: *Não! Tem um, dois, três, quatro... elementos.*

Prof.<sup>a</sup>: *Você está falando do quê? Do motivo?*

Eduardo: *É!*

Prof.<sup>a</sup>: *Ah, então uma sequência tem um motivo?*

Thalita: *É!*

Prof.<sup>a</sup>: *E o que é o motivo mesmo?*

Alunos: *O segredo!*

Prof.<sup>a</sup>: *E o que é o segredo?*

Eduardo: *Um esconderijo! Tipo: eu tou agachado, a Ana Clara em pé, e você tá deitada. Aí alguém chega lá e fala: “Qual é esse motivo?”. Aí tem que acertar...*

Adriano: *Sequência é quando repete!*

Pelo diálogo, percebemos que as crianças manifestaram suas significações à medida que ouviam o que os colegas destacavam e foram trazendo à tona elementos discutidos em outras tarefas, (como *tem tamanho também, tamanho e cor, também é tamanho, cor e forma*), em que as crianças retomaram as ideias de “*cor, tamanho e forma*” que apareceram em outra atividade, na qual produziram sequências a partir de materiais manipulativos. Elas ainda estão no processo de elaboração conceitual do que, de fato, é uma sequência. Nesse momento, em que não se tem o conceito formado, *sequência* é tudo aquilo que envolve o que já foi debatido até aquele instante: repetição de formas, tamanhos, cores, etc.

Além disso, as crianças demonstraram que ainda é difícil realizar a distinção entre sequência e motivo, pois estavam inseridas no processo em que as discussões ainda possibilitavam novas relações. Quando o aluno Eduardo definiu o que era motivo para ele – “*Um esconderijo! Tipo: eu tou agachado, a Ana Clara em pé, e você ta deitada. Aí alguém chega lá e fala: ‘Qual é esse motivo?’. Aí tem que acertar...*” –, fez referência a uma tarefa vivenciada por ele, em que se identificou o motivo. Não podemos negar que Eduardo já havia estabelecido muitas relações diante do conceito envolvido, mas ainda o estava elaborando. Com isso, entendo que, à medida que são feitas novas propostas e que as crianças têm a oportunidade de refletir sobre tais relações, o conceito vai sendo construído.

Depois disso, exibi novamente o vídeo “Leãozinho”. Solicitei que as crianças identificassem a sequência que aparecia nele. Durante a exibição, as crianças foram chamando a atenção para as diversas sequências que identificaram no vídeo, tais como: as cores do cenário, a representação dos personagens presentes na música bem como suas disposições (pequeno, médio e grande), a repetição dos trechos da música, a repetição dos sons, da dança dos personagens, etc.



## 4.2 TAREFA: CANTIGAS & BATUQUE: PRODUÇÃO DOS ALUNOS

### Desenvolvimento:

Organize os alunos em grupos de quatro ou cinco para a criação de uma sequência de movimentos e/ou sons para apresentação para os outros alunos. O ideal é realizar a tarefa na área externa da escola ou em um local com bastante espaço para que os grupos possam se dividir e realizar a proposta. Ao final da produção, cada grupo realizará a socialização para que a turma possa identificar a regularidade presente nas sequências criadas.

### Notas para o professor:

- ✓ Os vídeos são apenas sugestões; você pode escolher outras opções.
- ✓ É fundamental que seja discutida a questão da sequência. Em alguns vídeos, há sequências repetitivas, mas também, outras que não se repetem.
- ✓ Após a elaboração dos alunos, você pode fazer a roda de conversa para que eles expliquem como produziram a sequência.

### Vivência em sala de aula:

A proposta foi realizada na segunda quinzena do mês de setembro de 2016, em um 3º ano do Ensino Fundamental, com uma turma com 22 alunos, em uma escola da zona rural de uma rede municipal. Para esta tarefa, as crianças foram organizadas em cinco grupos, com o intuito de que criassem suas próprias sequências com sons e/ou movimentos corporais para que os outros colegas fossem desafiados a identificar o que produziram.

Durante as produções, as crianças ficaram livres, não realizei muitas intervenções. Apenas as fiz quando houve a necessidade de intervenção na organização dos trabalhos, pois os alunos ainda estão aprendendo a trabalhar em grupo, a se organizar, a ouvir e a aceitar a opinião dos integrantes, etc. As sequências produzidas foram videogravadas por mim e projetadas no momento da socialização.

Após as criações, fizemos a socialização. Nesta, propus problematizações, em busca das significações que as crianças davam para alguns conceitos,

como *sequência* e *motivo* que já haviam sido discutidos ao longo das propostas trabalhadas até o momento. Abaixo destaco a captação de uma imagem do vídeo da sequência elaborada por um grupo de quatro alunas (Foto 3):



**Foto 3** – Sequência Aberto/Fechado

**Fonte:** Acervo professora

A imagem apresentada acima refere-se à captura de um momento da tarefa apresentada no vídeo, ou seja, faz parte de uma sequência de movimentos de revezamento entre as meninas que estão de braços fechados com as que estão com os braços abertos, formando uma sequência. O motivo foi denominado pelo grupo como “braços fechados, braços abertos”.

Depois da discussão e da validação da resposta dos colegas para a sequência produzida, aconteceu este diálogo:

Prof.<sup>a</sup>: *O motivo da sequência delas têm quantos elementos?*

Alunos: *Dois!*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, o motivo se repete de dois em dois? É isso?*

Felipe: *Um, dois, um, dois, um, dois...*

Eduardo: *Não, prô! Têm três meninas!*

Prof.<sup>a</sup>: *A sequência... Quem sabe me dizer qual a diferença entre sequência e motivo?*

Ana: *Sequência é tipo o que repete [gesticulando] motivo é o segredo.*

Prof.<sup>a</sup>: É isso?

Juliana: É!

Prof.<sup>a</sup>: [Para o Eduardo] *Então, o motivo é o segredo!*

Eduardo: *Aí eu não sei...*

Prof.<sup>a</sup>: *Olha gente, o Eduardo está em dúvida. Ele falou que têm três meninas e por isso não vai de um, dois como alguns falaram. E a prô perguntou quantos elementos tem no motivo, aquilo que vai se repetindo...*

Ana: *Dú, a gente acabou de te mostrar aqui, olha...* [demonstra o movimento da sequência]

Richard: *Aberto, fechado...*

Prof.<sup>a</sup>: *Isso! Não está se repetindo o “aberto e o fechado”?! Então, esse é o motivo!*

Eduardo: *Então, têm dois elementos!*

Nesse trecho, noto o envolvimento das crianças na apropriação dos conceitos de sequência e motivo. Para a maioria das crianças, tais conceitos já estavam sendo elaborados, por isso a necessidade de constantes mediações. No entanto, percebo que, à medida que as problematizações aconteciam, os alunos estabeleciam as relações, participavam do desenvolvimento conceitual do outro e colaboravam com esse processo.

Os movimentos vivenciados revelam indícios de como as crianças possuem conhecimentos e raciocínios que se aproximam de um pensamento algébrico, mas que nem sempre são intencionais, pois não há uma preocupação em pensar matematicamente para aquela ação. O professor, por sua vez, precisa estar atento ao que os alunos estão produzindo e sistematizar tais saberes para o trabalho com conceitos matemáticos.

Outro ponto a ser destacado refere-se à potencialidade da circulação de ideias quando os alunos são envolvidos em problematizações e situações em que são incentivados a expressar suas ideias e suas hipóteses. Quando a criança se manifesta, possibilita que o professor entre em contato com suas significações e trabalhe com vistas ao avanço destas. Além disso, ao expressar suas ideias, os alunos também colaboram com o processo reflexivo dos pares.

Após esta tarefa, os alunos foram convidados para a elaboração de um registro escrito das sequências corporais que produziram para o compartilhamento com o grupo de discussão da universidade em que eu estudava na USF (Grucomat)



– movimento este que já era conhecido pelas crianças. A intenção era identificar se as crianças eram capazes de simplificar as sequências já elaboradas e gerar um contexto favorável para problematizações diante do uso da simbologia. Na imagem abaixo, é apresentado o registro da sequência “Robô Espantalho” – assim nomeada por seus criadores (Figura 35):

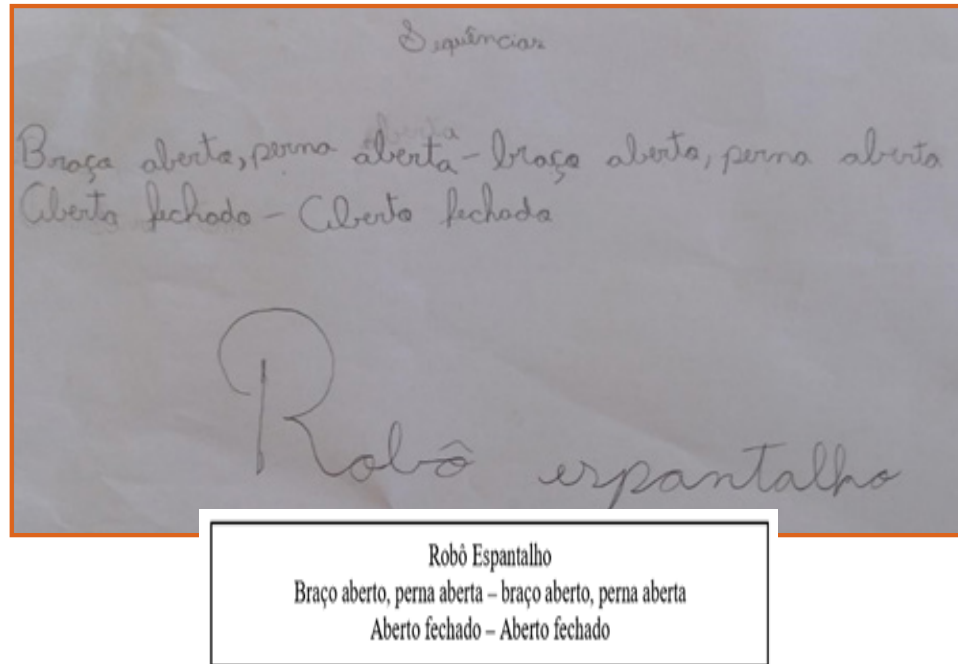


Figura 35 – Registro escrito da sequência

**Fonte:** Acervo professora

No dia seguinte, foi retomada a discussão. A partir da análise das produções, feita pelo Grucomat, propus um novo desafio: buscar estratégias para a simplificação das sequências. Sendo assim, os alunos foram questionados:

Prof.<sup>a</sup>: *Teria um jeito de facilitar essa escrita?*

Thalita: *Abre e fecha!*

Prof.<sup>a</sup>: *Mudou o sentido da sequência?*

Alunos: *Não!*

Prof.<sup>a</sup>: *Ah, mas eu quero simplificar mais ainda...*

Adriano: *A f a f*

Prof.<sup>a</sup>: *Legal!*

Eduardo: *Prô, mais fácil que isso..., impossível!*

Podemos observar que as crianças já estavam atentas à quantidade de elementos do motivo para levantar as possibilidades, garantindo o sentido da sequência original. Além disso, começaram a utilizar a simbologia por meio da abreviação das palavras, ou seja, lançaram mão de uma linguagem sincopada. Se retomarmos a própria história do pensamento algébrico, constatamos que a linguagem sincopada faz parte de uma fase que antecede o uso da linguagem algébrica que conhecemos na atualidade. Ela foi um passo muito importante para se chegar até a linguagem algébrica. Logo, entende-se esse momento vivenciado pelas crianças como fundamental, visto que se equipara aos passos evidenciados pela própria história da Álgebra.

## 5 SEQUÊNCIAS 5: SEQUÊNCIAS MANIPULATIVAS DE LIVRE CRIAÇÃO

### Justificativas:

Nesta sequência, propomos apenas uma tarefa de manipulação de materiais com a elaboração de uma sequência repetitiva. Esse tipo de manipulação é importante, porque, no ato de manipular os objetos, os alunos já vão percebendo características e os agrupando por semelhanças e diferenças. Esses critérios poderão nortear a criação de sequências.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- criar sequências repetitivas;
- reconhecer o padrão/motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade.

### Nível a que se destina:

1º ao 5º ano.

### Tempo Estimado:

3 aulas.

### Material necessário:

Para essa tarefa você deverá dispor de alguns materiais manipulativos, como: contas coloridas;

- material *Cuisenaire*;
- sólidos geométricos;
- blocos lógicos;
- tampas de garrafa PET;
- figuras recortadas;
- carrinhos de miniatura;

- palitos de sorvete, de churrasco ou de fósforo (riscado);
- bolinhas de gude.

Você poderá, ainda, utilizar outro tipo de recursos didáticos que estejam disponíveis em sua escola. O material pode ou não ser diversificado. Caso não o seja, os alunos devem perceber que, com um mesmo instrumento, pode-se criar diferentes sequências. Frisamos que os recursos disponibilizados precisam possibilitar que eles criem uma sequência.

### Desenvolvimento:

Organize a classe em grupos (dentro ou fora da sala de aula). Disponibilize os materiais para estes. Cada grupo cria uma sequência com o intuito de que os colegas de outros grupos descubram o motivo. Após o término desse trabalho, faça a socialização de modo que cada grupo apresente sua própria sequência aos demais colegas da turma, os quais deverão identificar os motivos. Veja algumas sugestões de socialização em *nota para o professor*.

- Questões que você pode propor durante o trabalho em grupo:
  - a) Vocês construíram, de fato, uma sequência?
  - b) Qual foi o motivo que vocês usaram?
  - c) Se vocês fossem continuar a sequência, qual seria a próxima figura ou peça?

Essas perguntas também podem nortear as intervenções no momento da socialização.

### Respostas esperadas:

- a) Objetivamos que os alunos reconheçam em suas produções o conceito de sequência com motivo de repetição. Dessa forma, a questão visa colocá-los em movimento de reflexão sobre o que foi produzido e sobre a proposta da tarefa.
- b) A questão tenciona colocar os alunos em movimento de análise dos conceitos de sequência e de motivo. Para isso, deve-se considerar que a sequência é ampla, formada pela repetição de um motivo, que segue dado padrão.
- c) Neste caso, a pergunta busca colocar os alunos em movimento de generalização

imediate da sequência, ou seja, procura fazer com que eles reflitam para identificar como se dará a continuidade da sequência.

### Vivência em sala de aula:

A proposta foi realizada na segunda quinzena do mês de agosto de 2016, com 22 alunos de uma turma de 3.º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal. Ao todo, formei cinco trios e um grupo contendo quatro crianças. Para cada grupo, disponibilizei, em média, 4 a 5 materiais diferentes.

No início das produções, foi possível perceber que os alunos estavam com dificuldade em manter o foco na realização da proposta e na organização dos materiais. Diante disso, orientei-os a definir um recurso de cada vez e, com isso, a criar suas sequências. Foi a partir desse momento que as crianças se organizaram para a criação da sequência.

Cheguei a pensar que havia sido um erro disponibilizar tantos materiais para as crianças ao mesmo tempo. No entanto, com o decorrer da tarefa, percebi que se tratava apenas de uma dificuldade de organização, sanada à medida que foram orientados a definir um foco. Poderia ter disponibilizado para as crianças um material de cada vez e ter fornecido novos materiais conforme elas fossem criando a sequência. Mas julguei que esse momento foi importante, pois as crianças precisavam aprender a se organizar e buscar um foco. Isso também faz parte do ensino.

Durante as criações, realizei algumas mediações, nas quais questionei sobre suas produções e sobre a identificação do motivo das sequências. Já nesse momento inicial percebi o quanto os estudantes estavam se apropriando do conceito de sequência com padrão de repetição. As produções dos alunos foram registradas com o apoio de uma máquina fotográfica para o momento da socialização. Algumas dessas imagens podem ser vistas na composição de fotos (Foto 4).



**Foto 4** – Sequências com materiais manipulativos

**Fonte:** Acervo professora

No dia seguinte, organizei as imagens das sequências produzidas pelas crianças em *slides*, de modo que cada grupo fizesse a apresentação de suas produções e desafiasse os colegas a descobrirem o motivo de repetição de suas sequências. A seguir (Foto 5), apresento uma das sequências elaboradas com giz de cera e um trecho da discussão sobre essa proposta.



**Foto 5** – Sequência de giz de cera

**Fonte:** Acervo professora

Após apresentar a sequência, iniciamos um diálogo:

Prof.<sup>a</sup>: *E agora?*

Alunos: *Azul, amarelo, vermelho, azul, amarelo, vermelho...*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, o motivo deles têm quantos elementos?*

Maria: *Quatro!*

Adriano: *Três!*

Enzo: *Nove!*

Prof.<sup>a</sup>: *Por que você acha que é nove?*

Enzo: *Porque tá ali...* [aponta para a sequência]

Prof.<sup>a</sup>: *É o motivo! O que é o motivo?*

Enzo: *É o segredo!*

Prof.<sup>a</sup>: *E o que é o segredo?! É o que vai se repetir na sequência... O motivo deles tem quantos elementos?*

Enzo: *Três!*

Prof.<sup>a</sup>: *Então está indo de quanto em quanto?*

Alunos: *Três!*

Como é possível observar, ao serem questionados sobre o motivo da sequência, os alunos descreveram a sequência em si (*Azul, amarelo, vermelho, azul, amarelo, vermelho...*). Por esse motivo, passei a perguntar sobre o número de elementos que faziam parte do motivo (*Então, o motivo deles têm quantos elementos?*), com intuito de que começassem a estabelecer critérios para nomear o motivo de repetição. Tal problematização apareceu bastante na análise das primeiras discussões, mas, com o decorrer da tarefa, as crianças passaram a cuidar mais da identificação do motivo com a análise da quantidade de elementos que aparecia nas repetições.

Ainda a respeito dessa produção, houve uma discussão sobre o lado de início da sequência:

Prof.<sup>a</sup>: *Então, a próxima cor seria qual ali?*

Alunos: *Azul!*

Adriano: *Depois amarelo, depois vermelho...*

Prof.<sup>a</sup>: *Tem um lado certo para continuar essa sequência?*

Eduardo: *Tem!*

Adriano: *Eu acho que tem ou não...*

Thalita: *Prô, se virar do outro lado vai ficar: vermelho, amarelo e azul.*

Prof.<sup>a</sup>: *E eu não posso fazer isso?*

Alunos: [silêncio]

Prof.<sup>a</sup>: *E se eu quiser começar desse lado?*

Eduardo: *Aí vai ser vermelho, amarelo e azul.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então eu posso começar do outro lado? Não tem problema?*

Eduardo: *Não muda nada só o lugar da cor.*

Richard: *Mas o nosso começa por ali!*

Thalita: *O pró, eu acho que dá sim, porque, se fizer grupinho de três, todos têm azul, amarelo e vermelho.*

Nesse diálogo, é possível observar uma discussão importante sobre o lado de continuidade da sequência. Esta pode seguir em qualquer uma das extremidades. No entanto, observei que não era uma ideia totalmente clara para as crianças. Além disso, houve duas discussões distintas: o lado de continuidade da sequência e o lado de início desta. Pensando no início da sequência, as crianças apontaram que o motivo seria alterado para “vermelho, amarelo e azul” (*Eu acho que tem ou não...* e *Aí vai ser vermelho, amarelo e azul*), mas chegaram à conclusão de que isso não afetaria muito, visto que, “*se fizer grupinhos de três, todos têm azul, amarelo e vermelho*”, o que demandaria somente uma reorganização das peças. No entanto, o criador da sequência é pontual em determinar o lado em que sua sequência se iniciava não aceitando nenhum tipo de alteração (*Mas o nosso começa por ali!*).

Acredito que a tarefa proporcionou movimentos importantes para a análise das significações que os alunos estavam elaborando a partir das tarefas das quais participavam. Embora as crianças não tenham apresentado dificuldades na elaboração das sequências, quando foram incentivadas a identificar o motivo destas, viram-se diante de um desafio maior. Nesse ponto, o movimento de socialização foi importante para a identificação dessa dificuldade. Além disso, possibilitou a realização de problematizações que visavam à reflexão acerca dos conceitos de sequência e de motivo.

### Notas para o professor:

- ✓ Você pode fotografar as sequências elaboradas e imprimir as fotos, distribuindo-as aos demais alunos para análise. Nesse caso, a tarefa pode ser realizada



em dois dias consecutivos para que você tenha tempo para fazer a organização do material;

- ✓ Você pode fotografar as sequências elaboradas ou projetar os *slides*. Nesta circunstância, também a tarefa poderá ser desenvolvida em dois dias.
- ✓ O grupo utiliza o próprio espaço no qual a sequência foi criada, de modo que todos os colegas possam conhecê-la e identificar o motivo (os alunos circulam, por exemplo, pela mesa onde a sequência está montada). Neste caso, toda a tarefa precisa ser desenvolvida em um único dia.

## 6 SEQUÊNCIA 6: SEQUÊNCIAS RECURSIVAS

### Justificativas:

Trabalhar com sequências recursivas fazendo uso de materiais manipulativos possibilita aos alunos compreenderem que cada elemento da sequência é determinado a partir do anterior, com a repetição e o acréscimo de novos constituintes. Este trabalho é a base das sequências numéricas recursivas: cada elemento da sequência é o anterior acrescido de algumas unidades. Por exemplo, nos números naturais, cada fator é o anterior somado a um; nos números pares, é o anterior mais dois.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- compreender como a sequência foi construída, observando como o padrão é modificado de um passo ao seguinte, o que revela a ideia da relação recursiva;
- examinar a quantidade adicionada e perceber a recursividade do padrão.

### Nível a que se destina:

2º ao 5º ano.

### Tempo estimado:

3 aulas.

## 6.1 TAREFA: CONTINUANDO COM PALITOS

### Desenvolvimento:

Organize os alunos em duplas ou trios e distribua um total de 15 palitos para cada um com a cópia da folha de tarefas. Em seguida, peça para que organizem os palitos na carteira de acordo com a sequência apresentada.

Observe a sequência abaixo



1. Com os palitos distribuídos por seu professor, reproduza a sequência dada.
2. Agora, responda:
  - a) Como você pode observar, nessa sequência há um padrão. Conte a respeito do que descobriu?
  - b) Qual seria a próxima figura da sequência? Como você sabe disso?
  - c) De que forma ficaria a 12ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.
  - d) De que forma ficaria a 31ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.

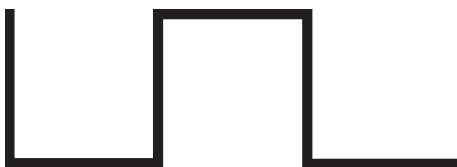
Após essa distribuição, os estudantes deverão fazer a leitura das situações-problema e discutir a respeito de cada uma delas, registrando suas conclusões. Caso os alunos ainda não sejam alfabetizados, você poderá ler os enunciados, e os registros poderão ser realizados coletivamente. É importante limitar o número de palitos – neste caso, 15 palitos –, pois o objetivo é que os alunos busquem caminhos e estratégias para refletir acerca dos números maiores propostos nos itens c e d.

Quando todos os grupos terminarem os registros, é importante garantir o momento da socialização da tarefa. Nesses espaços de discussões, os alunos podem refletir acerca de suas respostas e das soluções de outros grupos, validando algumas de suas respostas anteriores ou entrando em conflito com elas, o que compõe um momento de grande importância para os alunos. É fundamental que você, professor, realize a síntese

dessas colocações, coletivamente, na lousa, ou individualmente, utilizando algum outro recurso. O essencial é garantir essa síntese para voltar a essas anotações sempre que necessário.

### Respostas esperadas: 2

- a) Queremos que os alunos identifiquem o padrão de crescimento da sequência. Cada figura da sequência tem um palito a mais que a ilustração anterior. Outra observação importante é a quantidade de palitos da figura corresponde ao número desta.
- b) A próxima figura da sequência será:



- c) Os alunos dos anos iniciais podem fazer o desenho. No entanto, se eles perceberam que o total de palitos é o número da figura, a 12ª figura tem 12 palitos.
- d) A 31ª figura tem 31 palitos.

### Vivência em sala de aula:

A tarefa foi realizada com uma turma de 2º ano, em uma classe com 33 alunos no segundo semestre de 2017, em uma escola particular. Para o desenvolvimento da tarefa, os alunos foram organizados em duplas e trios, receberam 15 palitos e a folha com as tarefas. Até aquele momento, os alunos não tinham trabalhado com atividades que abordassem sequências com padrões, por isso iniciei a investigação com uma breve discussão a respeito do que eles entendiam sobre os termos *sequência* e *padrão*. Abaixo estão as hipóteses dos alunos sobre o que seria uma sequência e um padrão.

*Muitas coisas juntas que se misturam...*

*É igual as bandeirinhas da festa junina que vai mudando as cores e repete tudo de novo numa linha reta [aponta para as bandeirinhas penduradas na sala de aula*

que seguiam a sequência nas cores azul, vermelho, verde e amarelo].

*Igual a sequência de números que vai seguindo e aumentando os números... igual a reta de números.*

*O calendário também tem sequência de número.*

*É uma sequência, porque não dá volta... só segue em frente.*

Vale ressaltar que o quadro dos numerais de 0 a 100 e o calendário do mês ficam expostos ao lado da lousa, sendo, diariamente, explorados nas aulas de matemática. Além disso, sempre é referido o termo “sequência” durante o trabalho com a reta de números. Notei que os alunos estavam fazendo relações com outras situações de sala de aula. Aproveitando essa situação, apontei para a reta de números (sequência de dois em dois) pendurada acima da lousa e questionei se ela poderia ser considerada como uma sequência e perguntei o que seria um padrão. Os alunos deram as seguintes respostas:

*Sim! Mas os números vão se repetindo só que de dois em dois..., e não como no quadro...*

*É! Olha dois, quatro, seis, oito... daí vai seguindo.”*

*Um padrão é um Padrão de força... [referindo-se ao padrão dos postes de energia elétrica].*

Após o levantamento de hipóteses, os alunos foram questionados sobre o que seria o padrão na tarefa. Logo, começaram a levantar hipóteses que os aproximaram da percepção do padrão:

*Já sei! Padrão é um código, porque nessa sequência tem um código.*

*Sim! Acho que o código é a letra I, L, U, o P deitado e a letra S.*

*Eu acho que é uma senha...*

*Verdade, prô! Padrão é uma senha que a gente tem que descobrir na sequência.*

Quando perguntei qual seria o código ou a senha da sequência, as crianças responderam: “As letras”; “Acho que tem que descobrir que nome forma com essas letras...”.

Após essas hipóteses, os alunos foram desafiados a montar a sequência de palitos

sobre a mesa e observar qual era o padrão da sequência ou o código – como eles haviam dito. Ao passar pelas duplas percebi que, no momento em que começaram a construir, manuseando o material manipulável, notaram que os números de palitos aumentavam a cada figura. Abaixo segue o diálogo desse movimento:

Prof.<sup>a</sup>: *O que vocês pensaram?*

Aluno 1: *Aqui tem uma senha... Cada letra é uma senha*

Prof.<sup>a</sup>: *E qual seria a próxima senha?*

Aluno 1: *Cada figura aqui é uma senha que vai aumentando um... Aqui só tem um palitinho [aponta para a primeira figura], e aqui cresceu outro palitinho. Aqui colocou três...*

Prof.<sup>a</sup>: *E por que é uma senha?*

Aluno 2: *Porque vai colocando de um em um... cada letra aumenta um palito.*

Aluno 1: *Descobrimos que a senha da sequência é que aumenta um palito para formar as letras.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, como seria a próxima figura ou letra?*

Aluno 2: *Não sei que letra forma, mas sei que vai ter seis palitos, porque a cada figura tem um novo palito.*

Prof.<sup>a</sup>: *E qual seria a 12<sup>a</sup> ?*

Aluno 1: *Prô, a 12<sup>a</sup> seria a letra 12?*

Vale ressaltar que nas aulas de matemática foi iniciado o trabalho com os números ordinais, e alguns alunos ainda estavam na fase de apropriação desse conhecimento, por isso foi necessário ajudá-los.

Prof.<sup>a</sup>: *Vamos lá... Aqui temos a 1<sup>a</sup> figura, a 2<sup>a</sup>, a 3<sup>a</sup>... para na 5<sup>a</sup> [aponto para a sequência a fim de ajudá-los a lembrar da contagem dos números ordinais]. Se fosse continuar até a 12<sup>a</sup> figura, como ela seria?*

Aluno 1: *Seria uma letra com 12 palitos...*

Prof.<sup>a</sup>: *Como você saber disso?*

Aluno 1: *Porque cada posição aumenta um palito.*

Prof.<sup>a</sup>: *Explica esse pensamento.*

Aluno 1: *Assim: a posição da letra I tem 1 palito, a posição da letra L tem 2, assim por diante... Então, a posição da 12...*

Aluno 2: 12.<sup>a</sup>.

Prof.<sup>a</sup>: *Sim! Vai ter 12 palitos só não sei a letra que vai formar.*

Nesse diálogo, notei que os alunos perceberam que, na sequência, existia um padrão que aumentava de um em um e que a quantidade de palitos estava associada ao número da posição em tal sequência. Abaixo segue a transcrição dos diálogos e os registros de alguns alunos sobre suas hipóteses para cada item da tarefa:

*Uma senha que vai aumentando de um em um.*

*São letras diferentes das do nosso alfabeto, e é uma sequência.*

*É um padrão igual os números um, dois, três, quatro, cinco...*

*“Cada figura tem um novo palito.*

*Porque vai indo de um pauzinho, dois pauzinho e assim vai...*

*Porque cada posição aumenta um pauzinho.*

*Vai ter 31 pauzinho, porque aumenta de 1 em 1.*

Nessas respostas, os alunos revelam indícios de que perceberam que a sequência segue um padrão que aumenta de um em um, ou seja, “cada figura tem um novo palito”. Notei que, quando os alunos disseram “cada posição aumenta 1...” e “é um padrão igual os números um dois, três, quatro, cinco...”, eles mostraram que estão compreendendo que as figuras se modificam a cada posição na sequência, seguindo um mesmo padrão. E começaram a estabelecer relações entre as figuras e os números.

Outra percepção que chamou a atenção foi de uma dupla que interpretou a sequência de modo diferente. Para ela, o padrão poderia ser um motivo com cinco figuras, de modo que a sequência é repetitiva e segue um motivo composto pelas cinco imagens apresentadas.

## 6.2 TAREFA: CONTINUANDO COM TRIÂNGULOS

### Material necessário:

Cópia da folha de tarefas.

Observe a sequência abaixo

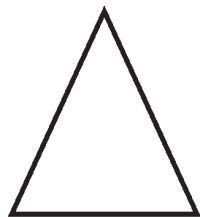


FIGURA 1

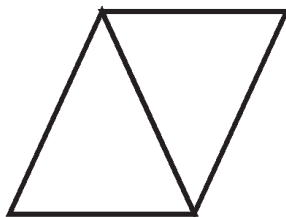


FIGURA 2

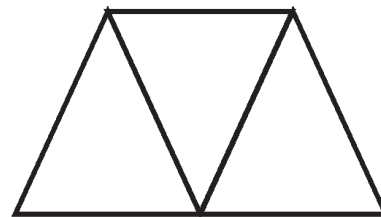


FIGURA 3

1. Com os palitos distribuídos por seu professor, reproduza a sequência dada.

2. Agora, responda:

- Como você pode observar, nessa sequência há um padrão. Conte a respeito do que descobriu?
- Qual seria a próxima figura da sequência? Como você sabe disso?
- De que forma ficaria a 12ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.
- De que forma ficaria a 31ª figura? Explique como você chegou a essa conclusão.

### Desenvolvimento:

Organize os alunos em pequenos grupos (duplas ou trios) e distribua 15 palitos a cada um destes. Oriente-os a reproduzir a sequência representada na folha de tarefas.

O número limitado de palitos é para que os estudantes, no processo de construção, tenham que encontrar outra estratégia para a identificação das figuras seguintes que não seja a construção por meio de palitos, chegando à conclusão de que a cada novo triângulo são acrescentados dois palitos à figura anterior. A expectativa é que eles sejam capazes de observar o padrão de crescimento e fazer generalizações.

Acompanhe o trabalho dos alunos, enquanto realizam a tarefa. Faça mediações em caso de dúvidas das crianças.

Terminada a tarefa nos pequenos grupos, promova a socialização. Dê oportunidades



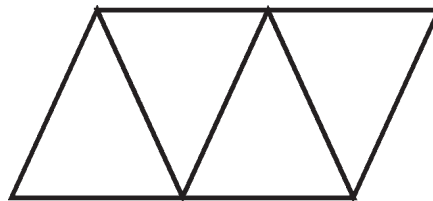
para que todos os grupos apresentem suas conclusões e medeie o processo. Ao final, promova a síntese com a turma.

### 📌 Notas para o professor:

Há possibilidade de tornar a tarefa mais complexa modificando os itens c e d, que focalizam a quantidade de triângulos. A mudança envolve trocar o foco para a quantidade de palitos. Fica a seu critério trabalhar ou não com esta. Nesse caso, você poderá propor outras questões que se aproximem dos conhecimentos de seus alunos. O importante é que os alunos percebam que sempre há um acréscimo de dois palitos a cada nova figura.

### Respostas esperadas: 2

- A expectativa é que os alunos percebam que o número de triângulos é o mesmo que representa a posição da figura.
- A próxima figura da tarefa é:



- Ouçá os argumentos dos alunos, ou seja, as explicações de como estes pensaram para construir a figura.
- Focalizando nos triângulos, a 10ª figura tem 10 triângulos. Centrando-se nos palitos, a 10ª figura tem 21 palitos. Os alunos dos anos iniciais poderão desenhar todas as figuras. Outra possibilidade é associarem a quantidade de palitos com os números ímpares: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Além disso, há a alternativa de, ao escreverem essa sequência, perceberem que a quantidade de palitos equivale ao dobro da posição da figura acrescido de 1.
- Tendo como centro os triângulos, a 27ª figura tem 27 triângulos. Com o foco nos palitos, a compreensão do item c facilitará a resposta a esta questão.

## Vivência em sala de aula:

Para realização desta tarefa, foi seguida a mesma dinâmica apresentada na tarefa 1, com a mesma turma. Realizei a leitura coletiva e a visita às duplas para verificar como os alunos estavam investigando. Notei que eles fizeram uso dos conhecimentos construídos na exploração da tarefa 1, tornando fácil a compreensão do padrão da tarefa 2.

De início, eles perceberam que a sequência aumentava de dois em dois e que o número de triângulos na figura era o mesmo da posição dela na sequência. Alguns alunos não percebem as relações e fizeram o uso de outros materiais para descobrir a quantidade de triângulos em posições distantes. Abaixo seguem trechos de meu diálogo com uma das duplas, o qual visava compreender como esses estudantes pensaram em sua resposta, e um registro escrito por eles.

Prof.<sup>a</sup>: *O que vocês observaram nessa sequência de triângulos?*

Aluno 1: *Nós observamos que aqui tem um padrão que vai de dois em dois palitos.*

Prof.<sup>a</sup>: *E como vocês chegaram a essa conclusão?*

Aluno 1: *Porque aqui [aponta para a figura 1] tem três, daí na próxima cresce mais dois e fica com cinco...*

Aluno 2: *É, prô! Porque três mais dois dá cinco.*

Notei que os alunos perceberam que a sequência tem o padrão que cresce de dois em dois e fizeram referência à figura 1 para justificar suas respostas, nas quais disseram que, se a primeira imagem tem três palitos e a segunda cinco, houve um crescimento de dois destes. No entanto, *“a sequência tem um padrão que vai de dois em dois palitos”*. Logo, os alunos foram questionados a respeito da próxima figura.

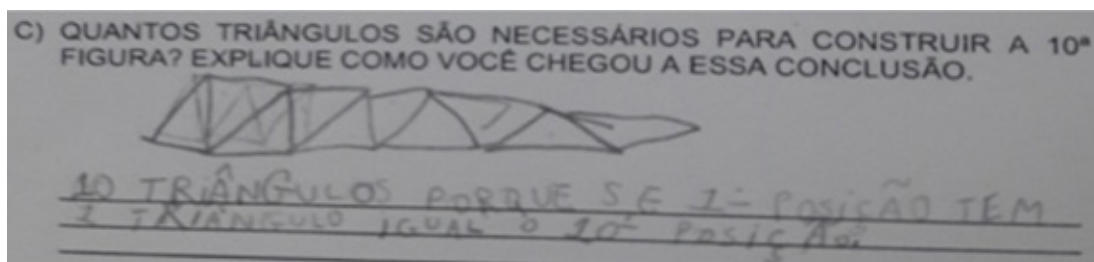
Prof.<sup>a</sup>: *E qual seria a próxima figura?*

Aluno 1: *A próxima figura vai ser essa [aponta para o desenho da folha], porque cresceu mais dois.*

Prof.<sup>a</sup>: *Hum!*

Aluno 2: *É porque aqui [aponta para a Figura 3] tem sete; então a próxima tem nove..., porque sete mais dois dá nove.*

Notei que, para responder ao item b, os alunos seguiram o mesmo raciocínio da tarefa anterior, ou seja, consideraram o número de palitos da figura anterior acrescido de mais dois palitos (Figura 36).



