Transformações no Plano com Aplicações ao Traçado de Gráficos de Funções

Angela Rocha dos Santos [1]

Ricardo Silva Kubrusly [2]

Waldecir Bianchini [1]

Instituto de Matemática – UFRJ

CP. 68530

CEP 21945-970 – Rio de Janeiro – RJ

angela@dmm.im.ufrj.br

risk@dmm.im.ufrj.br

waldecir@dmm.im.ufrj.br

Nos últimos anos o estudo das transformações no plano foi, praticamente, banido dos currículos escolares. Por outro lado, os livros didáticos, de um modo geral, há muito tempo abandonaram a abordagem de tópicos ou desenvolvimento de atividades que conduzam à exploração destas transformações.

A partir das recomendações feitas nos PCNs, parece que esta situação está começando, aos poucos, a se reverter. No entanto, a ausência deste assunto nos livros didáticos aumenta as dificuldades encontradas pelos professores para o desenvolvimento de atividades que explorem estes conceitos e suas aplicações.

Este mini-curso pretende suprir, em parte, esta lacuna, desenvolvendo e propondo atividades que visam relacionar o efeito geométrico de cada transformação com uma mudança nas coordenadas e, ao mesmo tempo, enfatizando algumas das vantagens do uso do computador para a consecução destes objetivos.

---

[1] D.Sc. – IM-UFRJ

[2] Ph.D – University of Texas - Austin

Este mini-curso é dividido em duas partes. Na primeira, ilustramos o efeito geométrico de transformações de congruência e semelhança quando aplicadas a figuras planas e relacionamos estas transformações mudanças ocorridas nas coordenadas dos pontos que definem a figura.

Na segunda parte, aplicamos os conceitos desenvolvidos na primeira, ao traçado de gráficos de funções, integrando este último conceito ao de transformações no plano.

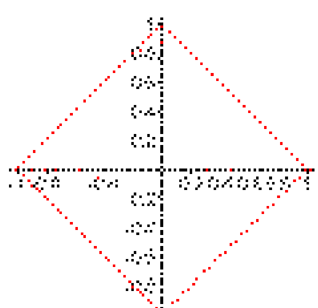
Público Alvo: Professores de Matemática do Ensino Médio e Fundamental (5^a a 8^a séries)

Recursos Utilizados: Microcomputadores e apostila

Palavras Chaves: Transformações, Reflexão, Translação, Rotação, Homotetia, Semelhança, Congruência, Gráfico de Função.

Primeira Parte: Conceituação das Transformações no Plano

Marcando pontos no plano coordenado e unindo-os por segmentos de retas, podemos "desenhar" diversas figuras, entre elas qualquer espécie de polígono, e identificar estes polígonos pelas coordenadas de seus vértices. Por exemplo, quando nos referimos ao quadrado de vértices (0,1), (-1,0), (0,-1) e (1,0), estamos nos referindo ao quadrado mostrado na figura abaixo.



Existem muitas maneiras de se explorar a correspondência existente entre pontos do plano e suas coordenadas para estudar problemas puramente geométricos, usando o ferramental da álgebra.

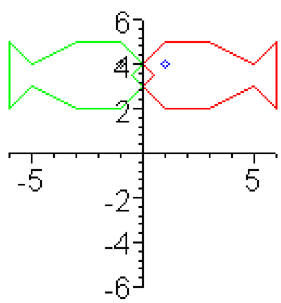
A primeira parte deste curso, é destinada a mostrar como podemos caracterizar determinadas transformações no plano por meio de coordenadas.

Em Geometria Plana, dizemos que duas figuras são congruentes se coincidirem perfeitamente quando sobrepostas. Esta sobreposição é feita por meio de uma mudança na posição de uma delas.

Mudanças de posição são caracterizadas por movimentos rígidos, isto é, movimentos que preservam a forma e o tamanho dos objetos. Estes movimentos são descritos, matematicamente, por translações, rotações em torno de pontos e reflexões em torno de retas. Vamos estudar cada um desses movimentos ou transformações.

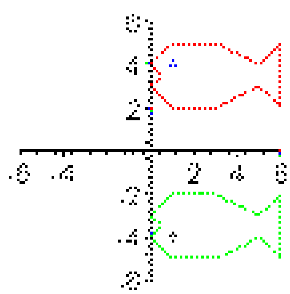
Reflexões em relação aos eixos coordenados

Dizemos que duas figuras são simétricas em relação a uma reta qualquer quando uma é a imagem espelhada da outra em relação à reta considerada, chamada eixo de simetria. Isto quer dizer que se desenharmos as figuras numa folha de papel e dobrarmos o papel de tal modo que a dobra coincida com a reta em questão, as duas figuras coincidirão perfeitamente. Isto acontece porque pontos simétricos estão em lados opostos, mas à mesma distância do eixo de simetria, isto é o eixo de simetria é a mediatriz do segmento de reta que liga estes dois pontos. Na figura abaixo os peixinhos são simétricos em relação ao eixo y.



