**APLICAÇÕES PARA CONCEITOS DE ÁLGEBRA - Marcia Aurélia Stopassoli**

INTRODUÇÃO

É bem provável que todos nós professores de Matemática já nos deparamos com questionamentos do tipo:

" Professor, para que estudar triângulos, matrizes, determinantes?"

"Para que serve toda essa matemática, onde aplico esses conhecimentos?"

A razão mais importante para justificar o ensino de Matemática é o relevante papel que esta disciplina desempenha na construção do conhecimento humano. A Matemática deve ser ensinada porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da humanidade e se justifica pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia. Além disso, o ensino de Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário ao estudo de outras ciências.

Segundo alguns especialistas em Educação Matemática, para atingir seus objetivos, o ensino de Matemática deve ser feito, observando-se os as seguintes orientações:

1. O ensino deve enfatizar as idéias da Matemática e seu papel no desenvolvimento da disciplina;
2. Os diferentes tópicos da Matemática devem ser tratados de maneira a exibir sua interdependência e organicidade;
3. O ensino de Matemática deve ser feito de maneira bem articulada com o ensino de outras disciplinas, como Física e Química.

Quando o professor traz, freqüentemente, para suas aulas: fundamentação histórico-social do tema a ser desenvolvido; problemas práticos relacionados aos conteúdos desenvolvidos; aplicações do tema em outras disciplinas; e, ainda, d)ligação entre o tema em estudo com aqueles já estudados, certamente os alunos serão despertados pelo largo alcance e a magia da Matemática. Porém, a dificuldade reside em obter esses dados para trazer às aulas. Por isso, a leitura e a permanente atualização são fundamentais.

O objetivo primeiro deste artigo é instigar à busca, à leitura e à aprendizagem. Todos temos a aprender e a ensinar. Para auxiliar na busca da resposta para nossos alunos do porquê de aprender Matemática, apresentaremos algumas possibilidades de exercícios aplicativos para o tópico Matrizes e Sistemas Lineares, relacionando-os ao controle de estoques, controle e programação de matérias-primas para a confecção de artigos, e na Química com balanceamento de reações.

APLICAÇÕES

A) SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES A DUAS VARIÁVEIS

As desigualdades no plano, inequações a duas variáveis, podem ser melhor compreendidas por nossos alunos quando apresentadas sob a forma de um problema. Assim, de forma geral, fica mais claro aos estudantes os tipos de soluções que as inequações simultâneas e/ou os sistemas de inequações lineares a duas variáveis podem apresentar.

Os problemas de otimização nos oferecem excelentes condições para trabalhar as desigualdades no plano.

São apresentadas, a seguir, de forma simplificada, algumas definições:

PESQUISA OPERACIONAL – É um método científico de tomada de decisões. Em linhas gerais consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e através da experimentação com o modelo, na descoberta da melhor maneira de operar com o sistema. A pesquisa operacional como a conhecemos surgiu durante a Segunda Guerra Mundial, resultado de estudos de equipes interdisciplinares de cientistas contratados para resolver problemas militares de ordem estratégica e tática.

PROGRAMAÇÃO LINEAR – Uma das técnicas mais utilizadas na abordagem de problemas em pesquisa operacional é a programação linear. A simplicidade do modelo envolvido e a disponibilidade de uma técnica de solução programável em computador facilitam sua aplicação. As aplicações mais conhecidas são feitas em sistemas estruturados, como os de produção, finanças, controles de estoques etc.

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas constituídos por elas, desempenham papel fundamental em muitas áreas da vida cotidiana das pessoas: problemas de economia, transporte, dieta... Nesses problemas, normalmente, se costuma perguntar pelos valores máximo ou mínimo de uma função, cujas variáveis estão sujeitas a certas desigualdades. Em muitos desses problemas a função que se quer otimizar (maximizar ou minimizar) é uma função linear e as desigualdades a que estão sujeitas suas variáveis são também lineares.

