Quatérnios : Os Números Complexos do Espaço Quadridimensional

Profª M.Sc. Lenira Pereira da Silva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Sergipe
Escola Técnica Federal de Sergipe
lenirapsilva@uol.com.br

3.0 – Introdução

Das várias ferramentas matemáticas utilizadas em ***Computação Gráfica***, a maioria delas são abordadas em textos básicos; os ***quatérnios*** não.

A ***Teoria dos Quatérnios*** nos fornece uma ferramenta poderosa que vem sendo utilizada em vários ramos da ciência, em especial na ***Animação Computacional*** pelo fato de diminuir custos e aumentar a eficiência dos algoritmos.

Quatérnios, embora não muito conhecidos, fornece uma base forte e fundamental para descrever orientações de um objeto ou de um vetor. Eles são eficientes e também convenientes para resolver problemas com orientações, rotações em Computação Gráfica e em Animação Computacional.

2.0 – Histórico

Quatérnios foram descobertos por ***Sir William Rowan Hamilton*** em outubro de 1843, enquanto tentava estender o plano complexo para o espaço tridimensional. Ele definiu a adição e a multiplicação dos quatérnios verificando as propriedades associativa e comutativa da adição e associativa e distributiva em relação à multiplicação, mas que ***não valia a lei comutativa da multiplicação***. Este é, historicamente, o primeiro exemplo de uma ***álgebra não comutativa*** que nasceu subitamente e abriu as portas da Álgebra Abstrata.

Estudos afirmam que o ***produto interno e o produto vetorial*** foram descobertos como parte do ***produto de quatérnios***.

Em 1845, ª Cayley mostrou que quatérnios podiam representar orientações. James Clerk Maxwell, no clássico “Treatise on Eletricity and Magnetism” usou a diferenciação de quatérnios.

Como podemos perceber, quatérnios são tão surpreendentemente ***velhos*** quanto ***desconhecidos***. Por dezenas de anos eles foram largamente divulgados e reqüentemente utilizados, mas por alguma razão misteriosa, eles desapareceram da história, sendo redescoberto há pouco tempo no mundo da Engenharia Espacial e da Robótica.

Shoemake em 1985, introduziu o uso de quatérnios na Computação Gráfica com o intuito de facilitar a animação rotacional.Ele discutiu vantagens da sua utilização na obtenção de interpolações suaves de rotações e descreveu algoritmos de conversões entre matrizes, ângulos de Euler e quatérnios. Desde então, interpolar orientações vem sendo objeto de estudo de vários trabalhos publicados

3.0 – Definições e Propriedades

Em geral, elementos quatérnios serão denotados pelas letras minúsculas p, q ou r. Denotaremos o conjunto dos quatérnios por H (em homenagem a Hamilton).

Definição : Sejam $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$

Então um elemento $q \in H$ é definido como sendo um elemento da seguinte forma :

$$q = [w,v] = [w,(x,y,z)] = w + ix + jy + kz, \quad w,x,y,z \in R;$$

onde i, j, k representa a base ortonormal do R^3

3.1 - Propriedades

No conjunto dos números quatérnios são preservadas todas as propriedades dos números reais e a dos complexos, exceto a comutatividade na multiplicação. Descreveremos a seguir, estas propriedades utilizando dois números quatérnios ***q*** e ***q'.***

1.0 - Igualdade: $q = q' \Leftrightarrow w = w' \text{ e } v = v'$

2.0 - Adição: $q + q' = [w + w', v + v']$

3.0 - Multiplicação: $q.q' = [w.w' - v.v', v \times v' + w.v' + w'v]$

4.0 - Conjugado: $q^* = [w,v]^* = [w,-v]$

5.0 - Norma: $\|q\| = \sqrt{q.q^*}$

6.0 - Inverso: $q^{-1} = \dfrac{q^*}{\|q\|^2}$

3.2 - Quatérnios Unitários

Definição : Seja $q \in H$. Se $\|q\| = 1$, então q é dito um ***quatérnio unitário***

Denotaremos por H_1 como sendo o conjunto dos quatérnios unitários, os quais formam uma *hiper - esfera unitária* no espaço quadridimensional R^4.

Proposição 1 : Seja $q = [w,v] \in H_1$. Então existe $v' \in R^3$ e $\theta \in]-\pi,\pi]$ tais que $q = [\cos\theta, v'\mathrm{sen}\theta]$.

3.3 - Quatérnios e Rotações

Hamilton procurou descrever rotações no espaço da mesma forma que os números complexos descreviam rotações no plano. Assim, podemos fazer uma analogia entre os quatérnios unitários e as matrizes de rotação. Ambos formam um grupo multiplicativo não-comutativo. Além disso, são facilmente convertidos um no outro.

