ALGUMAS IMAGENS DE ALUNOS UNIVERSITÁRIOS E DO ENSINO MÉDIO SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO.

Pollyanna V.G. Silva, Luiz G.F. Dias, Leonardo B. A. Coelho, Thaís S. Brito, Cíntia C. Oliveira, Ronaldo F. Bosque, Taciana G. Santos - Alunos do Curso de Matemática - UFMG - Plinio C. Moreira, Maria C.C. Ferreira - Professores do Departamento de Matemática – UFMG (orientadores) - contato: plinio@mat.ufmg.br ou cristina@mat.ufmg.br

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa que aqui apresentamos foi desenvolvida como uma das atividades de um projeto de iniciação científica realizado na UFMG, durante o ano 2000. O objetivo mais amplo do projeto era o desenvolvimento de uma experiência de formação específica na Licenciatura, intrinsecamente integrada à formação didático-pedagógica. De acordo com a concepção clássica de formação inicial do professor, a formação específica desenvolve-se na expectativa de que um posterior esforço de “integração” – tarefa das chamadas disciplinas integradoras – venha a elaborar uma articulação adequada com a formação didático-pedagógica e com a futura prática profissional do licenciando. A nossa concepção, ao contrário, é a de que a discussão, no interior do próprio processo de formação matemática na licenciatura, de questões cognitivas relacionadas aos conceitos matemáticos aprofunda a percepção desses mesmos conceitos pelo licenciando. Foi a partir dessa perspectiva que desenvolvemos a pesquisa aqui relatada.

O objetivo específico da pesquisa foi conhecer e analisar, tendo em vista o processo de ensino-aprendizagem do tema na escola básica, as imagens conceituais de alunos do ensino médio e da universidade a respeito do conceito de função.

2. O QUADRO TEÓRICO E OS INSTRUMENTOS METODOLÓGICOS

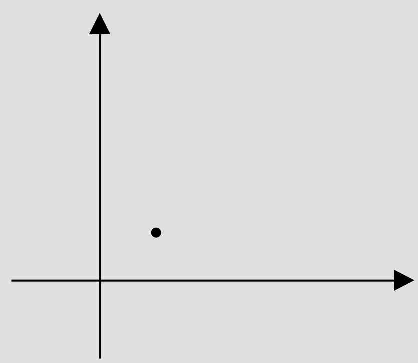
Ao lado da importância do conceito sob o ponto de vista interno à matemática, sabe-se que a noção de função é extremamente fecunda, também, para a construção de modelos nos estudos de fenômenos de natureza biológica, econômica, física, etc. Assim, é fundamental que futuros professores de matemática do ensino básico tenham uma formação qualificada sobre o tema. Um elemento essencial ao trabalho pedagógico com determinado conceito é o conhecimento das percepções que os alunos possuem a respeito do conceito a ser trabalhado. Partindo dessa premissa, tomamos como referência a noção de “imagem conceitual” (Tall e Vinner,1981). O termo se refere ao conjunto das representações que um indivíduo possui a respeito de um determinado conceito. Esse conjunto de imagens, construído dentro de um processo individual de desenvolvimento cognitivo, possui alguma estabilidade, isto é, o indivíduo encontra, na sua experiência cultural, situações particulares que, de certa forma, validam – e, assim, estabilizam - essas imagens. Assim, ao que parece, a simples exposição a uma definição formalmente correta do conceito não é suficiente para que o aluno passe em revista seu conjunto de imagens, eliminando aquelas que não sejam coerentes com a nova formulação apresentada. De fato, o que acontece é que diferentes partes desse conjunto de representações são evocadas em diferentes situações (Tall e Vinner,1981). Pesquisas têm mostrado que essas partes são freqüentemente contraditórias e que, de um modo geral, desconsideram aspectos importantes do conceito subjacente (Vinner e Dreyfus,1989; Ferreira, Moreira e Soares, 1999). Tudo isso sugere, para a ação pedagógica em sala de aula, a construção de estratégias didáticas que estimulem o reconhecimento, pelo próprio aluno, dessas inconsistências, de modo a que ele possa proceder, ativamente, a uma reelaboração do conjunto de suas imagens conceituais.