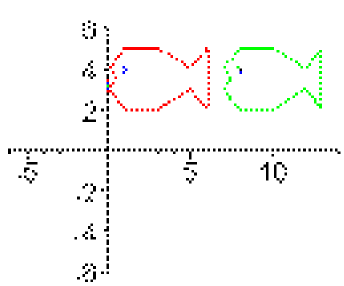
Neste caso, dizemos que o peixinho da direita foi refletido ou que sofreu uma reflexão em relação ao eixo y ou ainda, que o peixinho da esquerda é a imagem do outro por meio de uma reflexão em relação ao eixo y, ou vice-versa. Repare que qualquer um dos dois peixinhos pode ser obtido a partir do outro, se substituirmos cada um dos pontos (x,y) usados para traçás-los, por (-x,y). Assim, se uma figura puder ser descrita por um conjunto qualquer de pontos do plano, podemos obter a sua imagem refletida em relação ao eixo y, pelo conjunto de pontos (-x,y), onde cada um desses novos pontos corresponde a um dos pontos (x,y) do conjunto usado para descrever a figura original.

Da mesma forma, substituir os pontos (x,y) usados para descrever uma figura por (x, -y), equivale a refletir a figura original em relação ao eixo x. Comprove esta afirmação analisando a figura abaixo, onde o peixinho de baixo é a imagem do de cima por meio de uma reflexão em relação ao eixo y, ou vice-versa.



Translações

Uma figura sofre uma translação quando ela se desloca, sem se deformar, paralelamente a uma direção fixada. Na figura abaixo, o segundo peixinho pode ser obtido transladando-se o primeiro na direção horizontal, 7 unidades para a direita.



Neste caso, o segundo peixinho pode ser obtido a partir do primeiro, substituindo-se cada um dos pontos (x,y) usados para traçá-lo, por (x + 7, y) e, reciprocamente o primeiro peixinho pode ser obtido a partir do segundo, substituindo-se cada um dos pontos usados para traçar este último, por (x – 7, y). . Neste caso, dizemos que um dos peixinhos é a imagem do outro por uma translação horizontal, 7 unidades para a direita ou para a esquerda, conforme o caso. Assim, somar ***b*** unidades na coordenada x de cada um dos pontos usados para caracterizar uma figura qualquer no plano, equivale a deslocar ou a transladar esta figura, na direção horizontal, b unidades para a direita, se b for positivo, ou para a esquerda, caso b seja negativo. Da mesma maneira, somar b unidades a coordenada y dos pontos (x,y) usados para descrever uma figura, equivale a deslocar (transladar) esta figura, b unidades na direção vertical. Este movimento pode ser para cima, se b for positivo, ou para baixo, se b for negativo.

Rotação em torno da origem

Uma outra classe de transformações é obtida quando fixamos um ponto do plano e giramos os eixos coordenados de um ângulo α qualquer, ao redor deste ponto. Considere, por exemplo, o triângulo cujos vértices são dados pelos pontos (1,1), (1,3), (2,1), (Figura 1). Agora vamos girar esta figura. Copie a figura numa folha de papel quadriculado transparente, usando o quadrado tracejado como guia. Espete um alfinete na origem do sistema de coordenadas e use este alfinete para prender o recorte no desenho da Figura 1, de modo que as duas figuras coincidam perfeitamente. Gire o recorte 90 graus no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, isto é, de tal modo que o eixo x do recorte coincida com a posição do eixo y na figura original. O triângulo do recorte deve estar agora na mesma posição do triângulo mostrado na Figura 2. Esta transformação é definida geometricamente como uma rotação de 90 graus em relação à origem e corresponde à substituição dos pontos (x,y), usados na definição da figura original, por (-y,x).