**Figura 36** – Registro de aluno

**Fonte:** Acervo da professora

Prof.<sup>a</sup>: *E quantos triângulos são necessários para construir a 10<sup>a</sup>?*

Aluno 1: *Ela vai ter 10 triângulos...*

Prof.<sup>a</sup>: *E como vocês sabem disso?*

Aluno 2: *Porque, se a 1<sup>a</sup> posição tem 1 triângulo, a 10<sup>a</sup> vai ter 10.*

Prof.<sup>a</sup>: *Me expliquem melhor isso.*

Aluno 1: *É verdade, prô! Aqui na figura 1 tem 1 triângulo, na figura 2 tem dois triângulos, na figura 3 tem 3..., assim vai...*

Aluno 2: *Então, na figura 10 vai ter 10 triângulos...*

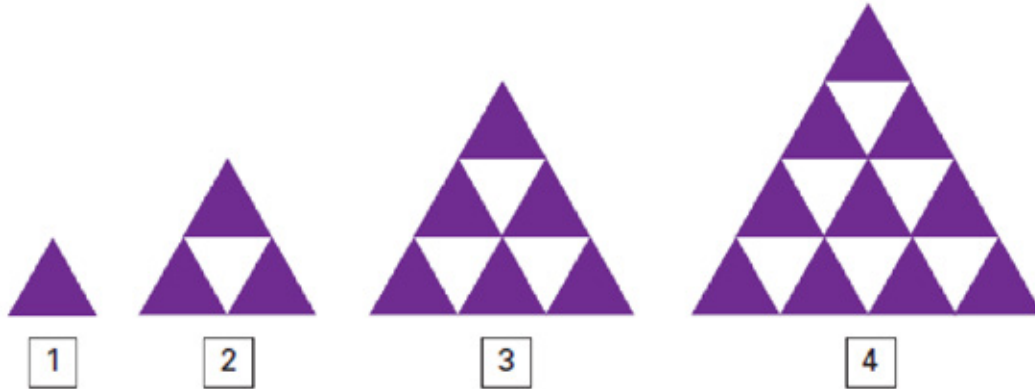
Prof.<sup>a</sup>: *Hum! E a 27<sup>a</sup> figura?*

Aluno 1: *Igual a anterior, prô. A 27<sup>a</sup> vai ter 27 triângulos.*

Nas respostas aos itens c e d, notei que os alunos perceberam que o número da figura também tinha relação com os números de triângulos da sequência. Então, os estudantes deixaram de ter a ideia de que a próxima figura seria a quantidade de palitos da figura anterior acrescida de mais dois palitos e começaram a fazer relação com o número da figura. Nesse movimento, percebo o quanto os alunos fazem generalizações importantes ao identificarem as regularidades das sequências e usam os conhecimentos adquiridos ao longo das investigações para resolverem as próximas questões propostas na tarefa.

## 6.3 TAREFA<sup>7</sup>: O TRIÂNGULO DE SIERSPINSK

Observe a sequência de figuras formadas por triângulos



- Nessa sequência, há uma regularidade. Descreva-a.
- Qual seria a próxima figura da sequência? Como você sabe disso?
- Quantos triângulos terá a 10<sup>a</sup> figura? Como você sabe disso?

### Desenvolvimento:

Os alunos podem trabalhar em grupo, mas com uma única folha com a tarefa, para garantir o compartilhamento de ideias. Dê um tempo para que respondam às questões propostas e, ao final, promova a discussão e a socialização das respostas dadas pelos diferentes grupos.

Esta tarefa já apresenta uma complexidade maior em relação às anteriores. Portanto, é importante que, nas soluções, os alunos revelem que perceberam tratar-se de uma sequência recursiva. Eles podem apontar a recursividade na figura toda ou nos triângulos coloridos e brancos.

### Respostas esperadas:

- Considerando o triângulo todo, o número de triângulos internos vai aumentando, mas não de forma constante: do primeiro para o segundo, aumenta três; do segundo para o terceiro, cinco; do terceiro para o quarto, sete; e assim

7 Adaptada de Kindt et al. (2006b).

sucessivamente. Se considerar o triângulo roxo, de uma figura para a outra, há acréscimos de dois, três, quatro..., à medida que a figura torna-se maior. Se considerar o triângulo branco, o aumento será de um, três, cinco...

- b) O próximo triângulo terá 25 triângulos internos, sendo 15 roxos e 10 brancos. É provável que os alunos façam o desenho para responder.
- c) A 10ª figura terá 100 triângulos ao todo, sendo 55 roxos e 45 brancos. Provavelmente os alunos farão o desenho para responder.

### Vivência em sala de aula:

A realização da tarefa 3 ocorreu na mesma turma descrita nas vivências das atividades anteriores. Segui a mesma dinâmica das tarefas 1 e 2: leitura coletiva, acompanhamento das duplas e socialização das ideias, dando um fechamento na discussão. Como ocorrido anteriormente, os alunos logo associaram o número de triângulos ao da posição da figura na sequência. Nesse caso, eles pontuaram que “o número de triângulos cresce na ordem dos números da posição da figura”. Vejamos o diálogo que desenvolve essa ideia:

Prof.<sup>a</sup>: *Qual seria o padrão dessa sequência?*

Aluno 1: *Prô, no número um tem um triângulo, e no número dois vai aumentar três, no quatro aumenta quatro...*

Prof.<sup>a</sup>: *E como seria a próxima figura?*

Aluno 2: *Seria como mais cinco triângulos...*

Aluno 1: *Vai ter os triângulos da quatro mais cinco triângulos...*

Prof.<sup>a</sup>: *E quantos triângulos tem a quarta figura?*

Aluno 2: *Tem o mesmo que a 3ª mais 4... Peraí [conta a quantidade de triângulos]. Tem 10.*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, a próxima figura teria  $10 + 5$  triângulos.*

Aluno 2: *Sim! Porque aumenta 5.*

Prof.<sup>a</sup>: *E quantos triângulos teria a 10ª figura?*

Nesse momento, os alunos discutiram entre eles se iriam ou não desenhar os triângulos para descobrir, mas não conseguiam chegar a uma conclusão, pois

queriam pensar em uma possibilidade que não demandasse o desenho. Esse movimento é reflexo de minha cobrança, principalmente, em situações-problema nas quais são lançados desafios e é solicitado o cálculo mental, sem necessitar de desenhos, registros escritos ou materiais manipuláveis. Embora com dúvidas, eles se posicionaram dizendo “*vamos pensar sem precisar desenhar, porque vai demorar, e aqui deve ter um segredo*”. Então, foi proposto que eles partissem do que já sabiam e usassem os números ao invés de desenhos.

Prof.<sup>a</sup>: *Que tal organizar o pensamento de vocês usando números ao invés de desenhos?!*

Alunos 1: *Como assim, prô?*

Prof.<sup>a</sup>: *Vocês já me disseram que a 5ª figura seria  $10 + 5$ . Então, como seria a 6ª figura ?*

Aluno 2: *Os triângulos da quinta mais seis.*

Prof.<sup>a</sup>: *Que dá quantos triângulos?*

Aluno 1:  $15 + 6$ .

Prof.<sup>a</sup>: *6ª figura, seria  $15 + 6$ , que dá?*

Alunos: [Contam nos dedos] 21.

Prof.<sup>a</sup>: *E como vocês poderiam organizar esse pensamento em números?*

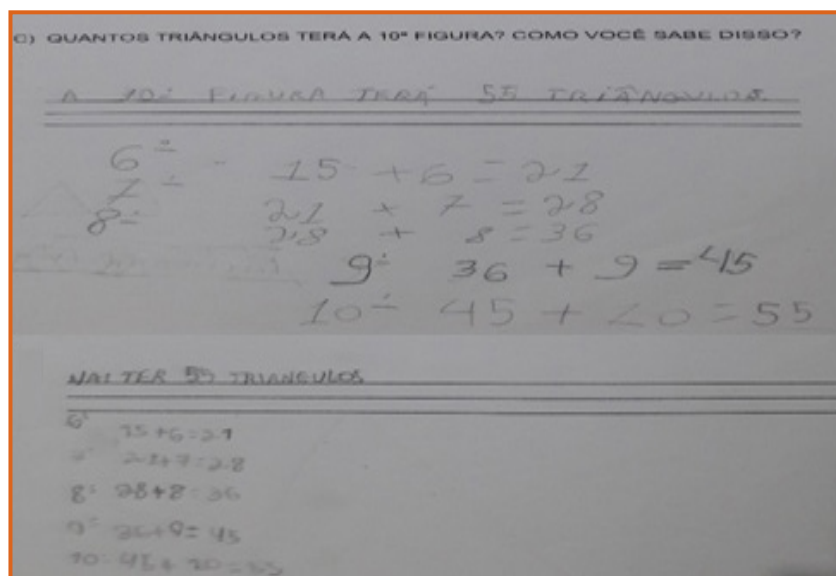
Alunos: [Ficam pensando]

Prof.<sup>a</sup>: *Ok! A sétima figura seria?*

Aluno 1: *O mesmo da 6ª mais 7 .... já sei  $21 + 7$*

Prof.<sup>a</sup>: *Ok! Veja como podem organizar o pensamento em números para apresentar aos colegas.*

Em seguida, foi lançada a proposta para mais uma dupla, que surpreendeu com os registros, Figura 37.

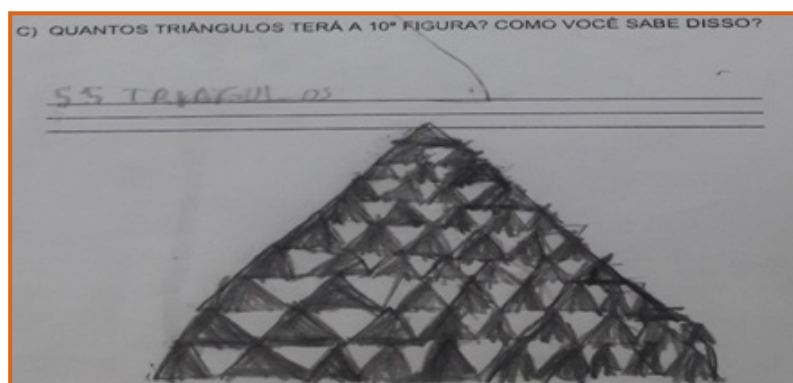


**Figura 37** – Registros de alunos

**Fonte:** Acervo da professora

No excerto a seguir apresento a justificativa de um dos alunos para o modo como representou a 10ª figura:

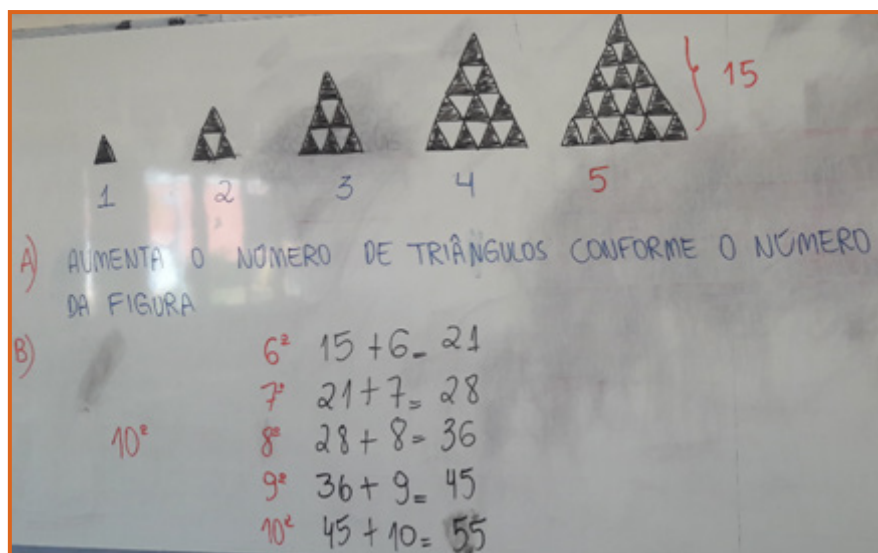
Aluno 1: *Eu observei que os triângulos aumentam em linhas e aumenta a quantidade igual o número [se refere ao número da posição da figura, pensando nas linhas de modo horizontal], o primeiro só tem 1 linha e 1 triângulo. O segundo tem 2 linhas e 2 triângulos, e o terceiro tem 3 linhas e 3 triângulos em baixo. Os triângulos vão subindo e aumentando a linha... Então, a 10ª figura tem 10 triângulos embaixo e vai subindo 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1... Foi fácil desenhar.* [Nesse caso, o aluno está considerando os triângulos roxos, Figura 38].



**Figura 38** – Registro de aluno

**Fonte:** Acervo da professora

Na socialização, solicitei aos alunos as explicações de seus registros. O que marcou todo o fechamento das ideias foi registrado na lousa, Figura 39, com a seguinte frase: “Sempre mantêm a quantidade da figura anterior e aumenta mais o número [da figura]”.



**Figura 39** – Registro de síntese das ideias realizado pela professora

**Fonte:** Acervo da professora

Na continuidade da nossa proposta, apresentamos as sequências de tarefas do Eixo 2, relacionadas ao desenvolvimento do pensamento relacional.



## EIXO II – PENSAMENTO RELACIONAL

### 1 SEQUÊNCIA 1: EXPLORANDO CONTAGENS E MEDIDAS

#### Justificativa:

Desenvolver momentos nos quais as explorações de contagens estejam presentes possibilita ao aluno construir relações entre diferentes formas de contagem e compreender o significado das palavras *antes*, *depois* e *entre*. O pensamento relacional é uma das estratégias fundamentais para a generalização de relações encontradas na aritmética.

#### Objetivo:

Explorar a sequência numérica com três conceitos básicos: antes, depois e entre.

#### Notas para o professor:

O conceito *entre* apresenta alguma dificuldade para os alunos. Portanto, dê um pouco mais de atenção a ele.

Para que os alunos desenvolvam o pensamento relacional, é fundamental que tenham o conceito de número e a sequência numérica consolidados. Assim, esta primeira sequência visa construir alguns conceitos que, segundo as professoras do Grucomat, são essenciais para o estabelecimento posterior de relações.

#### Nível a que se destina:

1º e 2º ano.

#### Tempo Estimado:

2 aulas.

#### Material necessário:

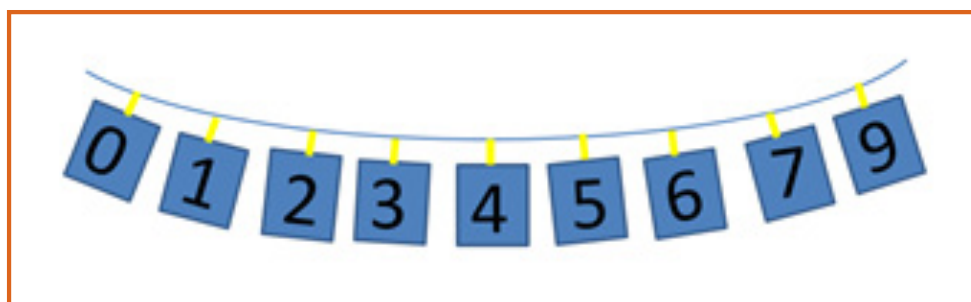
- cartões numerados de 0 a 30;
- barbante;
- prendedor.

## 1.1 TAREFA: CONSTRUINDO O VARAL

### Desenvolvimento:

Para esta tarefa você vai precisar de:

- cartões numerados de 0 a 30;
- barbante;
- prendedor.



**Figura 40** – Exemplo de varal de números

**Fonte:** Acervo de professor

Para iniciar a tarefa, distribua aleatoriamente um cartão para as crianças e solicite a participação delas na produção do varal. Para isso, você pode fazer questões como: já fixamos o número um no varal, qual o próximo número? Qual vem depois do um?.

Sugerimos que você ainda não apresente o zero como número que está antes do um, pois, até o momento, as crianças estão familiarizadas com o conceito de zero como ausência de quantidade e nossa proposta sugere o trabalho com o zero no varal como ponto de referência. Sendo assim, a menos que os próprios alunos introduzam essa ideia, recomendamos a menção do número zero no segundo momento da tarefa, no qual está prevista tal problematização.

No final, coloque o varal em um lugar bastante visível. Assim, os alunos poderão consultá-lo sempre que precisarem.

Em relação ao item f, lembramos que, até agora, as crianças trabalharam com o zero como ausência de quantidade. Na representação do varal (que depois irá gerar a reta numerada), o zero tem o significado de ponto de referência. Ouça as ideias apresentadas pelos alunos e discuta-as. No final, você poderá apresentar o zero como o número que está antes do um na sequência numérica, podendo, inclusive, colocar a cartela do zero no varal da classe.

## 1.2 TAREFA: ATIVIDADES COM O VARAL

### Desenvolvimento:

A partir da construção do varal, envolva os alunos nas seguintes propostas:

- a) Escreva os números que estão antes do 11.
- b) Escreva os números que estão depois do 12.
- c) Escreva os números que estão entre 6 e 13.
- d) Escreva os números que estão entre 14 e 20.
- e) Existem números depois do 20? Se achar que existe, escreva três números.
- f) Existe número antes do um? Se existir, qual é esse número?

Para os alunos do 1º ano, sugerimos que a tarefa seja realizada na oralidade e que você seja o escriba, registrando todos os apontamentos na lousa. Já para os alunos do 2º e do 3º ano sugerimos a utilização de folhas com as propostas impressas para que eles realizem os registros, que podem ser efetuados em duplas.

### Respostas esperadas:

- a) É possível que as crianças apontem o número que está imediatamente antes do 11, o 10, ou indiquem o 12, evidenciando que ainda estão no processo de construção do conceito de “antes”. No entanto, a ideia é que os alunos percebam todos números que estão antes do 11 (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1).
- b) Assim como explicitado na questão anterior, é possível que as crianças se confundam com o conceito de *antes* e *depois* ou apontem o número que aparece logo em seguida deixando de lado outras possibilidades. Nesta questão, esperamos que as crianças indiquem os números de 13 a 30.
- c) O conceito *entre* é o que apresenta mais complexidade para os alunos. A ideia é que as crianças percebam que, quando são citados 6 e 13, estas duas extremidades não fazem parte do conjunto solicitado. Para auxiliar a percepção das crianças, você pode colocar a mão sobre essas duas cartelas no varal e pedir a eles que digam quais são os números que estão entre as duas mãos. Sendo assim, as crianças devem dizer “7, 8, 9, 10, 11 e 12”.

- d) Assim como na questão anterior, você pode auxiliar os alunos colocando a mão sobre as duas extremidades. Esperamos que os alunos destaquem os números 15, 16, 17, 18 e 19.
- e) A ideia é verificar se os alunos já têm noção de que os números continuam infinitamente. Nesta questão, o importante é ouvir as hipóteses levantadas pelas crianças.
- f) Como já discutido anteriormente, até agora, os alunos trabalharam com o zero como ausência de quantidade; na representação do varal, o zero tem o significado de ponto de referência. Ouça as ideias apresentadas pelos alunos e discuta-as. No final, você poderá apresentar o zero como o número que está antes do um na sequência numérica, podendo, inclusive, colocar a cartela do zero no varal da classe.

### 1.3 TAREFA: RETA NUMÉRICA

#### Desenvolvimento:

Para esta tarefa, o ideal é que você utilize um local com bastante espaço, por exemplo, o pátio da escola; no entanto, você poderá adaptar a própria sala de aula afastando as carteiras, de acordo com suas condições. Escolhido o local, convide as crianças a se organizarem em roda, para acompanhar a atividade. Trace uma linha reta no chão com um giz ou, se preferir, cole uma fita adesiva que seja de fácil visualização e combine que essa reta será numerada tendo início no zero. A partir disso, pergunte sobre a sequência dos números. Propomos que faça indagações como: “Quem vem depois do zero? E depois do um?”. Sugerimos que você vá até o número 15. A ideia é que você registre até o número que achar apropriado para trabalhar com sua turma.

Após a construção da reta, os alunos, um de cada vez, caminharão sobre ela de maneira que cada um se posicione de forma que à sua direita fiquem os números maiores e à esquerda, os menores.

À medida que forem caminhando sobre a reta, dê comandos do tipo:

- 1) Posicione-se no número dois e ande cinco passos para a direita. Em que número você chega?
- 2) Agora você está no número sete, ande três passos para a esquerda. Em qual número você chega?

Após esse movimento, leve as crianças para sala de aula e proponha um registro escrito em que elas sejam desafiadas a representar na reta numérica os seguintes comandos:

## REGISTRANDO OS NÚMEROS NA RETA

a) OS NÚMEROS QUE ESTÃO ENTRE 4 E 10.



b) OS NÚMEROS QUE ESTÃO ANTES DO 5.



c) TRÊS NÚMEROS QUE VÊM DEPOIS DO 2.



**REGISTRANDO OS NÚMEROS NA RETA**

- a) VOCÊ ESTAVA NO PONTO 5 E ANDOU 3 PASSOS PARA A ESQUERDA.  
REPRESENTE SEU MOVIMENTO NA RETA.



VOCÊ CHEGOU AO NÚMERO \_\_\_\_\_.

- b) VOCÊ ESTAVA NO PONTO 2 E ANDOU 8 PASSOS PARA A DIREITA.  
REPRESENTE NA RETA.



VOCÊ CHEGOU AO NÚMERO \_\_\_\_\_.

- c) VOCÊ ESTAVA NO PONTO 5 E ANDOU 3 PASSOS PARA A DIREITA.  
REPRESENTE SUA CAMINHADA NA RETA.



VOCÊ CHEGOU AO NÚMERO \_\_\_\_\_.

- d) VOCÊ ESTAVA NO PONTO 2 E ANDOU 8 PASSOS PARA A DIREITA.  
REPRESENTE NA RETA.



VOCÊ CHEGOU AO NÚMERO \_\_\_\_\_.

- e) VOCÊ ESTAVA NO PONTO 5 E ANDOU 3 PASSOS PARA A DIREITA.  
REPRESENTE SUA CAMINHADA NA RETA.



VOCÊ CHEGOU AO NÚMERO \_\_\_\_\_.

### Respostas esperadas:

- a) Esperamos que os alunos representem três “passos”, partindo do cinco para chegar ao número dois.
- b) Tencionamos que eles ilustrem 8 “passos”, indo do 2 ao 10.
- c) Desejamos que desenhem três “passos”, iniciando no cinco e parando no oito.
- d) Queremos que registrem 5 “passos”, começando no 12 e parando no 7.
- e) Objetivamos que indiquem 6 “passos”, estes devem principiar no 6 e terminar no 12.



## 2 SEQUÊNCIA 2: EXPLORANDO RELAÇÕES NUMÉRICAS COM CUISENAIRE

### Justificativa:

A contagem, o reconhecimento dos números e sua escrita estão muito presentes nas práticas do início do processo de escolarização das crianças. No entanto, à medida que as crianças adquirem esses conceitos de cardinalidade e conseguem usar significativamente suas habilidades de contagem, há que se estabelecer novas relações. Esse pode ser um caminho importante para o trabalho com o pensamento algébrico.

Com isso, apresentamos uma sequência de tarefas envolvendo o material manipulativo *Cuisenaire*, constituído por barras de madeira, sem divisões em unidades e com cores padronizadas, que representam medidas de 1 a 10. Além de outros conceitos, a exploração do material permite envolver os alunos no processo de generalizações numéricas e operatórias, o que engloba a composição de números e a busca por regularidades.

Também se inclui nessas possibilidades o desenvolvimento do conceito do sinal de igual enquanto símbolo de igualdade, ou seja, enquanto algo que significa “o mesmo que”. Na maioria das vezes, as práticas de sala de aula caminham para que o aluno conceba esse sinal como resultado da operação e não como uma igualdade que proporciona o estabelecimento de relações numéricas importantes.

### Objetivos:

Envolver os alunos no processo de generalizações numéricas e operatórias, o que abrange a composição de números e a busca por regularidades, além da exploração do conceito do sinal de igual enquanto símbolo de igualdade.

### Nível a que se destina:

Alunos do 1º ao 3º ano.

### Tempo Estimado:

50 minutos.

### Material necessário:

- folhas de papel quadriculado com 1cm de lado;
- material *Cuisenaire* (sugestão de confecção do material em notas para o professor).

## 2.1 TAREFA: CONSTRUÇÕES COM O *CUISENAIRE*

### Desenvolvimento:

- organize os alunos em duplas ou grupos (dentro ou fora da sala);
- disponibilize o material *Cuisenaire* para cada grupo. Neste primeiro momento, distribua apenas uma peça de cada cor para as crianças;
- inicialmente, as crianças ficam livres para manipular e explorar as peças do material como quiserem;
- após a familiarização das crianças com o material, envolva os alunos na construção de uma “escada”, utilizando todas as barras. É possível que, no próprio movimento de exploração, as crianças já construam a “escada”. Caso isso aconteça, você pode realizar as problematizações.
- as problematizações devem caminhar para a discussão sobre os elementos observados pelas crianças, a identificação do padrão da sequência e a associação das peças com os numerais de 1 a 10. Sugerimos as seguintes questões:

Como poderíamos construir uma “escada” utilizando todas as peças do material *Cuisenaire*?

- a) O que vocês observam na “escada” que vocês produziram?
- b) Podemos considerar que é uma sequência?
- c) Qual seria a próxima peça seguida da Laranja?
- d) Registre a escada na malha quadriculada.
- e) Se tivéssemos que atribuir um número para cada peça, qual número seria atribuído?

### Respostas esperadas:

A ideia é que as crianças posicionem as peças em ordem crescente, de forma que a primeira peça seja a branca, equivalente ao número 1, e a última seja a laranja, que teria o valor do número 10. Vale considerar que as crianças podem posicionar suas peças em ordem decrescente, iniciando com a peça laranja. Outra variação se refere à disposição das peças, que podem ser apresentadas pelas crianças na horizontal ou na vertical (Foto 6).



**Foto 6** – Escada construída pelos alunos

**Fonte:** Acervo da professora

- a) O objetivo é que as crianças percebam que as peças seguem um padrão crescente, elas “vão aumentando”. A partir dessa percepção, é possível questioná-las sobre o “quanto” cada peça amplia para que percebam que a diferença entre uma e outra é de uma unidade. As crianças também podem fazer referência às cores; no entanto, estas não se repetem, não seguem um padrão.
- b) O tamanho e o posicionamento das peças seguem um padrão. Estão sempre aumentando uma unidade.
- c) As crianças podem considerar que as peças estão sempre ganhando uma unidade e, por isso, a próxima peça, seguida da laranja, que equivale ao número 10, seria maior que a anterior, teria uma nova cor e valeria 11. Outra possibilidade é que as crianças, a partir da peça laranja, coloquem uma branca, iniciando mais um motivo da sequência.
- d) Para este registro, disponibilize a malha quadriculada para que as crianças possam sobrepor as peças e fazer a pintura dos quadrados de acordo com a quantidade observada na sobreposição (a malha quadriculada deve ser de 1cm por 1cm).
- e) A ideia é de que as crianças façam a associação entre as peças e os numerais

de 1 a 10. Neste momento, você pode realizar o registro na lousa ou mesmo confeccionar um cartaz com as peças e seus respectivos números para que as crianças possam memorizar e utilizar tais ideias para as próximas tarefas.

### Vivência em sala de aula:

A proposta foi realizada na segunda quinzena do mês de abril de 2016 com 12 alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Fundamental, em uma escola municipal. Durante a exploração, foi possível notar que algumas crianças perceberam a diferença entre o tamanho das barras e organizaram as peças segundo esse critério, estabelecendo importantes conexões com o material. Além disso, identificaram essa ordenação como uma “escada”, ou seja, como uma sequência que vai “*subindo até o céu*”, vai aumentando. No entanto, notei que existe um desafio na hora de explicar essas relações estabelecidas por eles, o que é natural, visto que estão no processo de elaboração conceitual.

Ainda no início das explorações, foi possível observar que alguns alunos utilizavam a peça maior (laranja) como modelo para realizar agrupamentos com as outras peças – o desafio que seria lançado posteriormente para trabalharmos com a adição. Sendo assim, as crianças buscaram peças que poderiam ser “encaixadas” nos espaços existentes. Vale ressaltar que, nesse momento, as crianças não estavam preocupadas em formar o 10, pois ainda não havíamos realizado as problematizações para que estabelecessem a relação do número com as barras. No entanto, entendi que esse momento foi importante para que elas, por si mesmas, explorassem possíveis vínculos entre as peças.

Durante a realização do desafio de montar a escada, um aluno fez um apontamento que levou ao diálogo que apresento em seguida:

Eduardo: *Prô, nossa escada está maluca!*

Prof.<sup>a</sup>: *Por que a escada de vocês está maluca?*

Eduardo: *Por que tem um pra cima [aponta para a peça azul], uma para baixo [aponta para peça amarela].*

Pedro: [Pega a peça azul e coloca do lado da peça laranja].

Eduardo: *Um para baixo [aponta para a peça vermelha], um para cima [aponta para a peça rosa].*

Luis: *Vamos falar as cores? Laranja, azul, marrom...*

Prof.<sup>a</sup>: *Olha só..., o Luis e o Eduardo montaram a escada deles! Por que vocês montaram assim?*

Eduardo: *Porque nós gostamos.*

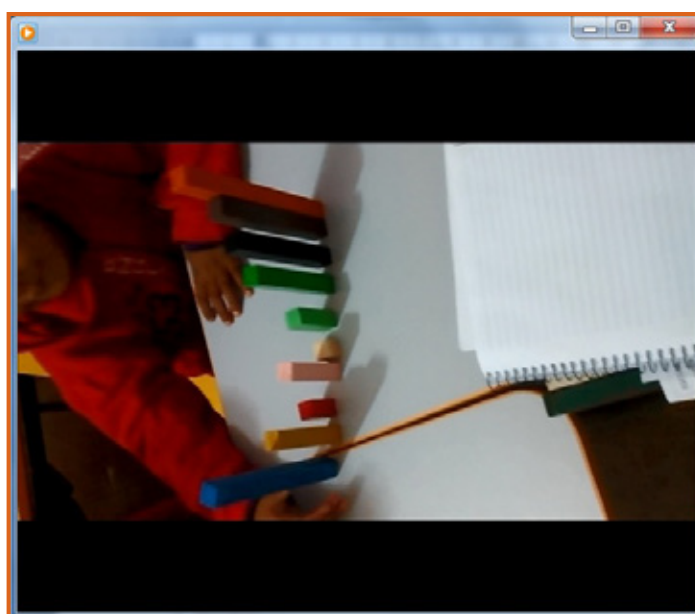
Luis: *Porque não tinha um monte de peça! Essa aqui... [pega a peça amarela]. O Eduardo colocou na última.*

Prof.<sup>a</sup>: *E qual é o lugar dela?*

Luis: *É aqui!* [Posiciona do lado da peça verde].

Victor: *É assim, oh* [aponta para a sua montagem].

Prof.<sup>a</sup>: *É assim como? O que está acontecendo nessa escada?* [Foto 7]



**Foto 7** – “Escada maluca”

**Fonte:** Acervo Grucomat

Nesse trecho, podemos perceber os movimentos dos alunos Eduardo e Luis, que, embora tenham construído livremente a “escada”, demonstraram um estranhamento de seu resultado. Acredito que tal estranhamento tenha surgido à medida que eles observavam as produções dos colegas, pois, quando foram questionados, sinalizaram que estas estavam desordenadas “*uma para cima, outra para baixo*”. Além disso, ao justificar o motivo pelo qual realizaram a montagem da “escada” daquela forma, Eduardo apontou para uma predileção da disposição das barras da forma como apresentaram (“*Porque nós gostamos.*”), mas Luis buscou o argumento na falta de peças e nas opções de seu parceiro de trabalho (“*Porque não*

*tinha um monte de peça! Essa aqui... [pega a peça amarela]. O Eduardo colocou na última.”).*

Destaca-se aqui a importância das trocas durante as aulas, visto que o contato com as produções dos outros colegas possibilitou que a dupla identificasse sua “escada” como “maluca”, ou seja, percebesse que havia uma variação. Tal fato fez com que os alunos chamassem minha atenção, de modo que pude realizar as mediações necessárias. Um aluno de outra dupla, analisando a produção dos colegas e discordando desta, procurou mostrar o caminho para a construção da escada (“É assim como? O que está acontecendo nessa escada?”) e partiu para a explicação da sua “escada”:

*Victor: Assim..., eu coloquei o branco, depois o vermelho, depois o verde...*

*Prof.<sup>a</sup>: E por que você colocou dessa forma?*

*Pedro: Por que é uma escada colorida!*

*Prof.<sup>a</sup>: Mas o deles [Luis-Eduardo] também está colorido!*

*Victor: [Inverte a posição da peça verde e da rosa]. Se é assim, como que vai subir e descer? Se colocar o rosa aqui [coloca na primeira posição], como vai descer? E se colocar o rosa aqui [volta à forma correta], dá para descer.*

Em um primeiro momento, Victor se preocupou em nomear as peças por suas cores correspondentes e definiu a organização de sua sequência como “colorida”. No entanto, frisei que a “escada” dos colegas também estava colorida. A intenção era a de que Victor reconhecesse a necessidade de apresentar um argumento mais consistente. A partir desse momento, ele passou a indicar que o motivo que embasava sua escolha era a possibilidade de “subir” e “descer” da escada e utilizou a modificação de sua montagem para demonstrar que é necessário manter uma ordem correta, levando em consideração o tamanho das peças.

Nesse ponto, ressalto que as crianças, sobretudo as do 1º ano, ainda estão aprendendo a expor suas ideias e argumentar matematicamente. Sendo assim, cabe ao professor ter um olhar atento para as estratégias que as crianças querem manifestar. Victor utilizou seu material para argumentar sua ideia sobre a produção dos colegas, lançou mão de exemplos para demonstrar isso.

## 2.2 TAREFA: CONSTRUINDO UM MURO: EXPLORANDO AS DIFERENTES COMPOSIÇÕES DO NÚMERO 10

### Desenvolvimento:

- Organize os alunos em duplas ou grupos (dentro ou fora da sala).
- Disponibilize o material *Cuisenaire* para cada grupo (neste momento, entregue duas peças de cada cor para cada grupo).
- Desafie os alunos para a construção de um “muro”, de modo que todas as peças sejam utilizadas e que, ao final, fiquem do mesmo tamanho. A ideia é que as crianças percebam a necessidade de tomar a peça laranja como referência para montar as outras “partes” do muro, explorando, assim, as diferentes possibilidades de composição do número 10. Durante a tarefa, circule pelos grupos para realizar as mediações naqueles que não apresentem a linearidade do “muro”. É possível que as crianças façam o pedido de mais peças para solucionar o problema da não linearidade da montagem de seus “muros”; caso isso aconteça, retome o desafio e reafirme que elas precisam utilizar apenas as peças que foram disponibilizadas. Na Foto 8, você pode observar o “muro” finalizado.



**Foto 8** – Exemplo de muro finalizado

**Fonte:** Acervo da professora

Observe que, na imagem acima, as peças estão posicionadas de acordo com a

ordem das sentenças:  $0 + 10$ ;  $1 + 9$ ;  $2 + 8$ ;  $3 + 7$ ;  $4 + 6$ ;  $5 + 5$ ;  $6 + 4$ ;  $7 + 3$ ;  $8 + 2$ ;  $9 + 1$ ;  $10 + 0$ . No entanto, é provável que as crianças não considerem essa ordem, isso será discutido posteriormente.

- Após a construção dos “muros”, faça a socialização das relações observadas pelas crianças. Sugerimos algumas problematizações:
  - a) O que vocês observam nesse “muro”?
  - b) O que vocês consideraram para construir o “muro”?
  - c) Qual o valor das peças vermelha e marrom? E das duas juntas? Qual sentença numérica poderíamos usar para representar essa barra? (Você pode utilizar outras barras para realizar as problematizações).
  - d) Qual sentença numérica poderíamos usar para representar a barra laranja?
  - e) Como poderíamos organizar o “muro” e as sentenças numéricas?