O instrumento utilizado na coleta de dados foi um questionário composto de sete questões em que os sujeitos deveriam marcar, em cada questão, uma opção entre as alternativas oferecidas e justificar sua escolha. O questionário foi aplicado a um total de 359 alunos: 240 universitários e 119 do ensino médio.

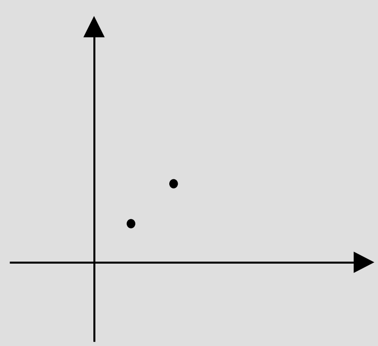
3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Uma das hipóteses que pretendíamos investigar era a de que o aluno, em certas circunstâncias, identifica a ***idéia de função com a de variação linear*** (para nós, aqui, linear inclui o caso afim). Essa imagem é apontada em algumas pesquisas sobre o conceito de função (p. ex., Markovits et al.,1998). Incluímos então no questionário as seguintes questões:

1) Quantas funções diferentes existem cujos gráficos passam pelo ponto abaixo indicado? Assinale uma das alternativas e justifique sua escolha.



2) Quantas funções diferentes existem cujos gráficos passam pelos pontos abaixo indicados? Assinale uma das alternativas e justifique sua escolha.



Chega a impressionar a queda no índice de respostas corretas - opção e) - quando passamos da questão 1 para a questão 2: de 76,6% na primeira para pouco mais de 21,2% na segunda. E o que chama atenção é o aumento no índice da opção b) ao deslocarmos da questão 1 para a questão 2: de 7,2% para 38,4%. Entretanto, ao analisarmos as justificativas para a opção e) na questão 1, uma parte dessa queda se explica: 121 alunos disseram que infinitas funções poderiam passar pelo ponto dado porque por um ponto passam infinitas retas.

Aqui, o que parece se impor sobre outras imagens potenciais é – como um aluno chegou a enunciar - o quinto postulado de Euclides. Quando foi dado um só ponto (questão 1), 7% dos sujeitos responderam que existe apenas uma função. Na questão 2, quando são dados dois pontos, cerca de 40% escolheram esta alternativa.

Outro ponto que abordamos na pesquisa se refere às imagens dos alunos acerca das curvas que podem representar gráficos de funções. Consideramos os seguintes aspectos:

- ***Unicidade de y em relação a x*** (tomamos y e x como símbolos genéricos para a variável “dependente” e “independente”, respectivamente)

Essa é, como se sabe, uma das características mais enfatizadas da idéia de função.

- ***Mudança de padrão***

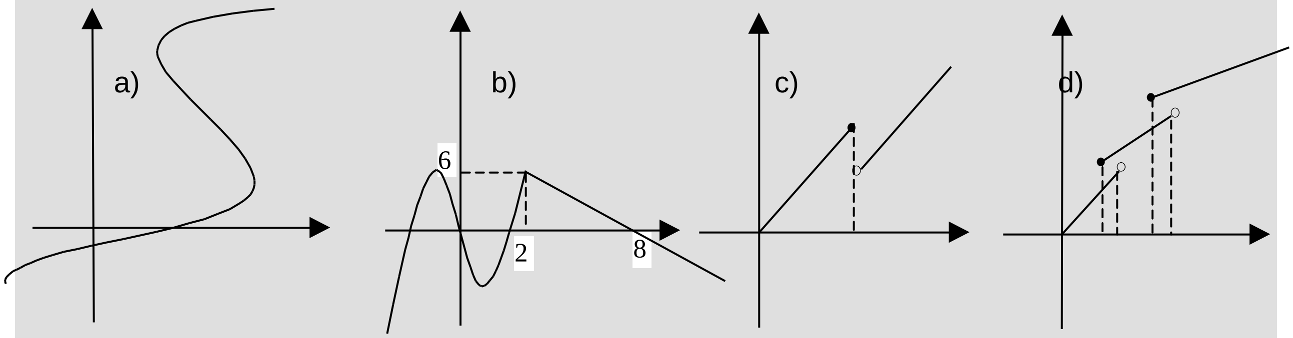
Segundo Vinner e Dreyfus (1989), a idéia de que o gráfico de uma função tem que ter características geométricas “estáveis” desempenha um papel crucial para os estudantes. Pretendíamos confirmar isso com questões em que mudanças súbitas no padrão do desenho das curvas ocorriam.