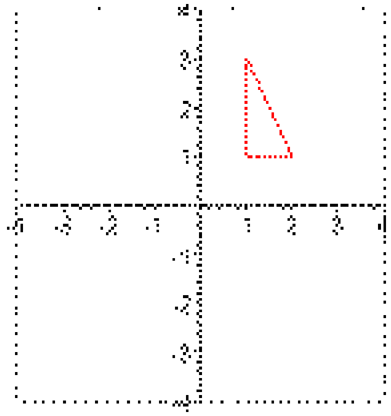


Figura 1

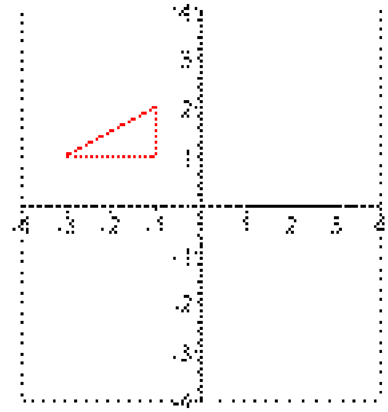


Figura 2

Isometrias e transformações de semelhança

Todas as transformações estudadas até agora nesta seção, mudam a posição do desenho, mantendo a forma e o tamanho originais. Transformações deste tipo são chamadas ***isometrias***. Neste caso, as figuras obtidas são ditas congruentes.

Nem todas as transformações geométricas do plano possuem esta propriedade.

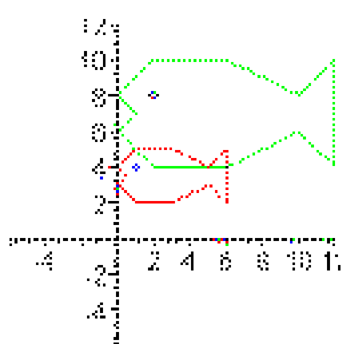
Em linguagem coloquial, dizemos que duas figuras são semelhantes quando têm a "mesma forma" mas "tamanhos diferentes". Com esta frase queremos dizer que a distância entre pontos não precisa ser necessariamente preservada (tamanhos diferentes) mas sim, o ângulo formado por segmentos de reta concorrentes (mesma forma).

Em termos matemáticos mais precisos, duas figuras no plano são semelhantes quando uma é a imagem da outra por meio de uma transformação de semelhança do plano. Transformações de semelhança são transformações do plano que multiplicam as distâncias entre dois pontos por uma constante positiva k, chamada fator de escala. Mais precisamente, se P e Q são dois pontos da figura original cuja distância é dada por PQ e se os pontos, P' e Q' são, respectivamente, os pontos obtidos, a partir de P e Q, por uma transformação de semelhança, temos que a distância de P' a Q' é igual a k vezes a distância de P a Q . Se a constante k é igual a 1, esta transformação preserva as distâncias e, como já vimos, é chamada de isometria.

Rotações, translações e reflexões são exemplos de transformações de semelhança. Nestes casos o fator de escala k é igual a 1 e, portanto, estas transformações são isometrias. Homotetias são outros exemplos de transformações de semelhança.

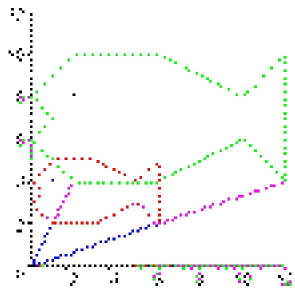
Homotetias

A transformação definida pela substituição de (***x***,***y***) por (a***x***,a***y***), onde a é um número positivo qualquer, é dita uma ***homotetia*** de centro na origem. Esta homotetia é uma isometria quando a = 1. Quando a ? 1, esta homotetia muda o tamanho do desenho original, mas não a sua forma. Se $a > 1$, esta transformação aumenta o tamanho da figura original sendo, então, chamada de dilatação. Se $a < 1$, o tamanho da figura original diminui e a transformação é dita uma contração. O número a é chamado razão da homotetia. Dizemos, então, que a figura original e a obtida após essa transformação são semelhantes. O peixinho maior, na figura abaixo, ilustra o efeito geométrico obtido quando aplicamos uma homotetia de centro na origem e razão a = 2, sobre o desenho original.



