DEFICIÊNCIA DE ARGUMENTAÇÃO DOS ALUNOS- REFLEXO DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR?

Aimoré Aragão de Oliveira
Projeto Fundão - UFRJ

Os alunos da escola básica possuem muitas dificuldades em matemática, em particular em geometria, pois todo conhecimento, geralmente, é transmitido sem muita justificativa, é um processo muito traumático tentar aprender todos aqueles teoremas e fórmulas. Os assuntos pareciam não ter relação alguma, como num simples passe de mágica...

Esse problema pode ter muitas causas, como: livros inadequados, tipo de ensino adotado e contexto social no qual o aluno está inserido que pode não ser motivador à sua permanência na escola. A principal delas é, sem dúvida, a abordagem adotada pelos professores, pela falta de diálogo entre os alunos, entre o professor e o aluno e pela ausência de experiências no sentido de conjecturar, argumentar e comunicar idéias de matemática, oralmente e por escrito.

O professor, por sua vez, adota essa postura por deficiências de formação. Muitos não conseguem exprimir o seu conhecimento, não conseguem formalizar seu raciocínio e, muitas vezes, sequer demonstrar os resultados ensinados por eles próprios em sala de aula ao longo dos anos, ou seja, nem o professor sabe realmente o que ele tenta ensinar aos alunos. E o pior, esse sentimento de insegurança e desconhecimento por parte do professor é transmitido ao aluno em sala de aula, que passa a sofrer das mesmas angústias e incertezas.

Por isso achamos que, se os professores passarem por experiências de atualização, por cursos de aperfeiçoamento e se, nesses cursos, forem exigidas provas e demonstrações de resultados que eles sabem desde longa data, suas capacidades de expressão e argumentação tendem a melhorar, enriquecendo suas aulas e melhorando-as consideravelmente.

Como afirma Garnica : “A prova rigorosa é elemento fundamental, se pretendemos entender como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de matemática...” Ou seja, através do exercício das demonstrações o professor se torna mais capaz de ensinar seus alunos, pois ele também vai saber mais e melhor aquilo que ele está ensinando.

Foram observados professores de matemática no curso de aperfeiçoamento do IM-UFRJ, na disciplina de geometria, realizado no primeiro semestre de 2000.

Os objetivos eram de observar dificuldades dos professores em relação às demonstrações e avaliar o progresso na argumentação dos professores durante o curso, observando até que ponto o estudo de demonstrações dos resultados de geometria e a realização dessas demonstrações pelos próprios professores influenciam no desenvolvimento de seu raciocínio, melhorando o nível de argumentação matemática e de comunicação das idéias matemáticas.

Para atingir esses objetivos, observei as aulas do curso de Geometria do Curso de Aperfeiçoamento de Professores oferecido pelo IM-UFRJ, observando dúvidas surgidas durante as explicações da professora, sugestões dos alunos nos momentos de resolução de exercícios e alguns diálogos mantidos nos momentos de discussão em grupos.

Foram analisadas resoluções de listas de exercícios e provas de alguns alunos.

Ao final do curso, resolvi aplicar um questionário, com perguntas sobre o enfoque na argumentação e o trabalho em grupos.

As atividades exploradas no curso, foram propostas no sentido de favorecer o desenvolvimento referido acima, além de sistematizar resultados de geometria ensinados na escola básica. Todos os teoremas e propriedades vistos no curso já eram conhecidos dos professores. A atenção estava voltada para as demonstrações e suas componentes, o destaque da hipótese e tese, a noção de condição necessária e suficiente, equivalências, dedução de propriedades e, mais amplamente, para a habilidade de expressão e argumentação.

Nessas demonstrações, não era exigido o aspecto de Prova Formal, contendo todo rigor matemático necessário para a validação de um novo resultado na comunidade de matemáticos, e mesmo as demonstrações realizadas pela professora procuravam ter o aspecto de uma Prova Instrutiva (Hanna 1990).