### Respostas esperadas:

- a) A ideia é que as crianças manifestem suas percepções da construção do “muro” e identifiquem a linearidade da disposição das peças.
- b) Neste momento, as crianças devem expor suas estratégias para a construção do “muro” e estabelecer suas justificativas voltadas à necessidade da utilização da peça maior (laranja) como base para a confecção do muro.
- c) A ideia é que as crianças percebam as diferentes composições do número 10 a partir da composição das barras para o “muro”. Além disso, esperamos que elas sejam capazes de criar sentenças numéricas com as combinações das peças para construir o “muro”. Caso as crianças tenham dificuldade, você pode auxiliá-las a identificar tal relação verbalizando e registrando os movimentos, por exemplo, você pode dizer: “Na montagem da barra ‘vermelha e marrom’, vocês adicionaram:  $3 + 7 = 10$ ”.
- d) Este questionamento está voltado para a identificação do valor do número 0. A ideia é que as crianças identifiquem a sentença numérica  $0 + 10$  e  $10 + 0$ .
- e) Tencionamos que os alunos organizem as sentenças e as barras em ordem crescente de valores, como já foi mencionado e ilustrado na imagem da tarefa anterior. Para esse momento, você pode elaborar com as crianças um cartaz



que tenha os fatos básicos da composição do número 10 e seja fixado em um local de fácil acesso para consultas posteriores.

### Vivência em sala de aula:

A proposta foi realizada na segunda quinzena do mês de abril de 2016, com 12 alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Fundamental, em uma escola municipal. Para dar início à tarefa, retomei com as crianças a proposta de construção da escada. Realizei a montagem de uma “escada” na lousa, com o apoio de fita adesiva para a fixação. Durante a organização, foi possível notar que os alunos realizavam a contagem das peças. Logo, realizei questionamentos, que geraram este diálogo:

Prof.<sup>a</sup>: *Então, quer dizer que nós podemos dizer que cada peça representa um número?*

Alunos: [concordam].

Prof.<sup>a</sup>: *Esse aqui [aponta para a peça bege], representa qual número?*

Alunos: *Um!*

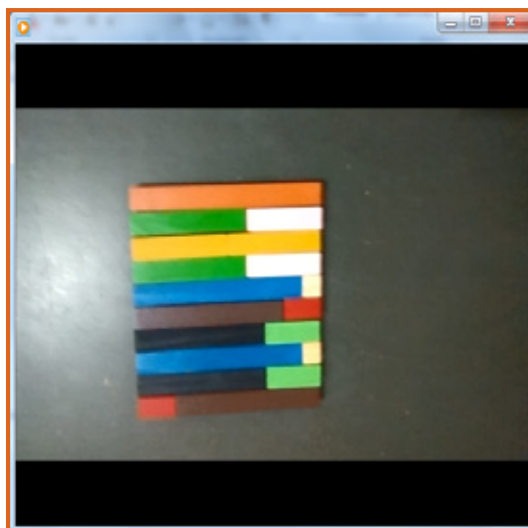
Prof.<sup>a</sup>: *E esse? [Aponta para a peça vermelha].*

Alunos: *Dois!*

E os questionamentos seguiram. Mesmo depois de finalizadas as peças, as crianças identificaram que as próximas dariam continuidade à contagem 11, 12, 13, 14... Na sequência, foi proposto que construíssem um “muro”. Para isso, disponibilizei novas peças, de modo que todas tivessem dois exemplares de cada para realizar todos os pares para formar o número 10.

Durante a tarefa, era comum as crianças solicitarem mais peças ao se depararem com a não linearidade de seus “muros”; elas acreditavam que, para resolver o problema e chegar ao objetivo, precisariam de novos elementos. Diante disso, foi necessário retomar a proposta do desafio, lembrando-os de que deveriam utilizar todas as peças que eu havia disponibilizado, mas que não poderiam adicionar outras. Ao final da tarefa, todos os grupos conseguiram construir um “muro”.

Para socializar as ideias trabalhadas nesse dia, foi fixado, com o apoio de fita adesiva, o “muro” de um dos grupos na lousa, como ilustra a Figura 41.



**Figura 41** – Socialização do “muro”

**Fonte:** Acervo da professora

Durante a socialização, os alunos conseguiram identificar que o “muro” seguia o tamanho da barra laranja, que representava o número 10. A partir desse momento, questionei sobre o número representado por cada agrupamento realizado pelas crianças e registrei as operações feitas por eles (por exemplo,  $2 + 8$ ;  $7 + 3$ ) na ordem em que estas apareciam no “muro”. Posteriormente, quando perguntei qual adição haviam construído para a barra laranja, surgiu a questão do número zero.

Na sequência, as crianças foram incentivadas a pensar em uma organização para as operações realizadas, de modo que se certificassem de que não haviam esquecido nenhum fato para a composição do número 10. Após algumas indagações, as crianças começaram a ler as adições e buscaram ordená-las, iniciando com o número 1 ( $1 + 9$ ;  $2 + 8$ ;  $3 + 7$ ). Com isso, chegamos à adição  $6 + 4$  e percebemos que não a havíamos registrado:

Prof.<sup>a</sup>: *Ixi, cadê o  $6 + 4$ ? A gente não fez...*

Pedro: *O outro...*

Victor: *Não tem...*

Caio: *Tem sim, tá no debaixo do 7!* [Se referindo à soma  $4 + 6$ ].

Prof.<sup>a</sup>: *Será que muda  $4 + 6$  e  $6 + 4$ ?*

Geraldo: *Não!*

Prof.<sup>a</sup>:  *$4 + 6$  dá quanto?* [Aponta na montagem do “muro”].

Alunos: *10!*

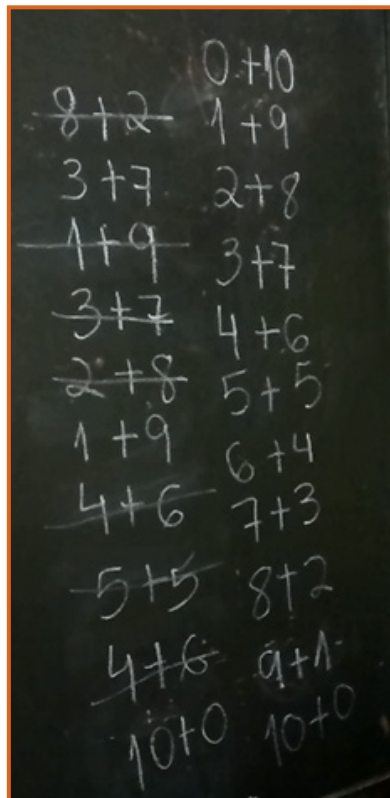
Prof.<sup>a</sup>:  $E\ 6 + 4?$  [Indica a montagem do “muro”].

Alunos: 10!

Prof.<sup>a</sup>: *Então quer dizer que eu posso usar  $6 + 4$  ou  $4 + 6$ ?*

Victor: *Não, aí é o  $6 + 4$ !*

Ao final, tivemos o seguinte quadro (Figura 42):



**Figura 42** – Quadro dos fatos básicos da adição

**Fonte:** Acervo da professora

Ao finalizar, apontei para as crianças que estava faltando “alguém”, referindo-me a uma soma, antes do número 1. Elas prontamente responderam que era o número 0. Sendo assim, questionei: “*0 mais quem que dá 10?*”. E Victor assinalou: “*0 + 10 dá 10*”. Em seguida, chamei a atenção das crianças para o primeiro e o segundo termo das adições. Quando indaguei sobre o que estava acontecendo, elas gesticularam e afirmaram: “*Os dois estavam na ordem*” e “*Esse tá vindo pra cá e esse pra cá*”.

Por fim, disponibilizei as peças do material para que construíssem um “muro” com todas as possibilidades de formar o número 10 encontradas por eles. Além disso, orientei-os a seguir a ordem correta para que não esquecessem algum agrupamento.

## 2.3 TAREFA: “É O MESMO QUE”: EXPLORANDO O SENTIDO DO SINAL DE IGUAL

### Desenvolvimento:

Utilize a malha quadriculada (1cm x 1cm) e o material *Cuisenaire* para sobrepor este naquela no decorrer da tarefa. O objetivo é que as crianças, para compor a sobreposição, associem a barra ao número de quadrados.

Proponha a seguinte tarefa:

$5 + 2$	é o mesmo que	$4 + ?$
$6 + 0$	é o mesmo que	$0 + ?$
$7 + 1 + 2$	é o mesmo que	

### Notas para o professor:

Essa é uma das possibilidades para a composição da equivalência, mas é importante que, no decorrer da socialização, sejam levantadas outras formas de compor os números. Especifique que a expressão “o mesmo que” trata-se de outra maneira de representar o sinal de igual, que se refere à equivalência.

### Respostas esperadas:

- Objetivamos que os alunos manifestem as seguintes combinações:  $0 + 8$ ;  $1 + 7$ ;  $2 + 6$ ;  $3 + 5$ ;  $4 + 4$ ;  $5 + 3$ ;  $6 + 2$ ;  $7 + 1$ ;  $8 + 0$ .
- Esperamos que os alunos manifestem as seguintes combinações:  $1 + 2 + 5$ ;  $2 + 2 + 4$ ;  $3 + 2 + 3$ ;  $4 + 2 + 2$ ;  $5 + 2 + 1$ ;  $6 + 1 + 1$ ;  $1 + 1 + 6$ ;  $1 + 3 + 4$ ;  $1 + 4 + 3$ ;  $1 + 5 + 2$ .

### 3 SEQUÊNCIA 3: BALANÇA

#### Justificativa:

A proposta é trabalhar as noções de equivalência com o equilíbrio na balança e as Barras *Cuisenaire*. Após relacionarem as cores das peças aos números de 1 a 10 os alunos poderão estabelecer relações de equivalência buscando o equilíbrio das peças na balança. Os alunos começam a perceber que as peças de uma extremidade precisam equivaler com as da outra para que haja estabilidade. Essas noções remetem às ideias de equação, de acordo com estas as alterações realizadas em um dos membros da equação precisam ser realizadas no outro.

#### Objetivo:

Desenvolver as noções de equivalência fazendo relações entre as peças do *Cuisenaire*.

#### Nível a que se destina:

1º a 5º ano.

#### Tempo estimado:

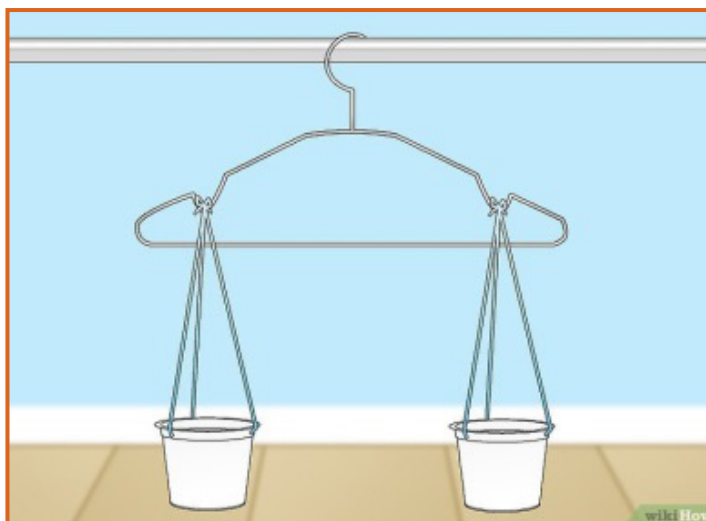
2 aulas.

#### Material necessário:

- balança de dois pratos;
- barras *Cuisenaire*;
- malha quadriculada.

#### Notas para o professor:

A balança de dois pratos poderá ser construída com um cabide e dois pratinhos com correntes, usados para pendurar plantas, conforme modelo (Figura 43):



**Figura 43** – Modelo de balança de dois pratos

**Fonte:** <<https://pt.wikihow.com/Fazer-uma-Balan%C3%A7a-para-Crian%C3%A7as>>

### **Desenvolvimento:**

Escolha um ambiente espaçoso, dentro ou fora da sala de aula. Organize os alunos sentados de modo que consigam enxergar a balança. Lance a seguinte situação: “Se colocarmos duas barras laranjas em um pratinho, quais barrinhas poderemos colocar do outro lado para equilibrar?”

Certamente os alunos irão levantar diferentes hipóteses. Escolha um aluno para colocar a peça que ele acha que irá equilibrar. Nesse movimento, os estudantes vão descobrir que existem algumas possibilidades de equilíbrio, dada a massa de cada peça. Siga escolhendo as peças com eles e solicitando que as crianças encontrem o equilíbrio; deixe que validem ou não suas hipóteses por meio da manipulação.

Em seguida, separe os alunos em duplas ou trios e disponibilize uma balança, as barras e o papel quadriculado. Eles irão encontrar as possibilidades de equilíbrio e registrar no quadriculado. Nesse momento, você poderá andar pelos grupos e, se necessário, realizar mediações.

Por fim, realize a socialização das produções. Nela, os alunos poderão apresentar suas descobertas e sugerir situações para os colegas.

## Vivência de sala de aula:

O presente episódio é um recorte de uma pesquisa de mestrado. Para esta descrição, optei por analisar algumas estratégias usadas pelos alunos. Para fazer a tarefa supracitada, organizei as balanças conforme mostra a Figura 44.



**Figura 44** – Trabalhando com as balanças

**Fonte:** Acervo da professora

Prof.<sup>a</sup>: *O colega J deu uma sugestão que eu achei interessante. Ele disse para colocar cinco cubinhos naturais de um lado e cinco barras vermelhas do outro. Ele disse que, dessa maneira, a balança vai ficar equilibrada... Antes de fazermos o teste, gostaria de saber o que vocês acham?*

[Os alunos entraram em um estado de euforia, mas todos queriam falar ao mesmo tempo...]

Aluno 1: *O vermelho vai abaixar...*

Aluno 2: [Levanta-se e vai até a frente da sala] *Aqui não vai dar, porque aqui vale dois quadrados [refere-se à peça vermelha]... Então, aqui tem 5 [aponta para o lado que estavam as barras naturais] e aqui tem 10 [lado com as peças vermelhas]. Teria que pegar mais dessa [indica as barras naturais] para daí dar 10 e ficar no “ponto”.*

[O aluno que deu a primeira ideia quis defender sua opinião]

Aluno 3: *Mas é da mesma madeira, então, é o mesmo peso...*

Prof.<sup>a</sup>: *Alguém concorda com ele?*

Aluno 4: *Tem que colocar um quadradinho de um lado e o outro do outro, um de cada vez para dar certo...*

Prof.<sup>a</sup>: *Ah, então não posso colocar de uma vez só?*

Aluno 4: *Não. Para ter a medida certa...*

Prof.<sup>a</sup>: *Medida certa do quê?*

Alunos: *Dessas peças...*

Aluna 2: *Se você cortar o vermelho no meio, vai descobrir que tudo dá 10...*

*Olha: 1, 2..., 3, 4..., 5, 6..., 7, 8..., 9, 10... [demonstra com as mãos]*

Aluna 1: *Esse daqui vale um [sobre põe uma peça natural a outra], e esse vale dois [coloca duas peças naturais em cima da barra vermelha], então essa [a vermelha] é o dobro dessa [peça natural].*

Prof.<sup>a</sup>: *Eu faço o teste ou não faço?*

Alunos: *Faz!*

Prof.<sup>a</sup>: *Quem acha que vai equilibrar?*

Aluno 1: *Porque tem cinco cubinhos naturais e cinco do vermelho...*

Prof.<sup>a</sup>: *Quero que venha aqui um aluno que acha que vai equilibrar e outro que acha que não...*

Aluno 6: *Professora, começa colocando dois naturais e só um do vermelho...*

Aluno 7: *Sim! Daí fica na linha reta...*

Prof.<sup>a</sup>: *Bom, tem criança que acredita que vai equilibrar as duas quantidades...*

*Vou colocar aqui... [Coloca as peças]*

Aluno 8: *Não equilibrou...*

Prof.<sup>a</sup>: *Por quê? [Pergunta para o aluno que tinha dado a sugestão inicialmente].*

Aluno 8: *Porque deu para ver que o vermelho é mais pesado...*

Prof.<sup>a</sup>: *Mas que explicação que tem? Aluno R, você pode ajudar ele?*

Aluno 9: *Porque o vermelho é maior... Precisava de 10 quadradinho natural para ficar equilibrado, porque o vermelho é o dobro do natural...*

Prof.<sup>a</sup>: *E agora como fazemos para equilibrar?*

Aluno 9: *Tira três vermelhos e um do natural...*

Aluno 5: *Sim! Fica quatro e quatro...*

Aluno 3: *Ou deixa só dois do vermelho e coloca um natural junto; daí, dá cinco e cinco [aponta para os dois lados da balança].*

Prof.<sup>a</sup>: *E eu posso dizer, então, que isso é igual a isso? [Indica os lados da balança].*

[Nesse momento, paramos<sup>8</sup> para decidir que iríamos usar com os alunos os termos “menos que”.

8 O trabalho foi desenvolvido por uma pesquisadora e pela professora da turma, por isso nesta vivência optamos pelo uso da primeira pessoa do plural.



Com essa pergunta da professora, os alunos começam a discutir a precisão da balança, pois ela não estava dando o equilíbrio exato].

Aluno 2: *Acho que é igual ao que conversamos na sala, depende do material.*

Aluno 1: *Ah, então coloca cinco naturais de um lado e cinco naturais de outra; daí, dá o resultado certo...*

Prof.<sup>a</sup>: *Vamos fazer outro teste. A aluna M vai escolher duas peças...*

[A aluna escolhe duas peças verdes claras, que valem três cada uma. A professora coloca as barras em um lado da balança.]

Prof.<sup>a</sup>: *Quer saber como pode equilibrar essa balança sem ter que usar outra peça igual no outro lado?*

Aluno 4: *É só colocar essa aqui desse lado...* [Retira uma peça verde e coloca do outro lado].

Prof.<sup>a</sup>: *Eu sei que, se colocar uma de cada lado, vai equilibrar. Mas o que pedi foi para deixar as duas verdes de um lado e tentar pensar em quais peças pode colocar do outro lado para achar o equilíbrio. Mas não pode ser outras peças vermelhas.*

Aluno 1: *Essas [coloca três peças vermelhas do outro lado da balança; alguns colegas dizem que ele está correto, outros que ele está errado].*

Prof.<sup>a</sup>: *Essa foi a sugestão do Aluno L... Quero saber de mais duas sugestões diferentes do colega L.* [Coloca as peças em mais duas balanças, que estavam dispostas nas mesas para que todos pudessem visualizar as produções dos colegas].

Aluna 1: *Vou por essa [coloca a peça amarela, que vale seis].*

Aluna 2: *Vou por uma rosa e uma vermelha [A rosa é a peça quatro, e a vermelha é a segunda].*

Prof.<sup>a</sup>: *Aluno L, qual foi o critério que você usou para colocar três vermelhos?*

Aluno 2: *Porque o verde vale três e  $3 + 3$  dá 6... E a vermelha vale dois; então,  $2 + 2$  é 4, com mais 2 dá 6.*

Prof.<sup>a</sup>: *Entendi! E você aluna A?*

Aluna 1: *Olha as verdes dão seis... Então, a rosa é quatro; daí, a vermelha é dois, e  $4 + 2$  é 6.*

Prof.<sup>a</sup>: *E você, Aluna E?*

Aluna 5: *Para descobrir que a amarela era seis, precisei colocar umas peças em cima dela... Daí, ficou seis e seis dos dois lados...*

Prof.<sup>a</sup>: *Legal! E existem outras possibilidades de equilíbrio?*

Aluno 1: *Seis pecinhas naturais equilibram* [faz o teste].

Aluno 2: *A pecinha que vale quatro e uma que vale dois...*

[A professora deixa os alunos acharem as possibilidades. Para encontrar os valores, eles vão sobrepondo as peças, pois ainda não tinham decorado o valor delas]

Prof.<sup>a</sup>: *Muito bem! Então, podemos dizer que todos são equivalentes ou que são a mesma coisa? É o mesmo que o outro?*

Alunos: *Sim!*

Pesquisadora: *Eu posso dizer que a peça seis equivale a dois de três?*

Alunos: *Sim!*

Prof.<sup>a</sup>: *Então,  $3 + 3$  equivale a  $4 + 2$ ?*

Alunos: *Sim!*

Prof.<sup>a</sup>: *Então, vamos fazer novos testes?*

Inicialmente, a professora acatou a sugestão do aluno: colocar 5 cubinhos de um lado e 5 barras vermelhas do outro lado da balança. O aluno não levava em consideração a massa de cada peça. De imediato, alguns alunos contestaram e disseram que eram necessárias 10 peças unitárias para equilibrar 5 vermelhas. É o caso do Aluno 2, que já havia compreendido a equivalência quando concluiu que precisava fazer isso para “ficar no ponto”. No entanto, o Aluno 1 continuou a defender sua ideia, e a professora interveio, colocando os colegas no movimento de pensar: “Alguém concorda com ele?”. As sugestões continuaram, ora com a ideia da quantidade das peças, ora com a noção da equivalência de medidas.

Chamamos a atenção para a estratégia da aluna que disse: “Se você contar o vermelho no meio, vai descobrir que dá tudo 10”. Ela argumentou que 1 barra vermelha equivale a 2 naturais; portanto, 5 vermelhas são 10 naturais. A Aluna 3, por sua vez, manteve a estratégia de sobrepor as peças – estratégia essa bastante utilizada pelos alunos, sinalizando que alguns precisaram do apoio do material por mais tempo do que outros.

As problematizações da professora sobre equilibrar ou não a balança continuaram. E as relações estabelecidas entre as medidas das peças continuaram a ser explicitadas:

Alunos: *O vermelho é maior... Precisava de 10 quadradinhos natural para ficar equilibrada.*

Alunos: *Aqui a relação é: 5 barras vermelhas equilibraram 10 naturais.*

Alunos: *A vermelha é o dobro da peça natural.*

Alunos: *Mas como equilibrar a balança?*

Alunos: *Tira três vermelhas e uma natural, ou seja, duas vermelhas equilibram quatro naturais.*

Alunos: *Deixa duas vermelhas e coloca uma natural, ou seja,  $4 + 1 = 5$ .*

As experimentações continuaram. Observamos que as estratégias se alteravam entre acrescentar ou retirar peças de um dos pratos da balança. Alguns alunos já mostravam indícios de abstração das medidas das peças, outros ainda precisavam da sobreposição de peças. Nesse movimento, as equivalências foram sendo apontadas, como registrado na lousa: “ $3 + 3 = 2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 6$ ”.

No vídeo, é possível constatar que alguns alunos se empolgaram mais do que outros; eles levantavam e iam até a balança para mostrar o equilíbrio ou não das peças; argumentavam, manuseavam e buscavam convencer os colegas. Outros, embora permanecessem sentados, estavam atentos às discussões e opinavam quando solicitado pela professora, revelando o envolvimento com a tarefa.

Concluídas as diferentes experimentações, os alunos realizaram o registro. Destacamos um deles para mostrar o quanto alguns estudantes foram além da materialidade das peças.

Pesquisadora: *Explica como vocês pensaram aqui?*

Aluno 1: *Aqui desenhamos o que a gente fez na balança. Colocamos 2 peças marrons, que dá 16 de um lado da balança. E do outro lado colocamos 4 peças vermelhas, que, somando tudo, também dá 16...*

Pesquisadora: *Hum... Explica esse registro aqui embaixo [aponto para as relações que eles fizeram abaixo do desenho].*

Aluno 1: *A gente fez assim, porque  $8 + 8$  é o mesmo que  $4 + 4 + 4 + 4$ ; ou  $8 + 8$  é o mesmo que  $4 \times 4$ , porque as peças vermelhas repetem 4 vezes... Senão, pô, pode ser 16, é o mesmo que  $4 \times 4$ , porque  $4 \times 4 = 16$ .*

Pesquisadora: *Legal! E no debaixo?*

Aluno 1: *Aqui a gente tinha colocado duas peças de 10 em um lado da balança e quatro de 5 do outro lado... Daí, aqui a gente descobriu que  $5 + 5 + 5 + 5$  é o mesmo que  $10 + 10$ , porque os dois dão 20... ou 20 pode ser  $4 \times 5$ , porque a gente colocou 4 peças de 5 para equilibrar...*

Neste episódio, os alunos estabeleceram diferentes relações numéricas de equivalência. Notamos que o Aluno 1 identificou as relações existentes entre as peças dadas e as relações entre as expressões. Ele fez o registro no quadriculado e conseguiu estabelecer as equivalências e justificar:  $4 + 4 + 4 + 4 = 8 + 8 = 4 \times 4$  e  $5 + 5 + 5 + 5 = 10 + 10 = 20 = 4 \times 5$ . De modo geral, percebemos que, quando os alunos pararam para registrar o que vivenciaram na exploração da balança, explicitaram o próprio raciocínio, ou seja, colocaram em xeque as hipóteses que haviam levantado na dinâmica da balança. Na escrita, formalizaram suas ideias, organizaram o pensamento, reformularam suas estratégias e encontraram novas relações. O sinal de igual começou a fazer sentido nesse momento. Pelas justificativas dadas pelo aluno para explicar sua estratégia, podemos dizer que as noções de equivalência estavam sendo apropriadas.

Nos episódios da exploração das barras na balança, constatamos que os alunos abstraíram as medidas das peças. Além disso, estabeleceram as relações de equivalência entre as barras.

## PARA ENCERRAR...

Algumas tarefas foram realizadas sequencialmente pelas professoras, conforme as narrativas nas vivências em sala de aula. Foram experiências marcantes, pois apontam o avanço dos alunos quando há a intencionalidade do professor ao planejar suas aulas. Como destacamos anteriormente, não há necessidade de seguir a sequência proposta de tarefas. No entanto, quando isso ocorre, é perceptível o quanto os alunos vão se apropriando das ideias, do vocabulário, e vão aplicando esses novos saberes em outras situações.

As narrativas apresentadas mostram um ambiente propício para a realização das tarefas, no qual a professora orienta como a proposta deverá se desenvolver, como a classe será organizada, e, ao final, coordena o momento de socialização das ideias. Evidenciam também a importância do diálogo e das problematizações, das boas perguntas e das sínteses elaboradas pela docente. Constatamos também o quanto os alunos inseridos em espaços que favorecem a problematização se envolvem e têm boas ideias, identificam padrões, estabelecem relações e generalizações.



Parte 3

O DESENVOLVIMENTO DO  
PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS  
FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL  
E NO ENSINO MÉDIO

CAIO LEARDINI GRILLO  
CLAUDIA CRISTIANE BREDARIOL LUCIO  
IRIS APARECIDA CUSTÓDIO  
ROSANGELA ELIANA BERTOLDO FRARE





# O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL II E NO ENSINO MÉDIO

As tarefas propostas para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio não foram elaboradas com o intuito de esgotar os conteúdos algébricos, geralmente abordados nesses segmentos, mas com vistas a explorar questões que conduzam ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Por isso, buscamos, com as sequências que seguem, trazer uma proposta de trabalho com a Álgebra que priorize o raciocínio algébrico, em detrimento do emprego mecânico de técnicas meramente reprodutivas. Não há nenhuma intencionalidade de propor algo definitivo ou pronto – trazemos apenas sugestões de tarefas que permitam a produção de significações, e não a reprodução mecânica de técnicas. Não estamos julgando estas como desnecessárias, mas acreditamos ser prioridade o desenvolvimento de um raciocínio que permita a compreensão dessas técnicas, e não a simples reprodução. Conforme apontam Hiebert et al. (1997), as tarefas propostas pelo professor devem despertar o interesse dos alunos, mobilizá-los a pensar, ao invés de seguir apenas regras e modelos.

Ressaltamos também que o material aqui apresentado é o fruto de um intenso trabalho em grupo, cujo movimento se constituiu de momentos de escolha, elaboração/adaptação de tarefas, desenvolvimento em sala de aula, análise dos registros e reelaboração das tarefas. A princípio selecionamos algumas tarefas com as quais o Grucomat já havia trabalhado e fizemos algumas adaptações. Em seguida, buscamos ou elaboramos outras propostas, a fim de complementar os objetivos pretendidos, e, a partir deles, organizamos sequências. Concomitantemente a esse processo e também posteriormente a ele, as tarefas foram sendo desenvolvidas em algumas turmas de alunos, desde o 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, e os registros produzidos por eles, compartilhados e analisados com o grupo. Com base nas experiências de



desenvolvimento dessas atividades em sala de aula, conforme a necessidade, era realizada a reelaboração de enunciados, de itens das tarefas e a complementação com novos itens, novas proposições ou a reorganização das sequências.

Assim, as propostas encontram-se organizadas em sequências que podem ser trabalhadas na íntegra ou não, e na ordem sugerida ou não. Cabe ao professor, de acordo com sua intencionalidade, decidir quais sequências ou tarefas irá desenvolver com seus alunos e o que deseja explorar com cada uma delas. Todas as propostas se adequam a quaisquer anos dos segmentos aqui mencionados anteriormente. O professor poderá dar a ênfase que julgar pertinente, de conformidade com as características de suas turmas e com as aprendizagens já adquiridas. Inicialmente pensamos em organizar as sequências em função dos anos aos quais eram destinadas, mas percebemos, ao elaborá-las e desenvolvê-las, que todas podem ser exploradas nos diferentes níveis de cada segmento. Algumas tarefas podem parecer demasiadamente simples para alunos do Ensino Médio, por exemplo. No entanto, ocorre de os alunos passarem anos reproduzindo técnicas, mas não conseguem pensar algebricamente. Por isso sugerimos tais tarefas, que oferecem essa possibilidade, ainda que esta situação seja nova para eles. Em algumas delas, trazemos as vivências em sala de aula que demonstram as interações realizadas e comprovam a possibilidade do trabalho em diferentes anos de cada segmento e suas potencialidades.

Pautados em uma perspectiva histórico-cultural, defendemos que o desenvolvimento humano ocorre a partir da relação entre os sujeitos. De acordo com Vigotski (2009), nos tornamos humanos, ao nos apropriarmos dos bens culturais produzidos historicamente pelos diversos grupos sociais. Algumas dessas apropriações ocorrem pela inserção cultural, empiricamente; no entanto, há outros bens culturais, aqueles que dizem respeito ao conhecimento teórico, que são sistematizados e organizados cientificamente e, portanto, não podem ser apropriados apenas pela inserção na cultura, mas por relações de ensino intencionalmente organizadas. É papel das instituições de ensino proporcionar o acesso não apenas a esse tipo de conhecimento, mas também a instrumentos para a produção de novos conhecimentos. Por isso, defendemos o trabalho em colaboração, em que há a possibilidade de trocas entre os alunos, possivelmente organizados em duplas ou grupos, de acordo com as especificidades de cada turma.

Vigotski (2009), ao discutir a elaboração de conceitos, defende que se pode produzir muito mais em colaboração, no trabalho compartilhado. No entanto, para que isso ocorra,

as duplas ou grupos de trabalho também precisam ser intencionalmente organizadas. Alunos com raciocínio mais avançado podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio de alunos que ainda estão no início desse processo. O professor é o único capaz de julgar se seus alunos trabalham melhor em duplas ou grupos e qual organização produzirá melhores resultados – por isso esta decisão é sua, professor!

Como estamos nos referindo a conceitos teóricos, o papel do professor no processo de elaboração deles é primordial. Vigotski (2007) defende que o desenvolvimento humano ocorre do inter para o intrapessoal, ou seja, primeiro o conceito é externo, produzido culturalmente por grupos sociais organizados historicamente. E só depois, a partir da relação com o outro e com esses bens culturais, é que esse conceito se torna próprio de cada sujeito, é apropriado – nas palavras de Vigotski (2007), é internalizado –, reelaborado por cada um. Mas, para que ocorra essa apropriação, é de extrema importância a mediação do professor, que, no desenvolvimento de cada tarefa, é responsável por organizar as significações que estão sendo produzidas e elaborar problematizações que contribuam para o avanço das hipóteses criadas ou para a reelaboração delas. A mediação pedagógica, que pode ocorrer também na forma de questionamentos, perguntas, problematizações, segundo Fontana (2000), possibilita a apropriação não só de conceitos, mas também de modos de interagir, de participar, de negociar, imprescindíveis nas relações de ensino.

Os colegas de grupo, na sua interação, colaboram para o processo de elaboração de significações, mas é do professor o papel de organizar sistematicamente cada hipótese e de lançar um olhar para aquelas que ainda não chegaram ao objetivo traçado, fazendo questionamentos, problematizações que possibilitem avanços. O mesmo deve ocorrer com as estratégias que vão na contramão da proposta. O olhar atento a elas é de extrema relevância para o desenvolvimento de cada aluno e do grupo como um todo. Cabe ao professor realizar intervenções que permitam compreender como o aluno elaborou suas hipóteses, ainda que estas não respondam completamente ao solicitado ou às respostas esperadas. As respostas sugeridas nas seções “respostas esperadas”, nem sempre são as únicas possibilidades de solução dos problemas por isso, no caso de diferentes resoluções para uma mesma proposta, é importante também que você, professor, explore-as coletivamente e, nos casos pertinentes, discuta as possíveis equivalências de estratégias e soluções.

Partilhamos também das ideias de Hiebert et al. (1997), que defendem que o ato de refletir permite aos alunos estabelecer relações entre conceitos e conhecimentos que já possuem e possibilita o aumento da compreensão matemática. Já o ato de comunicar – falar, ouvir, escrever, demonstrar, observar – é entendido por eles como uma interação social através da qual os alunos compartilham pensamentos com os demais ou consigo mesmo. Desse modo, afirmam os autores, a compreensão matemática depende da reflexão e da comunicação de tais estratégias.

Para que esse movimento seja possível, é de extrema importância que você, professor, incentive os alunos na elaboração de registros não apenas das respostas finais, mas de todas as estratégias que conduziram a tais respostas. Na visão de Powell e Bairral (2006), os alunos precisam ser estimulados a escrever nas aulas de matemática, uma vez que isso contribui para o desenvolvimento, o entendimento ou a ampliação das ideias; a aquisição de vocabulário matemático; e a reflexão, por eles próprios e pelo professor, sobre seus aprendizados ou experiências. Desse modo, o registro escrito na abordagem algébrica também é fundamental, uma vez que ajuda o aluno a pensar algebricamente. Por isso, é necessário incitar a escrita dos alunos, principalmente o uso da linguagem matemática. No caso dos alunos que não costumam realizar o registro, cabe ao professor incentivá-los, inicialmente, a expor oralmente suas estratégias.

Defendemos, ainda, a importância do processo de socialização, ou seja, do compartilhamento das hipóteses e das estratégias criadas, cuja ação, para Hiebert et al. (1997), tem duas funções: a intelectual, objetivando estimular os alunos a refletirem sobre relações matemáticas envolvidas, e a social, com o intuito de analisar todas as hipóteses e estratégias, a fim de identificar a mais apropriada. Assim, ao final da tarefa, o professor incentiva seus alunos a compartilharem suas produções, para que haja discussão das diferentes estratégias. Você, professor, pode, intencionalmente, chamar para a discussão as hipóteses que diferem do que fora planejado inicialmente, pois geralmente são essas hipóteses que geram boas discussões. Ainda que os alunos se mostrem resistentes a expressar suas ideias, cabe ao professor promover e investir nesses momentos, pois, ao comunicar suas estratégias, o aluno passa pelo processo de reelaboração do pensamento e, possivelmente, de reestruturação de suas estratégias – para si e para o outro. Quanto a isso, Hiebert et al. (1997) expõem que, ao comunicar as estratégias, são gerados conflitos cognitivos que mobilizam os alunos a reorganizar o pensamento e reavaliar as estratégias.

É importante ainda que o professor tenha consciência de que, no movimento de resolução das propostas, podem surgir questões não previstas inicialmente. Uma vez que o movimento de exploração das tarefas pelos alunos pode vir a assumir um caráter investigativo, ao professor podem ser colocados desafios inusitados, fazendo-o sair da zona de conforto e entrar na zona de risco (SKOVSMOSE, 2008). Por isso, a importância de um bom planejamento inicial e do registro para posterior discussão com a turma, assim como a elaboração de notas de aula que permitam a reflexão sobre o processo de desenvolvimento das tarefas com os alunos e a avaliação da própria prática – momentos de mediação e problematizações. Bom trabalho!

### **Notas iniciais para o professor:**

As tarefas propostas no decorrer de todas as sequências podem ser desenvolvidas tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio. Cabe ao professor decidir o enfoque que será dado com cada turma, bem como quais tarefas desenvolver.