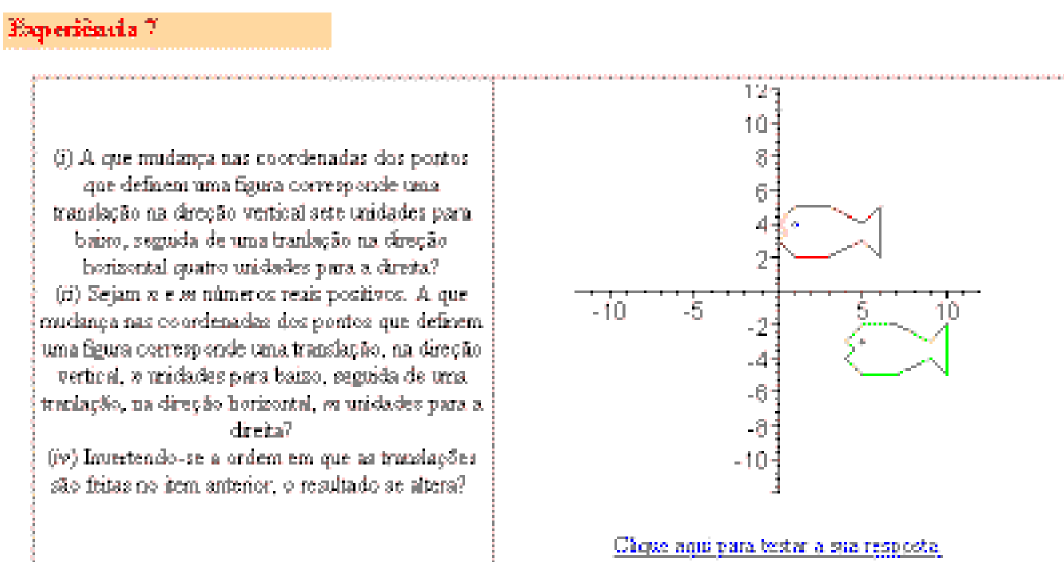
Neste exemplo, os dois peixes são semelhantes. O peixinho maior (uma ampliação do menor) foi obtido substituindo-se os pontos (x,y), usados na definição do peixe menor, por (2x,2y).

Em outras palavras, dilatações (contrações) mantêm um ponto fixo (no exemplo anterior este ponto fixo é a origem do sistema de coordenadas) e "esticam" ("contraem") os segmentos de reta determinados por este ponto fixo e qualquer outro ponto do plano, por um fator constante a, chamado razão da homotetia . Esta propriedade das homotetias é usada para "ampliar" ou "diminuir" o tamanho das figuras. Veja a figura.



Podemos mostrar que qualquer transformação de semelhança é obtida como combinações de translações, rotações, reflexões, e homotetias.

Exemplos de Atividades Desenvolvidas nesta parte



Segunda Parte: Aplicação ao Traçado do Gráfico de Funções

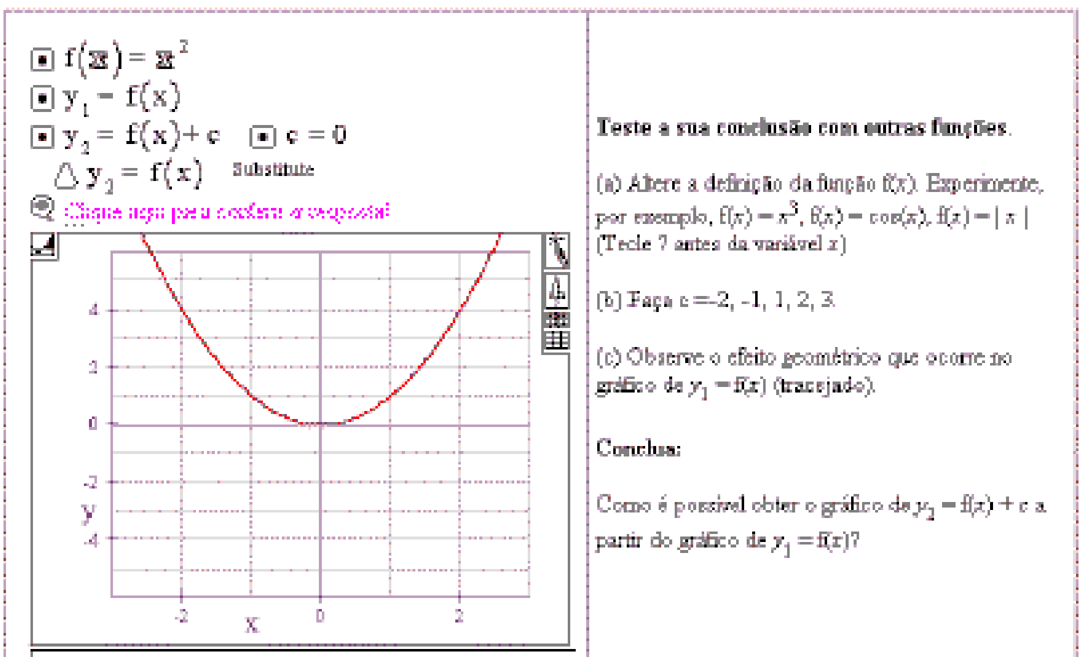
Os objetivos das atividades propostas nesta parte são:

- Relacionar o gráfico de uma função com a sua expressão analítica.
- Evidenciar os efeitos geométricos de transformações lineares no plano sobre o gráfico de uma função.
- Obter gráficos de funções a partir de um gráfico básico conhecido, usando os conceitos de transformações no plano.