Uma demonstração que se enquadre no tipo das Provas Instrutivas, tem como função validar um resultado (não necessariamente com grau de rigor e mecanismos diferentes da Prova Formal), esclarecer e educar o receptor da prova, em nosso contexto, os alunos-professores. Tem como finalidade transmitir o máximo de conhecimento leitor, tanto no que se refere à habilidade de encadear o raciocínio que, partindo das hipóteses, permitam alcançar a tese, quanto ao aprendizado dos resultados inerentes à prova, como assuntos anteriores que valerão como ferramentas durante a demonstração ou propriedades novas que serão deduzidas a partir dos resultados demonstrados. Esta categoria de demonstração, por tentar comunicar da melhor forma possível o resultado alcançado, se torna mais eficiente que uma demonstração formal, do ponto de vista pedagógico. A Prova Formal valida um resultado enquanto a Prova Instrutiva valida e explica o resultado, mas ambos os tipos de prova são aceitos pela comunidade de matemáticos na apresentação de um novo resultado em matemática.

Como afirma Steiner (em Hanna,1990): "***... uma Prova Instrutiva faz referência a uma propriedade caracterizadora de uma estrutura mencionada no teorema, tal como é evidente que o resultado do teorema depende desta propriedade. Isto é, se substituirmos no teorema um objeto com propriedades diferentes, o teorema desaba. Em maior grau, nós devemos ser aptos para ver como nós mudamos o objeto e como o teorema muda as respostas.***"(p. 10)

Outro autor que trata dos vários aspectos de uma prova é Garnica, distinguindo as leituras técnica e crítica de uma demonstração.

A leitura das demonstrações pelos alunos-professores não foi feita nos moldes da leitura técnica, mas sim, nos moldes da leitura crítica. A leitura técnica está debruçada sobre o viés sintático da demonstração, descontextualizando-a de outra região que não seja a produção de conhecimento matemático feito de forma profissional. A função da demonstração nesta leitura seria somente validar o conhecimento gerado, sem qualquer outra função inerente à demonstração, afastando-a do caráter didático que ela pode ter, e é justamente esse caráter que procuramos. Fazendo-se uma leitura crítica das demonstrações poderemos achá-lo com mais facilidade.

Segundo Garnica, na leitura crítica, a demonstração assume um papel expositor, onde podemos aprender com ela e não somente validar um resultado através dela. Adotando essa postura de leitura, poderemos ir mais fundo no conteúdo a ser demonstrado e não só chegar à sua validade como também descobrir propriedades novas e sem dúvida alguma, conhecer melhor aquilo que estaremos validando e ensinando.

Para compreendermos e realizarmos perfeitamente as demonstrações dos resultados em geometria, faz-se necessário ter um nível razoável de desenvolvimento e/ ou raciocínio geométrico, além de dominar aspectos técnicos de lógica e da estrutura de uma demonstração.

A teoria de van Hiele explica as dificuldades citadas e as relaciona. Em sua tese de doutorado, realizou um estudo onde sugere que o conhecimento em geometria se desenvolve em níveis hierárquicos, do simples ao mais complexo. Os níveis são hierárquicos no sentido de que um aluno só avançará um nível quando dominar totalmente todos os níveis anteriores. Esses níveis não dependem da idade do aluno, dependem das experiências vividas pelos alunos e da forma com que elas foram trabalhadas em seus estudos.

Van Hiele estabeleceu cinco níveis de desenvolvimento, a saber:

Reconhecimento: Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.

Análise: Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.

Abstração: Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.

Dedução: Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.

Rigor: Capacidade de fazer demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.

Tommy Dreyfus e Nurit Hadas (1987) observaram que uma das razões que vem causando dificuldades em se aprender geometria euclidiana e, consequentemente, diminuindo seu espaço no currículo escolar, são as deficiências conceituais causadas pelas argumentações lógicas, que constituem a essência da geometria euclidiana. Essa dificuldade pode ser transmitida pelo professor que, da mesma forma que não consegue encadear logicamente seus argumentos para provar alguma propriedade, certamente não usará desse recurso para validar qualquer teorema ou propriedade em sala de aula, impedindo o aluno de conhecer e exercitar esse mecanismo tão importante e fundamental na matemática. O aluno ficará limitado a decorar fórmulas, se tornando incapaz de conjecturar qualquer resultado que porventura surgisse durante seus estudos ou em resoluções de exercício.

