Mesa- redonda

Argumentações e Provas no Ensino da Matemática

Claudia Segadas (DMM / IM / UFRJ)

Introdução

Nesta apresentação serão relatados resultados de uma pesquisa que faz parte de um trabalho realizado para tese de doutorado cujo objetivo mais geral foi avaliar a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo por alunos ao final do curso de Cálculo I. A orientadora foi a Prof[a] Celia Hoyles do Instituto de Educação da Universidade de Londres. Entre outros objetivos, procuramos verificar mais especificamente se os alunos entendiam a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, no sentido de compreender quais as idéias centrais por trás desta demonstração. Também procuramos averiguar se percebiam qual a necessidade de provar este teorema, para tal trabalhamos com as concepções que os alunos têm do papel de uma demonstração em Matemática. Nos deteremos nesta parte: concepções do papel de uma demonstração em Matemática.

Inicialmente descreveremos os pressupostos teóricos que fundamentaram esta parte da pesquisa. A seguir qual foi a metodologia aplicada para a coleta e análise de dados e ao final apresentaremos algumas conclusões a que chegamos.

Pressupostos Teóricos

Pesquisas sobre concepções dos alunos do papel de uma demontração em Matemática são numerosas. Embora nosso trabalho tenha sido aplicado a alunos universitários, examinamos também estudos realizados com alunos do ensino médio. A razão para tal é que alguns dos processos utilizados por alunos secundários persistem e por outro lado os alunos de Cálculo I são recém - chegados à universidade. Para nossos objetivos foram particularmente importantes os trabalhos de Chazan (1993), Healy and Hoyles (1998) e Harel e Sowder (1996 e 1998).

Uma característica destes trabalhos é a preocupação dos autores em classificar os processos utilizados pelos alunos para construir uma demonstração e os critérios a que estes alunos se referem para determinarem o que é ou não uma prova. Em particular Chazan deixa claro que vai procurar verificar se as concepções dos alunos sobre demonstração podem ser divididas em dois tipos: evidência é prova e prova é simples evidência.

Chazan observa em suas conclusões que os alunos em geral não entendem o papel do que é considerado como hipótese em um teorema, alguns não acreditam que uma demonstração garante que um contra-exemplo não existe e alguns pensam que se testam diversos casos e estes funcionam, então o teorema valerá sempre.

Healy e Hoyles já afirmam que a maioria dos alunos que participaram da sua pesquisa reconhecem que uma demontração garante a veracidade do teorema. Entretanto chamam a atenção que os alunos não estão acostumados a demonstrarem e quando tentam construir uma prova ligam de forma não lógica as informações que utilizam.

Harel e Sowder classificam os argumentos utilizados por alunos (na maioria universitários) em diversas categorias. O interessante é que não se limitaram a categorias em que se verificava a predominância de argumentos de base empírica ou dedutiva. Em seu estudo apresentam também uma outra classe de argumentos que faz referência a fatores externos. É o caso de alunos que acreditam na veracidade de uma demonstração com base na aparência do argumento (esquema ritual), ou com base na presença de símbolos matemáticos (esquema simbólico) ou com base no fato de que o professor ou o aluno apresentaram a demontração (esquema autoritário).

Embora tenhamos apresentado sumariamente estas pesquisas, já que não é nossa finalidade fazer uma revisão bibilográfica mais detalhada, procuramos listar os pontos que utilizamos ou que se confirmaram neste trabalho.

Metodologia da pesquisa

Para coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: um teste de Matemática e entrevistas (com alguns dos alunos que haviam respondido ao teste). Os alunos da amostra estavam completando Cálculo I na UFRJ matriculados em um dos seguintes cursos: engenharia, matemática ou informática. Foi realizado inicialmente um estudo piloto em novembro e dezembro de 1994 com 72 alunos dos cursos de informática, engenharia mecânica e engenharia química. Posteriormente, em dezembro e janeiro de 1996, foi feito o estudo principal, este com 148 alunos dos cursos de informática, matemática, engenharia de produção e engenharia civil. O curso de matemática foi incluido justamente para verificar se o fato dos alunos terem escolhido matemática, significava, de alguma forma, que valorizavam mais os aspectos teóricos do Cálculo.

O teste de Matemática consistia em duas partes. Na primeira parte constavam exercícios de aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, de interpretação gráfica dos conceitos de derivada e integral e do reconhecimento do enunciado deste teorema. No total foram elaboradas seis questões para esta parte. Já a segunda parte, com apenas duas questões, tinha como finalidade verificar se os alunos acreditavam que exemplos não são suficientes para provar um teorema e que uma demonstração generaliza um teorema (suposições citadas no trabalho de Chazan (1993)).