Sugerimos que, no desenvolvimento das tarefas, você, professor, atue nos grupos, nas duplas ou individualmente, mediando o processo de elaboração de hipóteses, validação e reflexões. É importante que você não rejeite as hipóteses iniciais elaboradas pelos alunos: tente compreendê-las e, a partir delas, busque elementos que possibilitem o avanço dessas hipóteses. Ao final, sugerimos também que faça a socialização das conclusões alcançadas. É interessante procurar abordar as várias formas de resolução e de registros delas, para que os alunos possam entrar no movimento de analisar a produção dos colegas e refletir sobre suas hipóteses, no momento de comunicação.

Se os alunos não estiverem acostumados com essa prática, pode ser que, inicialmente, demonstrem certa resistência a expor suas conclusões e a questionar as hipóteses dos colegas. Mas é importante que você insista em propor tais momentos, pois eles são essenciais para a reflexão, a comunicação e a validação ou não das hipóteses e conjecturas iniciais.

# 1 SEQUÊNCIA 1: SEQUÊNCIA DE SONS

## Justificativa:

A tarefa que compõe esta sequência visa trabalhar com a percepção de regularidades, a partir de sons.

## Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- reconhecer o motivo de uma sequência, pela percepção de sua regularidade, numa sequência de sons;
- generalizar o motivo de uma sequência;
- reproduzir uma sequência de sons;
- criar uma sequência de sons, de modo a compor uma melodia.

## Tempo estimado:

Duas aulas.

## Material necessário:

- projetor de vídeos (*datashow*);
- copos plásticos mais resistentes que os descartáveis;
- recurso para videogravação: câmeras filmadoras, celular ou *tablet*.

## 1.1 TAREFA: CRIANDO UMA SEQUÊNCIA DE SONS

- Assistir ao vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=DrcO1Ojpn4Q>  
(Você pode fornecer os copos aos alunos, para que eles tentem imitar os movimentos apresentados no vídeo).
- Organizar uma roda de conversa e discutir os conceitos: motivo, padrão, repetição, sequência, ritmo. Você pode iniciar a conversa, questionando se existe alguma regularidade na composição dos movimentos que compõem a música.
- Em grupos, os alunos devem representar os movimentos do vídeo por meio de desenhos ou da escrita, a fim de sistematizar a sequência. Por exemplo: “Palma, mesa, copo, vira”.
- Reproduzir a sequência da música.
- Cada grupo deve criar uma nova música e, em seguida, registrar, por meio de videogravação, a nova sequência. Em seguida, os grupos socializam suas produções, a fim de que os colegas identifiquem a sequência criada.

### 🗨️ Notas para o professor:

- ✓ As tarefas propostas centram-se na percepção de regularidades em sequências de sons. Chamamos de **motivo** os elementos da sequência que se repetem.

Exemplo:

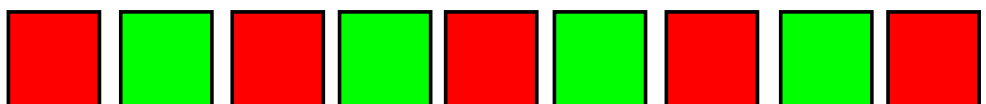
Sequência 1:



O motivo é:



Sequência 2:



O motivo é:



- ✓ As sequências 1 e 2, aqui apresentadas, possuem o mesmo **padrão**: ABABAB.

## 2 SEQUÊNCIA 2: SEQUÊNCIA DE CORES

### Justificativa:

As tarefas que compõem esta sequência visam permitir, a partir do uso de material manipulativo, a exploração de regularidades, a introdução às generalizações, assim como o trabalho com números pares, ímpares e múltiplos de 2 e de 3.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- reconhecer o motivo de uma sequência de cores, pela percepção de sua regularidade;
- generalizar o motivo de uma sequência;
- trabalhar com sequências infinitas;
- identificar as semelhanças e as diferenças entre as sequências de sons e as sequências de cores;
- identificar o padrão proposto no motivo, estabelecendo relações entre a forma, a cor e a posição;
- trabalhar com os conceitos de números pares e ímpares;
- trabalhar com os conceitos de múltiplos de dois e de três.

### Tempo estimado:

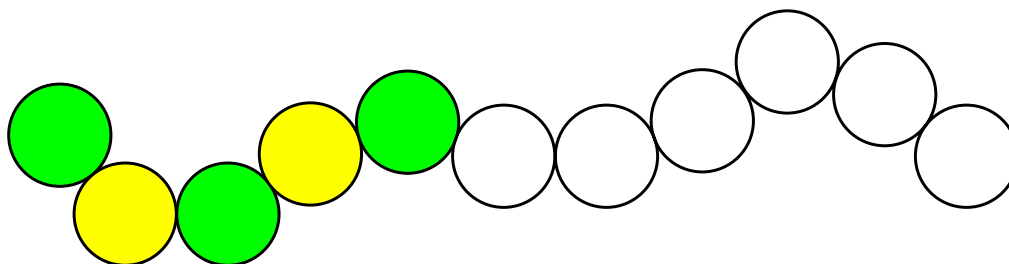
Seis aulas.

### Material necessário:

- barbante;
- contas verdes e amarelas, ou quaisquer outras duas cores de que o professor disponha;
- papel;
- fita crepe ou similar;
- lápis de cor ou outro material para colorir.

## 2.1 TAREFA: FIO DE CONTAS COM DUAS CORES

Observe a sequência de cores:



- Como poderíamos continuar esta sequência? Registre como você pensou.
- Qual será a cor da 20ª conta? Explique como você sabe disso.
- Qual será a cor da 37ª conta? Explique como você sabe disso.
- Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?

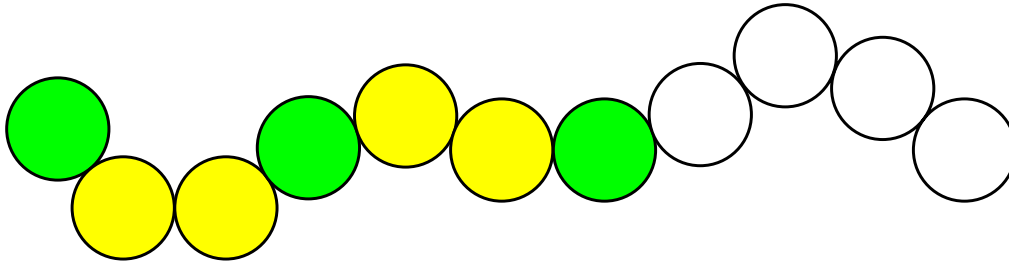
**Respostas esperadas:**

- Amarela, verde, amarela, verde, ...
- Amarela, pois as contas pares são amarelas.
- Verde, pois as contas ímpares são verdes.
- Sempre que a posição da conta corresponder a um número par (obtido pela expressão  $2n$ , ou seja, múltiplo de 2), sua cor será amarela, e, sempre que a posição da conta corresponder a um número ímpar (obtido pela expressão  $2n + 1$ , ou seja, múltiplo de 2 somado a 1), sua cor será verde.



## 2.2 TAREFA: FIO DE CONTAS COM DUAS CORES

Observe a sequência de cores:



- Como poderíamos continuar esta sequência?
- Qual será a cor da 20ª conta? Explique como você sabe disso.
- Qual será a cor da 36ª conta? Explique como você sabe disso.
- Como você faria para descobrir a cor da conta em uma posição qualquer?

**Respostas esperadas:**

- Amarela, amarela, verde, amarela, amarela, verde...
- Amarela, pois toda conta cuja posição antecede um número múltiplo de 3 é amarela, ou porque, fazendo a divisão de 20 por 3 (quantidade e elementos do motivo da sequência), o resto será 2, e, assim, a 20ª conta corresponde à segunda conta do motivo, que é a amarela.
- Amarela, pois toda conta cuja posição é um número múltiplo de 3 é amarela, ou porque, fazendo a divisão de 36 por 3 (quantidade e elementos do motivo da sequência), o resto será 0 e, assim, a 36ª conta corresponde à última conta do motivo, que é a amarela.
- Sempre que a posição da conta corresponder a um número múltiplo de 3 (obtido pela expressão  $3n$ ), sua cor será amarela.

Se a posição da conta corresponder a um número que antecede um múltiplo de 3 (obtido pela expressão  $3n - 1$ ), sua cor será amarela.

Se a posição da conta corresponder a um número que sucede um múltiplo de 3 (obtido pela expressão  $3n + 1$ ), sua cor será verde.

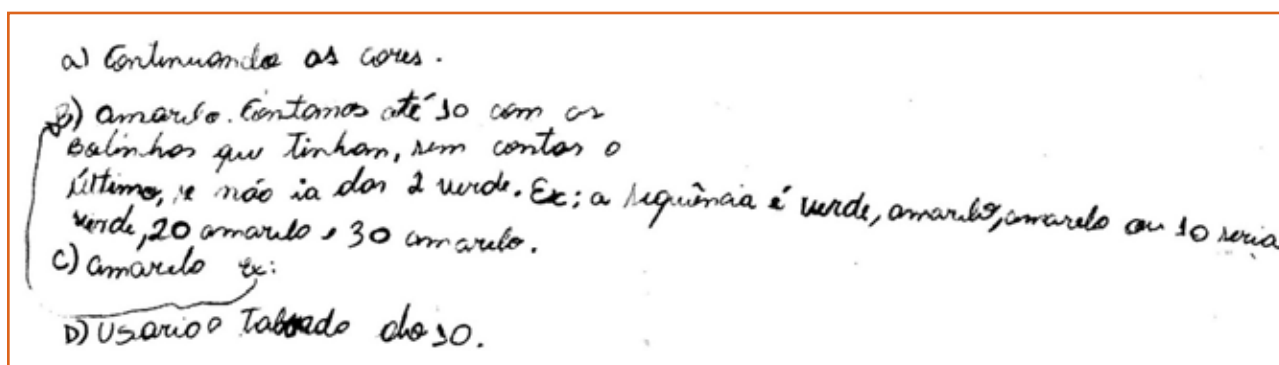
Ou, fazendo a divisão da posição da conta por 3, se o resto for 1, a conta será verde; se for 2, será amarela e, se for 0, também será amarela.

### Vivência em sala de aula:

Os registros selecionados na Figura 1 são provenientes de alunos do 2º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 34 alunos de uma escola pública e teve duração de uma aula (50 min), com o intuito de retomada de conteúdos. As salas estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante a realização das tarefas, a professora fez mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas. Vale destacar que ambas as turmas não tinham uma cultura de socialização e estavam um pouco resistentes a expor suas estratégias aos colegas de sala.

Observando os registros, foi possível perceber que um dos grupos, ao fazer a contagem de 10 em 10 para determinar a cor em cada questão proposta, evidenciou que, a cada 10 contas, obtém-se um dos elementos do motivo: verde, amarela, amarela. Desse modo a 10ª conta é verde, a 20ª é amarela, a 30ª é amarela, a 40ª é verde; e assim, sucessivamente, conforme mostra o registro (Figura 1).

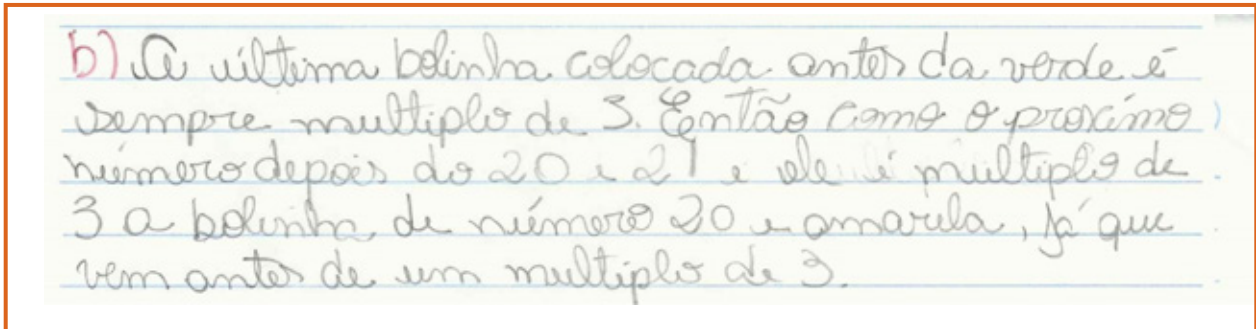


**Figura 1** – Registro da tarefa 2 – item a

**Fonte:** Acervo do Grucomat

A mesma tarefa também foi desenvolvida em uma escola particular, com duração de uma aula. Os 32 alunos do 1º ano do Ensino Médio se reuniram em duplas, e a maioria optou por desenhar todas as “bolinhas” e contar de uma em uma, até chegar ao número solicitado. Quando questionados sobre outras estratégias de resolução, alguns alunos desenharam apenas o motivo, uma única vez, e contaram sucessivamente, apontando

sobre o motivo desenhado, até chegar à posição desejada. Outros, no entanto, procuraram relacionar as cores e a posição de tal figura na sequência, por exemplo: 1-verde, 2-amarelo, 3-amarelo, 4-verde, ... chegando assim, à resposta envolvendo múltiplos de 3, conforme o registro na Figura 2.



**Figura 2** – Registro da tarefa 2 – item b

**Fonte:** Acervo do Grucomat

O aluno percebeu a regularidade da sequência e relacionou a posição de cada cor com o fato de seu antecessor ou seu sucessor ser múltiplo de 3, mas não foi capaz de usar o algoritmo da divisão para concluir as respostas.

## 2.3 TAREFA: ELABORAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

Use o material disponibilizado pelo professor. Crie uma sequência diferente, acrescentando uma terceira cor, e garanta que tenha uma regularidade. Elabore perguntas, relacionando a posição e a cor das contas. Troque com o seu colega, para que ele possa responder suas perguntas.

### Notas para o professor:

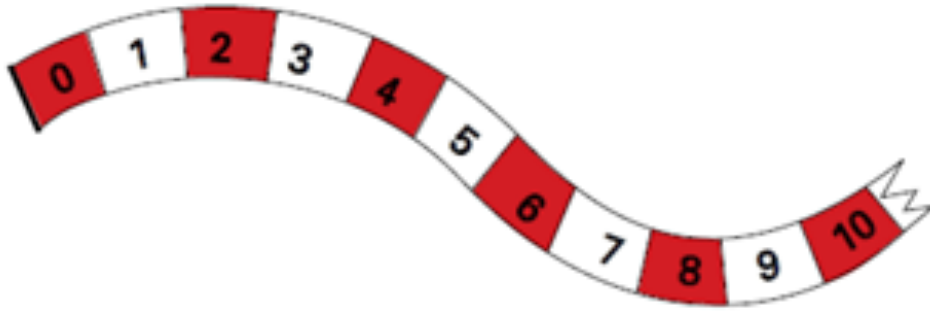
Para esta tarefa, disponibilize o barbante e as contas coloridas. No momento da troca, a fim de evitar que as contas saiam do barbante, cada uma das extremidades deve ser envolvida, isoladamente, com fita crepe (ou material similar).

Quando esta tarefa foi aplicada em sala de aula, os alunos questionaram se poderiam unir as pontas do barbante. Isso não seria possível, pois, caso fossem unidas, formar-se-ia um colar, e teríamos uma sequência finita – daí o nome dado a esta tarefa de “fio de contas”, e não “colar de contas”.

Caso não disponha de material, você poderá solicitar a criação da sequência com papel e lápis colorido.

## 2.4 TAREFA: TIRA DE DUAS CORES<sup>1</sup>

Observe a tira de papel que inicia no número zero. Ela alterna números nas cores vermelha e branca. Veja que a ponta da direita é diferente da ponta da esquerda. O que você acha que isso indica?



Ainda observando as cores dos números, responda:

- O que os números brancos têm em comum?
- O que os números vermelhos têm em comum?
- Pense em um número bem grande que não esteja representado na tira. Registre esse número. Se esse número estivesse representado na tira, ele seria branco ou vermelho? Como você sabe disso?

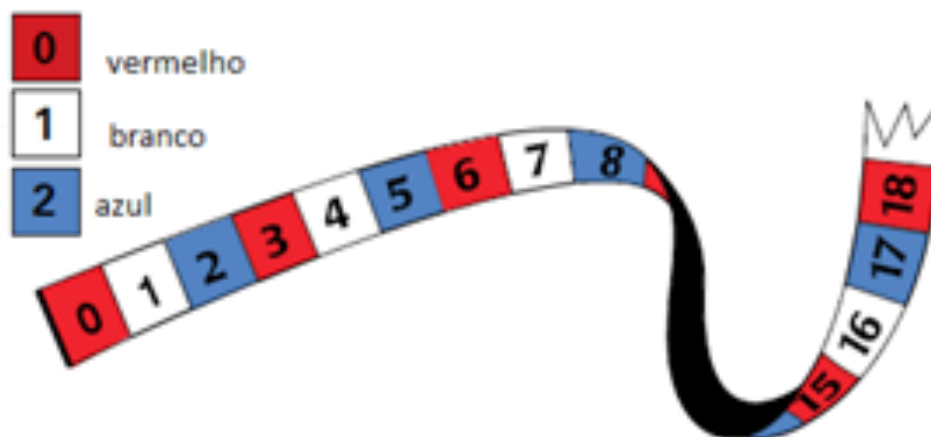
### Respostas esperadas:

- Os números brancos são ímpares.
- Os números vermelhos são pares.
- Se o número pensado for par, sua cor será branca; e, se o número pensado for ímpar, sua cor será vermelha.

<sup>1</sup> Adaptada de Kindt et al. (2006b).

## 2.5 TAREFA: TIRA DE TRÊS CORES<sup>2</sup>

A tira seguinte é diferente da anterior:



Observando as cores dos números, responda:

- O que os números brancos da sequência têm em comum?
- Entre o 7 e o 16, quais números são brancos?
- O que os números vermelhos da sequência têm em comum?
- Qual é a cor do número 51? Como você sabe disso?
- Qual é a cor do número 37? Como você sabe disso?

### 📌 Notas para o professor:

- ✓ É importante que você, professor, faça problematizações no decorrer de todas as propostas, principalmente no momento em que os alunos forem desafiados a criar uma nova sequência. Pode ser que alguma(s) sequência(s) não siga(m) um motivo e não haja regularidade, e é papel do professor suscitar essa discussão entre os alunos.
- ✓ Ao final da socialização da tarefa, você pode discutir as semelhanças e as diferenças entre as sequências de sons e as sequências de cores. (Na sequência de sons, é a regularidade que cria o ritmo).

2 Adaptada de Kindt et al. (2006b).

### Respostas esperadas:

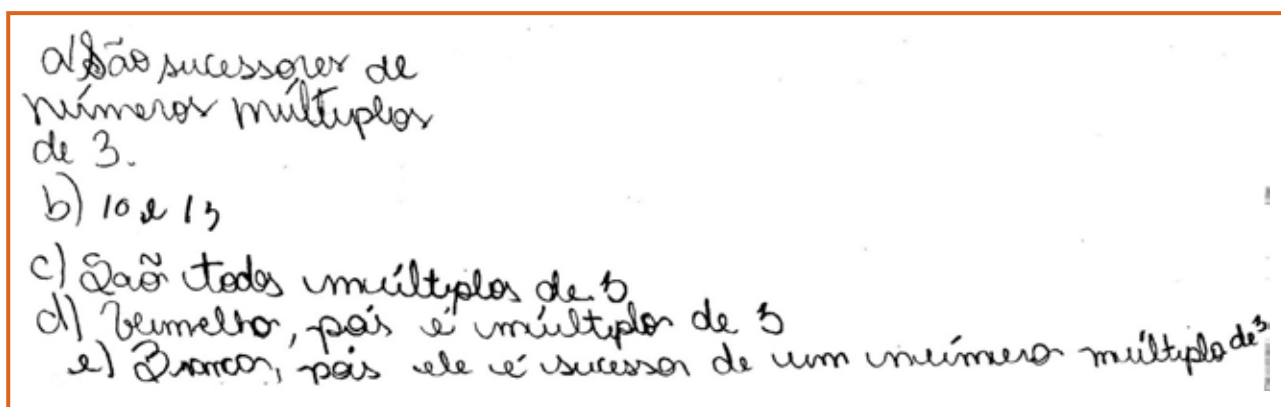
- a) Os números brancos são múltiplos de 3 somados com 1, ou seja, são números sucessores dos números múltiplos de 3.
- b) 10 e 13.
- c) Os números vermelhos são múltiplos de 3.
- d) Vermelho, porque 51 é múltiplo de 3.
- e) Branco, pois é um múltiplo de 3 somado a 1, ou seja, é o sucessor de 36, que é múltiplo de 3.

### Vivência em sala de aula:

Os registros a seguir foram produzidos por alunos do 2º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 34 alunos de uma escola pública e teve duração de uma aula. O objetivo era a retomada de conteúdos. Os alunos foram organizados em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante a realização das tarefas a professora realizou mediações nos grupos conforme a necessidade, e após o término, houve a socialização das respostas encontradas. Vale destacar que ambas as turmas não tinham uma cultura de socialização e estavam um pouco resistentes a expor suas estratégias.

Os grupos que se basearam na ideia de que os números em vermelho são múltiplos de 3, conforme mostra o registro na Figura 3, a seguir, não encontraram problemas ao responder as questões propostas, e não houve a necessidade de mediação da professora.



**Figura 3** – Registro da tarefa 5

**Fonte:** Acervo do Grucomat

No entanto, os grupos que utilizavam como estratégia a divisão da posição desejada pela quantidade de elementos do motivo e analisavam o resto – como revela a Figura 4 – se equivocaram em suas respostas. Isso porque, como a sequência começa no 0, número e posição não coincidem, ou seja, o número 1 não ocupa a posição 1, o 2 não ocupa a posição 2 e assim sucessivamente. Nesse caso, a socialização foi fundamental para que percebessem que a estratégia adotada não foi válida.

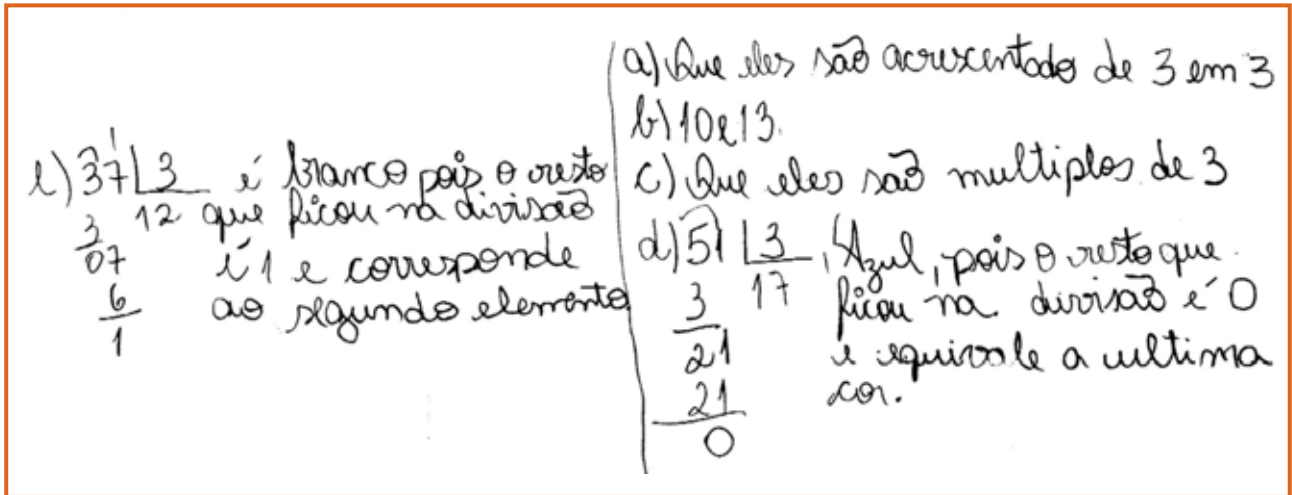


Figura 4 – Registro da tarefa 5

Fonte: Acervo do Grucomat

Já outros grupos, ao perceberem que a estratégia da divisão utilizada não levava ao resultado esperado, encontraram maneiras diferentes de resolver, sem abandonar a da divisão. Como mostram os dois registros a seguir, na Figura 5, um grupo optou por excluir o número 0 da tira e considerou o motivo como branco, azul e vermelho, ao invés de vermelho, branco e azul. O outro, entendendo que a posição do número na tira sempre representava uma unidade a mais que esse número, utilizou o sucessor da posição da questão proposta para efetuar a divisão. Em alguns casos a mediação da professora foi indispensável para que os alunos refletissem e chegassem a essas estratégias de resolução.



$$\begin{array}{r} 53 \overline{) 3} \\ 21 \cdot 37 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 3} \\ 07 \cdot 12 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53 \overline{) 3} \\ 3 \cdot 17 \\ \underline{23} \\ 23 \\ \underline{0} \end{array}$$

A - Aumento 3  
 B - 10 e 13  
 C - E ATABUADA DO 3  
 D - Vermelho  
 E - Branco

a) Eles estão aumentando de 3 em 3.  
 b) 10, 13. Continuamos a seguir.  
 c) Estão sendo multiplicados por 3.  
 d) Vermelho, ao invés de dividir 53 por 3, dividimos 52 por 3 para incluirmos o 0.  
 e) Branco, o mesmo raciocínio acima.

Figura 5 – Registro da tarefa 5

Fonte: Acervo do Grucomat

## 2.6 TAREFA: ELABORANDO UMA SEQUÊNCIA

Agora é sua vez! Crie uma tira com quatro cores.

Escreva as regularidades que você identifica na sequência de cores dos números.

### 📌 Notas para o professor:

- ✓ Ao final da criação, sugira aos alunos que troquem as tiras criadas, para que os colegas descubram a regularidade da sequência.

### 3 SEQUÊNCIA 3: SEQUÊNCIA DECRESCENTE

#### Justificativa:

Essa tarefa possibilita a exploração de uma sequência decrescente e finita, o estabelecimento de relações e a generalização.

#### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- reconhecer o motivo de uma sequência pela percepção de sua regularidade;
- generalizar o motivo de uma sequência;
- trabalhar com sequências decrescentes;
- diferenciar sequências finitas e infinitas.

#### Tempo estimado:

Duas aulas.

#### Material necessário:

Folha de tarefas.

### 3.1 TAREFA: SEQUÊNCIA DE PALITOS

Para construir a sequência de figuras seguinte, utilizamos palitos:

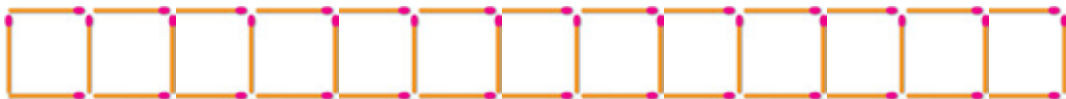
Figura 1:



Figura 2:



Figura 3:



- O que está acontecendo com a sequência apresentada?
- Continuando a sequência com a mesma regularidade, ela terá fim? Por que você chegou a tal conclusão?
- Quantos palitos serão necessários para construir a figura 4?
- Quantos palitos serão necessários para construir a 10ª figura? Explique como você pensou.
- Quantos palitos serão necessários para construir a 16ª figura? Explique como você pensou.
- Existe alguma relação entre a quantidade de palitos e o número da figura?
- Como você faria para descobrir a quantidade de palitos de cada figura, sem contar palito por palito?
- O que você pode concluir, comparando as sequências de cores e a sequência de palitos?

#### 📖 Notas para o professor:

- ✓ Para desenvolver o item h, você precisa ter trabalhado com a sequência 2 (sequência de cores)

### Respostas esperadas:

- a) A cada figura diminuem três palitos.
- b) Sim, pois vai chegar um momento em que restará apenas um palito, não sendo mais possível diminuir os três palitos.
- c) Serão necessários 37 palitos.
- d) Serão necessários 19 palitos. O aluno poderá continuar a sequência, diminuindo 3 a cada vez. Poderá também chegar à expressão  $P = 49 - 3n$ , em que P representa o número de palitos da figura e n representa o número da figura, não necessariamente com as mesmas variáveis. Ou ainda, poderá encontrar outras maneiras, as quais cabe ao professor analisar.
- e) Será necessário apenas um palito. Poderá chegar à resposta de acordo com quaisquer maneiras citadas na questão anterior.
- f)  $P = 49 - 3n$ , em que P representa o número de palitos da figura e n representa o número da figura.
- g) Multiplicaria a quantidade de quadrados formados pelos palitos por 3 e somaria 1, criaria uma lei de formação, entre outras respostas possíveis.
- h) Existem inúmeras respostas possíveis para a comparação realizada, como, por exemplo, que a sequência de cores é repetitiva e a dos palitos é decrescente, que a de cores é infinita e a dos palitos é finita etc.

### Vivência em sala de aula:

Os registros seguintes foram realizados por alunos do 3º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida em duas aulas com duas turmas de 30 alunos de uma escola pública. As salas estavam organizadas em grupos de 3, 4 ou 5 integrantes.

Durante a realização das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, propôs a socialização das respostas encontradas.

Os registros revelaram que, além da lei de formação esperada, os alunos também chegaram a outras, conforme mostram os excertos trazidos (Figuras 6 e 7). Em um dos registros, os alunos encontraram uma “fórmula” para calcular a quantidade de quadrados de uma posição qualquer na sequência e, em seguida, criaram outra para, a partir

da quantidade de quadrados, calcular a quantidade de palitos. Faltou apenas relacionar as duas “fórmulas” para criar uma única lei de formação em função do número da figura, que seria  $(16 - n) \cdot 3 + 1$  e equivalente a  $49 - 3n$ . A socialização é o momento em que o professor pode propor essa problematização.

f) A relação entre eles está na fórmula  $49 - 3 \cdot n$  ( $n =$  número da figura) obtendo o número de palitos. Exemplo: figura 4

$$49 - 3 \cdot 4 =$$

$$49 - 12 = 37 \text{ palitos}$$

g) Fazendo a seguinte fórmula  $16 - n$  ( $n =$  o número da figura). Após isso  $n \cdot 3 + 1$  ( $n =$  o resultado da primeira fórmula).

Ex: figura 5

$$16 - n$$

$$16 - 5 = 11 \text{ quadrados}$$

$$n \cdot 3 + 1 =$$

$$11 \cdot 3 + 1 =$$

$$33 + 1 = 34 \text{ palitos}$$

Também pode ser utilizado a fórmula da questão F.

Figura 6 – Registro da tarefa 1 – itens f e g

Fonte: Acervo do Grucomat

Outro grupo, relacionando a sequência dada a uma Progressão Aritmética decrescente, apresentou como resposta a fórmula para a determinação do termo geral de tal sequência (Figura 7).

g)  $a_n = 46 - 3 \cdot (n - 1)$

$a_n =$  localização do número na sequência

$n =$  o número da figura

Figura 7 – Registro da tarefa 1 – item g

Fonte: Acervo do Grucomat

## 4 SEQUÊNCIA 4: SALTOS EM LINHA RETA

### Justificativa:

As tarefas que compõem essa sequência permitem a generalização a partir da abordagem de progressões aritméticas.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- identificar regularidades;
- diferenciar distância percorrida e distância do ponto de partida;
- salientar o significado de equivalência do sinal de igual com base na reta;
- trabalhar a generalização a partir de progressões aritméticas.

### Tempo estimado:

Três aulas.

### Material necessário:

- tarefa ou desenho impressos;
- desenho com giz no chão ou na lousa.

## 4.1 TAREFA: O PULO DO SAPO

Um sapo pula sempre sobre uma linha reta. Todo dia ele avança 5m e recua 3m sobre a reta.

- Ao final de 15 dias, o sapo estará a que distância do ponto de partida? Explique como você pensou.
- Existe alguma regularidade na sequência formada pelas distâncias entre o sapo e o ponto de partida ao final de cada dia?
- Vocês conseguiriam descobrir a que distância ele estará do ponto de partida, ao final de qualquer quantidade de dias? Como?
- Ao final de 27 dias, quantos metros terá percorrido, no total, este sapo?
- Existe alguma regularidade na sequência formada pela quantidade de metros percorridos pelo sapo, no total, ao final de cada dia?
- Vocês conseguiriam descobrir quantos metros ele terá percorrido, no total, ao final de qualquer quantidade de dias? Como?

### Respostas esperadas:

- 30m, pois, se ele avança 5m e recua 3m todos os dias, ele estará se distanciando do ponto de partida 2m em cada dia e, em 15 dias, basta fazer 15 dias vezes 2m por dia = 30m.
- Sim.  
(2, 4, 6, 8, 10, ...). Ao final de cada dia ele estará 2m à frente em relação ao dia anterior.
- Sim. Basta multiplicar a quantidade de dias por 2, ou seja,  $d = 2n$ , sendo  $d$  a distância do ponto de partida e  $n$ , a quantidade de dias.
- 216m, pois ele avança 5m e recua 3m todos os dias, ele estará percorrendo diariamente uma distância de 8m e, em 27 dias, basta fazer 27 dias. Oito metros por dia = 216m.
- Sim.  
(8, 16, 24, 32, ...) Ao final de cada dia ela terá percorrido, no total, 8 metros a mais do que no dia anterior.

- f) Sim. Basta multiplicar a quantidade de dias por 8, ou seja,  $d + 8r$ , sendo  $d$  a distância percorrida no total por dia e  $n$ , a quantidade de dias.

### Vivência em sala de aula:

Os registros selecionados e indicados a seguir foram produzidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 30 alunos de uma escola pública e teve duração de duas aulas. As salas estavam organizadas em grupos de três ou quatro integrantes, e uma das alunas trabalhou sozinha, porque os demais componentes de seu grupo estavam ausentes.

Durante a realização das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, propôs a socialização das respostas encontradas.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, there is a multiplication problem:  $15 \times 5 = 75$ , with a subtraction of 3 from 75 to get 72. Below this, there are two rows of numbers (5 and 3) with brackets underneath, representing a sequence of days: 'seg, terça, quarta, quinta, sexta, sab, domingo'. To the right of these rows are calculations:  $35$ ,  $21$ ,  $14$ ,  $8+$ , and  $22$ . At the bottom, there are two more multiplication problems:  $15 \times 5 = 75$  and  $15 \times 3 = 45$ , followed by a subtraction:  $75 - 45 = 30$ .

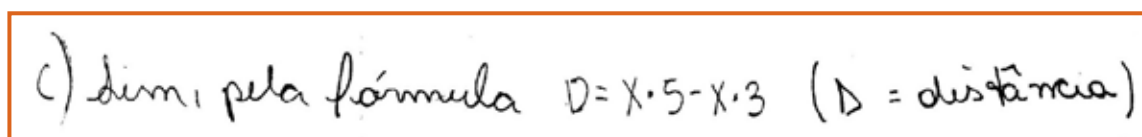
Figura 8 – Registro da tarefa 1

Fonte: Acervo do Grucomat



De acordo com os registros, destaca-se o caso da aluna que realizou a tarefa sozinha (conforme mostrado na Figura 8), cujo registro mostra todo o movimento do pensamento: desde a necessidade de quantificar o que acontecia com o sapo dia a dia, até a percepção do uso da multiplicação e da subtração como uma estratégia de resolução, levando à generalização necessária para a resolução dos demais itens da tarefa.

Além disso, outros alunos, que também consideraram que a distância entre o sapo e o ponto de partida era dada pelo total de dois momentos de forma separada – o avanço e o recuo –, não perceberam que a situação poderia ser traduzida simplesmente como um distanciamento em dois metros do ponto de partida a cada dia. Essa percepção não ocorreu nem no momento da criação de uma fórmula que permitisse a determinação da distância entre o sapo e o ponto de partida em qualquer quantidade de dias, como mostra o excerto do registro do grupo, aqui exposto na Figura 9. Na socialização o professor pode intervir para essa observação.



c) dim, pela fórmula  $D = X \cdot 5 - X \cdot 3$  ( $D = \text{distância}$ )

**Figura 9** – Registro da tarefa 1 – item c

**Fonte:** Acervo do Grucomat

A tarefa também foi desenvolvida com alunos do 8º ano de uma escola particular, que se reuniram em grupos de até quatro integrantes. Alguns grupos conseguiram responder à primeira questão, realizando os cálculos do total de avanços e do total de recuos e, então, subtraindo os resultados, conforme o exemplo a seguir, na Figura 10.