Com isso, Dreyfus e Hadas formularam seis princípios que sintetizam as dificuldades de iniciantes no estudo de geometria, a saber:

Princípio 1. Um teorema não tem exceções. Uma afirmação matemática é correta somente quando é correta em qualquer situação concebível.

Princípio 2. Mesmo afirmações óbvias têm de ser provadas. Uma demonstração não pode ser construída com base nos aspectos aparentes da figura.

Princípio 3. Uma demonstração deve ser geral. Casos particulares não são suficientes para validar uma afirmação. Entretanto, um contra-exemplo é suficiente para negar uma afirmação.

Princípio 4. As suposições de um teorema devem ser claramente identificadas e

distinguidas das conclusões.

Princípio 5. A recíproca de uma afirmação correta não é necessariamente correta.

Princípio 6. Figuras complexas são constituídas de componentes básicos cuja identificação pode ser indispensável em uma demonstração.

Os princípios considerados mais significativos em nossas análises são os princípios 1, 3, 4 e 5. Os princípios 2 e 6 não se fizeram tão importantes porque os professores já os tinham bem fundamentados, não precisando grandes esforços por parte da professora em ressaltar as dificuldades retratadas nestes dois princípios.

No trabalho completo, podemos ver comentários sobre todos os alunos em todas as listas e provas, mas devido ao espaço, observaremos apenas algumas comparações feitas entre exercícios de dois alunos em momentos diferentes do curso.

Lista 1:

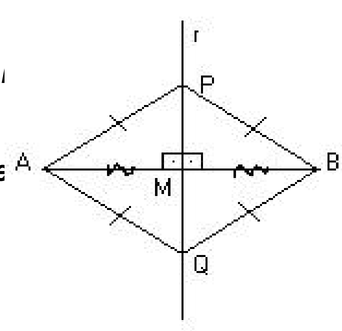
Mostre que uma reta r não paralela a um segmento AB equidista de A e de B se e só se contém o ponto médio de AB.

($\Leftarrow$) hip.: r contém o ponto médio de AB
tese: r equidista de A e de B

Dem.:
$M \in r$ e M é ponto médio de AB, então $r \equiv med(AB)$
$\Rightarrow$ MA=MB.
Nos triângulos $\triangle PAM$ e $\triangle PBM$, temos:

PM comum
$A\hat{M}P = B\hat{M}P$ Pelo caso
AP = PB

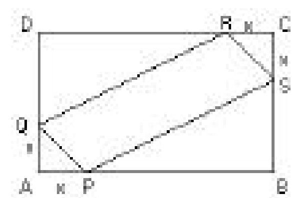
? ***r é equidistante de A e***



- Neste exemplo de demonstração, o aluno se prendeu a um caso particular, assumindo que a única reta que pode cortar o segmento em seu ponto médio seria sua mediatriz.

Lista 4:

Seja ABCD um retângulo com AB= a e BC= b, como mostra a figura abaixo. Os pontos P e Q, assim como R e S, distam x dos vértices A e C, respectivamente. Que tipo de Quadrilátero é PQRS?



Sejam os △APQ e △CRS, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AQ}=\overline{CS}=x\\ \hat{A}=\hat{C}=90^{o}\\ \overline{AP}=\overline{CR}=x\end{array}\right\}\text{Por LAL, } \triangle APQ = \triangle CRS\text{, logo } \overline{QP}=\overline{RS}$$

Sejam os △DRQ e △BPS, temos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BP}=\overline{DR}=a-x\\ \hat{B}=\hat{D}=90^{o}\\ \overline{DQ}=\overline{BS}=b-x\end{array}\right\}\text{Por LAL, } \triangle DRQ = \triangle BPS\text{, logo } \overline{QR}=\overline{PS}$$

Traçando a diagonal $\overline{QS}$, temos os △s QPS e QRS

onde $\overline{QP}=\overline{RS}$, $\overline{PS}=\overline{QR}$ e $\overline{QS}$ comum.

