

Grupo de trabalho: REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS

Arlete de Jesus Brito – Natal – RN

Departamento de Matemática – UFRN

Dione Lucchesi de Carvalho – Campinas – SP

PRAPEM/CEMPEM - FE-UNICAMP

PALAVRAS CHAVES: Ensino de Geometria; aprendizagem de Geometria; registros de representação; conexões entre registros de representação; registros de representação em Geometria.

As considerações que se seguem constituem-se em sistematizações de reflexões sobre nossa prática no Ensino Médio e no Ensino Superior utilizando como apoio teórico básico os estudos de Duval (1995). Este pesquisador preconiza que o conhecimento mobilizado para estudar Matemática solicita a utilização de alguma representação semiótica cujos registros se constituem em sistemas. Em Geometria, as representações que ele se refere são: os desenhos utilizados como parte do enunciado de uma atividade; as demonstrações sintéticas; os gráficos e as equações da Geometria Analítica; as definições e os enunciados; as argumentações de “convencimento” em língua natural.

Além dos estudados por Duval (1995), em livro recente (BRITO & CARVALHO, 2001¹), abordamos também outros registros² de representação, que nem sempre podem ser considerados como constituindo um sistema, tais como: os desenhos utilizados como auxiliares de uma explanação ou de uma demonstração sintética ou analítica, ou seja, com função abduziva; seqüências de expressões algébricas utilizadas em dedução de fórmulas e em demonstrações de propriedades geométricas; as fórmulas para cálculo da medida de lados e/ou arestas, do perímetro, da área, do volume, do número de diagonais e/ou arestas; os desenhos utilizados para as representações planas dos objetos do espaço tridimensional; sólidos geométricos construídos em massa de modelar³, em madeira ou em acrílico (mesmo os “sólidos ocos”, montados a partir de planificações), chamados “material de manipulação”.

A atividade matemática, e em particular a geométrica, requer a utilização de outros sistemas de expressão além da língua natural e das imagens. Além disso, *mobiliza simultânea ou alternativamente vários registros de representação semiótica, alguns ligados ao funcionamento cognitivo comum como a língua materna, e outros criados pela necessidade do desenvolvimento da [própria] atividade matemática* (FIGUEIREDO, 2000, p.54). Como repercussão desse fato, Duval considera duas questões no ensino: a da distinção entre o objeto matemático e sua representação e a das três funções que as representações semióticas têm que cumprir.

Com relação à primeira questão, não é possível haver compreensão se não distinguirmos o objeto de sua representação. Ou seja, é essencial não confundir os objetos matemáticos (os poliedros, as áreas, as transformações geométricas, etc.), com suas representações, (os desenhos,

¹ Dentre muitas falhas de editoração deste livro, a autora Dione Lucchesi de Carvalho foi considerada como do Departamento de Matemática, o que não corresponde à verdade. Seu vínculo é com o CEMPEM.

² Há necessidade de investigações sobre a constituição ou não de sistemas com os registros mencionados.

³ Ou em sabão em pedra.

as definições, as fórmulas, os gráficos), seja porque o objeto matemático é abstrato, seja porque um mesmo objeto pode ser dado por várias representações diferentes.

Outra questão decorre da necessidade que as representações cumpram três funções indissociáveis: *de comunicação*⁴, *de tratamento de informação* e *de objetivação do ente matemático em estudo*. Assim, as representações constituídas de signos (enunciados em língua natural, fórmulas algébricas, gráficos, figuras geométricas...) nada mais são, ou deveriam ser, que o meio que a pessoa dispõe para partilhar suas representações mentais. Tornar acessíveis aos outros todo o conjunto de imagens e concepções que tem sobre um objeto, uma situação e sobre tudo aquilo que lhe é associado. Este “deveriam ser” se justifica pois a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de símbolos específicos para representar os objetos e suas relações.

Fica então caracterizada nossa perspectiva de ensino/aprendizagem, na qual a pessoa reelabora suas idéias e concepções a respeito do ente matemático que está estudando num processo que compreende indissociavelmente a elaboração de sistemas de registros de representação. Cada um dos registros têm diferentes regras de tratamento do objeto matemático e, segundo Duval, quanto maior for a flexibilidade que a pessoa tiver em transitar entre os diferentes registros, maior será a apreensão deste objeto.