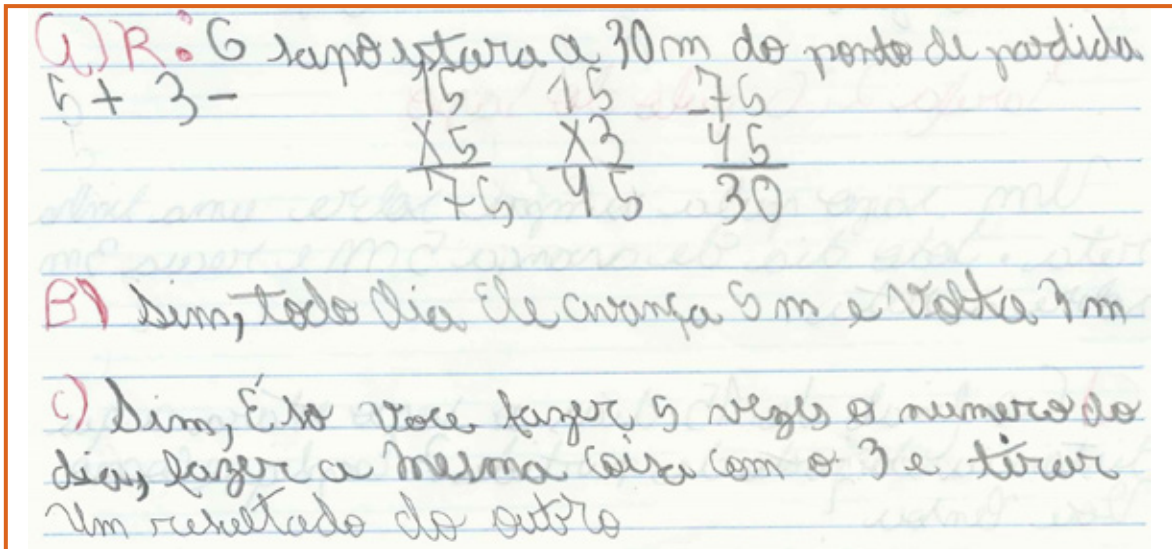


Figura 10 – Registro da tarefa 1 – itens a, b e c

Fonte: Acervo do Grucomat

O aluno tampouco foi capaz de escrever a generalização algébrica formal, embora a ideia da “fórmula” esteja presente na resposta dada por ele.

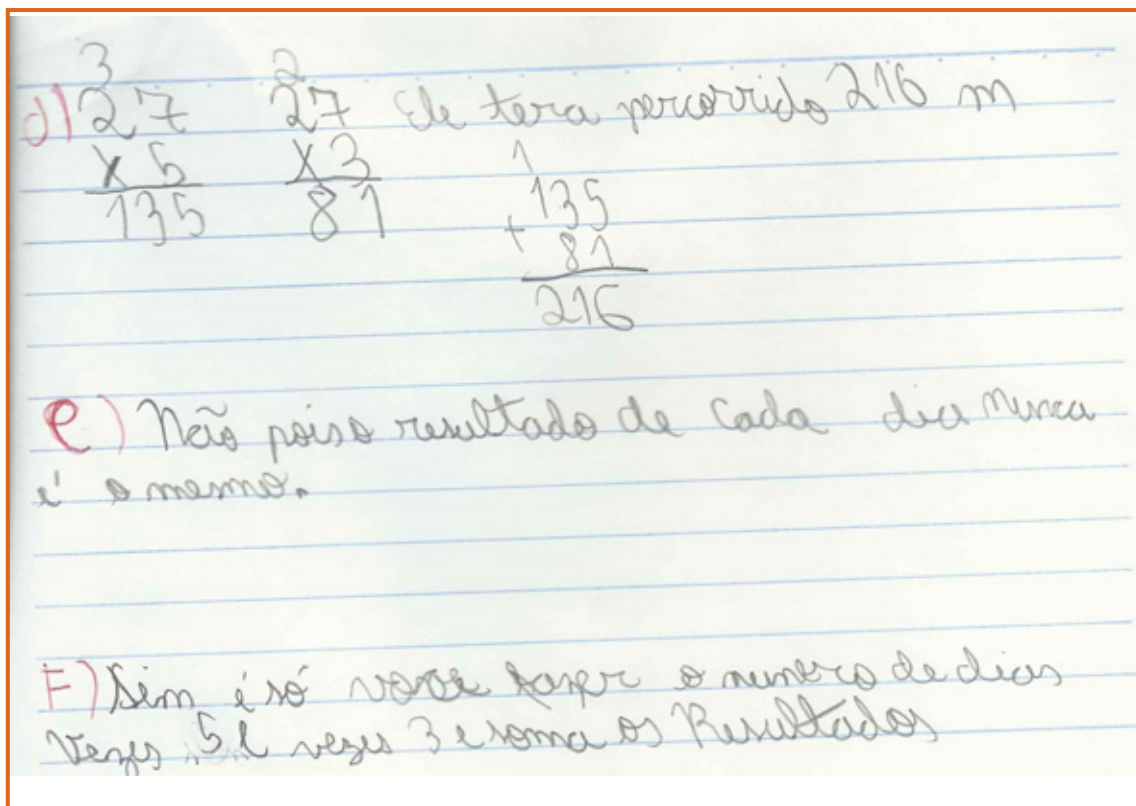


Figura 11 – Registro da tarefa 1 – itens d, e, f

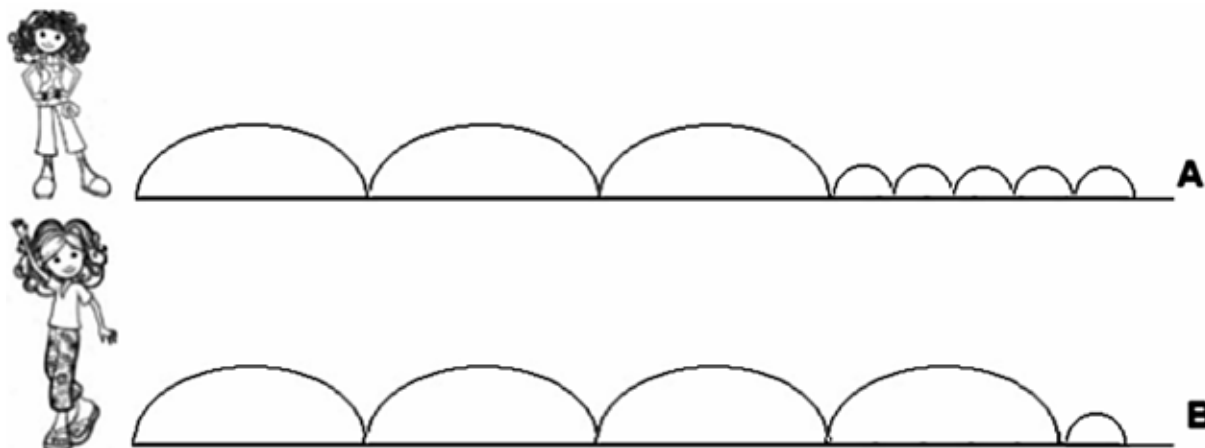
Fonte: Acervo do Grucomat

Na segunda parte houve confusão na interpretação, e muitos alunos não conseguiram distinguir o significado da expressão “distância do ponto de partida” de “distância percorrida”. Foi necessária a intervenção do professor, através de desenhos, para diferenciar os dois questionamentos. A partir daí, destacamos a resposta do mesmo aluno (Figura 11). Verificamos que ele usou a mesma estratégia do problema precedente, calculando separadamente o total de avanços e o total de recuos, mas agora somando esses valores para conseguir a distância percorrida.

A resposta do item “e” acabou surpreendendo. Apesar de o grupo demonstrar conhecimento de estratégias para calcular os valores solicitados nos itens “a” e “d”, utilizando a generalização da regra dessa sequência, a resposta foi que não havia regularidade em virtude dos diferentes resultados. Isso mostra que, possivelmente, o aluno não havia compreendido o significado de regularidade. Houve aí a mediação do professor, solicitando ao aluno que comparasse as duas situações e as respostas. O aluno refletiu e notou que, na verdade, para que haja regularidade, os valores não precisam necessariamente ser iguais.

## 4.2 TAREFA: SALTOS NA RETA<sup>3</sup>

Em uma atividade no espaço livre, a professora de matemática propôs aos seus alunos realizar dois tipos diferentes de percurso sobre uma linha: um constituído por saltos (todos com o mesmo comprimento) e outro por passos (também todos com o mesmo comprimento). Larissa fez o percurso A e Joana fez o percurso B. Sabendo que as linhas A e B têm o mesmo comprimento, a quantos passos corresponde todo o percurso?



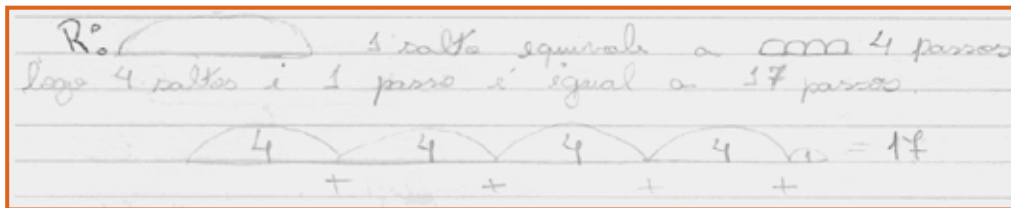
### Respostas esperadas:

Comparando os dois percursos, é possível perceber que o salto corresponde a 4 passos. Então, o percurso todo corresponde a 17 passos.

### Vivência em sala de aula:

Os registros a seguir foram produzidos por alunos de uma turma com 35 alunos de 8º ano do Ensino Fundamental da rede privada. Organizados em quartetos, foi solicitado a eles que discutissem em grupo e formalizassem uma resposta para o problema. No decorrer da tarefa, o professor circulou entre os grupos, interagindo e observando as hipóteses levantadas por eles. Discutiram bastante se a distância percorrida pelas duas teria sido a mesma, o que é uma conclusão-chave para a resolução. Analisando o registro (Figura 12), percebemos que os alunos validaram essa conclusão e chegaram à resposta esperada. A maioria dos grupos optou por uma representação simbólica muito semelhante ao desenho da figura.

3 Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

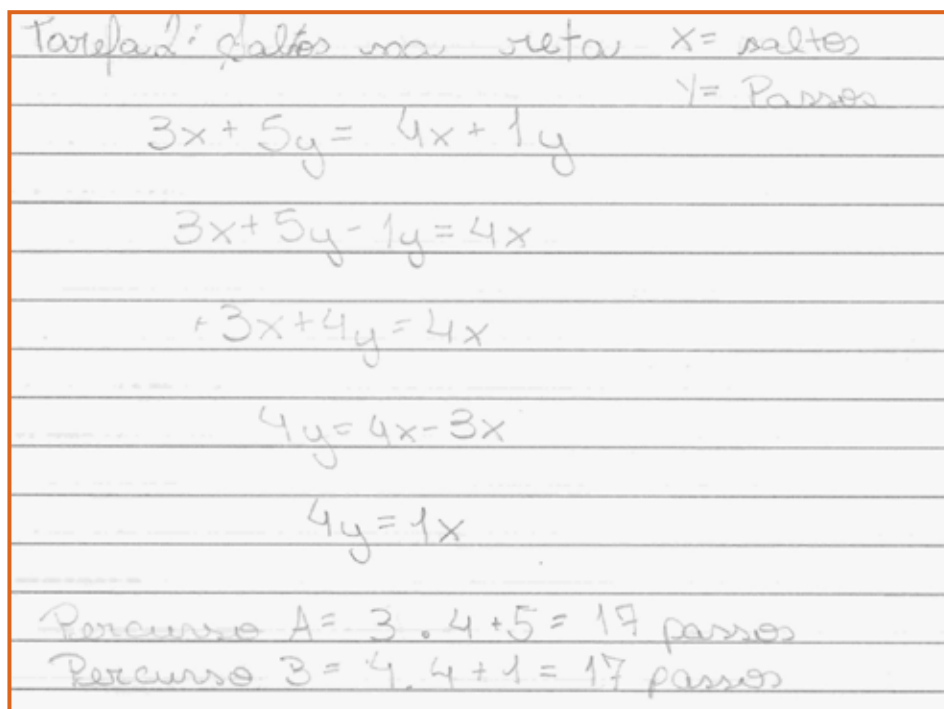


**Figura 12** – Registro da tarefa 2

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Alguns pontos deste registro merecem ser destacados: note que o grupo optou pela palavra “equivale”, ao comparar um salto e quatro passos, e isso pode ser uma deixa para o professor abordar o sinal de igual como um sinal de equivalência. Ainda observamos, nessa mesma resolução, que o grupo se utiliza da substituição do valor dos saltos pela quantidade equivalente em passos, chegando à resposta final.

Outro grupo optou por uma resolução utilizando uma notação algébrica (Figura 13).



**Figura 13** – Registro da tarefa 2

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Utilizando a equivalência entre o primeiro percurso e o segundo com as devidas quantidades de saltos e passos, o grupo trabalhou numa equação de duas variáveis para chegar à relação um salto para quatro passos.

## 5 SEQUÊNCIA 5: SEQUÊNCIAS FIGURATIVAS

### Justificativa:

Esta sequência de tarefas visa à exploração de sequências figurativas, ao estabelecimento de relações entre as figuras e suas posições na sequência e à generalização a partir de expressões algébricas, introduzindo o pensamento funcional.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- explorar o vocabulário específico da sequência (motivo, repetição, padrão...);
- identificar o motivo da sequência;
- diferenciar o que é motivo e o que é repetição dos elementos da sequência;
- estabelecer a razão entre o número de caras assustadas e o de caras alegres;
- trabalhar com expressões algébricas;
- introduzir o pensamento funcional;
- estabelecer a relação entre as variáveis de uma função.

### Tempo estimado:

De cinco a seis aulas.

### Material necessário:

- objetos de mesmo tamanho em forma de cubos;
- recursos para fotografar: câmera, celular ou *tablet*;
- impressora.

## 5.1 TAREFA: AS CARINHAS

Observe a sequência de carinhas a seguir:



- Indique qual é o motivo desta sequência
- Quantas vezes o motivo aparece na sequência?
- Como seria a 33ª carinha? Como você sabe disso?
- Como seria a 44ª carinha? Como você sabe disso?
- Quantas carinhas existem ao todo no motivo?
- Quantas carinhas assustadas existem no motivo?
- Quantas carinhas felizes existem no motivo?
- Se a sequência tivesse 100 carinhas, quantas seriam assustadas? E quantas seriam felizes?

**Respostas esperadas:**

- 1 assustada, 1 feliz, 1 assustada e 2 felizes.
- 3.
- Seria assustada, pois as carinhas que ocupam posições correspondentes a múltiplos de 5, mais 3, são assustadas. Ou, ao dividir 33 por 5, o resto é 3 e por isso a 33ª carinha corresponde à 3ª carinha do motivo.
- Seria feliz, pois as carinhas que ocupam posições correspondentes ao antecessor dos múltiplos de 5, são felizes. Ou, ao dividir 44 por 5, o resto é 4 e por isso a 44ª carinha corresponde a 4ª carinha do motivo.
- 5.
- 2.
- 3.
- Fazendo a divisão das 100 carinhas por 5 carinhas que compõem o motivo, obtêm-se 20 motivos. E 20 motivos multiplicados por 2 carinhas felizes resultam

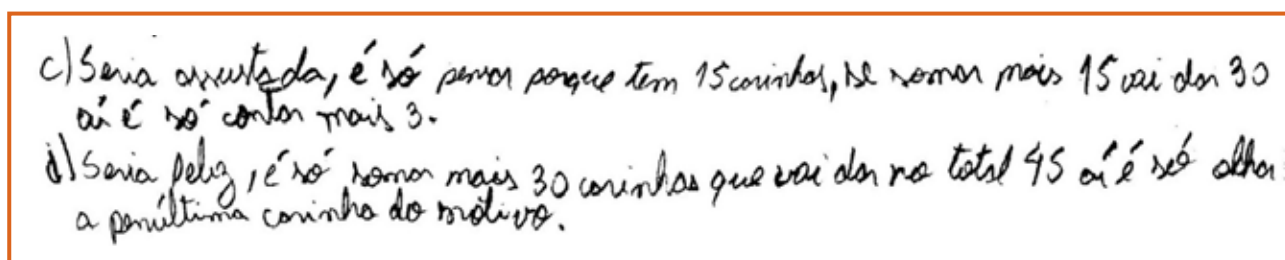
em 40 carinhas felizes. Da mesma forma, 20 motivos multiplicados por 3 carinhas assustadas resultam em 60 carinhas assustadas.

### Vivência em sala de aula:

Os registros subsequentes foram elaborados por duas turmas de 30 alunos em uma aula do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública. Os alunos foram organizados em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante o desenvolvimento das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos conforme a necessidade e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas.

A maioria dos grupos utilizou estratégias diferenciadas de contagem das carinhas para identificar aquelas correspondentes às posições contidas nas questões propostas. Entre elas está a apresentada no excerto do seguinte registro (Figura 14), em que o grupo se apoiou na imagem trazida na tarefa, contendo 15 carinhas e utilizando seus múltiplos.



c) Seria assustada, é só porque tem 15 carinhas, se somar mais 15 vai dar 30 aí é só contar mais 3.  
d) Seria feliz, é só somar mais 30 carinhas que vai dar no total 45 aí é só olhar a penúltima carinha do motivo.

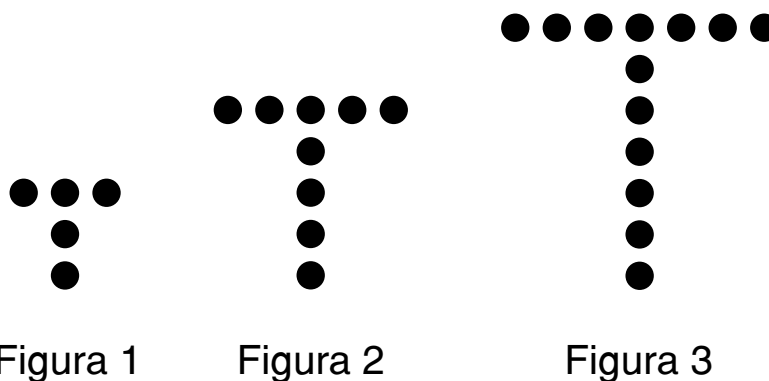
**Figura 14** – Registro da tarefa 1 – itens c e d

**Fonte:** Acervo do Grucomat



## 5.2 TAREFA: FIGURAS EM T

Observe a sequência de figuras em T



a) Complete a tabela a partir da sequência de figuras T.

Figura	1	2	3	4	5	6
Quantidade de pontos						

- b) Existe alguma relação entre a quantidade de pontos de duas figuras consecutivas na sequência? Justifique.
- c) Como você faria para descobrir a quantidade de pontos da figura 16, sem utilizar o desenho? Registre como você pensou.
- d) Como você faria para descobrir a quantidade de pontos da centésima figura?

## Respostas esperadas:

a)

Figura	1	2	3	4	5	6
Quantidade de pontos	5	9	13	17	21	25

- b) A diferença entre a quantidade de bolinhas de duas figuras consecutivas é sempre igual a 4.
- c)  $Q = 4 \cdot N + 1$ , sendo Q a quantidade de bolinhas e N o número da figura. Então,  $Q = 4 \cdot 16 + 1 = 65$ .
- d)  $Q = 4 \cdot 100 + 1 = 401$ .

## Vivência em sala de aula:

Os próximos registros foram produzidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 30 alunos – organizados em grupos de três, quatro ou cinco integrantes – de uma escola pública e teve duração de uma aula.

Durante a realização das tarefas, a professora promoveu mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, ocorreu a socialização das respostas encontradas.

Chamou a atenção a resposta de um grupo que, depois de desenhar as figuras que representavam os próximos termos da sequência para a percepção de regularidades e de concluir que se tratava de uma Progressão Aritmética (P.A.), registrou três diferentes estratégias para determinar a quantidade de pontos de uma figura qualquer, conforme os excertos a seguir.

A primeira fórmula indicada, segundo era esperado, refere-se à observação de que a quantidade de pontos será sempre igual ao quádruplo do número da figura somado a um; a segunda decorre da identificação de que a sequência era uma P. A.; já na terceira, o grupo utilizou a decomposição do número da figura em unidades e dezenas exatas, multiplicou ambos por 4, acrescentou 1 às unidades e somou os resultados (Figura 15).

Diante dessa situação, é importante que na socialização seja possibilitado aos alunos o reconhecimento de que todas as estratégias são equivalentes e de que todas são válidas.

Observe na, Figura 15, que o grupo chegou em 3 fórmulas diferentes, para o item “c”, e testou a validade da 3ª fórmula para diferentes números. Por exemplo, para o cálculo da 68ª figura, os alunos decompueram 26 em  $(20 + 6)$ ; multiplicaram cada uma das parcelas por 4 e acrescentaram 1 apenas no produto da parcela (6) da unidade por 4. Provavelmente, ao não encontrar as palavras adequadas para explicar a decomposição, eles utilizaram as expressões ‘sobe’ (o cálculo feito acima do 6) e ‘desce’ (para o cálculo abaixo do 2), deixando o número 26 no meio dos dois cálculos.

(5, 9, 13, 17, 21, 25)

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{16} = 5 + (16-1) \cdot 4$$

$$a_{16} = 5 + 15 \cdot 4$$

$$a_{16} = 5 + 60$$

$$a_{16} = 65$$


---

65

$$6 \cdot 4 + 1 = 25$$

$$20 \cdot 4 = 80$$

$$9 \cdot 4 + 1 = 37$$

$$50 \cdot 4 = 200$$


---

1º fórmula

$$4 \times n + 1 = Q_p$$


---

2º fórmula

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$$

Deixe o dezena (d.4)

---

3º fórmula

Figura 15 – Registro da tarefa 2

Fonte: Acervo do Grucomat

## 5.2 TAREFA: SEQUÊNCIA DE PONTOS

Observe a sequência de pontos a seguir:

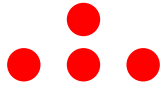


Figura 1

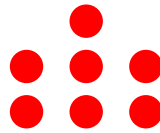


Figura 2

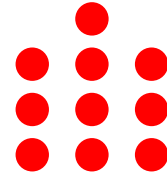


Figura 3

- Qual seria a quantidade de pontos da figura 54?
- Qual seria a relação entre a quantidade de pontos e o número da figura?

Respostas esperadas:

- $Q = 3 \cdot N + 1$ , sendo  $Q$  a quantidade de pontos e  $N$  o número da figura. Então,  $3 \cdot 54 + 1 = 163$ .
- A quantidade de pontos é igual ao triplo do número da figura e somado com 1.

Vivência em sala de aula:

Os registros aqui destacados foram elaborados por alunos de duas turmas de 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A tarefa teve duração de uma aula, com as salas organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes, nos quais a professora realizou mediações, conforme a necessidade, e, após o término, os alunos socializaram as respostas encontradas.

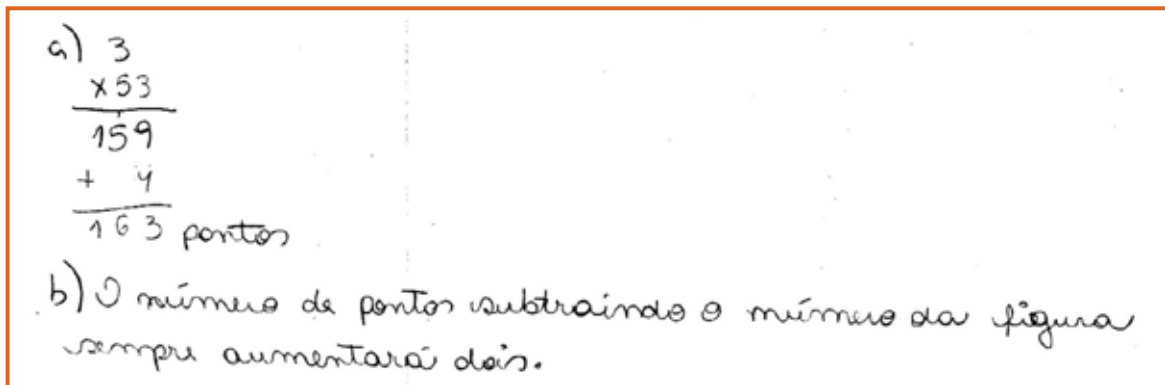


Figura 16 – Registro da tarefa 3 – itens a, b

Fonte: Acervo do Grucomat

Entre os registros produzidos pelos grupos, alguns utilizaram como estratégia, implicitamente, a fórmula do termo geral da Progressão Aritmética – a multiplicação da razão pelo número do termo, procurando menos um, e a soma com o primeiro termo (sem o registro simbólico da fórmula). No entanto, no momento de dizer qual seria a relação entre o número da figura e a quantidade de pontos, nem todos se basearam em tal raciocínio e estabeleceram outras relações, como mostrou o registro na Figura 16.

Embora a resposta ao item b desse grupo não corresponda ao que foi solicitado, consideramos interessante analisar o raciocínio. Numericamente, eles estabeleceram as seguintes relações:

Figura 1:  $4 - 1 = 3$  (total de pontos menos o número da figura)

Figura 2:  $7 - 2 = 5$  (idem)

Figura 3:  $10 - 3 = 7$  (idem)

Observando as três diferenças, fica claro que elas vão aumentando de 2 em 2.

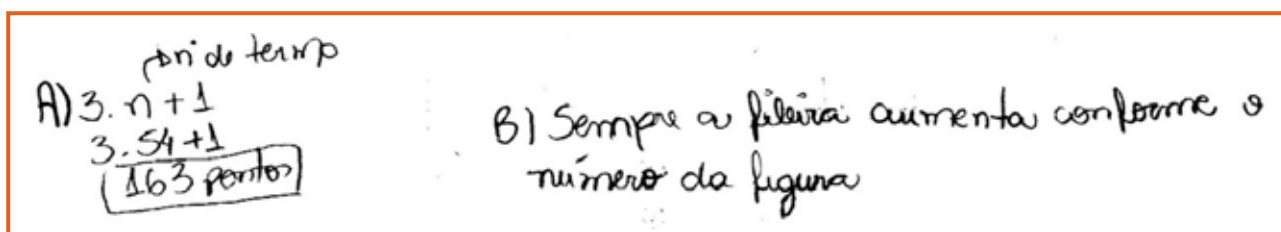
Uma resposta como essa, sem dúvida, exige que o professor solicite ao grupo que explique oralmente como foi o raciocínio utilizado. Visando ampliar o pensamento algébrico, o professor poderá validar esse raciocínio simbolicamente. Vamos considerar a figura  $n$  e a sua antecessora ( $n - 1$ ):

Figura  $n$ :  $3n + 1 - n = 2n + 1$

Figura ( $n - 1$ ):  $3(n - 1) + 1 - (n - 1) = 2n - 1$

Fazendo a diferença entre elas:  $(2n + 1) - (2n - 1) = 2$

Outros grupos tiveram uma percepção geométrica da sequência. Embora no registro isso não esteja claro, na socialização o grupo explicou que o número de fileiras de três pontos sempre será igual ao número da figura, e depois basta somar com um, condzendo com a lei de formação explicitada ( $3n + 1$ ). Veja a Figura 17.



**Figura 17** – Registro tarefa 3 – itens a,b

**Fonte:** Acervo do Grucomat

### 5.3 TAREFA: OS MUROS

Utilizando cubos, são construídos muros, conforme a sequência de figuras a seguir:

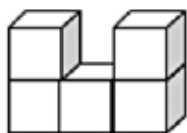


Figura 1

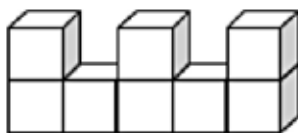


Figura 2

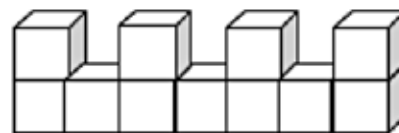


Figura 3

Respeitando o motivo da sequência dessas figuras, responda às seguintes questões:

- Qual seria a quantidade de pontas do muro representado pela Figura 12?
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de pontas do muro que ela representa? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de pontas do muro representado pela Figura N?
- Qual seria o número de cubos necessários para construir um muro de 10 pontas?
- Há alguma relação entre o número de pontas de cada muro e a quantidade de cubos necessários para sua construção? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção de um muro com n pontas?
- Qual seria a quantidade de cubos necessários para a construção do muro representado pela Figura 16?
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de cubos necessários para a construção do muro que ela representa? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de cubos necessários para a construção do muro representado pela Figura N?
- A partir do material fornecido, crie uma nova sequência, com no mínimo quatro muros. Em seguida, fotografe a sequência e registre seu motivo. Desafie outro grupo a descobrir qual o próximo muro.

**📌 Notas para o professor:**

Oriente os alunos a registrarem, por escrito, como descobriram qual o próximo muro.

**Respostas esperadas:**

- a) Vinte e nove cubos.
- b) Sim.

Nº de Pontas	Quantidade de Cubos
2	5
3	8
4	11
5	14

O dobro do número de pontas mais a quantidade de pontas menos 1 é igual à quantidade de cubos.

- c) Sim.  
Se  $a_n = 2n + (n - 1)$ , então,  $a_n = 3n - 1$ , em que  $a_n$  é a quantidade de cubos e  $n$  é a quantidade de pontas.
- d) 13 pontas.
- e) Sim.

Nº da Figura	Quantidade de Pontas
1	2
2	3
3	4
4	5

O número de pontas é sempre uma unidade a mais que o número da Figura.

- f) Sim.  $a_N = N + 1$ , em que  $a_N$  é a quantidade de pontas e  $N$ , o número da Figura.
- g) 50 cubos.
- h) Sim.

Nº da Figura	Quantidade de Cubos
1	5
2	8
3	11
4	14

A quantidade de cubos é sempre o triplo do número da figura, somado com 2.

- i) Sim.  $a_N = 3N + 2$ , em que  $a_N$  é a quantidade de cubos e  $N$  é o número da Figura ou, utilizando a fórmula da PA:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$$a_N = 5 + (N - 1) \cdot 3$$

$$a_N = 5 + 3N - 3$$

$$a_N = 3N + 2$$

- j) O professor deve analisar se as sequências criadas seguem o que foi proposto e se as respostas dadas atendem às suas regularidades.

### Vivência em sala de aula:

Os registros a seguir foram realizados por alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 30 alunos e teve duração de quatro aulas. As salas estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante o desenvolvimento das tarefas a professora realizou mediações nos grupos conforme a necessidade e, após o término, houve a socialização das respostas dos alunos.

No momento de socialização da questão “c”, nem todos os grupos responderam exatamente o que a questão pedia. A professora notou que alguns haviam criado uma lei de formação que relacionava as três variáveis envolvidas na tarefa: quantidade de pontas do muro, número da figura e total de cubos do muro. No registro da Figura 18, um dos grupos percebeu que o dobro do número de pontas do muro ( $n$ ) somado ao número da figura ( $f$ ) que o representa, corresponde ao total de cubos desse muro. Para validar a referida relação, fizeram os cálculos com as figuras 1, 2 e 3.



Figura 18 – Registro da tarefa 4 – item c

Fonte: Acervo do Grucomat

Os integrantes de outro grupo também encontraram essa relação (Figura 19), indicando que o resultado (l) podia ser determinado pela soma do número de pontas (n), multiplicada por 2, e do número da figura (m), multiplicado por 1.

Figura 19 – Registro da tarefa 19 – item c

Fonte: Acervo do Grucomat

Além disso, ainda houve outro grupo que, já na questão “b”, indicou uma relação existente entre as três variáveis, a qual foi repetida na questão “c”. Nesse registro (Figura 20), o grupo explicita a relação existente entre as variáveis, indica a lei de formação referente, detalhando cada uma de tais variáveis.

Figura 20 – Registro da tarefa 4 – item b

Fonte: Acervo do Grucomat

Todos os grupos em questão justificaram a relação apresentada algebricamente devido à disposição dos cubos na construção dos muros, conforme mostra um dos registros, trazido a seguir (Figura 21):

Na imagem está claro, pelas demarcações deixadas, que o dobro da quantia de pontas, somadas ao número da figura, o qual correspondia aos cubos que separavam uma ponta da outra, resultavam no total de cubos do muro representado naquela figura.

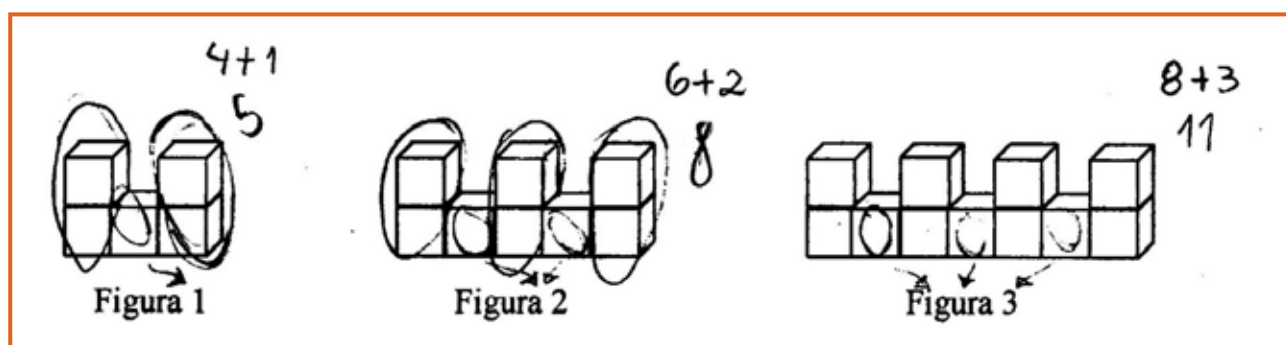


Figura 21 – Registro da tarefa 4

Fonte: Acervo do Grucomat

Diante dessas constatações, a professora procurou levar os alunos à percepção de que, embora esse não fosse o objetivo da questão, haviam estabelecido relações significativas e pertinentes, que evidenciaram a mobilização do pensamento algébrico.

## 5.5 TAREFA: CONSTRUINDO FRISA<sup>4</sup>

Utilizando quadrados cinzentos, são construídas frisas, conforme a sequência aqui exposta:

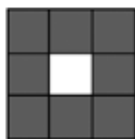


Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

Respeitando o motivo da sequência de figuras acima, responda às seguintes questões:

- Qual seria a quantidade de quadrados cinzentos do muro representado pela Figura 12?
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados brancos que ela representa? Justifique.
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados cinzentos que ela representa? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de quadrados cinzentos representado pela Figura N?

**Respostas esperadas:**

- 63.
- Sim. A quantidade de quadrados brancos da figura corresponde ao seu número.
- Sim. A quantidade de quadrados cinzentos da figura corresponde ao quádruplo do seu número, adicionado a 3.
- Sim,  $5N + 3$ , sendo N o número da Figura.

**Vivência em sala de aula:**

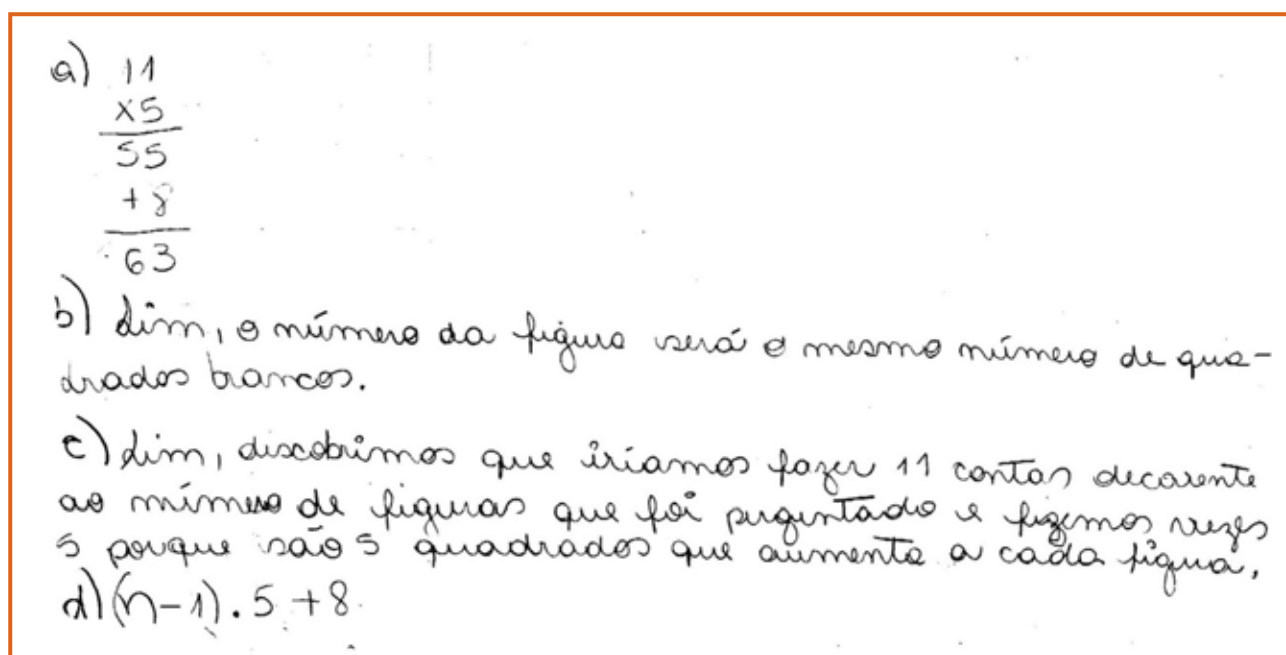
Os registros apresentados nas Figuras 22, 23 e 24 foram produzidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com os quais a tarefa foi desenvolvida. As duas turmas eram compostas por 30 alunos cada, e a proposta foi realizada em duas

4 Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

aulas. Os alunos foram organizados em grupos de três ou quatro integrantes, e um dos alunos quis fazer a tarefa sozinho.