As questões foram corrigidas classificando-se os argumentos segundo categorias de respostas (apresentaremos mais adiante as categorias para cada questão). Após a correção foram selecionados alguns alunos para entrevistas, 12 no estudo piloto e 17 no estudo prinicipal. Foram dirigidas aos alunos questões do teste para que explicassem algumas de suas respostas, mas também lhes foram feitas perguntas sobre hábitos de estudo, motivação para o curso, material de estudo e outras questões gerais.

<u>O Teste</u>

As questões da segunda parte do estudo piloto são as seguintes:

<u>Estudo piloto</u>

1) Pode-se garantir com certeza que:

a) se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\boldsymbol{x}} 2\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$;

b) se $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{sen t}\,\boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sen} \boldsymbol{x}$;

c) se $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{y}) = \int_{-1}^{\boldsymbol{y}} 3\,\boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{m}'(\boldsymbol{x}) = 3$.

Considerando apenas os dados acima, é possível afirmar que para toda função contínua ***f***, se

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ , então } g'(x) = f(x)\text{ ?}$$

Justifique sua resposta.

2) O Teorema Fundamentaldo Cálculo pode ser enunciado da seguinte forma:

"Seja a função ***f*** contínua no intervalo fechado [***a***, ***b***] e seja ***x*** um número qualquer deste intervalo. Se ***F*** é a função definida como: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $F'(x) = f(x)$."

A sua demonstração encontra-se em vários livros de Cálculo, como por exemplo o livro de Leithold.

Você pode fornecer um exemplo de uma função contínua ***f*** que não satisfaça o Teorema Fundamentaldo Cálculo?

Justifique a sua resposta.

O teste foi corrigido e algumas questões alteradas para o estudo principal. A primeira questão foi modificada para que os alunos de algum modo sentissem um maior impacto com um exemplo só em vez de três. Procuramos também colocá-los numa situação em que não pudessem já como ponto de partida utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo. A impressão que nos deu é que como já conheciam o Teorema Fundamental do Cálculo, não conseguiram raciocinar sob a hipótese de que baseados apenas nos dados poderiam ou não afirmar o teorema. A palavra apenas passou um tanto desapercebida para muitos. A segunda questão pouco foi alterada. O teste aplicado no estudo principal segue abaixo.

Estudo Principal:

A primeira parte foi dedicada a testar o aprendizado de certos conceitos matemáticos, nesta segunda parte queremos saber algumas de suas idéias relacionadas à matemática.

1) Você está estudando matemática e notou que:

se $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\boldsymbol{x}} 2\boldsymbol{t}\, \boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$.

Suponha que você seja a primeira pessoa no mundo que observou este resultado. Baseado apenas neste exemplo você poderia publicar em um livro o seguinte:

"Seja a função ***f*** contínua no intervalo fechado [***a***, ***b***] e seja ***x*** um número qualquer deste intervalo. Se ***F*** é a função definida como: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$."

Sim ☐ Não ☐

Justifique a sua resposta.

2) O Teorema Fundamental do Cálculo pode ser enunciado da seguinte forma:

"Seja a função ***f*** contínua no intervalo fechado [***a***, ***b***] e seja ***x*** um número qualquer deste intervalo. Se ***F*** é a função definida como: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{dt}$, então $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$."

Você pode fornecer um exemplo de uma função ***f*** contínua em um intervalo [***a***, ***b***] que não satisfaça o Teorema Fundamental do Cálculo?

Sim ☐ Não ☐

Justifique a sua resposta.

Resultados do teste

Vamos comparar o número (absoluto e percentual) de alunos (***n***=148) que disseram sim ou não ou deixaram em branco cada uma das questões:

Tabela 1: Distribuição de respostas nas questões 1 e 2 ***(% em itálico)***

Questões	Sim	Não	Em branco
1	91	56	1
	61.5	***37,8***	***0,7***
2	39	104	5
	26,3	***70,3***	***3,4***

Conforme podemos observar, a primeira questão foi a que apresentou o maior número de respostas erradas. Poderíamos pensar que a razão se deve ao fato de acreditarem que um exemplo é suficiente para demonstrar um teorema (visão empírica). Entretanto, vamos examinar as categorias de respostas que apareceram em cada uma das questões e a tabela com os resultados.