O tratamento do objeto matemático, que se dá no interior de um registro, evidencia algumas de suas propriedades. Utilizando a terminologia de Duval, ao fazer a *conversão*, ou seja, a passagem de um sistema de registro para outro, a pessoa articula as propriedades que estudou em cada um deles, donde a importância de dispor de mais de um sistema de representação.

Em qualquer processo de tratamento do conhecimento matemático ou de conversão de um sistema para outro, interfere a língua natural munida de um vocabulário técnico do tema em estudo. Na Geometria, os termos específicos raramente fazem parte do elenco de palavras com as quais nos deparamos no cotidiano não-escolar. A atribuição de significado a expressões geométricas constitui-se na elaboração de sistemas de registro de representação que vai além do funcionamento cognitivo comum mencionado por Figueiredo (2000), pois no âmbito da ação discursiva humana que se constitui a sala de aula (PINO, 1992) se objetiva a conversão de um registro em outro.

Nesta apresentação, estaremos discutindo as conversões de um sistema de registro em outro envolvidas nas atividades dizem respeito a todas as combinações possíveis, dois a dois, três a três e os quatro em conjunto, dos registros da língua natural (descrição das propriedades invariantes no objeto e no desenho), “em material de manipulação”, “em perspectiva” e “na planificação”. Vale destacar que estes sistemas de representação foram culturalmente construídos, suas “regras de registro” não são inatas, têm que ser aprendidas para ter significado para o estudante. Ou seja, estamos falando de uma experimentação com um sistema de signos que mobilizam muitas propriedades dos objetos geométricos tematizados, mas são as discussões demandadas pelas atividades que (re)significam os termos utilizados e originam a (re)construção do conhecimento matemático.

Ao estudar Geometria, o aluno tem necessidade de conhecer um sistema de registro de representação do espaço no qual as três dimensões principais, comprimento, largura e altura,

sejam representadas em três direções diferentes; ele tem necessidade de uma perspectiva. Esse registro, entretanto, destaca apenas algumas propriedades dos entes geométricos tridimensionais. Sendo assim, as atividades que solicitam a alunos que construam, com cubos, sólidos desenhados em perspectiva (cônica, cavalera ou isométrica) devem preceder, em qualquer nível do Ensino Básico, àquelas que solicitam o desenho neste sistema de representação. Neste caso, a atividade não é simplesmente de cópia, exige a mobilização de regras de conversão embutidas no registro, é uma atividade também e principalmente de leitura.

É pouco usual considerar o material de manipulação como um registro de representações, porém temos que ressaltar que qualquer objeto matemático é abstrato e aquela “escultura” que escolhemos para utilizar em nossas aulas o está representando e permitindo um tipo de tratamento restrito a suas condições materiais que não são as mesmas do objeto em si nem de suas propriedades matemáticas. Destacamos que os consideramos úteis à medida que despertam reflexões sobre o tema matemático em estudo. E é a partir destas reflexões discutidas com seus pares e/ou com o professor que o estudante produz conhecimento.

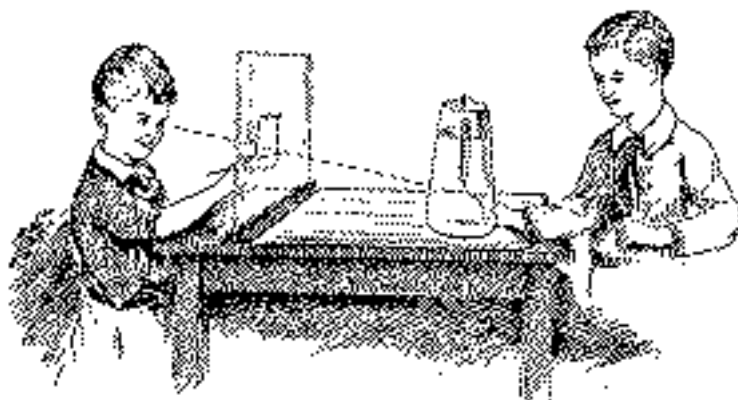


Fig. 1

Todas as vezes que propusemos a nossos alunos que desenhassem em perspectiva, eles utilizaram a perspectiva cavalera, provavelmente porque é a utilizada nos livros didáticos brasileiros. Já ao propor a utilização do dispositivo de Alberti (KLINE, 1992)⁵, que consiste em colocar, perpendicularmente ao plano no qual se apoia o objeto, um vidro ou qualquer outra película transparente sobre a qual se desenhará (Fig. 1)⁶, o aluno será levado a utilizar a perspectiva cônica⁷. Quando é proposto a utilização deste dispositivo, são levantadas questões que favoreçam a análise das relações de congruência, paralelismo e perpendicularismo que haviam no objeto e as do desenho, ou seja, as invariantes do dispositivo inicialmente e quando é alterada a posição do desenhista e/ou da película transparente.