Durante o desenvolvimento das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos conforme a necessidade e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas.

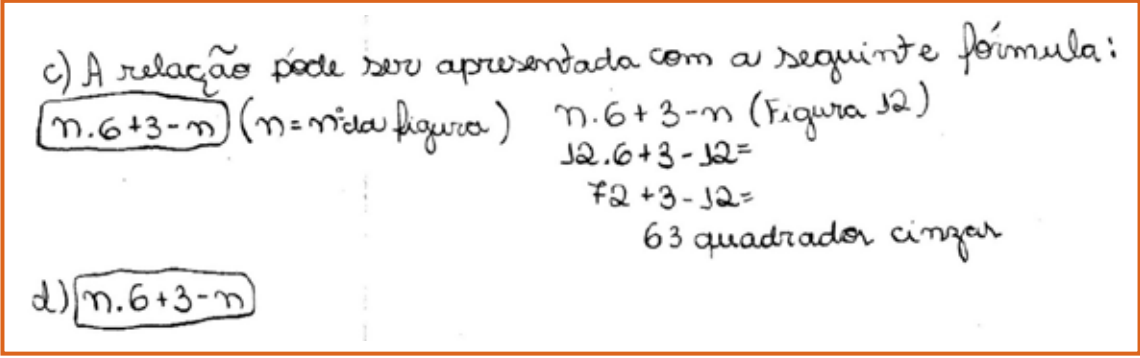
Com base na observação dos registros, evidenciamos a utilização de diferentes estratégias de resolução: um dos grupos utilizou o raciocínio da determinação da fórmula do termo geral da Progressão Aritmética para responder às questões propostas.



**Figura 22** – Registro da tarefa 5 – itens a, b, c, d

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Outro grupo chegou a uma fórmula, estabelecendo uma relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados que a compõem. Segundo seus integrantes, ao observar a primeira figura, perceberam que, quando multiplicaram seu número por seis, obtiveram a quantidade de quadrados da primeira e da terceira fileiras e, como entre elas havia três quadrados, dos quais um era branco, somaram três e subtraíram o número da figura. Aplicando a fórmula encontrada às outras figuras da sequência, perceberam que era válida.



c) A relação pode ser apresentada com a seguinte fórmula:

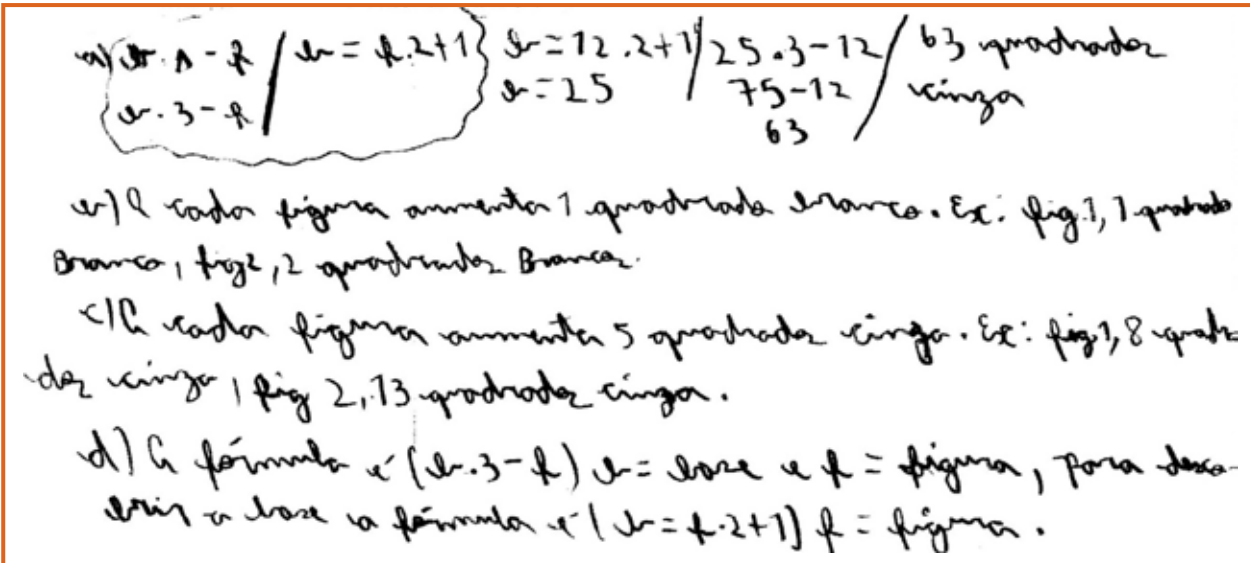
$$n \cdot 6 + 3 - n \quad (n = \text{n}^\circ \text{ da figura})$$
$$12 \cdot 6 + 3 - 12 =$$
$$72 + 3 - 12 =$$
$$63 \text{ quadrados cinza}$$

d)  $n \cdot 6 + 3 - n$

Figura 23 – Registro da tarefa 5 – itens c, d

Fonte: Acervo do Grucomat

A terceira estratégia que chamou a atenção foi a utilizada pelo aluno que quis fazer a tarefa sozinho. Para chegar a uma fórmula, fez uma interpretação geométrica da sequência. Primeiramente considerou cada quadrado que compõe a figura como um quadrado de lados medindo uma unidade; e estabeleceu uma fórmula para o cálculo da área ocupada pelos quadrados cinzentos da figura: multiplicou a base do retângulo pela sua altura e diminuiu o número da figura, que correspondia à quantidade de quadrados brancos. Nessa fórmula, a altura dos retângulos foi substituída por 3, porque todos os retângulos da sequência tinham três quadrados de altura. Depois, determinou uma fórmula para o cálculo da base, em função do número da figura, sendo que a base de cada retângulo correspondia ao dobro do número da figura somado a 1.



a)  $\left. \begin{array}{l} \text{a) } b = n \cdot 2 + 1 \\ c = 3 - n \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = 12 \cdot 2 + 1 \\ b = 25 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 25 \cdot 3 - 12 \\ 75 - 12 \\ 63 \end{array} \right| \begin{array}{l} 63 \text{ quadrados} \\ \text{cinza} \end{array}$

b)  $\left. \begin{array}{l} \text{c) } \text{Cada figura aumenta 1 quadrado branco. Ex: fig 1, 1 quadrado branco, fig 2, 2 quadrados brancos.} \\ \text{d) } \text{Cada figura aumenta 5 quadrados cinza. Ex: fig 1, 8 quadrados cinza, fig 2, 13 quadrados cinza.} \end{array} \right\}$

d)  $\left. \begin{array}{l} \text{A fórmula é } (c \cdot 3 - n) \text{ } c = \text{lado e } n = \text{figura, para descobrir a base a fórmula é } (b = n \cdot 2 + 1) \text{ } n = \text{figura.} \end{array} \right\}$

Figura 24 – Registro da tarefa 5

Fonte: Acervo do Grucomat

Faltou relacionar as duas fórmulas, para determinar uma única que representasse todo o pensamento utilizado  $[(f \cdot 2 + 1) \cdot 3 - f]$ , mas a socialização possibilitou essa constatação e, também, a de que as demais fórmulas encontradas e trazidas nesses registros eram equivalentes.

A análise dos registros produzidos pelos alunos suscitou-nos a seguinte observação: como nas orientações sempre foi solicitado que eles registrassem como tinham pensado, identificamos que os registros atendem a essa solicitação (ao pé da letra) e, na maioria das vezes, eles trabalharam com a expressão, sem fazer a redução dos termos semelhantes. Isso evidencia a importância dos momentos de socialização, em que o professor ajuda na simplificação das diferentes expressões criadas pelos alunos, mostrando a equivalência entre elas. Por outro lado, o professor poderá instigar os alunos a mostrar algebricamente que todas as expressões elaboradas são equivalentes.

## 5.6 TAREFA: CONSTRUÇÃO COM CUBOS<sup>5</sup>

Utilizando quadrados cinzentos, são construídas frisas, conforme a sequência aqui exposta:

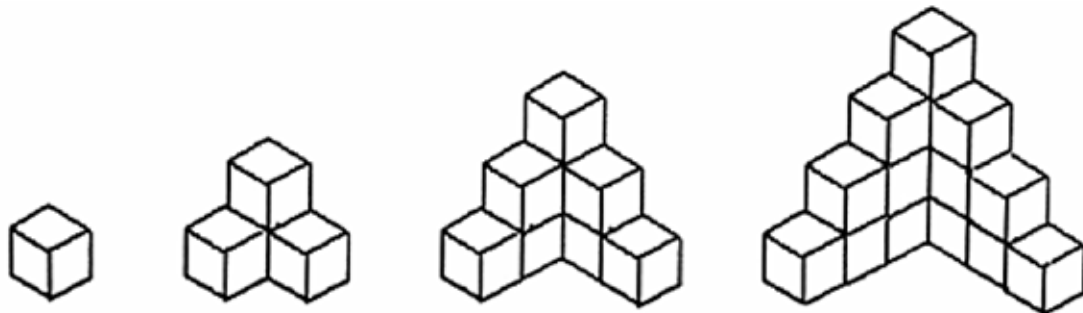


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Respeitando o motivo da sequência de figuras acima, responda às seguintes questões:

- Qual seria a quantidade de quadrados cinzentos do muro representado pela Figura 12?
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados brancos que ela representa? Justifique.
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados cinzentos que ela representa? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade de quadrados cinzentos representado pela Figura N?

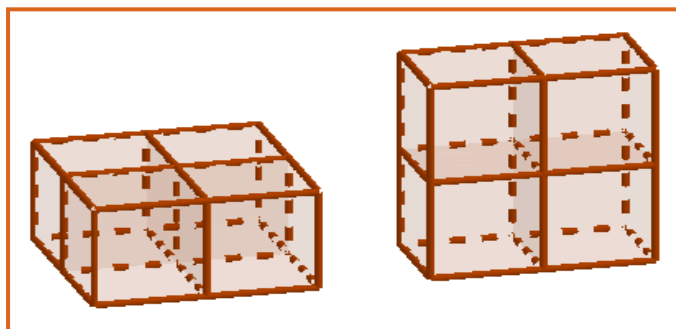
### 📖 Notas para o professor:

- ✓ Se necessário, oriente os alunos que alguns cubos não são visíveis na representação de papel.
- ✓ Para a realização desta tarefa com alunos mais novos, poderá ser oferecido o material dourado para a construção, a manipulação e a contagem de cubinhos de cada Figura.

5 Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

### Respostas esperadas:

- a) 144 cubos.
- b) Sim. Há diferentes formas de reorganizar os cubos; no entanto, no comando fica explícito que os paralelepípedos devem manter uma regularidade. A expectativa é de que uma das dimensões desses paralelepípedos seja 1. Por exemplo, a Figura 25:



**Figura 25** – Possíveis formas de organização dos cubos

**Fonte:** Acervo do Grucomat

- c) A quantidade de cubos que compõem a figura é sempre igual ao quadrado do número dessa figura.
- d) Sim,  $N^2$ , sendo  $N$  o número da figura.

### Vivência em sala de aula:

Os registros apresentados a seguir foram elaborados por duas turmas de 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A tarefa teve duração de duas aulas, com grupos de três ou quatro integrantes, e uma das alunas quis realizar a tarefa individualmente.

A professora acompanhou as tarefas, fazendo mediações nos grupos conforme a necessidade e, após o término, promoveu a socialização das respostas encontradas.

A maioria dos grupos percebeu que a quantidade de cubos da figura correspondia sempre ao quadrado do seu número. No entanto, alguns precisaram utilizar algumas estratégias de contagem e percepção de regularidades, até chegar a essa constatação, conforme trazido nos registros.

Um deles percebeu inicialmente que a quantidade de cubos sempre aumentava duas



unidades em relação à quantidade que havia aumentado na figura anterior e, com isso, fez a enumeração das quantidades de cubos de cada figura da sequência, até chegar à figura pretendida. Contudo, no final, ao necessitarem encontrar uma expressão matemática que permitisse calcular a quantidade de cubos de uma figura qualquer, perceberam que bastava fazer a multiplicação do número da figura por esse mesmo número (Figura 26).

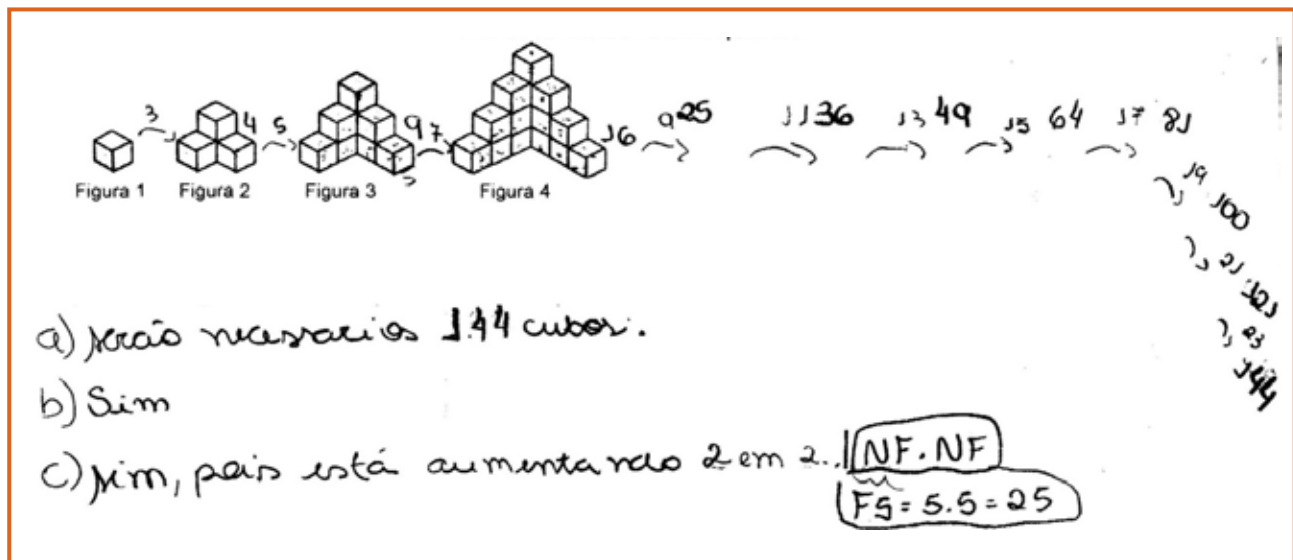


Figura 26 – Registro da tarefa 6 – itens a, b, c

Fonte: Acervo do Grucomat

A aluna que realizou a tarefa individualmente, observando a organização existente em cada uma das pilhas de cubos desenhados na sequência, notou que a coluna central continha a quantidade de cubos correspondente ao número da figura e, tanto do seu lado direito quanto esquerdo, estavam dispostas colunas sempre com uma unidade a menos que a quantidade de cubos da coluna anterior. Assim, somou essas quantidades e encontrou o total de cubos da figura pretendida (Figura 27).

Nesse caso, mesmo ao final da tarefa, a aluna não conseguiu chegar a uma generalização que possibilitasse a criação de uma expressão matemática para a determinação de uma figura qualquer da sequência.

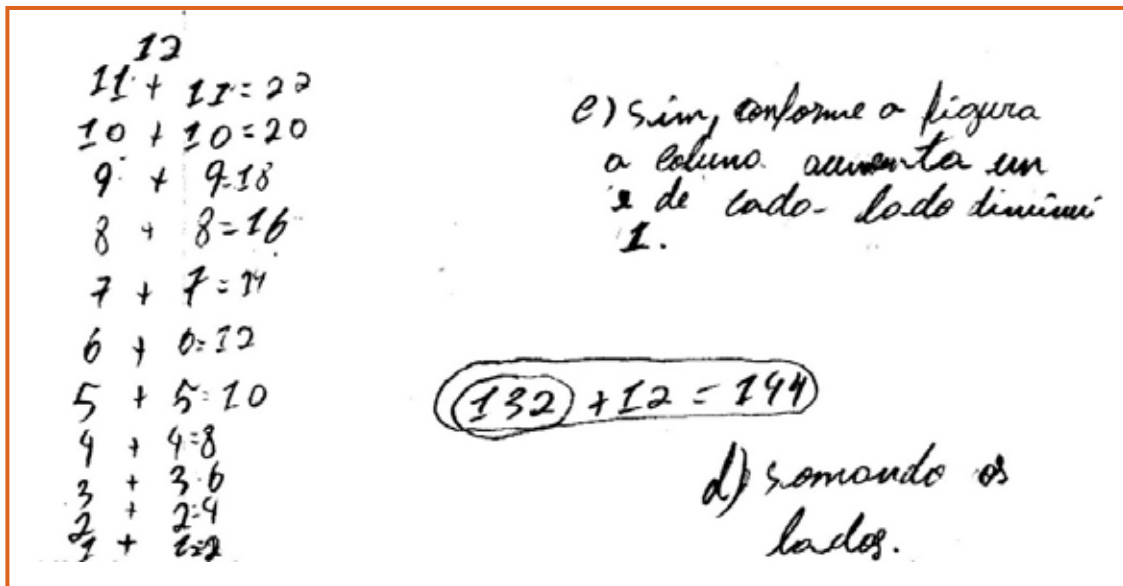


Figura 27 – Registro da tarefa 6 – itens e, d

Fonte: Acervo do Grucomat

Analisando o raciocínio dessa aluna, concluímos que uma possibilidade de generalizá-lo seria trabalhar com a soma dos termos de uma PA, visto que os cubos que ocupam as posições laterais em relação à coluna central vão crescendo com razão 1. Se considerarmos a figura N, ela terá n cubos na coluna central; as colunas laterais terão, respectivamente, em ordem crescente, 1, 2, 3, ..., N - 1 cubos. São, portanto, duas PA. Fazendo a fórmula da soma dos termos da PA, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot r}{2} \text{ onde } a_1 = 1 \text{ } a_n = N - 1 \text{ e } n = N - 1$$

$$S_n = \frac{(1 + N - 1) \cdot (N - 1)}{2} = \frac{N^2 - N}{2}$$

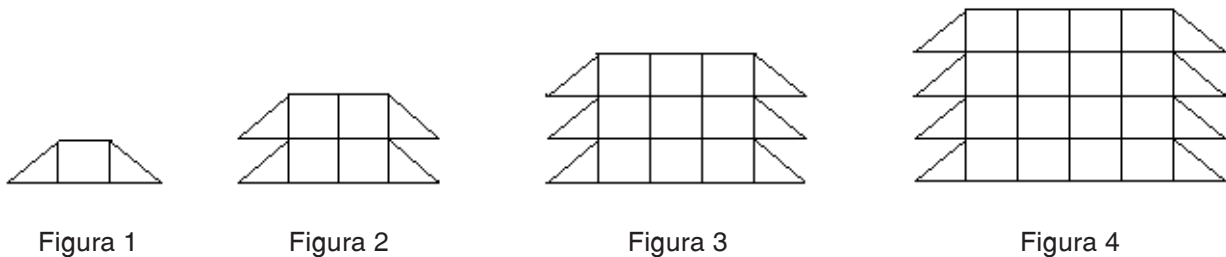
Multiplicando por 2 (são duas PA) e somando N (total de cubos da coluna central), obtemos a soma total:

$$S_T = 2 \cdot S_n + N$$

$$S_T = 2 \cdot \frac{N^2 - N}{2} + N = N^2$$

## 5.7 TAREFA: SEQUÊNCIA DE QUADRADOS E TRIÂNGULOS<sup>6</sup>

Observe a sequência seguinte, em que cada figura é construída com quadrados e triângulos:



Respeitando o motivo da sequência de figuras acima, responda às seguintes questões:

- Qual seria a quantidade de quadrados utilizados para construir a Figura 12? E a de triângulos?
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de peças quadradas? Justifique.
- Há alguma relação entre o número da figura e a quantidade de peças triangulares? Justifique.
- Vocês conseguiriam criar uma expressão matemática para calcular a quantidade total de peças que formam uma figura N?

**Respostas esperadas:**

- 144 quadrados e 24 triângulos.
- Sim, pois a quantidade de peças quadradas corresponde ao quadrado do número da figura.
- Sim, pois a quantidade de peças triangulares corresponde ao dobro do número da figura.
- Sim. Seria  $N^2 + 2N$ , sendo N o número da Figura.

6 Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

**Vivência em sala de aula:**

Os registros da Figura 28 foram produzidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, em uma tarefa desenvolvida em duas aulas com duas turmas de 30 alunos cada. As salas estavam organizadas em grupos de três ou quatro integrantes, e uma das alunas quis realizar a tarefa individualmente.

Durante o desenvolvimento das tarefas, a professora mediu o trabalho nos grupos conforme a necessidade e, após o término, coordenou a socialização das respostas encontradas.

A aluna que realizou a tarefa individualmente necessitou recorrer ao desenho da figura solicitada na questão a partir da análise que fez da composição das figuras da sequência. Nesse desenho, iniciou a contagem dos quadrados um a um e, após se confundir, abandonou a estratégia (observe que parte do quadro foi apagada) e percebeu que, como sabia quantas linhas e quantas colunas de quadrados havia, bastava fazer a multiplicação. Desse modo, também notou que a quantidade de triângulos podia ser obtida pela multiplicação do número de colunas por dois.

Nesse caso, apesar de não ter conseguido criar uma expressão matemática para o cálculo da quantidade de quadrados e triângulos de uma figura qualquer, a aluna chegou a uma generalização, como explicitado no registro trazido na Figura 28, nos itens b, c.

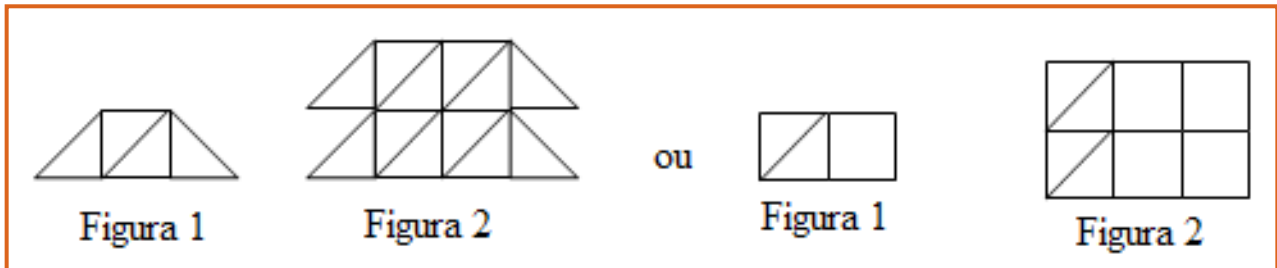
The image shows a student's handwritten work on a grid. The grid contains numbers from 1 to 12 in the first column, and continues with 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 in the second column, and so on. To the left of the grid, there are handwritten notes: 'b) sim, multiplicando a quantidade dele mesmo.' and 'c) sim, multiplicando por 2 a coluna de triângulos'. To the right, there are calculations: 'a) quadrados' with a multiplication  $12 \times 12 = 144$ , and 'triângulos' with a multiplication  $12 \times 2 = 24$ . Below the grid, there is another note: 'd) multiplicando.'.

**Figura 28 – Registro da tarefa 7**

Fonte: Acervo do Grucomat

**📖 Notas para o professor:**

A esta sequência podem ser associadas diversas estratégias de resolução, gerando outras sequências. Por exemplo, os alunos podem unir dois triângulos, formando um quadrado ou dividindo cada quadrado em dois triângulos, como na Figura 29.



**Figura 29** – Exemplos de organização dos polígonos

**Fonte:** Acervo do Grucomat

## 6 SEQUÊNCIA 6: SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS<sup>7</sup>

### Justificativa:

Essas tarefas permitem a exploração de sequências numéricas, de progressões aritméticas ou geométricas e de expressões algébricas ou leis de formação que as representem.

### Objetivos:

- escrever sequências numéricas a partir da expressão dada;
- identificar a diferença existente entre a composição da sequência quando  $n$  começar em 0 ou 1;
- estabelecer diferenças entre a composição de diferentes sequências, de acordo com a lei de formação e a regularidade existente;
- desenvolver o pensamento funcional.

### Tempo estimado:

Seis aulas.

### Material necessário:

Folha de tarefas.

---

7 As tarefas de 6.1 à 6.6 foram adaptadas de Ponte, Branco e Matos (2009).

## 6.1 TAREFA: CONSTRUINDO SEQUÊNCIAS

Uma sequência pode ser descrita através de uma expressão em função de  $n$ . Variando o valor de  $n$ , é possível calcular os termos da sequência. Observe as expressões que descrevem sequências:

a)  $11n$

a)  $5 - 2n$

c)  $3\frac{1}{4} + \frac{1}{4}n$

d)  $2n - 4$

e)  $3^{n-1}$

f)  $4 \cdot 2^{n+1}$

- 1) Considerando que o  $n$  começa no 1, escreva os cinco primeiros termos de cada sequência.
- 2) Considerando que o  $n$  começa no 0, escreva os cinco primeiros termos de cada sequência.
- 3) O que você pode notar nos itens 1 e 2? Descreva.

**Respostas esperadas:**

1)

a) 11, 22, 33, 44, 55.

b) 3, 1, -1, -3, -5.

c)  $3\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{3}{4}$ , 4,  $4\frac{1}{4}$ ,  $4\frac{1}{2}$ .

d) -2, 0, 2, 4, 6.

e) 1, 3, 9, 27, 81.

f) 16, 32, 64, 128, 256.

2)

a) 0, 11, 22, 33, 44.

b) 5, 3, 1, 1, 3.

c)  $3\frac{1}{4}$ ,  $3\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{3}{4}$ , 4, 4.

d) -4, -2, 0, 2, 4.

e)  $\frac{1}{3}$ , 1, 3, 9, 27.

f) 8, 16, 32, 64, 128.

3) É possível observar que, quando em uma sequência, o valor de  $n$  passa a ser 0, a sequência sempre começa em um termo anterior, mantendo a regularidade.

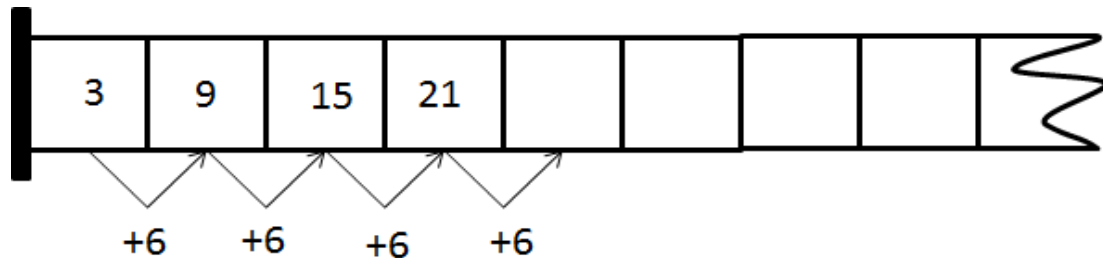
#### Notas para o professor:

Dependendo da turma em que a tarefa for desenvolvida, o professor pode aproveitar para explorar outras características, como, por exemplo, a classificação em progressão aritmética ou geométrica, a identificação da razão, a relação entre essas características da sequência e a expressão correspondente, a ideia de função etc.



## 6.2 TAREFA: SEQUÊNCIA DE AUMENTO CONSTANTE<sup>8</sup>

Observe a faixa. Note que a ponta da direita indica que a sequência continua pra sempre.



- Escreva mais quatro números, continuando a sequência.
- O número 100 estará presente na faixa? Como você justifica isso?
- E sobre o número 200, ele está na faixa? Como você justifica isso?
- Escreva um número grande que nunca aparecerá na tira. Como você tem certeza de que esse número nunca aparecerá?
- João chegou na expressão  $3 + 6n$  para os termos dessa sequência. Qual deve ser o primeiro valor de  $n$  para que a expressão de João descreva essa sequência?
- Use a expressão de João e encontre os próximos três termos da sequência.

### Respostas esperadas:

- 27, 33, 39, 51.
- Não, pois na faixa estão apenas os múltiplos de 3, exceto os que são divisíveis por 2.
- Não, pois na faixa estão apenas os múltiplos de 3, exceto os que são divisíveis por 2.
- Para responder a essa questão, os alunos podem estabelecer relações entre os números que compõem na sequência, como, por exemplo, que não há números pares na sequência, que todos os números, ao serem divididos por 6, deixam

8 Adaptado de Kindt et al. (2006b).

resto 3, que são resultados dos múltiplos de 6 somado com 3; ou podem criar a expressão que representa a sequência.

e) 0, pois  $3 + 6 \cdot 0 = 3$ .

f)  $3 + 6 \cdot 9 = 57$ .

$$3 + 6 \cdot 10 = 63.$$

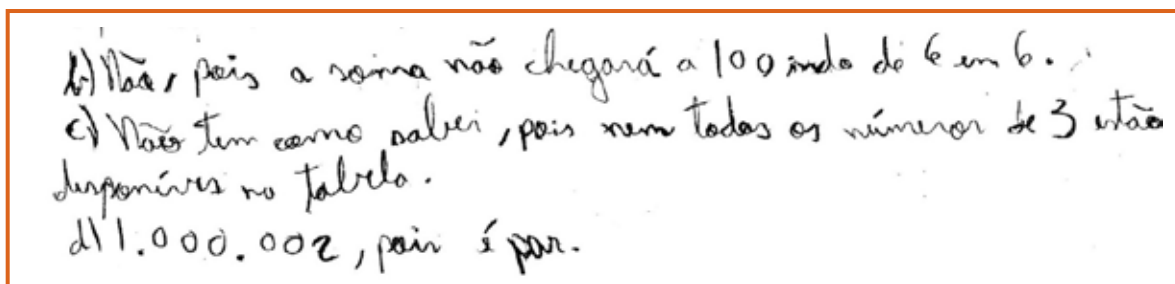
$$3 + 6 \cdot 11 = 69.$$

### Vivência em sala de aula:

Os registros selecionados a seguir, nas Figuras 30 e 31, são provenientes de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 34 alunos e teve duração de uma aula. As salas foram organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

No decorrer do desenvolvimento das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos, de acordo com a necessidade, e, ao final, houve a socialização das respostas encontradas.

Os grupos, ao terem que decidir se alguns números estavam na faixa, precisaram atentar às relações existentes entre eles, mas houve os que optaram por fazer a enumeração de todos os elementos da sequência, para chegar à resposta. Como mostra um dos registros da Figura 30, um grupo iniciou adotando a contagem de 6 em 6, e, quando o número procurado foi maior, percebeu que os números que estavam na faixa eram todos múltiplos de 3 e que nem todos os múltiplos de 3 estavam na faixa. No entanto, cometeram um equívoco, ao se referir a 200 como múltiplo de 3. Já na questão seguinte, indicaram ter percebido que os números pares não estavam na tabela, mas não retomaram a questão anterior para (re) elaborar a resposta dada.

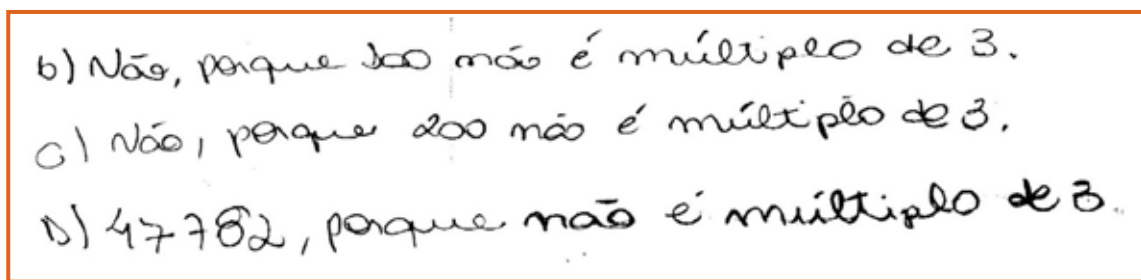


**Figura 30** – Registro da tarefa 2 – itens b, c, d

Fonte: Acervo do Grucomat

Outro grupo (Figura 31) identificou que na faixa estão múltiplos de 3, apresentou um múltiplo de 2 como não presente na faixa, mas não chegou à percepção de que não são todos os múltiplos de 3 que estão na faixa e que os múltiplos de 2 também não estão, ou seja, os números da faixa são os múltiplos de 3, ímpares.

Nenhum grupo chegou a uma conclusão que traduzisse perfeitamente o que estava acontecendo com os números da faixa, cuja discussão ficou para o momento da socialização.



b) Não, porque 300 não é múltiplo de 3.  
c) Não, porque 200 não é múltiplo de 3.  
d) 47782, porque não é múltiplo de 3.

**Figura 31** – Registro da tarefa 2 – itens b, c, d

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Em uma escola da rede particular, a mesma tarefa foi desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio, como forma de aprofundamento ao estudo de sequências. Os alunos trabalharam em trios e tiveram bastante dificuldade em achar um critério para decidir se o número estava ou não na sequência. A partir dos questionamentos do professor, identificaram-na como uma progressão aritmética, empregando a fórmula do termo geral para verificar em qual posição estariam os termos 200 e 100, como no registro da Figura 32:

2) a- 27 / 33 / 39 / 45

b-  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$   
 $100 = 3 + (n-1) \cdot 6$   
 $100 = 3 + 6n - 6$   
 $100 = 6n - 3$   
 $103 = 6n$   
 $n = \frac{103}{6}$   
 $n = 17,1$

Por o resultado não era um número natural

c-  $200 = 3 + (n-1) \cdot 6$   
 $200 = 3 + 6n - 6$   
 $200 = -3 + 6n$   
 $203 = 6n$   
 $n = \frac{203}{6}$   
 $n = 33,8$

Por o resultado não era um número natural

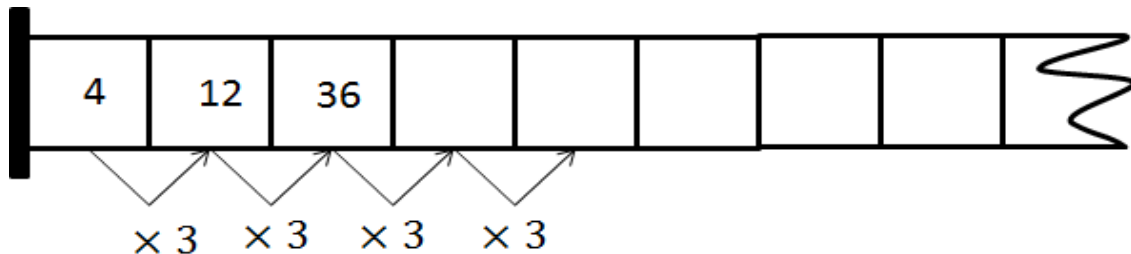
Figura 32 – Registro da tarefa 2 – itens a, b, c

Fonte: Acervo do Grucomat

Ao chegar a um índice que não era um número natural, puderam concluir que o elemento não faz parte da sequência.

### 6.3 TAREFA: OUTRA SEQUÊNCIA CRESCENTE

Observe esta outra faixa. Note que a ponta da direita indica que a sequência continua infinitamente.



- Escreva mais quatro números continuando a sequência.
- O número 1000 estará presente na faixa? Como você justifica isso?
- E sobre o número 2000, ele está na faixa? Como você justifica isso?
- Escreva um número grande que nunca aparecerá na tira. Como você tem certeza de que esse número nunca aparecerá?
- Maria chegou na expressão  $4 \cdot 3^{n-1}$  para os termos dessa sequência. Qual deve ser o primeiro valor de  $n$ , para que a expressão de Maria descreva essa sequência?
- Use a expressão de Maria e encontre os próximos três termos da sequência.