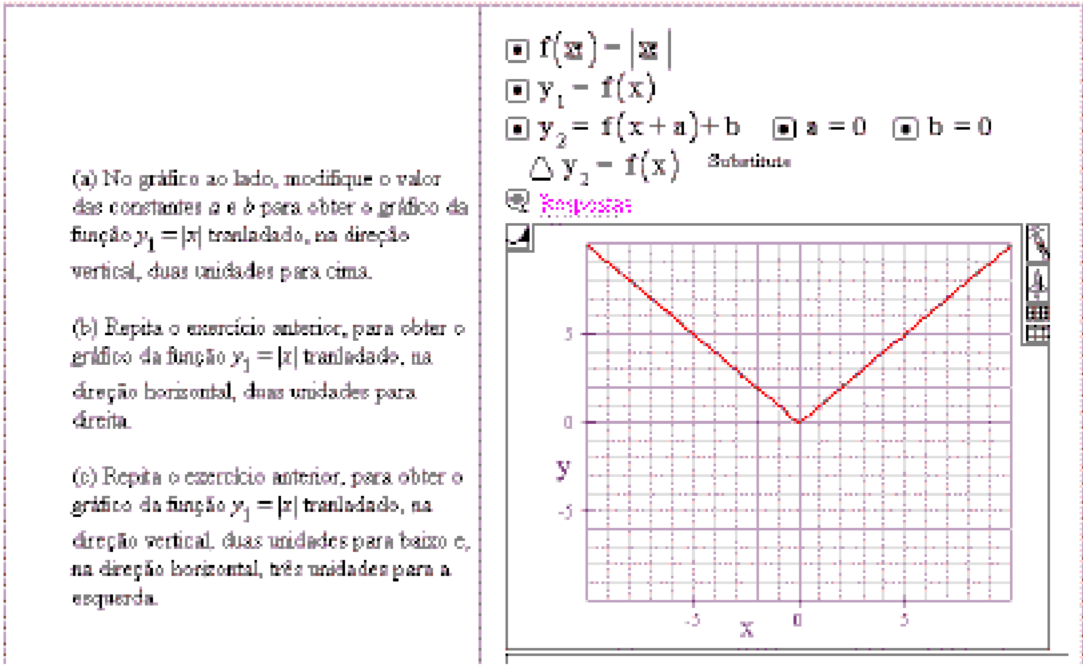
Exemplos de Atividades Desenvolvidas

1) Explorando

No quadro abaixo estão traçados os gráficos das funções $y_1 = f(x)$, para $f(x) = x^2$ e $y_2 = f(x) + c$, para c = 0. (Repare que, nesse caso, as duas funções coincidem.) Varie o valor da constante c para observar o efeito geométrico ocorrido no gráfico de y_1.



2) Aplicando



3) Concluindo

(a) Como é possível obter o gráfico de $y = x^2 + 1$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

(b) Como é possível obter o gráfico de $y = (x - 5)^2$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

(c) Como é possível obter o gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

Observações Finais

Estas atividades são parte integrante da disciplina “Introdução às Funções Reais” concebida como um primeiro modelo para disciplinas “on line”, desenvolvidas dentro do projeto de educação à distância e continuada do IM-UFRJ. Sua característica principal é a total interatividade com o usuário, permitindo a exploração integral e efetiva dos aspectos dinâmicos dos conceitos envolvidos.

Desenvolvendo este material, procuramos mostrar como é possível utilizar a tecnologia para ensinar e aprender matemática. Esperamos contribuir com um valioso material para capacitação e apoio ao professor e de melhoria na formação básica de nossos alunos.

Bibliografia

Bianchini, Waldecir & Rocha, Angela – Aprendendo Cálculo com o MAPLE, volume I, IM-UFRJ, 2000.

Bianchini, Waldecir & Giraldo, Victor & Kubrusly, Ricardo & Rocha, Angela – Introdução às Funções Reais – Um enfoque Computacional, IM-UFRJ, 1998.

Demana, F & Waits, B.K & Clemens S.R & Foley G.D – Precalculus A Graphing Approach, Addison-Wesley, 1996.

Wells, D & Tilson, L – Precalculus A view of te world around us – Prentice Hall, New Jersey, 1998.