Na análise dos desenhos produzidos com o auxílio do dispositivo de Alberti, estamos utilizando intuitivamente as propriedades de um objeto que permanecem invariantes perante a

⁴ Neste texto, mantivemos o termo “comunicação”, utilizado por Duval (1995). Para nossos estudo preferimos a expressão “partilha de significados” que é mais condizente com a perspectiva sócio-cultural.

⁵ Em seu livro de 1435, Alberti descreve um dispositivo para desenhar (KLINE, 1992).

⁶ Imagem extraída de FTD (1936, capa).

⁷ Para comparar os desenhos e discutir o que são as imprecisões de traçado e ao que são transformações próprias das representações, temos utilizado as regras de perspectiva cônica elaboradas a partir do livro de Isidoro Pedro (1936).

“projecção” provocada e que podem ser estudadas na Geometria Projetiva⁸. A propriedade mais interessante da projeção, entretanto, é o fato das linhas paralelas não se projetarem, obrigatoriamente, em linhas paralelas, fato do qual decorre a não manutenção do famoso Quinto Postulado de Euclides.

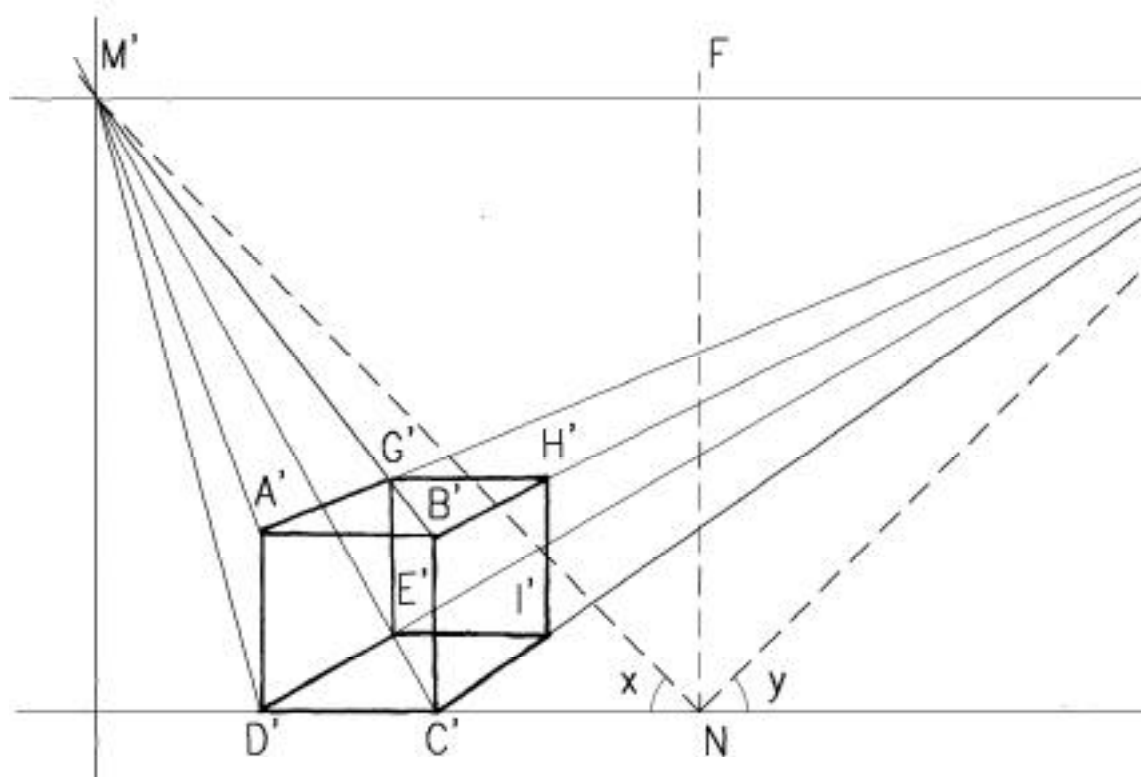


Fig. 2

As propriedades da Geometria que serão acionadas para a análise das medidas do desenho e do sólido que serviu de modelo dependem também da conversão entre o registro da língua natural para o daquele dos objetos de manipulação. Ou seja, as regras de tratamento do sistema de perspectiva estão sendo constituídas a partir desta conversão. Esta situação provoca a reflexão sobre a semelhança e a não-semelhança de forma integrada e não em duas situações completamente independentes. Por exemplo, na representação do cubo em perspectiva cônica (Fig. 2)⁹, os desenhos de duas faces perpendiculares ao plano no qual está apoiado são semelhantes entre si e os das faces paralelas não.