ORIENTAÇÕES PARA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR **(**Roteiro retirado do livro ***Matemática - Teoria, Exercícios, Aplicações***. FTD – Giovanni e Dante)

Diante de um problema de PROGRAMAÇÃO LINEAR, consideremos as seguintes orientações para resolvê-lo:

i) Estabelecer a FUNÇÃO OBJETIVO;
ii) Transformar as restrições impostas no problema num sistema de inequações lineares;
iii) Traçar o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices;
iv) Calcular o valor da função objetivo em cada um dos seus vértices;
v) O maior valor encontrado da função é o MÁXIMO e o menor é o MÍNIMO.
vi) Voltar ao problema e apresentar a solução.

EXEMPLO ILUSTRATIVO

Uma transportadora opera duas frotas de caminhões, designadas como Frota I e Frota II. As capacidades de carga dos caminhões são: 20 $m^3$, 40 $m^3$ e 60 $m^3$. A quantidade de caminhões disponíveis, por dia, de cada tipo para cada frota são dados na tabela:

| CAPACIDADE DE CARGA DOS CAMINHÕES/FROTA | I | II |
|---|---|---|
| 20 $m^3$ | 8 | 2 |
| 40 $m^3$ | 1 | 1 |
| 60 $m^3$. | 2 | 7 |

Sabe-se ainda que o custo total de operações, diário, para cada frota é, respectivamente, R$ 1.000,00 e R$ 2.000,00. Suponha que esta empresa tenha um contrato de transporte que utilizará 16 caminhões de 20 $m^3$, 5 caminhões de 40 $m^3$ e 20 caminhões de 60 $m^3$.

Pergunta-se: quantos dias cada frota deverá trabalhar de modo a cumprir este contrato com o menor custo operacional?

RESOLUÇÃO:

Define-se como:
x = número de dias que a Frota I estará operando para cumprir o contrato;
y = número de dias que a Frota II estará operando para cumprir o contrato.

FUNÇÃO OBJETIVO:

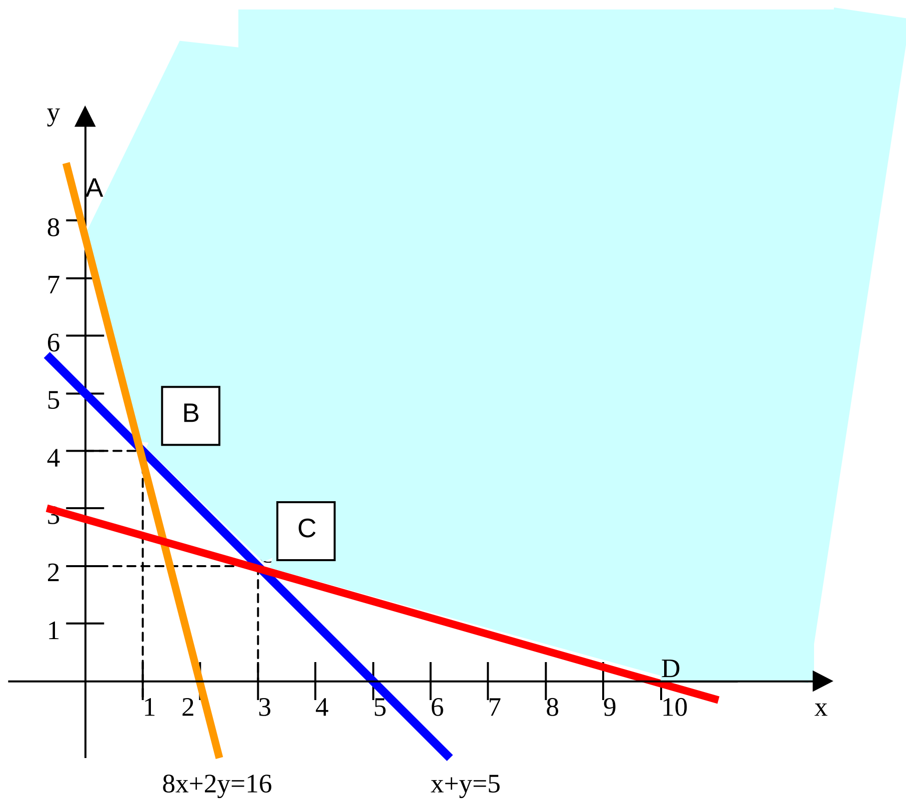
$$\boxed{\mathbf{C_{Mínimo} = 1.000x + 2.000y}}$$