Embora similar, a composição (multiplicação) de quatérnios é muito mais eficiente do que a composição de matrizes de rotação. Isso decorre do fato dos quatérnios serem um maneira não redundante de descrever rotações (com pontos contendo 4 pontos de números flutuantes) enquanto as rotações com matrizes são redundantes (com 9 números de pontos flutuantes).

Como os quatérnios unitários formam um grupo multiplicativo, o produto de dois destes quatérnios também pertence a este grupo, isto é, a multiplicação de quatérnios preserva a norma. Um quatérnio unitário ***descreve a rotação que um objeto faz a partir de sua orientação inicial até a sua nova orientação***

Definição : Seja q ë H, q quatérnio puro; isto é, $q = [0, v]$, definimos o operador rotacional quatérnio L_q (associado ao quatérnio q e aplicado ao vetor v ë R^3) como sendo a aplicação

$$L_q : R^3 ♦ \quad R^3$$

$$L_q(v) = qvq^{-1}$$

Com isso, fazendo uma relação entre os quatérnios e o espaço das rotações, temos os seguintes resultados :

Teorema 1 : Seja p um ponto no espaço tridimensional (projetivo), representado como um quatérnio em coordenadas homogêneas, isto é :

$$p = (w : x : y : z) \quad [w,(x, y, z)] = [w, v]$$

e seja q um quatérnio puro não - nulo. Então :

i) O produto qpq^{-1} leva $p = [w, v]$ em $p' = [w, v']$ com $|\mathrm{v}| = |v'|$;

ii) Qualquer múltiplo real de q, diferenente de zero produz a mesma ação.

Teorema 2 : Uma rotação de um ângulo θ em torno de um eixo definido por um vetor unitário η é representado por $L_q(v) = qvq^{-1}$, onde $q = \cos\frac{\theta}{2} + \eta\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$

4.0 - Representação Matricial dos Quatérnios

Uma sequência de rotação quatérnia q_1 seguida de q_2 é dada por $q = q_2.q_1$, pois

$$q_2(q_1 p q^*)q_2^* = (q_2 q_1)\,p\,(q_2 q_1)^* = qpq^*.$$

Como a multiplicação de quatérnios é distributiva em relação à soma, podemos expressar esta operação na forma matricial, de dois modos diferentes.

Assim, dados $q = [(x, y, z), w] = [v, w]$ e $p = [(a, b, c), d]$ temos duas transformações line - ares associadas ao produto dos dois quatérnios dados :

$$L_p(q) = p.q \qquad e \qquad R_q(p) = p.q$$

Para determinarmos as matrizes associadas a estas transformações, devemos efetuar o produto de quatérnios e escrever os vetores como sendo vetores colunas.

Assim, podemos escrever as matrizes correspondentes à multiplicação de quatérnios pela direita e pela esquerda, respectivamente, como :

$$L_p(q) = \begin{pmatrix} d & -c & b & a \\ c & d & -a & b \\ -b & a & d & c \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad e \quad R_q(p) = \begin{pmatrix} w & z & -y & x \\ -z & w & x & y \\ y & -x & w & z \\ -x & -y & -z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Uma rotação T é representada usando quatérnios por :

$$T(v) = L_q(v) = qvq^{-1}.$$

Como q é unitário, temos que $q^{-1} = q^*$, e daí segue que :

$$T(v) = L(q)R(q^*)(v).$$

5.0 - Quatérnios e os Outros Métodos de Rotação

Concluídas estas noções sobre os quatérnios e tendo conhecimentos sobre os outros métodos de rotação, somos capazes agora, de relacionar vantagens e desvantagens do uso dos quatérnios como um operador rotacional.

5.1 - Vantagens:

-Menor espaço de armazenamento – o quatérnio tem 4 componentes e uma matriz de rotação possui 9 ou 16 em coordenadas homogêneas;

-Temos uma parametrização global, o que facilita fazer interpolação de rotações – interpolamos na hiper-esfera S^3 em R^4;

-A multiplicação de quatérnios pode ser efetuada de modo mais eficiente do que a multiplicação de matrizes;

-Quatérnios não possui singularidades do tipo “gimbal lock”;

-Possui uma boa interpretação geomética.

5.2 - Desvantagens

-Quatérnios representa somente rotações;

-A matemática quatérnia, por não ser incluída no currículo padrão, pode parecer complicada

6.0 - Referências Bibliográficas

-DAM, Erick B., KOCH, Martin, LILLFHOLM, Martin. **Quaternios, Interpolation and Animation**. Capturado em jul. 2000. Online. Disponível na internet http://mat.ufpb.br/pub/textos/cgraf/quatern1.zip.

-KUIPPERS, Jack B.. **Quaternions and Rotations Sequences: A primer with Aplications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality.** New Jersey: Princeton University Press, 1999. 372 p.

- SHOEMAKE, Ken. **Animating Rotation with Quaternion Curves.** Computer Graphcs (Proc. Of SIGGRAPH'85).