Por LLL temos: △QPS= △QRS, $Q\hat{S}P = S\hat{Q}R$= a e

$S\hat{Q}P = Q\hat{S}R$= b

Como $Q\hat{S}P = S\hat{Q}R$ (alt.int.), pelo teor. paralelas: $\overline{QR} \,//\, \overline{PS}$

Como $S\hat{Q}P = Q\hat{S}R$ (alt.int), pelo teor. paralelas: $\overline{QP} \,//\, \overline{RS}$.

Portanto, PQRS é um paralelogramo.

- Este já é um exemplo de uma demonstração correta, onde o aluno mostra claramente como chegou a cada resultado, apresenta seu raciocínio de forma organizada e com coerência. Outro ponto que merece atenção é o fato de o aluno ter percebido a necessidade de traçar linhas complementares (a diagonal do polígono) para ajudar a resolver o problema. Observa-se que ele poderia ter concluído a tese apenas a apartir das igualdades OR=PS e QP=RS, mas optou por não usar o fato de que estas igualdades são suficientes para PQRS ser paralelogramo e provou isto perfeitamente.

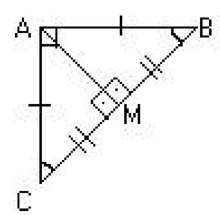
Esses dois exemplos mostram que houve de fato um progresso na capacidade de argumentação desse aluno.

Vamos a outra comparação:

Lista 1:

"Considere um triângulo ABC cujo maior ângulo seja $\hat{A}$ ***e tal que*** $\hat{A} = 2\hat{B}$ ***. Mostre que o triângulo ABC é isósceles se e somente se é retângulo."***

b gþ ***$\triangle$ABC é retângulo.***



No $\triangle$ABC temos que:

$\hat{A} > \hat{B}$, $\hat{A} > \hat{C}$ e $\hat{A} = 2\hat{B}$

$\triangle$ABC é retângulo, por suposição $\hat{A} = 90º$

Se $\hat{A} = 2\hat{B}$, ***então*** $\hat{B} = 45º$

Onde: $\hat{A} + \hat{B} + C = 180º$, $\hat{A} = 90º$, $\hat{B} = 45º$ e $\hat{C} = 45º$

(Lei Angular de Tales)

Logo, $\hat{B} = \hat{C}$.

Afirmamos que: $M = \frac{\overline{CB}}{2}$, $\overline{CM} = \overline{BM}$ ***e*** $\overline{AM}$ ***bissetriz de*** $\hat{A}$

Considerando os triângulos ACM e ABM, pelo caso de congruência de triângulos L.A.L

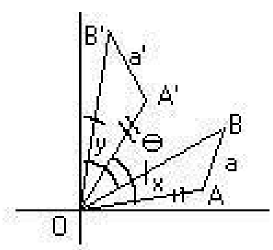
Então: $\overline{AC} = \overline{AB}$ e $\hat{B} = \hat{C}$.

Sendo assim, $\triangle$ABC é isósceles.

- Neste exemplo, podemos constatar que o aluno demonstrou duas vezes o mesmo resultado. Outro erro foi confundir $\frac{\overline{CB}}{2}$, que é um segmento que mede a metade de $\overline{CB}$,com o ponto médio de $\overline{CB}$. Além disso, usou na 2ª parte da demonstração, propriedades do triângulo isósceles, ao provar que o triângulo é isósceles. Em geral, vemos que o aluno tem dificuldade em transferir para o papel o que ele está pensando.

Prova 1:

Seja $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$, tal que: OA=OA' e OB=OB' .
Se OA até OA' o ângulo é θ e de OB até OB' o ângulo é θ .
Preciso provar que: x = y.
Se A'OB o ângulo é α , podemos afirmar que :
$x+\alpha = y+\alpha = \theta$, logo x = y.
Pelo caso de congruência de triângulos LAL, concluímos que os segmentos a e a' são congruentes.