**Respostas esperadas:**

- 108, 324, 972, 2916.
- Não. Uma estratégia possível para justificar seria por meio de PG, onde  $a_1 = 4$  e  $q = 3$ .

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1000 = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$250 =$$

$$3^n = 750$$

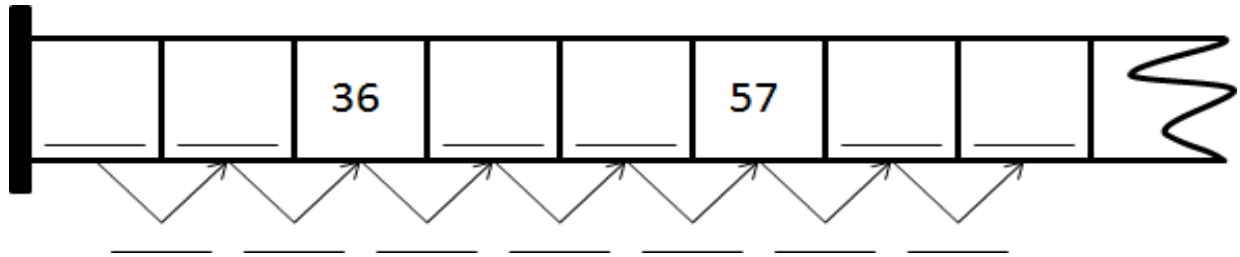
$$3^n = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

Portanto, 750 não é uma potência de 3.

- c) Não. Idem para o mesmo raciocínio.
- d) Utilizando as respostas anteriores, verifica-se que o número da lista é sempre o quádruplo de uma potência de 3. Logo, basta pegar um número que não atenda a essas condições, por exemplo 1024.
- e) Deve começar com  $n = 1$ .
- f)  $4 \cdot 3^{4-1} = 108$ .  
 $4 \cdot 3^{5-1} = 324$ .  
 $4 \cdot 3^{6-1} = 972$ .

## 6.4 TAREFA: COMPLETANDO A SEQUÊNCIA

Aqui temos uma faixa com uma sequência incompleta.



- Encontre os números que estão faltando na faixa.
- Como podemos encontrar o próximo número na faixa?
- Escreva a lei de formação da sequência. Considere que  $n$  comece no zero.

### Respostas esperadas:

- 22, 29,...; 43, 50, ...; 64, 71. Isso porque, calculando a diferença entre os dois termos conhecidos, 36 e 57, e fazendo a divisão por 3, uma vez que são necessárias três somas para chegar do 36 ao 57, obtemos a razão da sequência, que é 7.
- Somando 7 ao número anterior.
- $7 \cdot n + 22$ .

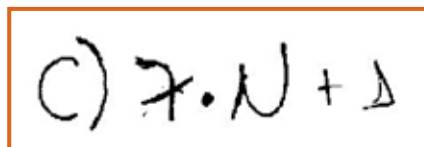
### Vivência em sala de aula:

Os registros selecionados a seguir foram produzidos por alunos do 2º ano do Ensino Médio. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 34 alunos de uma escola pública e teve duração de uma aula. As salas estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

No decorrer do desenvolvimento das tarefas, a professora realizou mediações nos grupos e, ao final, a socialização das respostas.

No momento da socialização, uma das leis de formação encontrada chamou a atenção por se diferenciar das demais. Quando questionados sobre a resposta dada, um dos integrantes do grupo justificou, dizendo que tinham percebido que todos os números

da faixa eram múltiplos de 7 somados a 1 (Figura 33). Estava correta a observação feita pelo grupo. Contudo, a proposta é de que se encontre a lei de formação, considerando  $n$  começando com 0. Diante disso, a professora não rejeitou a resposta do grupo, mas salientou que não atendia ao que havia sido proposto. Para os números expostos na faixa, a lei de formação encontrada pelo grupo seria válida apenas para  $\geq 3$ .



A handwritten mathematical expression is enclosed in a rectangular box. The expression is written in black ink on a white background and reads "c) 7 · N + 1". The letter 'c' is in a circle, and the dot between 7 and N is a small dot. The plus sign and the number 1 are also clearly visible.

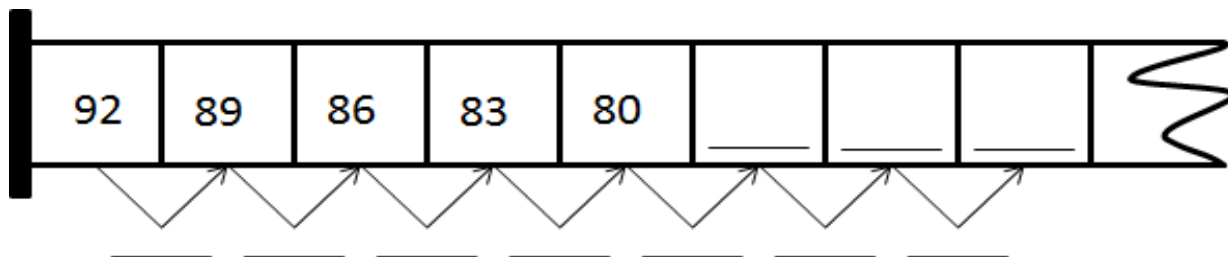
**Figura 33** – Registro da tarefa 4 – item c

**Fonte:** Acervo do Grucomat



## 6.5 TAREFA: SEQUÊNCIA DE DECRÉSCIMO CONSTANTE

Observe a sequência representada na faixa:



- Qual é o valor do decréscimo nessa sequência?
- Escreva a lei de formação dessa sequência.
- Quantos passos são necessários para chegar ao primeiro termo negativo dessa sequência?

Respostas esperadas:

- 3.
- $92 - 3n$ ,  $n$  começando no 0, ou  $95 - 3n$ , para  $n$  começando no 1.
- 31.

 Notas para o professor:

Não apresentamos registros de alunos, visto que a tarefa não gerou registros diferenciados. Um raciocínio utilizado foi:

- ✓ No caso da primeira fórmula ( $n$  começando em 0),  $3n$  precisa ser um número maior que 92, para que a diferença seja negativa. Nesse caso,  $n = 31$ , pois  $92 - 3 \cdot 31 = -1$ , pois, para essa fórmula,  $n$  é a quantidade de vezes que se subtrai 3; portanto, ele é o número de passos.
- ✓ No caso da segunda fórmula ( $n$  começando em 1), usando o mesmo raciocínio,  $n = 32$ ; no entanto, é necessário subtrair 1, pois o número 95 não está na sequência (um passo a menos).

## 6.6 TAREFA: SEQUÊNCIA NUMÉRICA CRESCENTE

Consideremos a sequência numérica cujos dois primeiros termos são:

**1,3,...**

- a) Quais podem ser os quatro termos seguintes? Registre o seu raciocínio e justifique sua escolha.
- c) Seria possível continuar a sequência, seguindo uma lei de formação diferente da utilizada anteriormente? Justifique.

### Respostas esperadas:

- a) 1, 3, 5, 7, 9, 11,... (sequência de números ímpares, justificando que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre dois).
- b) 1, 3, 6, 10, 15, 21,... (sequência dos números triangulares, justificando que a diferença entre dois termos consecutivos tem sempre uma unidade a mais que a diferença entre os dois termos consecutivos anteriores). Outra resposta: 1, 3, 7, 13, 21, 31,... (a sequência das diferenças entre dois termos consecutivos é a sequência de números pares). Ou ainda poderia ser 1, 3, 9, 27, 81, 243,... (progressão geométrica de razão 3).

### Vivência em sala de aula:

Os registros na Figura 34 são recortes de produções de duas turmas de 34 alunos do 2º ano de uma escola pública do Ensino Médio, decorrentes da tarefa desenvolvida em uma aula. As salas estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante o desenvolvimento das tarefas foram realizadas mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas.

Todos os grupos completaram a sequência, primeiramente, considerando-a como uma sequência de números ímpares. Alguns grupos disseram não haver possibilidade de completar a sequência com outra lei de formação; outros a completaram, considerando-a uma Progressão Geométrica; e, outros, como revelam os registros seguintes, nas Figuras 34 e 35, encontraram estratégias ou fórmulas diferenciadas para completá-las.

Um deles utilizou uma estratégia em que cada termo era o resultado da multiplicação

do número anterior por um dos números da sequência de números ímpares maiores ou iguais a 3, dados pela fórmula  $2 \cdot n + 1$ , com  $n \geq 1$ .

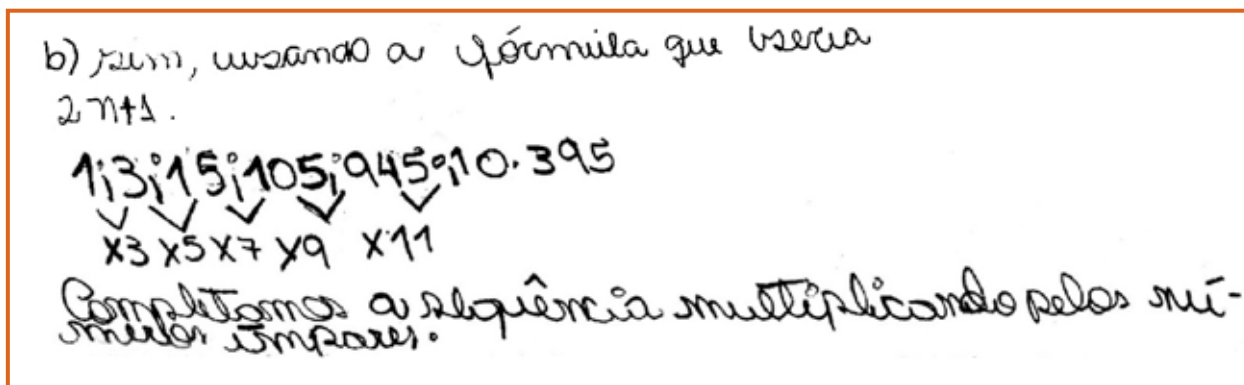


Figura 34 – Registro da tarefa 6 – item d

Fonte: Acervo do Grucomat

Outro elaborou uma lei de formação bastante curiosa, contendo potência de expoente  $n$  e multiplicação por  $n$ , com  $n \geq 0$ .

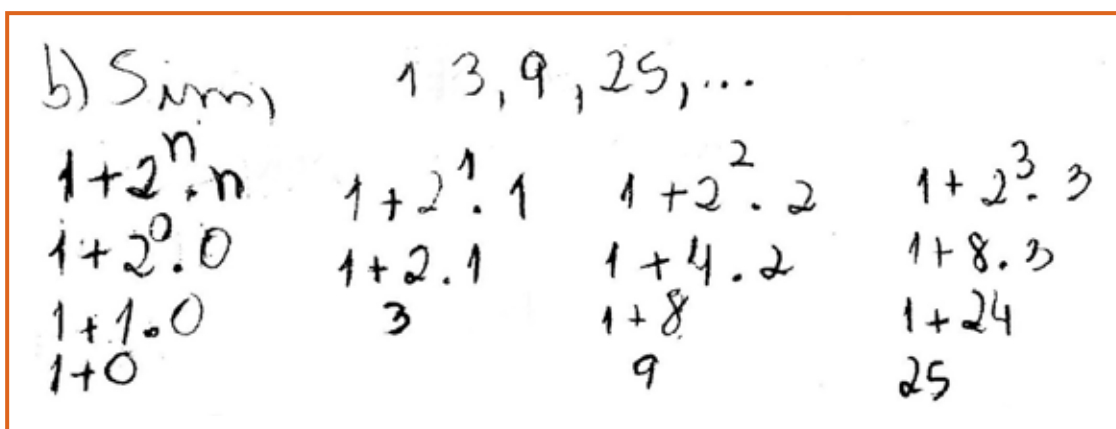


Figura 35 – Registro da tarefa 6 – item b

Fonte: Acervo do Grucomat

## 6.7 TAREFA: A FESTA NA CASA DE MARIA

Às nove horas, Maria decidiu que faria uma festa em sua residência e enviou um *WhatsApp* a dois amigos, pedindo que a ajudassem a espalhar a notícia. Nos cinco minutos seguintes, cada um dos amigos convidou apenas outras duas pessoas. Cada um que recebeu a mensagem encaminhou-a a dois colegas, no prazo de cinco minutos, e assim sucessivamente. Às nove e meia, quantas pessoas, além de Maria, sabiam da festa?

### 📌 Notas para o professor:

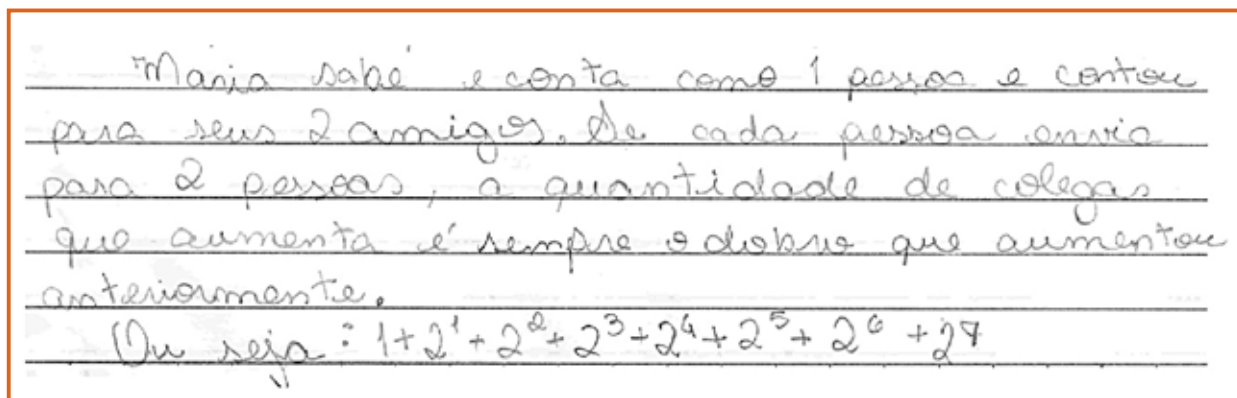
- ✓ Nesta sequência, é importante que você, professor, esteja atento às diferentes respostas possíveis, identificando relações entre elas;
- ✓ no Ensino Médio, você pode explorar a sequência de horários como uma progressão aritmética; e a sequência da quantidade de pessoas às quais a mensagem foi encaminhada, como uma progressão geométrica. Além disso, a resposta do problema pode ser relacionada com a soma dos termos dessa progressão geométrica.

### Respostas esperadas:

Horário	Quantidade de pessoas para as quais a mensagem era encaminhada
9:00	2
9:05	$2 \cdot 2 = 4$
9:10	$4 \cdot 2 = 8$
9:15	$8 \cdot 2 = 16$
9:20	$16 \cdot 2 = 32$
9:25	$32 \cdot 2 = 64$
9:30	$64 \cdot 2 = 128$
<b>Total</b>	<b>254</b>

### Vivência em sala de aula:

Essa tarefa foi desenvolvida em uma turma de 8º ano da rede particular de ensino. Os alunos estavam em grupos e tiveram uma aula para responder a essa e outras tarefas. A partir da leitura em conjunto, foi solicitado que cada grupo trabalhasse e pensasse em uma justificativa para a resposta. Alguns alunos tentaram organizar um diagrama de árvore, para ir somando quantas pessoas sabiam da festa, e outro grupo percebeu que, a cada cinco minutos o número de novas pessoas que receberam o convite era multiplicado por 2 e, depois, bastava somar todos os valores. A tarefa foi desenvolvida com uma versão anterior do enunciado, que dava margem para duas interpretações: se deveria considerar a própria Maria nesse total de pessoas ou não (Figura 36). Por isso, o professor aceitou as duas interpretações, pois ambas estavam corretas e explorou cada uma delas. Ao analisar as respostas em conjunto, o Grucomat decidiu alterar o enunciado, de modo a evitar a dupla interpretação.



**Figura 36** – Registro da tarefa 7

**Fonte:** Acervo do Grucomat

## 7 SEQUÊNCIA 7: TRUQUES NUMÉRICOS<sup>8</sup>

### Justificativa:

Esta sequência de tarefas permite a representação algébrica de situações de “truques com números”.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- Representar situações algebricamente.
- Resolver equações.

### Tempo estimado:

Duas aulas.

---

8 Tarefa adaptada de: Van de Walle, Karps e Lovin (2013).

## 7.1 TAREFA: “MATEMÁTICA” COM NÚMEROS

1) Siga as instruções a seguir:

- Escreva um número qualquer.
- Adicione a esse número o seu sucessor.
- Adicione 9.
- Divida por 2.
- Subtraia o número com que você começou e anote seu resultado final.

- a) Compare com outros colegas os números com que cada um começou e o resultado foi atingido.
- b) Explique por que as instruções dadas levaram à resposta observada.
- c) Escreva uma expressão algébrica para esse “truque”.

2) Siga essas outras instruções:

- Escolha um número.
- Multiplique-o por 6.
- Adicione a 12.
- Pegue a metade desse resultado.
- Subtraia 6.
- Divida por 3 e anote o resultado final.

- a) Compare com outros colegas os números com que cada um começou e qual resultado foi atingido.
- b) Explique por que as instruções dadas levaram à resposta observada.
- c) Escreva uma expressão algébrica para esse “truque”.

### Notas para o professor:

- ✓ Oriente os alunos a registrarem todos os passos de cada truque, para facilitar a análise dos itens “b”.
- ✓ Os itens “c” são indicados apenas para alunos de níveis mais avançados.

### Respostas esperadas:

1)

- a) Independentemente do número escolhido, o resultado é sempre igual a 5.
- b) Quando um número pensado é somado com seu sucessor, temos o dobro do número pensado, mais 1. Ao somar 9, teremos o dobro do número pensado, mais 10. Ao dividir por 2, temos o número pensado, mais 5 e, quando o número pensado é subtraído, sobram 5.

$$c) \frac{x + (x + 1) + 9}{2} - x = \frac{x + (x + 1) + 9 - 2x}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

2)

- a) O resultado sempre será igual ao número escolhido.
- b) Achar a metade do resultado do número pensado, multiplicado por 6 e somado com 12, e dividir por 3 é o mesmo que dividir por 6, resultando no número pensado, mais 2. E o 6, que foi subtraído, ao ser dividido por 3, resulta em 2. Assim, tirando 2 do número pensado, mais 2, resta o próprio número pensado.

$$c) \frac{\frac{x \cdot 6 + 12}{2} - 6}{3} = \frac{\frac{6x + 12}{2} - 6}{3} = \frac{\frac{2(3x + 6)}{2} - 6}{3} = \frac{3x + 6 + 6}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

### Vivência em sala de aula:

Os registros selecionados foram produzidos por alunos de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada. A tarefa foi desenvolvida com duas turmas de 32 alunos, organizados em grupos de três ou quatro, e teve duração de uma aula.

Durante o desenvolvimento das propostas foram realizadas mediações nos grupos, conforme a necessidade, e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas.

Todos os grupos conseguiram realizar a tarefa, mas nem todos puderam expressar o que realmente queriam dizer, pois tiveram dificuldade na formalização. Isso ficou mais claro no momento da socialização da tarefa. Em momentos como esse, o professor pode enfatizar a importância do uso dos parênteses para ordenar as operações.

Em um dos registros dos alunos (Figura 37), podemos verificar a ideia de operação inversa.



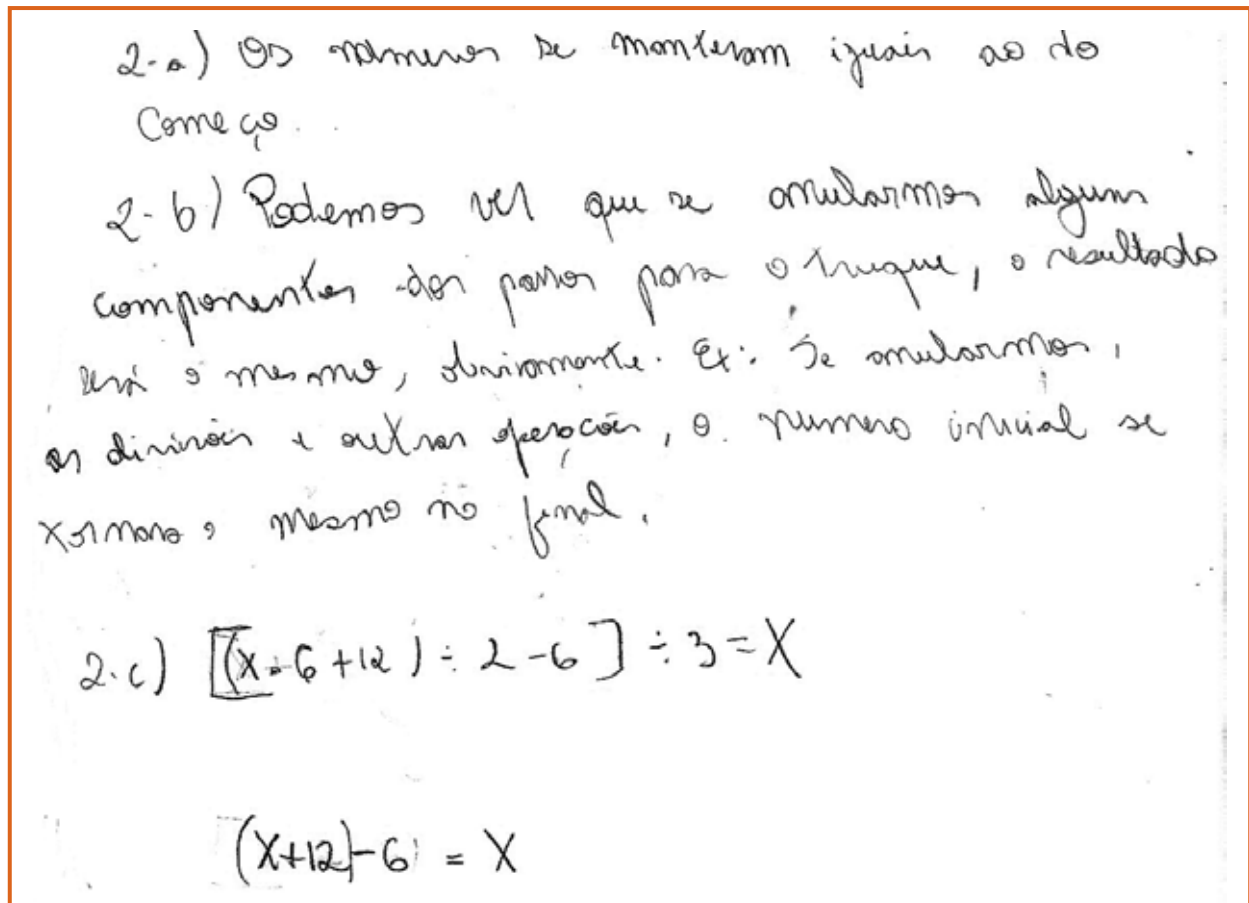


Figura 37 – Registro da Tarefa 1 – item 2

Fonte: Acervo do Grucomat

E, neste outro, na Figura 38, observamos o uso inadequado dos parênteses para ordenar as operações. No item b fica explícita a compreensão do aluno; no entanto, no item c, ao representar algebricamente, ele insere os parênteses de forma equivocada.

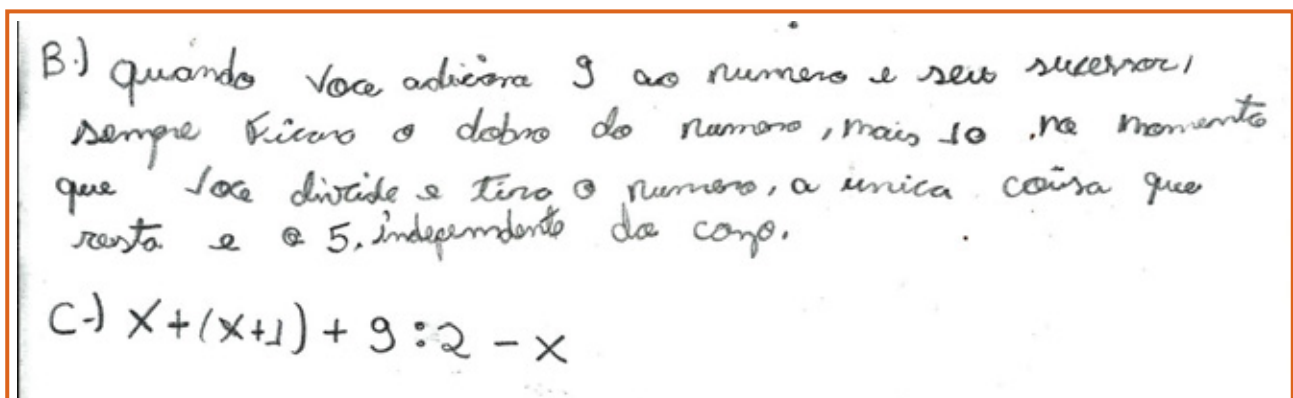


Figura 38 – Registro da tarefa 1 – item 1

Fonte: Acervo do Grucomat

## 8 SEQUÊNCIA 8: TRABALHANDO COM A IDEIA DE EQUILÍBRIO E TROCAS<sup>9</sup>

### Justificativa:

Essa sequência de tarefas possibilita a exploração de situações de equilíbrio e a abordagem de equações do 1º grau.

### Objetivos:

- Trabalhar com a ideia de equilíbrio e trocas e relacioná-las ao conceito de equação.

### Tempo estimado:

Quatro aulas.

### Material necessário:

Uma balança de dois pratos e as barras de *Cuisenaire* (peças gigantes).

---

9 As tarefas 2, 3 e 4 foram adaptadas de Kindt et al. (2006a).

## 8.1 TAREFA: EQUILIBRANDO BARRAS DE *CUISENAIRE*

- 1) No primeiro prato, coloque a peça marrom e solicite aos alunos que descubram quais são as peças iguais que equilibram com ela:
- 2) Num segundo momento, mantenha a peça marrom e solicite ao aluno que descubra:
  - Duas peças iguais que equilibrem a marrom.
  - Quantas peças brancas são necessárias para equilibrar a marrom. (Deixe que os alunos levantem hipóteses; depois eles fazem o experimento).
  - Quantas peças vermelhas são necessárias para equilibrar a marrom. (Deixe que levantem hipóteses e depois façam o experimento).

### Notas para o professor:

- ✓ Caso você não tenha acesso a esse material, pode passar para a próxima tarefa.
- ✓ Para construir a balança de dois pratos, seguem algumas dicas:
  - **Material:** um cabide (com alças ou deformações na parte superior); dois pratinhos de vaso de flor ou objeto semelhante; barbante, arame ou corrente.
  - **Como fazer:** Perfurar as laterais dos pratinhos em três pontos, deixando a mesma distância entre eles. Prender uma das pontas de três pedaços de mesma medida de barbante, arame ou corrente, nos furos feitos nos pratinhos. Juntar as pontas opostas desses três pedaços e prendê-las a um outro pedaço do mesmo material, que, por sua vez, deve ser preso ao cabide nas duas laterais. Para garantir a precisão da balança, é importante que os dois lados sejam montados de forma idêntica.



**Respostas esperadas:**

1) Seriam duas peças rosa-lilás, oito brancas, quatro vermelhas.

2)

- a) duas peças rosa-lilás;
- b) oito peças brancas;
- c) quatro peças vermelhas.

## 8.2 TAREFA: O EQUILÍBRIO NA BALANÇA DE DOIS PRATOS

- 1) Observe a primeira balança. Ela se encontra equilibrada. Quantas bananas você deve colocar no prato vazio da segunda balança, para que o equilíbrio se mantenha?



- 2) Observe as duas primeiras balanças. Elas estão equilibradas. Quantas bananas você deve colocar na terceira balança, para que o equilíbrio se mantenha?



- 3) Quantas bananas serão necessárias para equilibrar a maçã na terceira balança?



### Respostas esperadas:

- 1) 6 bananas.
- 2) 2 bananas.
- 3) 2 bananas.

### 8.3 TAREFA: CABO DE GUERRA

Você conhece o cabo de guerra? A brincadeira consiste em dividir os participantes em duas equipes, posicionadas nas extremidades de uma corda, buscando equilibrá-las em força. Vence a equipe que possui a maior força puxando a corda. Veja nas imagens um cabo de guerra equilibrado entre alguns animais.

- quatro bisões são tão fortes quanto cinco cavalos.



- 1 elefante é tão forte quanto 1 bisão mais 2 cavalos.



- A partir das imagens anteriores, quem vencerá o cabo de guerra abaixo, os quatro bisões ou os três cavalos e um elefante? Justifique sua resposta.



#### Respostas esperadas:

Vencerão o cabo de guerra o elefante e os três cavalos, pois, se quatro bisões são tão fortes quanto cinco cavalos, e um elefante é tão forte quanto dois cavalos e um bisão, na última imagem, substituindo o elefante pelo bisão e os dois cavalos, tem-se, de um lado, cinco cavalos e um bisão, contra quatro bisões, do outro lado. Comparando com a

primeira informação, em que quatro bisões são tão fortes quanto cinco cavalos, é como se tivéssemos cinco bisões, de um lado, contra quatro do outro.

### Vivência em sala de aula:

Os registros na Figura 39 são de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, com os quais a tarefa foi desenvolvida. As turmas (duas) estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes e possuíam 34 alunos. Foi necessária uma aula para a realização da proposta.

Foram realizadas mediações nos grupos, de acordo com as necessidades; e, após o término, houve a socialização das respostas encontradas.

Acreditávamos que a simples comparação visual das imagens seria suficiente para a resolução da tarefa, mas apenas alguns grupos utilizaram essa estratégia e parte deles, ainda, de forma equivocada. Nos demais, houve resoluções algébricas e atribuição de valores a cada animal.

O registro selecionado para a Figura 39 apresenta as relações entre as informações dadas por esses últimos grupos aqui referidos para chegar à decisão de quem ganharia o cabo de guerra.

Handwritten mathematical work on a whiteboard:

$$4B = 5C$$

$$E = B + 2C$$

$B = \text{Bisões}$   
 $C = \text{CAVALOS}$   
 $E = \text{Elefantes}$

$$B + 2C + 3C = 4B$$

$$B + 5C = 4B$$

$$B + 4B > 4B$$

$$5B > 4B$$

O elefante e os Cavalos vencerão.

**Figura 39** – Registro da tarefa 3

**Fonte:** Acervo do Grucomat

## 8.4 TAREFA: A FEIRA DE TROCAS

Paula mora em uma comunidade onde as pessoas trocam os alimentos que produzem por outros que necessitam. Ela tem peras que colheu e quer trocar por outro alimento. Ouviu dizer que pode trocar pera por abóbora, mas ela quer mais do que abóboras. Então decidiu ver o que é diferente de abóbora.



O que Paula ouviu dizer:

- Cinco peras você pode trocar por duas abóboras.
  - Quatro laranjas você pode trocar por um cacho de uva.
  - Uma abóbora você pode trocar por uma banana e duas laranjas.
  - Dez laranjas você pode trocar por quatro abóboras.
- a) Reescreva ou faça figuras para representar as informações acima.
  - b) Use a informação para escrever duas outras afirmações sobre trocas de laranjas, abóboras, bananas, peras e cachos de uva.
  - c) Paula disse: “Eu posso trocar dez peras por dez laranjas”. Isso é correto? Explique.
  - d) Paula pode trocar três peras por um cacho de uva? Explique por que sim ou por que não.
  - e) Explique como Paula pode trocar peras por bananas.



**Respostas esperadas:**

- a) Cada aluno escolherá livremente a melhor forma de fazer essa representação.
- b) Há várias possibilidades, e cabe ao professor verificar a validade das afirmações escritas pelos alunos.
- c) Sim, porque, se  $5P = 2A$  e  $4A = 10L$ , então,  $P = L$ ; ou seja, peras e laranjas têm o mesmo valor de troca.
- d) Não, porque, se  $P = L$  e  $4L = 1U$ ,  $4P = 1U$  e não,  $3P = 1U$ .
- e) Se  $5P = 2A$ , então,  $A = 2,5P$ . Se  $A = 1B + 2L$  e  $P = L$ , então,  $2,5L = 1B + 2L$ . Assim,  $B = 0,5L$ . Por isso, pode trocar duas peras por uma banana.

**Vivência em sala de aula:**

Os registros da Figura 40 foram produzidos por alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública. A tarefa, desenvolvida com duas turmas de 34 alunos, teve duração de duas aulas, e as salas estavam organizadas em grupos de três, quatro ou cinco integrantes.

Durante a realização das tarefas a professora realizou mediações nos grupos conforme a necessidade e, após o término, propôs a socialização das respostas encontradas.

Esperava-se que os alunos utilizassem a álgebra para a resolução da tarefa. No entanto, vários grupos optaram pela atribuição de valores a cada produto, como estratégia para responder às questões propostas (Figura 40).

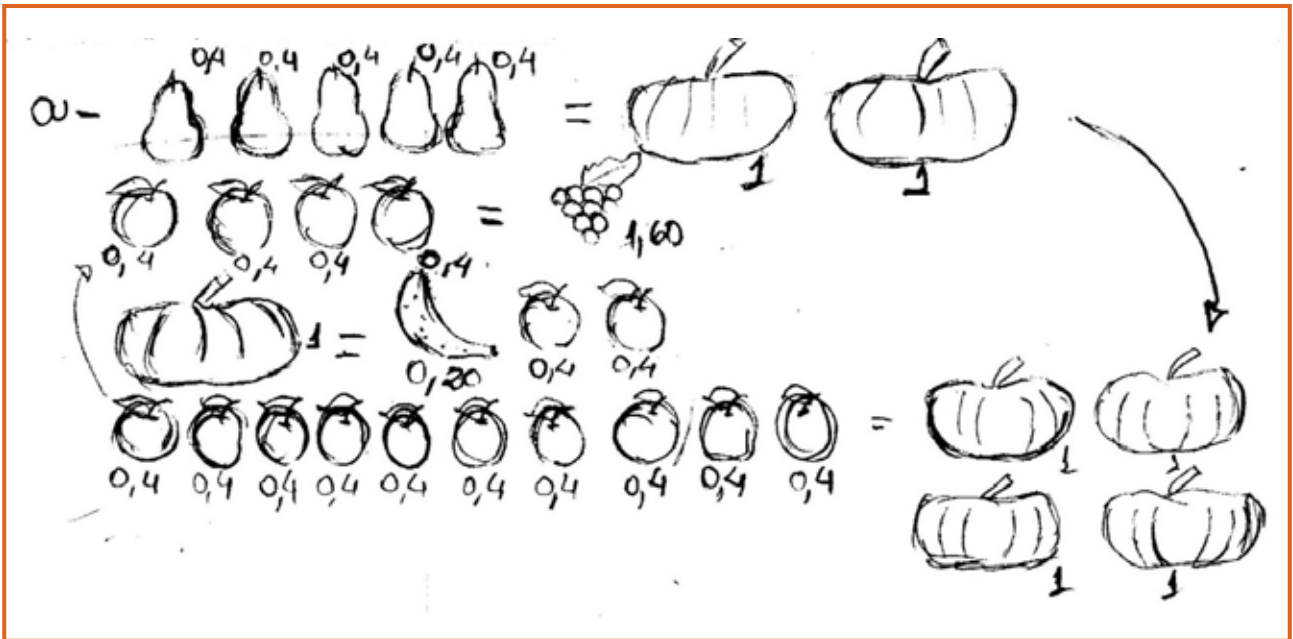


Figura 40 – Registro da tarefa 4

Fonte: Acervo do Grucomat

No registro do item “a” desse grupo, inicialmente, eles fizeram o desenho para representar as trocas propostas. Como os demais itens exigiam estabelecimento de novas relações, eles optaram por atribuir valores aos produtos, partindo da abóbora como sendo a unidade.

## 9 SEQUÊNCIA 9: (DES)EQUILÍBRIOS NUMÉRICOS

### Justificativa:

Essa sequência de tarefas possibilita o trabalho com situações de equilíbrio e desequilíbrio.

### Objetivos:

Verificar se o aluno é capaz de:

- reconhecer o sinal de igual como equivalência;
- estabelecer relações numéricas;
- usar sinais para estabelecer relações de maior, menor ou de igualdade.