RESTRIÇÕES:

| **Caracterizando a restrição** | **Inequação que a representa** |
|---|---|
| a) No mínimo poderão ser utilizados 16 caminhões de 20 $m^3$ por dia: | $8x + 2y \geq 16$ |
| b) No mínimo poderão ser utilizados 5 caminhões de 40 $m^3$ por dia: | $x + y \geq 5$ |
| c) No mínimo poderão ser utilizados 20 caminhões de 60 $m^3$ por dia: | $2x + 7y \geq 20$ |
| d) Número de dias que a Frota I opera | $x \geq 0$ |
| e) Número de dias que a Frota II opera | $y \geq 0$ |

Portanto, devemos encontrar solução (graficamente) para o seguinte sistema de inequações lineares, no plano:

$$
\begin{aligned}
8x + 2y &\ ?\ 16 \\
x + y &\ ?\ 5 \\
2x + 7y &\ ?\ 20 \\
x &\ ?\ 0 \\
y &\ ?\ 0
\end{aligned}
$$




Os vértices A, B, C e D têm coordenadas, respectivamente (0,8); (1,4); (3;2) e (10,0), obtidas resolvendo o sistema de equações que definem os lados correspondentes no gráfico. Para cada um desses pontos, calculamos o valor do custo, na função objetivo, conforme segue na tabela 2:

Tabela 2:

| VÉRTICE | C = 1000 x + 2000 y |
|---|---|
| A(0,8) | 16.000,00 |
| B(1,4) | 9.000,00 |
| C(3,2) | 7.000,00 |
| D(10,0) | 10.000,00 |

Portanto, a solução ótima é dada pelos valores x = 3 e y = 2, para o qual (se forem os valores, ***para os quais***; se for a solução, ***para a qual***) o custo será o menor possível. Assim, é viável economicamente operar com a Frota I durante três (3) dias e com a Frota II por dois (2) dias.

B) MATRIZES

Normalmente os livros-textos de Matemática apresentam o tema matrizes sem contextualização, acarretando dúvidas em grande parcela dos estudantes que acabam somente memorizando regras. É comum que, ao explicar transposição de matrizes, os professores sejam questionados pelos alunos da seguinte forma: "Para que trocar linhas por colunas?".

Utilizando-se de exemplos contextualizados e apresentando-se a definição de matriz, sua representação algébrica, operações e propriedades, facilita-se a compreensão do tema pelos estudantes.

EXEMPLO:

Duas amigas, Marta e Jane, aproveitaram a tarde de sábado para fazerem compras no Shopping da cidade. Elas compram em duas lojas A e B. Nestas lojas elas compraram três diferentes artigos: calças, camisetas e tênis.

Na loja A Marta comprou: 2 calças, 1 camiseta e 3 pares de tênis. Na Loja B Marta adquiriu: 2 Calças e 2 camisetas.

Jane comprou na loja A: 1 calça, 3 camisetas e 2 pares de tênis. Na loja B: 3 calças, 2 camisetas e 1 par de tênis.

a) Expresse as compras efetuadas na loja A e na Loja B na forma matricial.

Os dados apresentados no texto anterior podem ser tabelados sob duas formas:

LOJA A

| **ARTIGO/ COMPRADORA** | **CALÇA** | **CAMISETA** | **TÊNIS** |
|---|---|---|---|
| **MARTA** | 2 | 1 | 3 |
| **JANE** | 1 | 3 | 2 |

Que pode ser representa pela matriz 2 x 3: $A = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$ .