O segmento a' é a imagem do segmento a por uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, em torno da origem. Mostre que a e a' são congruentes.

- Neste exemplo o aluno já argumenta de uma forma melhor. Ainda contém alguns erros, a redação ainda não está totalmente clara, e por exemplo, não há justificativa para as igualdades OA=OA' e OB=OB'. Mas a forma em que o aluno desenvolve seu raciocínio já melhorou significativamente, evidenciando um avanço entre essas duas atividades.

Infelizmente, com a pequena amostra de alunos que observei, não pude obter grandes conclusões. Alguns alunos já tinham uma certa prática em demonstrações e sua melhora com o curso, foi uma espécie de “aparar arestas”, outros não conseguiram grandes progressos e outros evoluíram muito com o curso. Além disso, o nível de dificuldade entre as lista foi diferente, não permitindo uma comparação justa entre as formas de resolução.

Outro ponto que não nos favoreceu muito, foi a incapacidade de fazer uma observação mais profunda sobre o trabalho em grupos na sala de aula. Devido à evasão de alguns alunos e à mudança de grupo de outros, por se sentirem mais a vontade com colegas de outros grupos, não pude observar o progresso de alunos de um mesmo grupo ou a possível influência dos melhores alunos sobre os demais.

Foi formulado um questionário, abrangendo todos os aspectos do curso, como o estudo das demonstrações, trabalho em grupos e o que mais os agradaram durante o curso, suas dificuldades e onde eles acharam que progrediram.

Após a leitura das respostas, constatamos que realmente houve um progresso quanto à postura dos professores com relação a argumentação.

Podemos constatar essa mudança de postura através de algumas respostas ao questionário:

“Eu estudei em uma faculdade particular ... nunca tinha tido contato com demonstrações. O curso propiciou-me aprender a fazer essas demonstrações.

No início, a maior dificuldade foi justamente as demonstrações. Eu não tinha idéia nem do que era hipótese e tese ... percebi que a geometria não é somente um amontoado de fórmulas, enunciados e definições. Tudo está encadeado...”

“Antes do curso, eu não me preocupava muito com as demonstrações e sim com os resultados. Com o curso, verifiquei que com as demonstrações e entendendo-as podemos chegar a qualquer resultado em geometria.”

“Aplicar resultados sem saber o por quê e sem mostrar ao aluno e exigir dele (de acordo com o nível) o mínimo de lógica, nunca mais!”

“Estava acostumada a receber as informações, fórmulas prontas, com esse curso aprendi a exercitar, a deduzir as fórmulas, descobri as informações que antes eram dadas ... as demonstrações ajudaram a tirar o vício de querer calcular tudo, a ter uma visão mais ampla e dinâmica da geometria.”

“Tive muitas dificuldades nas demonstrações, pois tinha dificuldade em falar o que vejo, agora está começando a melhorar, no início, não sabia nem por onde começar.”

“Achei muito importante o estudo das demonstrações, a maneira de formulação correta da proposição a ser provada; a escolha de argumentos necessários e aderência rigorosa das regras da lógica no desenvolvimento da prova.”

“Tive muitas dificuldades. Foi a primeira vez que recebi aulas de geometria. O meu pensar em geometria ficou menos intuitivo com o aumento do conhecimento, ou seja, o conhecimento permite a comprovação das intuições.”

“O que mais me agradou no curso foi a forma mais prática de se tratar alguns assuntos em geometria, em que nos facilita a trabalhar com nossos alunos. A parte das demonstrações também é importante, pois nos faz ver a geometria de uma forma mais ampla.”

Levando em conta os princípios abordados no curso de geometria, professores poderão trabalhar de forma satisfatória com seus alunos, desenvolvendo neles a capacidade de dominar, ou torná-los cientes do processo dedutivo da geometria euclidiana, tornando-os capazes de compreender, construir e até avaliar demonstrações.