### Tempo estimado:

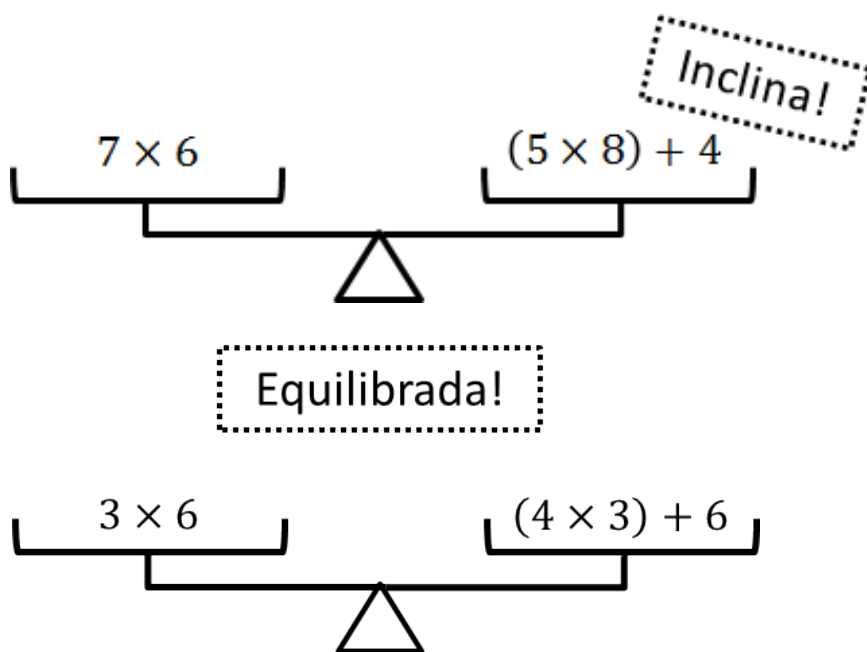
Três aulas.

### Material necessário:

Folha de tarefas.

## 9.1 TAREFA: INCLINADAS OU EQUILIBRADAS<sup>10</sup>

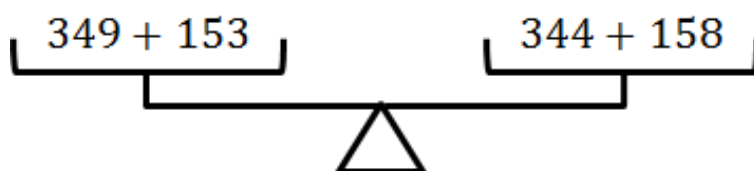
Observando a balança de dois pratos, é possível dizer se ela ficará equilibrada ou inclinada (em desequilíbrio). Analise os exemplos a seguir:



Sem efetuar as operações, determine se cada balança ficará inclinada ou equilibrada.

Complete também a expressão correspondente com =, < ou >.

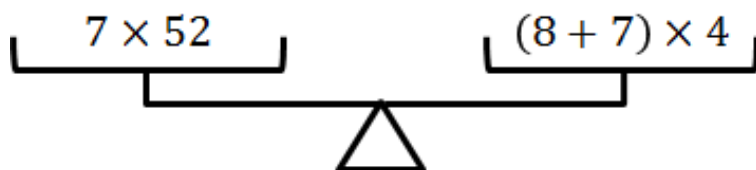
a)



$$349 + 153 \text{ \_\_\_\_\_\_ } 344 + 158$$

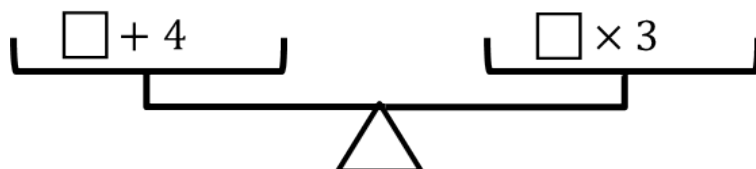
10 Tarefa adaptada de: Van de Walle, Karps e Lovin (2013).

b)



$$7 \times 52 \text{ \_\_\_\_\_\_ } (8 + 7) \times 4$$

c) Agora é a sua vez! Preencha o  com um número e decida se ela fica inclinada ou equilibrada.



### Notas para o professor:

- ✓ Caso os alunos estejam analisando as balanças efetuando as operações dos dois lados, questione-os sobre como analisar sem efetuar os cálculos.
- ✓ O item C é aberto. A balança poderá ficar equilibrada ou inclinada, dependendo dos valores colocados pelos alunos. Incentive-os a tentar diversos valores.
- ✓ É importante que você enfatize que o símbolo (quadrado) deve ser substituído, em ambos os pratos da balança, por um mesmo valor.

### Respostas esperadas:

- a) Equilibrada, =;
- b) Inclinada, >;
- c) Há várias possibilidades de resposta, dependendo dos valores substituídos. Se o valor for igual a 2, a balança ficará equilibrada; caso contrário, ela ficará inclinada.

### Vivência em sala de aula:

O registro seguinte, na Figura 41, é proveniente da atividade realizada por alunos do 8º ano do ensino fundamental. Analisando-o, podemos identificar a potencialidade da tarefa para o trabalho com o sinal de igual como sinal de equivalência. Os alunos, em grupos, receberam as instruções para realizar a tarefa e registrar as suas justificativas. De início, até pelo costume, alguns resolveram os cálculos em ambos os lados da balança, para comparar. Ao perceber isso, o professor mostrou que eles obtiveram o resultado, mas sem atender aos critérios da tarefa, que solicita explicitamente que não sejam realizados esses cálculos para comparar. A partir daí, os grupos reformularam suas resoluções, buscando comparações entre as quantidades de cada lado da balança. A resolução apresentada revela que o grupo marcou com setas a compensação entre as parcelas, indicando que 349 tem 5 unidades a mais que 344 (o sinal de mais está sobre a parcela 349), e que 153 tem 5 unidades a menos que 158 (o sinal de menos está sobre a parcela 153). Assim, eles concluíram que a balança está equilibrada (balanceada)<sup>11</sup>.

A

$$[349+153] \quad [344+158]$$

$$349+153 = 344+158 = \text{Balanceada}$$

b)  $7 \times 52 = (8+7) \times 4 = \text{Inclina para a esquerda}$

Figura 41 – Registro da tarefa 1

Fonte: Acervo do Grucomat

No item B, comparando quantidades, o grupo indica que as parcelas no prato esquerdo da balança são maiores; portanto, seu produto será maior, e a balança ficará inclinada.

11 Na tarefa proposta aos alunos, o termo 'equilibrada' foi usado como 'balanceada'.

## 9.2 TAREFA: IGUALDADES NUMÉRICAS<sup>12</sup>

Observe as expressões numéricas e responda às perguntas em seguida:

a)

$$11 + \square = 27$$

$$\square = 16 + 11$$

$$11 + 16 = \square + 11$$

$$11 + \square = 11 + 16$$

$$11 + 16 = 12 + \square$$

$$15 + \square = 11 + 16$$

$$11 + 16 = \square + 17$$

$$\square + 12 = 11 + 16$$

$$11 + 16 = \square + 18$$

$$\square + 13 = 11 + 16$$

b)

$$23 - \square = 16$$

$$\square = 23 - 8$$

$$23 - 8 = 16 - \square$$

$$23 - \square = 23 - 8$$

$$23 - 8 = 17 - \square$$

$$20 - \square = 23 - 9$$

$$23 - 8 = \square - 3$$

$$\square - 2 = 23 - 9$$

$$23 - 8 = \square - 7$$

$$\square - 3 = 23 - 9$$

c)

$$12 \cdot \square = 96$$

$$12 \cdot \square = 96 : 4$$

$$6 \cdot \square = 48 \cdot 2$$

$$24 \cdot 2 = \square : 2$$

$$3 \cdot \square = 24 \cdot 4$$

$$12 \cdot \square = 96 : 2$$

$$3 \cdot \square = 12 \cdot 2$$

$$12 \cdot \square = 48 : 2$$

$$3 \cdot \square = 24$$

$$12 \cdot \square = 48 : 4$$

Qual seria o valor numérico para cada quadradinho vazio, de modo que cada igualdade fique verdadeira? Explique como pensou.

12 As tarefas 2, 3 e 4 foram adaptadas de Ponte, Branco e Matos (2009).

### Respostas esperadas:

Espera-se que os alunos estabeleçam relações entre os números, comparando as expressões que se apresentam em ambos os lados do sinal de igual. Nas quatro primeiras expressões, a ordem das parcelas não altera o resultado. Na expressão  $11 + 16 = 12 + \square$ , espera-se que os alunos usem o raciocínio de compensação.



### 9.3 TAREFA: DESIGUALDADES NUMÉRICAS

Complete os espaços com os símbolos  $<$ ,  $>$  ou  $=$ , de modo a obter afirmações verdadeiras. Em seguida, explique o raciocínio.

$$39 + 45 \text{ \_\_\_\_ } 40 + 44$$

$$42 - 17 \text{ \_\_\_\_ } 40 - 15$$

$$40 + 44 \text{ \_\_\_\_ } 41 + 44$$

$$45 - 22 \text{ \_\_\_\_ } 42 - 22$$

$$38 + 42 \text{ \_\_\_\_ } 39 + 43$$

$$42 - 19 \text{ \_\_\_\_ } 42 - 17$$

$$36 + 42 \text{ \_\_\_\_ } 35 + 40$$

#### Respostas esperadas:

Nesta tarefa não se espera que os alunos calculem o valor de cada expressão numérica para completar com o sinal correto, mas, sim, que analisem as diferentes expressões numéricas e encontrem relações entre os números que as compõem. Exemplo: a expressão  $39 + 45 \text{ \_\_\_\_ } 40 + 44$  é uma igualdade, pois 40 tem uma unidade a mais que 39, mas, em compensação, 44 tem uma a menos que 45.

Na expressão  $40 + 44 \text{ \_\_\_\_ } 41 + 44$ , o número 44 aparece em ambos os lados, e o 41 tem uma unidade a mais que 40; logo,  $40 + 44 < 41 + 44$ .

## 9.4 TAREFA: SITUAÇÃO-PROBLEMA COM DUAS VARIÁVEIS

Em duas lojas foram colocados na prateleira os mesmos artigos, mas em quantidades e disposições diferentes. Na loja A, o valor total de uma mochila e um óculos é R\$ 47,35; e, na loja B, o valor total de duas mochilas e um óculos é R\$ 68,95. Descubra o preço de cada um dos artigos, sabendo que eles têm preços iguais nas duas lojas.



### Respostas esperadas:

O valor a mais na loja B é o valor de uma mochila  $68,95 - 47,35 = 21,60$ . Desse modo, o valor de uma mochila é R\$ 21,60. Fazendo o valor da loja A, menos o valor da mochila, encontramos o valor dos óculos:  $47,35 - 21,60 = 25,75$ .

### 👉 Notas para o professor:

Este tipo de tarefa permite a formalização do uso de um sistema de duas equações com duas incógnitas.

## 10 SEQUÊNCIA 10: COMPARANDO SITUAÇÕES<sup>13</sup>

### Justificativa:

Essa sequência de tarefas possibilita o trabalho com comparação de situações e a percepção de possibilidades de resolução de tais situações.

### Objetivos:

Espera-se que o aluno seja capaz de:

- estabelecer relações entre as informações das situações;
- usar a comparação para resolver problemas que podem ser representados por duas equações de duas incógnitas;
- formalizar a resolução de sistemas de equações com duas incógnitas;
- compreender que, para determinadas situações de comparação, pode existir apenas uma solução possível, infinitas soluções ou, até mesmo, nenhuma solução.

### Tempo estimado:

Cinco aulas.

---

13 As tarefas dessa sequência foram adaptadas de Kindt et al. (2006a).

## 10.1 TAREFA: A TABELA COMO FERRAMENTA PARA RESOLVER SITUAÇÕES DE COMPARAÇÃO

Rodrigo e Joana são os responsáveis pela lojinha da escola. A loja fica aberta todos os dias, mas nem sempre algum deles está disponível para atender aos estudantes. Então, eles utilizam o código de honra: “Pirulitos e balas estão disponíveis para a compra, basta pegar o produto desejado e deixar o dinheiro exato na caixa lacrada. Pirulitos custam R\$ 0,25 e balas R\$ 0,15 cada”.

1. Responda os itens a seguir.

- Em um dia, Rodrigo e Joana encontraram R\$ 1,10 na caixa lacrada. Quantas balas e quantos pirulitos foram comprados?
- Em outro dia, havia R\$ 1,50 na caixa lacrada, mas Rodrigo e Joana não conseguiram supor o que havia sido comprado exatamente. Por quê?
- Encontre outro valor que poderia estar na caixa lacrada e que torna impossível saber exatamente qual a quantidade de cada produto foi comprada.
- Complete as tabelas de Joana com o preço para cada quantidade.

**Tabela de Pirulitos**

Quantidade de pirulitos	0	1	2	3	4	5	6	7
Preço total (R\$)	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	–	–

**Tabela de Balas**

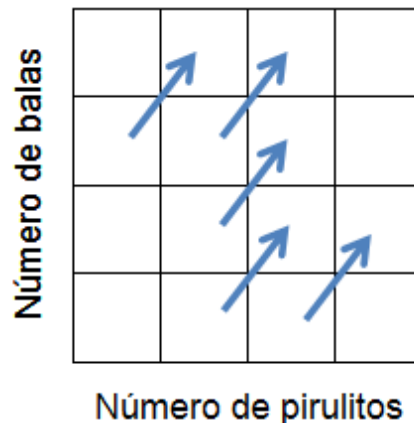
Quantidade de balas	0	1	2	3	4	5	6	7
Preço total (R\$)	0,00	0,15	0,30	–	–	–	–	–

- Em um dia havia R\$ 1,05 na caixa de pagamento. Utilizando as tabelas, mostre como Joana pode decidir quantas balas e quantos pirulitos foram comprados.



4. Observe o diagrama com flechas construído na Tabela 2.

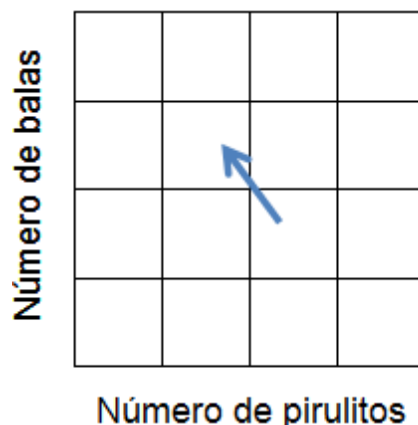
**Tabela 2** – Diagrama de flechas



Fonte: Acervo do Grucomat

- a) O que acontece com os números na tabela, conforme você acompanha as flechas?
- b) A resposta do item anterior varia de acordo com a flecha escolhida?
- c) Qual a relação entre as quantidades de balas e pirulitos comprados, conforme você acompanha as flechas?
- d) Marque na Tabela 2 uma flecha que signifique uma troca de uma bala por um pirulito. Qual a diferença de preço nessa situação?
- e) Marque na Tabela 2 outra flecha que simbolize a troca de um pirulito por duas balas. Qual a diferença de preço nessa situação?
- f) Descreva o padrão estabelecido pela flecha a seguir, na Tabela 3, em relação à troca entre pirulitos e balas.

**Tabela 3** – Diagrama de trocas



Fonte: Acervo do Grucomat

**Respostas esperadas:**

1)

- a) Dois pirulitos e quatro balas, pois  $2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,15 = 0,50 + 0,60 = 1,10$ .
- b) Porque existem várias combinações possíveis, como, por exemplo, três pirulitos e cinco balas ou dez balas ou seis pirulitos.
- c) R\$0,90, pois corresponde tanto ao valor de três pirulitos e uma bala como ao valor de seis balas.
- d)

Quantidade de balas	6	7
Preço total (R\$)	1,50	1,75

Quantidade de balas	3	4	5	6	7
Preço total (R\$)	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05

- e) De acordo com as tabelas de balas e pirulitos, se havia R\$ 1,05 na caixa, poderiam ter sido compradas sete balas ou três pirulitos e duas balas.

2)

- a) Estão representadas Tabela 1 quatro combinações: 0 balas e 0 pirulitos; 0 balas e um pirulito; 0 pirulitos e uma bala; e um pirulito e uma bala.
- b) Esses valores representam os preços resultantes da compra de cada uma das combinações entre balas e pirulitos.

c)

9										
8										
7			1,55					3,05		
6		1,15	1,40	1,65						
5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00				
4	0,60	0,85	1,10	1,35	1,60	1,85	2,10			
3	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,70	1,95			
2	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80			
1	0,15	0,40	0,65	0,90	1,15	1,40	1,65	1,90		
0	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Número de balas

Número de pirulitos

d) R\$ 1,30.

3)

a)

9										
8										
7			1,55					3,05		
6		1,15	1,40	1,65						
5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00				
4	0,60	0,85	<del>1,10</del>	1,35	1,60	1,85	2,10			
3	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,70	1,95			
2	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80			
1	0,15	0,40	0,65	0,90	1,15	1,40	1,65	1,90		
0	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Número de balas

Número de pirulitos

b) Podem ser comprados dois pirulitos e quatro balas.



4)

- a) Aumentam de 40 em 40 centavos, pois as flechas indicam o aumento de preço referente à compra de mais uma bala e um pirulito.
- b) Não. Todas indicam o aumento de 40 centavos no preço da compra.
- c) Sempre a quantidade de balas e de pirulitos comprados aumenta em uma unidade.
- d)

9										
8										
7			1,55					3,05		
6		1,15	1,40	1,65						
5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00				
4	0,60	0,85	1,10	1,35	1,60	1,85	2,10			
3	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,70	1,95			
2	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80			
1	0,15	0,40	0,65	0,90	1,15	1,40	1,65	1,90		
0	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Número de pirulitos

A diferença de preço seria de 10 centavos.

e)

9										
8										
7			1,55					3,05		
6		1,15	1,40	1,65						
5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00				
4	0,60	0,85	1,10	1,35	1,60	1,85	2,10			
3	0,45	0,70	0,95	1,20	1,45	1,70	1,95			
2	0,30	0,55	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80			
1	0,15	0,40	0,65	0,90	1,15	1,40	1,65	1,90		
0	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Número de pirulitos

A diferença seria de 5 centavos.

- f) A flecha representa a troca de um pirulito por uma bala, e a diferença será sempre de 10 centavos.

### Vivência em sala de aula:

Essa tarefa foi desenvolvida em duas salas de 9º anos do ensino fundamental da rede privada, com 32 alunos cada. Os alunos se dividiram em grupos de três ou quatro pessoas, e foi solicitado que discutissem e registrassem a resposta para cada questão. No decorrer da tarefa, o professor circulou entre os grupos, realizando intervenções e observando as estratégias variadas de resolução dos alunos, prevalecendo o uso de cálculo mental. Questionaram o significado das flechas, mas, com algumas mediações, logo entenderam a lógica da proposta e, observando as imagens das tabelas, os alunos entenderam e chegaram às respostas esperadas.

É interessante analisar o registro (Figura 42) de um grupo na questão 1 c), em que deveriam encontrar outro valor que poderia estar na caixa lacrada: foi impossível saber exatamente qual quantidade de cada produto havia sido comprada. Os alunos, no item 1.b, descobriram várias alternativas para a opção de 1,50; no item 1.c, eles tomaram o dobro desse valor (3) e, da mesma forma, foram descobrindo possibilidades.

The image shows a student's handwritten work on a math problem. The work is organized into several sections:

- 1ª maneira (1st way):** Shows two addition problems. The first is  $0,25 + 0,15 = 0,40$ . The second is  $1,30 + 0,20 = 1,50$ .
- 2ª maneira (2nd way):** Lists "6 pirulitos - 1,50" with a note "OBS - tentativa" (Observation - attempt).
- 3ª maneira (3rd way):** Lists "10 balas - 1,50" with a note "OBS - tentativa".
- 4ª maneira (4th way):** Lists "5 balas - 0,75" and "3 pirulitos - 0,75" with a bracket indicating a total of "1,50" and a note "OBS - tentativa".
- e) 3,00:** A section for a total value of 3,00. It lists several combinations:
  - "32 pirulitos - 3,00"
  - "20 balas - 3,00"
  - "10 balas e 6 pirulitos - 3,00"
  - "5 balas e 3 pirulitos - 3,00" (circled)
- Other combinations:**
  - "1,75" (circled)
  - "4 pirulitos e 5 balas - 1,75"
  - "7 pirulitos - 1,75"
  - "10 balas e 1 pirulito - 1,75"
- Notes:**
  - "OBS - pensando por conta de exercício anterior" (Observation - thinking about the previous exercise)
  - "pois o 3,00 é o dobro de 1,50" (because the 3,00 is double of 1,50)
  - "OBS - tentativa" (Observation - attempt) appears multiple times.

Figura 42 – Registro da tarefa 1

Fonte: Acervo do Grucomat

Em outro grupo, identificamos um equívoco no cálculo de uma das combinações (Figura 43). Começaram com R\$3,00 também, pois era o dobro de R\$1,50 (registraram  $2 \cdot 1,50$  à direita); foram subtraindo valores possíveis do total de balas e pirulitos. No entanto, na segunda subtração ( $1,40 - 0,80$ ), registraram dois pirulitos e quatro balas, mas o correto R\$ 0,80 seria dois pirulitos e duas balas. Isso modifica o total, que deveria ter sido seis pirulitos e dez balas.

1c)

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ - 1,60 \\ \hline 1,40 \end{array} \quad \begin{array}{l} (4p \text{ e } 4b) \\ - \\ (2p \text{ e } 4b) \\ \hline (6p \text{ e } 2b) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 60 \\ \hline 00 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ - 1,50 \\ \hline 1,50 \\ - 1,50 \\ \hline 00 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{12p.} \\ (6p) \\ (6p) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ - 1,50 \\ \hline 1,50 \\ - 1,50 \\ \hline 000 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{20b.} \\ (10b) \\ (10b) \end{array}$$

(0201,50)

Figura 43 – Registro da tarefa 1

Fonte: Acervo do Grucomat

Já outro grupo aproveitou os conhecimentos sobre o uso do Excel como ferramenta para elaborar tabelas. Construiu a tabela (Figura 44) que estava na questão 2 e continuou inserindo outros valores.

c- 3,00

$$9 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,15 = 3,00$$

$$13 \cdot 0,25 = 3,00$$

$$21 \cdot 0,15 = 3,00$$

Figura 44 – Registro da tarefa 1

Fonte: Acervo do Grucomat

No item 5.f (Figura 45), que pedia para descrever o padrão estabelecido pela flecha em relação à troca entre pirulitos e balas, um grupo formalizou algebricamente, mesmo sem ser solicitado na questão (menos um pirulito e mais uma bala dá uma diferença de dez centavos).

A handwritten note in a rectangular box. It reads:  $p \rightarrow -1p + 1b$  diferença de 10 centavos.

**Figura 45** – Registro da tarefa 1

**Fonte:** Acervo do Grucomat

Na questão 4 a), um grupo registrou da seguinte maneira (Figura 46):

Handwritten text in a rectangular box. It reads: 4-) utilizando a tabela já preenchida, responda as questões a seguir. A) Onde está a resposta para o item a da questão 1 (R\$ 1,10) na tabela? O-4 com o custo de 100 (R\$ 1,00) e recebe 10 centavos de gorjeta.

**Figura 46** – Registro da tarefa 1 – questão 4, item a

**Fonte:** Acervo do Grucomat

O pensamento do grupo não atende aos critérios do enunciado, porém, no momento da socialização, o professor pode mostrar que é uma solução possível, mas não é válida para esse enunciado.

## PARA ENCERRAR...

As tarefas propostas para esta terceira parte do nosso livro tem uma complexidade maior, por serem destinadas a alunos que já estão em contato com a linguagem algébrica. No entanto, nos registros selecionados é possível identificar que, em alguns casos, os alunos utilizam a língua materna para justificar as regularidades e enunciar as leis de formação da sequência. Isso nos sinaliza que, provavelmente, faltou a eles um trabalho como o aqui proposto, em que o pensamento algébrico seja contemplado em todas as suas dimensões. Como aponta a literatura, muitas vezes o ensino de álgebra se limita a procedimentos algorítmicos, deixando de desenvolver o pensamento como um todo.

Nas análises realizadas, é perceptível a nossa preocupação em compreender o raciocínio elaborado pelos alunos; muitos desses raciocínios foram explicados no contexto da sala de aula; no entanto, no trabalho compartilhado no grupo, na maioria das vezes, foi possível identificar outros raciocínios, diferentes daqueles que circularam no momento da socialização das tarefas. Ao apresentar nossas análises, temos como objetivo incentivar que os professores, ao trabalharem com tarefas como as aqui propostas, também façam esse exercício de compreensão dos modos de pensar dos alunos. Conhecer esses diferentes modos é uma importante ferramenta para o planejamento do professor, pois, ao identificar raciocínios equivocados, poderá propor novas situações, que contribuam para a superação deles.

## REFERÊNCIAS

BARBATUQUES. Samba Lelê – Barbatuques | Tum pá. **Youtube**, 19 jun. 2012. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=\\_Tz7KROhuAw](https://www.youtube.com/watch?v=_Tz7KROhuAw)>. Acesso em: out. 2016.

\_\_\_\_\_. Jogo do Tum Pá - faixa “Tum Pá” | Barbatuques. **Youtube**, 19 set. 2012. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=37OP-SOe9dY>>. Acesso em: out. 2016.

\_\_\_\_\_. Peixinhos do mar – Barbatuques | Tum pá. **Youtube**, 25 jun. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=xV1KB1iQsWM>>. Acesso em: out. 2016.

\_\_\_\_\_. Kererê - Barbatuques | ayú. **Youtube**, 9 out. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Xe4fLgzA2Vc>>. Acesso em: out. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1.º, 2.º e 3.º anos) do Ensino Fundamental**. Brasília, DF: 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base. Brasília, DF: 2017.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia. Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 97-126, abr. 2011.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 1[10], n. 4, Campinas, p. 78-91, 1993.

FONTANA, Roseli Ap. Cação. **Mediação pedagógica na sala de aula**. Campinas, SP: Autores Associados, 2000.

HIEBERT, James et al. **Making sense: Teaching and learning mathematics**. Heinemann: Portsmouth, 1997.

- KAPUT, James J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 2000. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS%5CKaput\\_99AlgUnd.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS%5CKaput_99AlgUnd.pdf). Acesso em: out. 2017.
- KAPUT, James J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, James J.; CARRAHER, David W.; BLANTON, Maria L. (Ed.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates; NCTM, 2007. p. 5-17.
- KINDT, M. et al. Comparing quantities. In: WISCONSIN CENTER FOR EDUCATION RESEARCH and FREUDENTHAL INSTITUTE (Ed.). **Mathematics in context**. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc., 2006a.
- KINDT, M. et al. Patterns and figures. In: WISCONSIN CENTER FOR EDUCATION RESEARCH and FREUDENTHAL INSTITUTE (Ed.). **Mathematics in context**. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc., 2006b.
- LINS, Romulo C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. PhD thesis, University of Nottingham, United Kingdom, 1992. Disponível em: <http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf>. Acesso em: dez. 2017.
- LITTLE BABY BUM. Cabeça, ombro, joelho e pé. **Youtube**, 1 jul. 2015. Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=ERWuS4Tou\\_A](https://www.youtube.com/watch?v=ERWuS4Tou_A). Acesso em: out. 2016.
- LUVISON, Cidinéia da Costa. **Narrar, dizer e vivenciar como apropriação e (re)significação de linguagens e conceitos matemáticos no 3.º ano do Ensino Fundamental**. 2017. 227 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação. Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2017.
- MASON, John. Making use of children' powers to produce algebraic thinking. In KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Ed.). **Algebra in the early grades**. New York: Lawrence Erlbaum Associates; NCTM, 2007. p. 57-94.
- MESTRE, Célia Maria Martins Vitorino. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino**. 2014. 379p. Tese (Doutorado em Educação Didática da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.



MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1 [7], p. 39-54, mar. 1992.

NACARATO, Adair M.; GOMES, Adriana Ap. Molina; GRANDO, Regina Célia. (Org.). **Experiências com geometria na escola básica**: narrativas de professores em (trans) formação. São Carlos: Pedro e João Editores, 2008.

NACARATO, Adair Mendes; GRANDO, Regina Célia (Org.). **Estatística e Probabilidade na Educação Básica**: professores narrando suas experiências. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

PINO, Angel. **As marcas do humano**: as origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski. São Paulo: Cortez, 2005.

PINO SIRGADO, Angel. O social e o cultural na obra de Lev S. Vigotski. **Educação e Sociedade**, Campinas, n. 71, p. 45-78, jul. 2000.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no Ensino Básico. Portugal: Ministério da Educação e Direção Geral de Inspeção e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), 2009.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**: interações e potencialidades. Campinas, SP: Papirus, 2006.

RADFORD, Luis. On the development of early algebraic thinking. **PNA**, UK, v. 6, n. 4, p. 117-133, 2012. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/12342220.pdf>>. Acesso em: out. 2017.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, L. et al. (Ed.). **Investigación en Didáctica de la Matemática**: homenaje a Encarnación Castro. Granada, Espanha: Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, Luis. The progressive development of early embodied algebraic thinking. **Mathematics Education Research Journal**, Australia, n. 26, p. 257-277, 2014.

SFORNI, Marta Sueli de Faria. Interação entre didática e teoria histórico-cultural. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 375-397, abr./jun. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/2175-623645965>>. Acesso em: set. 2017.

- SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Tradução de Orlando Carlos Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas, SP: Papirus, 2008.
- SQUALLI, Hassani. **Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base**. Québec: Faculté des Sciences de l'Éducation. Université Laval, 2000.
- VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- VAN DE WALLE, John; KARP, Karen S.; LOVIN, LouAnn H. **Teaching student – centered Mathematics: Developmentally appropriate instruction for grades 3-5**. 2nd ed. Upper Saddle River: Pearson, 2013.
- VIGOTSKI, Lev S. **Obras escogidas**. Organização geral de Amélia Álvarez e Pablo del Rio. Madri: Visor, v. 3. 1995.
- VIGOTSKI, Lev S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- VIGOTSKI, Lev S. **A formação social da mente**. 7ª ed. Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- VIGOTSKI, Lev S. **Imaginação e criação na infância: ensaio psicológico: livro para professores**. Tradução de Zoia Prestes. Apresentação e comentários de Ana Luiza Smolka. São Paulo: Ática, 2009.
- VIGOTSKII, Lev S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Tradução de Maria da Penha Villalobos. 11ª ed. São Paulo: Ícone, 2010.
- WIKIHOW. Como fazer uma balança para crianças. **WIKIHOW**, [20--]. Disponível em: <<https://pt.wikihow.com/Fazer-uma-Balança-para-crianças>>. Acesso em: out. 2016.

## SOBRE OS AUTORES

### ADAIR MENDES NACARATO

Licenciada em Matemática pela PUC-Campinas, Mestre e Doutora pela FE/Unicamp. Atua no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco, *campus* Itatiba, na linha de pesquisa Educação Sociedade e Processos Formativos. É líder dos grupos de pesquisa Histórias de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem) e Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). E-mail: adamn@terra.com.br

### CAIO LEARDINI GRILLO

Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Realizou intercâmbio na Indiana University (EUA) através do programa de graduação sanduíche pela CAPES. Atualmente é professor de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio da rede SESI/SP e pertence ao Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) vinculado a USF. E-mail: grillo.caio@gmail.com

### CARLA CRISTIANE SILVA SANTOS

Pedagoga e Mestre em Educação pela Universidade São Francisco, *campus* de Itatiba. Defendeu a dissertação de Mestrado no Programa Obeduc, com o tema: “O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: a percepção de regularidades e o pensamento relacional”, na linha de Pesquisa Educação, Sociedade e Processos Formativos. Participa do Grucomat/USF. Atualmente é professora efetiva na rede SESI de Itatiba-SP num 2º Ano do Ensino Fundamental. E-mail carlinha\_ipda@hotmail.com

### CLAUDIA CRISTIANE BREDARIOL LUCIO

Licenciada em Matemática pela Universidade São Francisco – USF, Licenciada em Pedagogia e Supervisão escolar pela Universidade Nove de Julho; Mestre em

Educação pela Universidade São Francisco. Atualmente atua como professora de matemática do 6º ao 9º ano da rede Sesi de Itatiba-SP. Participou do Programa Observatório da Educação (Obeduc). Atualmente pertence ao Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat). E-mail: cacaubreda@yahoo.com.br

### CIDINÉIA DA COSTA LUVISON

Doutora em Educação pela Universidade São Francisco (USF). Mestre em Educação pela mesma Universidade. Licenciada em Pedagogia pela Faculdade do Noroeste de Minas e História pela Fundação Municipal de Ensino Superior de Bragança Paulista – FESB. Possui Pós-graduação *Lato Sensu* em Educação Especial, Psicopedagogia e Gestão Educacional. Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede municipal de Bragança Paulista-SP, de História na rede estadual de ensino e professora do Ensino Superior na graduação e pós-graduação no Instituto de Ensino Superior de Itapira – IESI. E-mail: cidineiadacosta.luvison@gmail.com

### GIANCARLA GIOVANELLI DE CAMARGO

Mestre em Educação pela Universidade São Francisco, Especialista em Matemática para professores da educação Infantil e séries iniciais pelo Imecc/Unicamp, graduada em Letras pela Universidade São Francisco e em Pedagogia pela Unifia. Integrante do Grucomat desde 2012. Atua como Diretora de Escola e Formadora de Professores em Itatiba, SP. E-mail: giangiovanelli@uol.com.br

### IRIS APARECIDA CUSTÓDIO

Doutoranda do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco. Mestra em Educação pela mesma universidade na linha de pesquisa Educação, Sociedade e Processos Formativos. Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Lavras. Foi bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) e participou do Programa Observatório da Educação (Obeduc). Atualmente pertence aos grupos: Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) e Histórias de Formação de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem), ambos vinculados a USF. E-mail: irisapcustodio@gmail.com

### JULIANA BAGNE

Graduada em Pedagogia. Possui Especialização na área de gestão escolar e coordenação pedagógica. É mestra em educação pela Universidade São Francisco e possui publicações a respeito das problematizações nas aulas de matemática nas séries iniciais. Iniciou na educação em 2000. Enquanto professora atuou na educação infantil e no ensino fundamental I tanto na rede particular como na rede pública de ensino. É professora efetiva do Município de Jundiá desde 2006 e a partir de 2011 atua na função de coordenadora pedagógica no segmento da educação infantil. Email: bagnej83@gmail.com

### KÁTIA GABRIELA MOREIRA

Graduada em licenciatura plena em Pedagogia pela Universidade São Francisco, *campus* de Bragança Paulista, São Paulo; Mestre em Educação pelo Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco, Itatiba, São Paulo; doutoranda em Educação pela Universidade São Francisco. Atua como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Nazaré Paulista. E-mail: ktiaGabriela@hotmail.com

### MARJORIE SAMIRA FERREIRA BOLOGNANI

Possui graduação em pela Pontifícia Universidade Católica – SP; mestrado e doutorado em Educação pela Universidade São Francisco. Atualmente é diretora educacional da Prefeitura Municipal de Jundiá e professora convidada do Centro Universitário de Jaguariúna-SP, nos cursos de Pós-Graduação à docência. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em direção educacional, coordenação pedagógica e formação de professores em serviço. É avaliadora da Revista Horizontes. É membro dos grupos de pesquisa: Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) e Histórias de Professores que Ensinam Matemática (Hifopem). E-mail: marjonet@gmail.com

### ROSANGELA ELIANA BERTOLDO FRARE

Doutoranda em Educação pela Universidade São Francisco. Mestre em Educação pela mesma Universidade. Graduada em Matemática pelas Faculdades Integradas de Amparo. Participa do Grupo Colaborativo em Matemática (Grucomat) e do Grupo de Pesquisa e Relações de Ensino e Trabalho Docente, ambos da Universidade São

Francisco. É professora de Matemática efetiva da rede pública de ensino estadual paulista e atualmente está designada como vice-diretora de escola na mesma rede.

E-mail: robertoldo81@hotmail.com

### SELENE COLETTI

Professora da rede municipal de Itatiba desde 1981, atuando na Educação Infantil (CEMEI Curió) com uma 2ª fase e no Fundamental (EMEB Cel. Francisco Rodrigues Barbosa) com um 1º ano. Participante do Programa Observatório da Educação – Obeduc na Universidade São Francisco e ganhadora do prêmio Educador Nota 10, da Fundação Victor Civita, edição 2016 com uma das narrativas do programa.

E-mail: selenecoletti@uol.com.br