Ou ainda, uma outra tabela onde se trocam as informações que estão em linhas pelas informações das colunas:

| **COMPRADORA/ARTIGO** | **MARTA** | **JANE** |
|---|---|---|
| **CALÇA** | 2 | 1 |
| **CAMISETA** | 1 | 3 |
| **TÊNIS** | 3 | 2 |

Que pode ser representada pela matriz 3 x 2; $A' = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$ .

Assim A' é a matriz transposta de A, simbolizada normalmente por $A^T$, onde efetuou-se uma troca de elementos de linha com os elementos da coluna, que segundo a definição de Matriz Transposta: <u>(Esse período não está muito claro. Não entendi o suo da palavra ***onde***.)</u>

"Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$; onde $b_{ij} = a_{ji}$, i e j".

LOJA B

| ARTIGO/ COMPRADORA | CALÇA | CAMISETA | TÊNIS |
|---|---|---|---|
| MARTA | 2 | 2 | 0 |
| JANE | 3 | 2 | 1 |

Que pode ser representada pela matriz 2 x 3: B = $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ .

Ou ainda, quando trocam-se as informações que estão em linhas pelas informações das colunas:

| COMPRADORA/ARTIGO | MARTA | JANE |
|---|---|---|
| CALÇA | 2 | 3 |
| CAMISETA | 2 | 2 |
| TÊNIS | 0 | 1 |

Que pode ser representada pela matriz 3 x 2; B'= $\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ .

b) Os preços unitários, em Reais, de cada artigo nas lojas A e B são:

| ARTIGO/LOJA | A | B |
|---|---|---|
| CALÇA | 21,50 | 20,99 |
| CAMISETA | 12,80 | 13,80 |
| TÊNIS | 35,99 | 34,90 |

Pergunta-se: qual o valor total gasto por cada uma das amigas em cada uma das lojas?

Os valores da tabela acima podem ser escritos na forma de matrizes.

Loja A: $\begin{matrix} 21{,}50 \\ 12{,}80 \\ 35{,}99 \end{matrix}$ ou ainda: $\begin{bmatrix} 21{,}50 & 12{,}80 & 35{,}99 \end{bmatrix}$

Loja B: $\begin{matrix} 20{,}99 \\ 13{,}80 \\ 34{,}90 \end{matrix}$ ou ainda: $\begin{bmatrix} 20{,}99 & 13{,}80 & 34{,}90 \end{bmatrix}$

Vamos utilizar **produto entre matrizes** para responder ao questionamento do item b. Como desejamos saber o valor gasto por cada uma (Marta e Jane) na loja A e também na loja B, devemos obter como produto uma matriz de ordem 2x1 que indica os gastos de ambas as amigas na loja A, e outra matriz de ordem 2x1 para a loja B.

Para a loja A:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 21{,}50 \\ 12{,}80 \\ 35{,}99 \end{matrix} = \begin{matrix} 43 + 12{,}80 + 107{,}97 \\ 21{,}5 + 38{,}4 + 71{,}98 \end{matrix} = \begin{matrix} 163{,}77 \\ 131{,}88 \end{matrix}$$

Para loja B:

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 20{,}99 \\ 13{,}80 \\ 34{,}90 \end{matrix} = \begin{matrix} 41{,}98 + 27{,}60 + 0 \\ 62{,}97 + 27{,}60 + 34{,}90 \end{matrix} = \begin{matrix} 69{,}58 \\ 125{,}47 \end{matrix}$$

Temos, assim, que Marta gastou R$ 163,77 na loja A e R$ 69,58 na Loja B, enquanto que os gastos de Jane foram R$ 131,88 na loja A e 125,47 na loja B.

Este mesmo exemplo ainda poderia explorar outras operações com matrizes (soma, subtração, multiplicação por escalar). Basta estimular a criatividade dos alunos.