Não estamos supondo que o estudante tenha familiaridade com a denominação dos vértices de figuras geométricas por pontos antes de fazer atividades deste teor, mas que a adquira à medida que faz o desenho, que o como dos colegas e com o cubo representado em material de manipulação ou somente mencionado verbalmente.

⁸ A saber: Retas projetam-se em retas. Pontos projetam-se em pontos. A “incidência” de linhas é preservada (isto é, se dois objetos têm um ponto em comum, suas projeção também terão) (SCOTT, 1987).

⁹ Imagem extraída de Brito & Carvalho (2001, p. 85).

As inclusão da planificação em nossos cursos é motivada por duas intenções diretamente pedagógicas. Uma delas, é estudar um outro sistema de registro de representação além dos já mencionados (língua natural, gráficos cartesianos, expressões algébricas, perspectiva), desejamos discutir a elaboração das regras de correspondência entre sistemas, concebidas por Duval (1995). Indissociavelmente relacionado a este motivo está a coordenação entre as propriedades mobilizadas da Geometria Plana e da Espacial propiciada com as atividades relativas à planificação. Além dessas razões resolvemos privilegiar o estudo das planificações por motivos relacionados à Arte¹⁰.

Ao realizar a atividade de conversão do registro da planificação no registro em perspectiva, o estudante tem oportunidade de reelaborar e expressar as idéias e as imagens que têm sobre as relações entre vizinhança de faces, convergência de arestas, superfícies que são limites de sólidos. Além disso, se discutirmos em assembléia¹¹ os relatórios elaborados, poderemos sistematizar o vocabulário técnico envolvido no estudo, ou seja, converter também para a língua natural enquanto descritora (caracterizadora e “definidora”) dos objetos geométricos. Com esse tipo de trabalho os relatórios transformam-se de “exclusivamente” tarefa escolar para fonte de produção de conhecimento.

Inventar planificações de objetos geométricos, com a presença ou não de sua representação manipulável, é uma atividade que propicia discussões sobre todas as possibilidades de solução. Nessas discussões, freqüentemente, surge a necessidade de mostrar que tais possibilidades foram esgotadas e, desta questão, tem se originado a diferenciação entre “exibir todas as soluções” e “demonstrar que se esgotou as alternativas”. Questão fundamental, se considerarmos a necessidade de inserir o aluno Ensino Médio no mundo do trabalho científico.

Elaborar planificações de alguns objetos geométricos tem possibilitado o estabelecimento de relações importantes com a Geometria Métrica, como, por exemplo, discutir o volume dos diferentes prismas de mesma base e mesma altura. As atividades com planificações favorecem também o retomar do estudo da Geometria Plana e/ou da trigonometria. Um exemplo deste tipo de reelaboração é a busca do ângulo do setor circular da face lateral do cone reto do qual se conhece a altura e o raio da base.

Quais as informações necessárias para determinar um cone não-reto? Em atividades deste tipo se evidencia também a necessidade do vocabulário técnico exercendo as três funções destacadas por Duval (1995) – de comunicação (partilha de significados), de tratamento de informação e de objetivação do ente matemático –. Ao mesmo tempo que o estudante resolve os problemas, vai utilizando, às vezes correta, às vezes incorretamente os termos, indicando as concepções cada vez mais refinadas que vai adquirindo de sólido geométrico. Sob este aspecto, um gravador em cada grupo de trabalho pode ajudar o professor, não só para avaliar o processo que os alunos estão percorrendo, mas como também para organizar a síntese de finalização do tema.

¹⁰ Lembremos dos trabalhos de Escher (Por exemplo, Schasttcheinder & Walker, 1987) que criou decorações até para os caleidociclos inventados pelo artista Wallace Walker, nos anos 60 do século XX.

¹¹ Costumamos chamar as discussões realizadas com todo a classe, a partir de um trabalho individual ou em pequenos grupos, de “assembléia”.