- ***Continuidade/descontinuidade***

Ainda de acordo com Vinner e Dreyfus, os alunos mostram uma tendência de admitir como função apenas gráficos “contínuos” – sem rupturas - mesmo quando estes não satisfazem às exigências da definição. Na questão 3 tentamos confrontar os sujeitos da pesquisa com situações que opunham uma das mais enfatizadas características da relação funcional – a unicidade de y em relação a x – com a “continuidade” da curva que representaria seu gráfico.

Eis o enunciado da questão:

3) Os gráficos abaixo podem representar uma função? Justifique suas respostas.



O índice de acerto em cada um dos itens variou de 72% a 75%. A unicidade de y em relação a x é, como prevíamos, a característica que mais pesou na decisão dos alunos. Nos itens a) e d), a porcentagem dos alunos que justificaram a resposta correta NÃO através desse argumento foi de cerca de 60%. Vale a pena observar que em todos os itens desta questão, a idéia da unicidade de y em relação a x foi a mais usada, mesmo para justificar respostas incorretas.

Quanto ao segundo ponto, verificamos que os alunos realmente justificaram o fato de um dado gráfico não representar uma função com o argumento da mudança de padrão. No item b) por exemplo, 21 alunos (32% dos que não consideraram o gráfico dado como função) justificaram suas respostas com este argumento e outros 23 alunos disseram que a curva representava duas funções, provavelmente desmembrando os dois “padrões” da curva e associando a cada um deles uma função.

Embora o item b) expresse a situação em que se observa o maior número de justificativas do tipo “não representa função porque a curva muda de padrão”, essa imagem conceitual também apareceu em outros itens dessa mesma questão.

Com relação à “descontinuidade” dos gráficos, observamos uma pequena ocorrência dessa imagem, na situação proposta pela questão 3. Ao que parece prevaleceu aqui a questão da unicidade de y em relação a x.

- ***Representação Algébrica de Funções***

Para avaliar eventuais diferenças de imagens conceituais evocadas diante de situações que diferem apenas em termos do contexto - forma gráfica ou geométrica de representação do conceito ; expressões com várias sentenças algébricas; uma situação do “cotidiano” em que as variáveis representam elementos “concretos” - decidimos incluir as seguintes questões:

4) Uma papelaria, na confecção de cópias xerox, procede conforme a tabela abaixo.

Número de cópias	Preço por cópias
De 1 a 99	0,10
De 100 a 199	0,08
Acima de 200	0,06

a) Duas pessoas que gastaram R$8,00 cada uma, poderiam ter tirado quantidades diferentes de cópias?

b) O número de cópias é uma função da quantidade de dinheiro gasto?

5) As expressões abaixo definem uma função? Justifique suas respostas.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \leq 2 \\ -x + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 10x & \text{se } 0 \leq x < 10 \\ 12x & \text{se } 8 < x \leq 16 \\ 16x & \text{se } x \ ? \ 12 \end{cases}$

A questão 4 se refere a uma situação relativamente corriqueira de venda de cópias xerox em que se oferece um desconto na compra de um número maior de cópias. Na questão 5.a), a expressão algébrica representa a função cujo gráfico é a curva da questão 3.b) e em 5.b) a expressão dada traduz, essencialmente, a relação entre a abcissa e a ordenada dos pontos pertencentes à curva da questão 3.d. Essa mesma expressão pode ser vista também como uma forma de relacionar o número de cópias xerox {f(x)} com o valor pago {x} desde que se efetuasse uma pequena mudança - conceitualmente irrelevante - nos dados da questão 4. O item 4.a) tinha apenas o objetivo de despertar a atenção do aluno para um aspecto essencial do conceito de função, o qual deveria ser considerado em 4.b).