## C) SISTEMAS LINEARES

Quando operamos com um conjunto (n ≥ 2) de equações lineares (as variáveis possuem expoente igual a 1) e quando os termos independentes são todos nulos, estamos diante de um sistema de equações lineares homogêneo. Este tido de sistema linear admite duas possibilidades de solução:

**Solução Única**: O sistema é dito possível e determinado (SPD);

**Infinitas Soluções**: Sistema possível e indeterminado (SPI), devemos escrever a expressão algébrica que representa o conjunto solução.

Uma reação constitui um sistema linear homogêneo, pois as quantidades de átomos, moléculas ou moles presentes no início da reação (reagentes) e após o término da reação (produtos) são mantidos constantes, ou seja, não se criam, tampouco se perdem moléculas ("na natureza nada se perde, nada se cria, tudo se transforma"). Dessa forma, trabalha-se com a reação (com os átomos participantes) tendo como premissa que a "quantidade" de átomos (moléculas-grama) se mantém constante na reação química.

EXEMPLO:

$$\boldsymbol{x}\ (NH_4)_2CO_3 \rightarrow \boldsymbol{y}\ NH_3 + \boldsymbol{z}\ H_2O + \boldsymbol{w}\ CO_2$$

Nesta reação química temos que x moléculas de $(NH_4)_2CO_3$ se transformam, por decomposição, em ***y*** moléculas de $NH_3$**;** ***z*** moléculas de $H_2O$ e ainda em ***w*** moléculas $CO_2$.

Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos no final da reação. Assim, pode-se escrever:

| ÁTOMO | EQUAÇÃO | REESCREVENDO |
|---|---|---|
| N (Nitrogênio) | 2x = y | 2x – y = 0 |
| H (Hidrogênio) | 8x = 3y + 2z | 8x – 3y – 2z = 0 |

| | | |
|---|---|---|
| C (Carbono) | x  =  w | x  -  w = 0 |
| O (Oxigênio) | 3x = z + 2 w | 3x – z – 2w = 0 |

Portanto, os coeficientes da equação química anterior representam um sistema de equações lineares e homogêneo:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 8x - 3y - 2z &= 0 \\ x - w &= 0 \\ 3x - z - 2w &= 0 \end{aligned}$$

Todo sistema linear homogêneo apresenta solução: tem somente a trivial (SPD), que na Química significa que a reação não ocorre, ou ainda pode ser SPI, com infinitas soluções, ocasionando a necessidade de estabelecer relação entre  os coeficientes (o que normalmente denomina-se de variável livre).

A solução para este sistema será, quando a variável livre é x:

S = {(x; 2x; x; x);   x   positivos não nulos}

## CONCLUSÃO

Ainda hoje a maioria dos estudantes tem imagem negativa da álgebra. Grande parte desta antipatia origina-se da forma de apresentação dos tópicos desta área do conhecimento aos alunos. Estes apenas preocupam-se  em descobrir, calcular o valor da variável, sem estabelecer ligação entre as equações e o  mundo que os cerca.

Acreditamos caber, principalmente, ao professor fazer modificações em sua metodologia de ensino dos tópicos de álgebra, estimulando  e motivando seus alunos.

Esperamos que este artigo tenha servido para avivar o debate sobre como podemos alterar de forma simples e dinâmica os tópicos matrizes e sistemas lineares e, que seu propósito básico tenha sido alcançado: o de instigar, induzir os educadores à reflexão,

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


1. GIOVANNI, José Ruy e DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática: Teoria - Exercícios - Aplicações***. Volume 2. 2º grau. São Paulo, SP Editora FTD.
2. TROTTA, Fernando, IMENES, Luiz Márcio Pereira e JAKUBOVIC, José. ***Matemática Aplicada***. Volume 2. 2º grau, São Paulo, SP. Editora Moderna. 1979.
3. BOLDRINI, José Luiz [et al]. ***Álgebra Linear***. 3º ed. São Paulo. Editora: Harper & Row do Brasil, 1980.
4. MACHADO, Antônio dos Santos. ***Matemática - Temas e Metas***. São Paulo: Atual, 1986. Volume 3.
5. SANTOS, Nathan Moreira dos. ***Vetores e Matrizes***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.