Categorias de respostas: questão 1

P: É necessário provar para generalizar

E: Visão empírica

I: Inconclusiva: dados insuficientes para enunciar um teorema

F: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo ou fazendo referência às idéias contidas nele

S: O enunciado não está correto

O: Outras

X: Sem resposta

Os alunos cuja resposta foram classificadas como P são aqueles que sabem que um teorema é verdadeiro pois foi demonstrado. Em contraste, na segunda categoria (E) estão os alunos que acreditam que evidência é prova. Eis um exemplo de uma resposta classificada como E:

“Ela está certa pois sendo eu o primeiro a ter verificado isto, a minha lei está certa, até que alguém prove que está errada”

A categoria I contém as respostas dos alunos que expressaram que havia dados insuficientes para enunciar o teorema. Entretanto não se pode garantir através delas que estes alunos acreditam que é necessário generalizar através de uma prova formal. Eis um exemplo:

“Um teorema não pode ser baseado em apenas um exemplo.”

Na categoria F estão os alunos que não foram capazes de se colocar na posição de não terem nenhum conhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo e responderam frases como:

“Este é o Teorema Fundamental do Cálculo.”

Categoria S contém as respostas dos alunos que duvidaram do enunciado do teorema conforme estava escrito no teste, acharam provavelmente que era uma questão para "enganar" de alguma forma o aluno que deveria descobrir o erro ou o que estava faltando no enunciado. Um exemplo:

"Será verdadeiro somente se ***a***=0."

Foram classificadas como O (outras) respostas de tipos diversificados que não se repetiam em vários alunos.

Abaixo segue a tabela com os resultados:

Tabela 2: Distribuição de categorias na questão 1 ***(% em itálico)***

Categoria	P	E	F	I	S	O	X
Número de alunos	8 ***5,4***	12 ***8,1***	44 ***29,7***	25 ***16,9***	20 ***13,5***	27 ***18,2***	12 ***8,1***

É surpreendente que poucos alunos (5,4%) responderam a esta questão corretamente, 16,9% deram respostas inconclusivas e a maioria errou (69,5%) ou deixou a questão em branco (8,1%). Devemos observar, como mostrou a entrevista, que alguns alunos não estão acostumados a este tipo de questão, dentre estes certamente estão aqueles cuja resposta foi classificada como F, porém, como a tabela 1 mostrou, a resposta "sim" mostra a não convicção da necessidade de uma demonstração.

Categorias de respostas: questão 2

G: Provas generalizam

CE: Existem contra-exemplos para o Teorema Fundamental do Cálculo

I: Inconclusivo, desconhecimento de contra-exemplos

O: Outras

X: Sem resposta

A categoria G contém as justificativas em que os alunos deixam claro que não existem exceções para teoremas. Na categoria CE estão os alunos que firmemente acreditam que existe uma função que serve de contra-exemplo. Alguns apresentaram os possíveis "contra-exemplos", vejamos um para ilustrar:

""f(t) = t^2, F(x)= $\int_2^4 t^2dt = \frac{56}{3}$ F'(x) = 0"

Conforme podemos perceber, entre outros problemas, este aluno tem dificuldade em entender $F(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} f(t)dt$ como função. De fato foi interessante analisar os contra-exemplos para termos idéias de dificuldades que os alunos têm com alguns dos objetos de estudo do Cálculo.

A categoria I contém justificativas de alunos que parecem acreditar que não existe tal função, porém não estão firmes o suficiente para afirmar. Suas justificativas são inconclusivas, como podemos ver pelo exemplo abaixo:

"Eu poderia dar tal exemplo, porém não sou capaz no momento de formulá-lo."

Na categoria O estão todos os tipos de respostas que não se encaixaram em nenhuma das categorias acima.

Vejamos a tabela com os resultados:

Tabela 3: Distribuição de categorias na questão 2 ***(% em itálico)***

Categoria	G	CE	I	O	X
Número de alunos	***37***	38	17	12	44
	25.0	***25,7***	***11,5***	***8,1***	***29,7***

A tabela acima mostra que o número de alunos que deram a justificativa correta (37) é praticamente o mesmo dos que não acreditam que demonstrações generalizam (38). Entretanto nesta questão é significativa a quantidade de alunos que não apresentaram qualquer justificativa.

Embora pelos resultados acima não possamos afirmar que a maioria dos alunos acredita que evidência é prova ou prova é simples evidência, o fato é que definitivamente não sabem (ou não estão convictos) de qual o papel de uma demonstração em Matemática. De uma certa forma nos impressionou que muitos apresentaram o que pensaram ser um "contra-exemplo" na segunda questão.