Enquanto 75% dos sujeitos responderam afirmativamente ao item 4.a) apenas 1/3 da amostra respondeu que o número de cópias não é uma função da quantidade de dinheiro gasto. Nesta questão, a imagem conceitual predominante parece ser a de que, havendo alguma relação entre os valores das grandezas, uma delas é função da outra. Com menos intensidade, aparece também a imagem de função como uma relação de proporcionalidade. Uma justificativa do tipo: “a inversa é função” foi usada com razoável freqüência tanto para argumentar a resposta sim como a resposta não, no item 4.b).

Dos alunos que responderam sim à questão 5.a), cerca de 40% justificaram referindo-se à unicidade de f(x) em relação a x. Essas respostas em conjunto com as da questão 3.b) apresentam forte consistência. O mesmo não acontece nos itens 5.b), 3.d) e 4.b) que também são diferentes representações de uma “mesma” função. Neste caso, as respostas às 3 questões, tomadas em conjunto, mostram certa inconsistência. A expressão gráfica (questão 3.d) apresentou menos dificuldades. A questão 4.b) apresenta o maior índice de respostas incorretas, mesmo considerando-se o “alerta” dado em 4.a). Apenas 47 alunos (13%), de um total de 359, chegaram a apreender a semelhança conceitual das 3 questões e argumentaram de modo essencialmente idêntico nas suas respostas.

A situação da questão 4, em que associamos aos valores das variáveis um significado “concreto” como quantidade de dinheiro e número de cópias xerox, foi exatamente aquela em que os alunos evocaram mais intensamente a imagem de que qualquer tipo de relação é uma função, apesar do fato, já observado, de que 75% da amostra afirmaram, em 4.a), que “não havia unicidade de y em relação a x” na referida situação. O contexto em que se colocou a questão das cópias xerox pode ter produzido no aluno uma avaliação, provavelmente inconsciente, de que a distinção entre uma relação que pode ser chamada de função e uma que não pode (4.b) é irrelevante e que o que importa, neste contexto, é o fato de que se podem tirar quantidades diferentes de cópias com o mesmo dinheiro (4.a). Daí, talvez, em 4.b), a imagem de que qualquer relação possa ser classificada como função. Em outras palavras, o fato de que as variáveis relacionadas tenham um ***significado*** concreto parece não ser suficiente para dar ***sentido*** à questão.

De modo geral, o conceito de função é apresentado, em livros didáticos, como relação entre elementos de dois conjuntos arbitrários, utilizando-se diagramas para ilustração. Essa generalidade logo é abandonada e, via de regra, são consideradas somente as funções com domínio e contra domínio reais. Grande ênfase é colocada na seguinte condição: a cada elemento do domínio corresponde um único elemento do contradomínio. Como é possível “sobrar” elemento no contradomínio, mas não no domínio, fica a impressão de que o contradomínio deve ser sempre "maior" do que o domínio. Associada a essa idéia incorreta pode se formar também a imagem de que uma função deve ser sempre injetiva. Para investigar a ocorrência dessa imagem foi incluída a seguinte questão:

Questão 6:

Existe alguma função de IR em IN, onde IR é o conjunto dos reais e IN o conjunto dos números naturais? Justifique sua resposta.

Além disso, nesta questão, modificamos a forma da pergunta de modo que as eventuais imagens seriam expressas através de exemplos ou argumentos produzidos pelos sujeitos, em lugar de escolher entre alternativas dadas por nós, como nas outras questões.

Dos alunos que responderam corretamente (33%), aproximadamente um terço apresentou como justificativa a idéia de que o conjunto dos naturais é "menor" do que o conjunto dos reais. Apenas 15 alunos (um pouco mais de 10% dos que disseram sim e apenas 4% do total da amostra) apresentaram justificativas corretas. Destes, 7 citaram a função constante, que era um exemplo esperado.

Dos alunos que responderam NÃO, 1/3 justificou dizendo que não poderia haver função já que o domínio é “maior” que o contra domínio e 36% afirmaram que só haveria função se fosse de IN→IR. Isto perfaz mais de 2/3 dos que responderam NÃO. Estes dados sugerem que, em certas circunstâncias, a injetividade é vista como uma característica necessária para que uma relação seja função.