Além das discussões que nos remetem a problemas “arquitetônicos” (de execução de planificações), temos ainda problemas com relação a sólidos não planificáveis¹², como os ovóides e a esfera, por exemplo. Os problemas com a planificação (ou não-planificação) da esfera têm gerado muitas questões para a cartografia, inclusive contendas de natureza ideológica como o tamanho do continente africano nos mapas-múndi tidos como oficiais.

As atividades geométricas podem suscitar outros tipos de conversões além das conversões entre sistemas de representações planas de objetos a três dimensões. Uma delas diz respeito à relação entre a língua natural e os desenhos utilizados em diferentes momentos das aulas de Geometria (em enunciados de atividades, em explanações e demonstrações, para representações planas de objetos a três dimensões, em Geometria Analítica). Duval (1995) ao estudar os desenhos que fazem parte do enunciado de uma atividade, destaca que eles não são isolados daqueles referentes ao vocabulário técnico utilizado para exprimir as idéias sobre os objetos geométricos e que, de certa forma, fazem parte da língua natural. Pois em Geometria não há desenho que represente por si mesmo, sem legenda, pois *uma figura não representa uma situação geométrica senão à medida de que o significado de certas unidades figurais e de certas relações entre elas são explicitamente fixadas de início* (DUVAL, 1995, p. 188).

O sistema de registro formado pelos gráficos da Geometria Analítica pode mobilizar propriedades do objeto matemático que, de outra forma, não emergiriam, por outro lado tem a característica de ser de um nível de abstração maior que os desenhos utilizados nos enunciados sintéticos. Por exemplo, a abordagem analítica das áreas de paralelogramos, triângulos e trapézios explicita a relação entre as coordenadas dos pontos (adimensionais) e a medida bidimensional (área). Uma abordagem desse tipo favorece a significação métrico/geométrico àquela matriz obtida com as coordenadas dos pontos, ou seja, para que a Geometria Analítica continue Geometria não se torne só Álgebra.

Em algumas atividades

*... as informações sobre as situações-problema e a resolução provocam a conversão de três sistemas de registros: a língua natural, o desenho e a linguagem algébrica. Esta conversão não pode ser entendida como um simples exercício de dicionário, mas como **uma mobilização conjunta das diversas propriedades do objeto matemático que emergem em cada um destes sistemas.** ...*

Nossa insistência em relacionar a língua natural com outros sistemas de registro se deve a um objetivo amplo, talvez um desejo. Gostaríamos que os estudantes, em todos os níveis de estudo se tornassem autônomos na leitura de livros de Geometria, que os estudos pessoais dos alunos do Ensino Básico não se restringissem à leitura de paradidáticos e que os livros de Matemática fossem procurados como fonte de informação, não só de exercícios. Esperamos até que os próprios alunos do Ensino Médio solicitem a seus professores mais informações e justificativas que os resumos e/ou formulários que aparecem em alguns (para não dizer a maioria) dos textos didáticos aos quais têm acesso. (BRITO & CARVALHO, 2001, pp. 95-96).

¹² Nas superfícies destes sólidos é possível definir geometrias que não seguem todos os postulados euclidianos.

Referências Bibliográficas

- BRITO, Arlete de Jesus & CARVALHO, Dione L. – *Geometria e outras Metrias* – Natal: Ed. SBHMat, 2001.
- DUVAL, R. – *Semiósis et Pensée Humaine* – Berna – Peter Lang – 1995
- FIGUEIREDO, Auriluci C. – *Probabilidade Condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem* – PUC-SP, dissertação de mestrado, 2000.
- FTD – *Perspectiva de Observação* – RJ – Livraria Francisco Alves – 1936.
- LELLIS, Marcelo & IMENES, Luiz Márcio – A Matemática e o novo ensino médio – *Educação Matemática em Revista*, n. 9/10 – abril de 2001.
- PEDRO, I. (Irmão) – *Noções de Perspectiva Exata* – RJ – Livraria Francisco Alves – 1936.
- PINO, Angel – As categorias de público e privado na análise do processo de internalização – *Educação e Sociedade*, n.42, agosto de 1992.
- SCHASTTCHEINDER, Doris & WALKER, Wallace. *M. C. Escher Kaleidocycles*. Corte Madera, California, Promegranate Artbooks, 1987, ed. rev..
- SCOTT, P. – “Introdction to Projective Geometry” – *The Australian Mathematics Teacher*- Abril – vol. 43 (1) – Austrália – 1987 – p. 11 e 12.