Considerações Finais

Embora não seja o propósito nesta apresentação expor com mais detalhes os resultados das entrevistas, gostaríamos de dizer que por elas podemos reafirmar que os alunos não estão acostumados a pensar sobre o processo de provar em Matemática. Misturam palavras como “demonstração por absurdo” com “provar o contrário do teorema” sem refletirem sobre o que vêm a significar. Ficou claro também que os alunos não estão acostumados com certos tipos de questões e isto pode ter interferido no resultado do teste. Entretanto, ainda assim confirmam que as concepções que têm do papel de uma demonstração em matemática é muito aquém do que se esperava de alunos de nível universitário em cursos de áreas tecnológicas.

Muitas das conclusões que examinamos na bibliografia apareceram repetidamente na nossa análise do questionário e entrevista. Verificamos desde o fato de alguns alunos mostrarem não entender o que é dado no enunciado do teorema e o que se tem que provar, até o aparecimento de frases que expressam claramente que os alunos acreditam no teorema simplesmente porque está escrito no livro ou o professor enunciou (esquema autoritário).

Acreditamos que os hábitos de estudo dos alunos e o que é cobrado deles nas avaliações interferem na imagem que têm da Matemática. A maioria dos alunos que entrevistamos utiliza o caderno para estudar a teoria e usa o livro somente para fazer exercícios. É claro que a teoria no caderno é muito mais resumida e por vezes incompleta. Disseram que não precisam para as provas estudar os aspectos teóricos.

Para finalizar gostaríamos de dizer que acreditamos que o curso de Cálculo não deveria ser somente um curso de cálculos e que ao aprender matemática os alunos deveriam aprender o que é matemática.

Bibliografia

Balacheff, N. (1988), ‘Aspect of proof in pupils’ practice of school mathematics’, in D. Plim (ed.), ***Mathematics, Teachers and Children***, Hodder and Stoughton, London, 216-238.

Chazan, D. (1993), 'High school geometry students' justifications for their view of empirical evidence and mathematical proof', ***Educational Studies in Mathematics 24***, 359-387.

Dreyfus, T. (1990), 'Advanced Mathematical Thinking', in P. Nesher and J. Kilpatrick (eds), ***Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematical Education***, Cambridge University Press, 113-134.

Hanna (1989), 'Proofs that prove and proofs that explain', ***Proceedings of the Thirteenth PME Conference***, Paris, vol. 2, 45-51.

Harel, G. and Sowder, L. (1996), 'Classifying Processes of Proving', ***Proceedings of the Twenth PME Conference***, Valence, vol. 3, 59-65.

Harel, G. and Sowder, L. (1998), 'Students' Proof Schemes', In E. Dubinsky, A. Schoenfeld and J. Kaput (eds.), ***Research on Collegiate Mathematics Education***, American Mathematical Society, USA.

Healy, L. and Hoyles, C. (1998), ***Justifying and Proving in School Mathematics: Technical Report on the Nationwide Survey***, Institute of Education, University of London.

Hersh, R. (1993), 'Proving is convincing and explaining', ***Educational Studies in Mathematics 24***, 389-399.

Hoyles, C. (1997), 'The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof', ***For the Learning of Mathematics 17 (1)***, 7-16.

Leron, U. (1983), 'Structuring Mathematical Proofs', ***Americal Mathematical Monthly 90***, 174-185.

Leron, U. (1985), 'A Direct Approach to Indirect Proofs', ***Educational Studies in Mathematics 16***, 321-325.

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (1982), ***Thinkink Mathematically***, Addison-Wesley, London.

Segadas Vianna, C., Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: na Exploration of Definitions and Visual Imagery , Tese de doutorado, Institute of Education, University of London.

Tall, D. (1989), 'The Nature of Mathematical Proof', ***Mathematics Teaching 127***, 28-32.

Tall, D. (1991a), 'The Psychology of Advanced Mathematical Thinking', in D. Tall (ed.), ***Advanced Mathematical Thinking***, Kluwer, Dordrecht, 3-21.

Tall, D. (1991b), 'Visualising Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus', ***Mathematics Teaching 137***, 29-32.

Tall, D. and Vinner, S. (1981), 'Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity', ***Educational Studies in Mathematics 12***, 151-169.

Thompson, P. (1994), 'Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus', ***Educational Studies in Mathematics 26***, 229-274.

Thomas, K. (1995), ***The Fundamental Theorem of Calculus: an Investigation into Students' Constructions***, Tese de doutorado, Purdue University Graduate School.

Vinner, S. (1991), 'The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics', ***Advanced Mathematical Thinking***, Kluwer, Dordrecht, 65-81.