Escolhemos fechar o questionário com uma questão aberta, com certo tom de informalidade, sem relação com nenhum contexto, para que os sujeitos pudessem expressar, à sua maneira, o que lhes parecesse melhor sintetizar a noção de função. Assim, esperávamos que as imagens não fossem condicionadas por situações específicas como as que se colocaram nas questões anteriores. O enunciado da questão é o seguinte:

Questão 7

Na sua opinião, o que é função ?

Talvez pela forma aberta da pergunta, quase um terço dos alunos deixou em branco. Trinta e dois alunos (9%) apresentaram uma definição formal aceitável. Se somarmos o número de respostas bem abrangentes do tipo “uma relação ou dependência” com outras de natureza muito restrita – “uma expressão algébrica” – temos que cerca de 70% dos que não deixaram em branco retêm, genericamente, a noção de função como uma das duas alternativas: qualquer tipo de relação entre variáveis ou tipos extremamente particulares de relação entre variáveis.

4. CONCLUSÕES GERAIS

A título de síntese, podemos concluir que o conceito de função é algo a ser tratado com bastante atenção no ensino básico e mesmo na universidade. Imagens de função como variação linear, como fórmulas ou expressões algébricas, como correspondências de padrão único, como relações injetivas ou simplesmente como qualquer tipo de relação entre elementos de dois conjuntos, foram detectadas com elevado índice de freqüência. Considerando que 2/3 dos sujeitos da pesquisa são alunos no primeiro ano de seus estudos universitários, vemos que não se trata de uma amostra marcada pelo insucesso na escola básica.

Os resultados confirmam também, enfaticamente, dois aspectos teóricos relativos às imagens conceituais: o fato de que diferentes circunstâncias sugerem ou fazem evocar diferentes imagens – o que permite a convivência de imagens contraditórias num mesmo indivíduo (veja a análise das questões 3.d), 4.a), 4.b) e 5.b), na p.7) e o fato de que o aluno utiliza muito mais freqüentemente as suas imagens do que as definições formais (veja questão 7).

Os resultados da pesquisa chamam atenção também para a complexidade do processo de formação do professor da escola básica. Trabalhar, por exemplo, o conceito de função na licenciatura, exige uma perspectiva que leve em conta as imagens conceituais dos licenciandos - como alunos em situação de aprendizagem – e, simultaneamente, numa espécie de meta abordagem da questão, exige que se discuta com eles – como futuros professores – a importância do conhecimento das imagens conceituais de seus alunos no desenvolvimento do futuro trabalho pedagógico na escola. Uma formação matemática indissociada da formação pedagógica e da prática docente na escola básica, eis aí, a nosso ver, um dos grandes desafios dos cursos de licenciatura.

5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. Bruckheimer, M., Eylon, Bat S. & Markovits, Z. (1995) - ***Dificuldades dos alunos com o conceito de função***. In: As Idéias da Álgebra – Coxford,,A.F.& Shulte, A.P. (orgs). Tradução: Hygino H. Domingues- São Paulo: Atual, p. 49-69.
2. Dreyfus, T. & Vinner, S. (1989) - ***Images and definitions for the concept of function***. Journal for Research in Mathematics Education***,*** v. 20, n.4, p. 356-336.
3. Eisenberg, T. (1992) - ***On the development of a sense for function***s. In: The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy - Harel, G. & Dubinsky, E. (eds), M.A.A. Notes, v.25, p. 153-173.
4. Ferreira M. C.C., Moreira P.C. & Soares, E. F. (1999) - ***Números Reais: concepção dos licenciandos e formação matemática na licenciatura***. Zetetiké, Campinas, SP , v. 7, n. 12 , p. 95-117, Jul./Dez. 1999.
5. Tall, D.& Vinner, S. (1981) - ***Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity.*** Educational Studies in Mathematics, v.12, p. 151-169.
6. Vinner, S. (1991). ***The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.*** In: Advanced Mathematical Thinking - Tall, D. (ed), Kluwer, p. 65-81.