AQUISIÇÃO DO CONCEITO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA [1]

Gilda de La Rocque Palis
Departamento de Matemática. Puc-Rio

Podemos observar freqüentemente que muitos estudantes, na graduação e na pós-graduação, apresentam dificuldades tanto em atividades de produção de provas utilizando o Princípio da Indução Matemática como na validação de demonstrações nas quais se emprega esse princípio. A importância do método de prova por indução matemática e as dificuldades encontradas pelos alunos com esse conceito nos levaram a iniciar um estudo sobre esse tema.

Neste trabalho apresentamos uma discussão acerca de alguns aspectos matemáticos da indução e de sua apreensão pelos alunos baseada em nossa experiência docente e na literatura concernente ao assunto. Maiores detalhes podem ser encontrados em Palis (2001).

Uma visão geral da literatura

A literatura sobre o ensino aprendizagem do conceito de indução matemática é ainda bastante escassa. É interessante observar como as características dessa literatura foram mudando ao longo do tempo, em consonância com o desenvolvimento das formas de reflexão acerca do ensino de matemática de nível médio/superior.

No artigo mais antigo que examinamos, Young (1908) faz uma breve análise matemática do Princípio da Indução Matemática e fornece uma lista de 64 exercícios para serem propostos aos alunos.

Já Ernest (1984) faz uma análise conceitual da indução, se preocupando com a rede de conceitos a ela subjacentes, e discute as dificuldades encontradas pelos alunos e mencionadas na literatura, dando sugestões de caráter pedagógico. Esse autor também propõe um conjunto de critérios para análise de livros texto com relação ao tratamento dado à indução e o aplica a uma seleção de 17 livros (14 do

[1] Pesquisa realizada com apoio do CNPq, Processo 30.0821/81.6.

ensino médio britânico). Ernest (1984) conclui o seu artigo desejando que a discussão pedagógica que empreendeu forneça subsídios para o ensino de indução mas ele mesmo não apresenta explicitamente uma proposta didática para a construção desse conceito.

Mais recentemente, Dubinsky (1986, 1989) e Harel (2000) formulam, implementam e avaliam seqüências de ensino do conceito de indução, apresentando claramente a perspectiva teórica que orienta o desenho de suas propostas pedagógicas e as análises realizadas acerca do conhecimento construído pelos estudantes envolvidos nos respectivos experimentos de ensino.

No que se segue estaremos considerando a seguinte formulação do Princípio de Indução:

"Seja P(n) uma proposição associada a cada natural n.

Se existe um número natural n_0 tal que

1) P(n_0) é verdadeira (passo básico)

e

2) Para todo natural k ≥ n_0, P(k) P(k+1) (passo indutivo)

Então, P(n) é verdadeira para todo natural n ≥ n_0".

"Justificando" o Princípio da Indução Matemática? A sua presença no ensino médio.

Para convencer o leitor/aluno que o Princípio da Indução Matemática "mostra" que uma certa proposição é verdadeira a partir de um número natural n_0 duas estratégias têm sido empregadas:

- utilização de "modelos" de indução como filas de dominós, escadas, etc. Esta estratégia vem sendo questionada por alguns autores como Lowenthal e Eisenberg (1992), e também por Greer e Harel (1998), no contexto geral de ineficiência do ensino tradicional baseado em analogias, como mencionado em Harel (2001)

- coordenação dos passos 1 e 2 do Princípio da Indução Matemática usando Modus Ponens

A tentativa de justificar um axioma do conjunto dos números naturais (sistema de Peano) tem sido criticada por vários autores (Lowenthal e Eisenberg, 1992; Bell, 1920; Poincaré ,1946; Kline ,1980).

Argumentos de natureza epistemológica constituem uma base para controvérsias sobre o lugar da indução matemática no currículo. Lowenthal e Eisenberg (1992) e Bell (1920) acreditam que não há lugar para essa noção no ensino pré-universitário e Young (1908) sustenta que o tratamento formal da indução deve ser postergado para além do início do ciclo superior mas que um conhecimento prático do processo em si mesmo e uma certa prontidão em seu uso podem muito bem ser adquiridos no começo dos estudos universitários. Os parâmetros curriculares norte-americanos para o ensino escolar de matemática estabelecem que os alunos do ensino médio deveriam aprender que certos tipos de resultados são provados usando a técnica de indução matemática tendo em vista o fato de que métodos iterativos e recursivos estão cada vez mais comuns. Entre nós, parece que o tema Indução não está presente na maior parte dos livros de Matemática para o Ensino Médio, pelo menos esta é a impressão que a leitura de Lima (2001) nos deixou.

Dificuldades encontradas pelos alunos

I. Significados distintos da palavra indução

Como se pode atribuir significados distintos à palavra indução, há necessidade de apontar com clareza as diferenças entre as duas acepções que nos interessam aqui neste contexto.

O termo indução tem um significado amplo que se refere ao processo empregado quando se tira uma conclusão geral na base de um número finito de observações e, nesse caso, não garante que a conclusão segue necessariamente das premissas. A abordagem indutiva neste sentido é extensivamente empregada em ciências em geral e está presente também na matemática. No entanto, no campo da Matemática, um enunciado formulado a partir de casos particulares é considerado uma conjectura e permanece uma conjectura até que uma demonstração para o enunciado seja encontrada.

Por outro lado, indução também se refere ao que designamos por indução matemática, e que tem seu significado expresso pelo Princípio da Indução Matemática. Esse princípio fundamenta um método de demonstração rigoroso e é tipicamente usado para provar enunciados da forma $(\ n)P(n)$, constituindo um exemplo de raciocínio dedutivo.

A argumentação empregada por um aluno para se convencer ou convencer os outros da veracidade de uma operação quantificada como $(\ n)P(n)$ pode se restringir a mostrar que algumas instanciações da proposição P são verdadeiras, isto é, que P(n) é verdadeira para alguns valores específicos de n. Este esquema de prova é utilizado com bastante freqüência pelos estudantes tanto no ensino médio como no ensino superior inicial, o que vem sendo comprovado em diversas investigações . (Harel e Sowder, 1998)

O exame de casos particulares de um problema é natural e pode ser essencial, a preocupação não é com o uso desse tipo de heurística de resolução de problemas mas com o uso exclusivo dessa estratégia. Infelizmente esse procedimento permeia os livros didáticos de Ensino Médio brasileiros:

“ (o livro genérico) Transmite sistematicamente a impressão de que as conclusões gerais da Matemática resultam do exame superficial de dois ou três casos particulares” . (Lima, 2001)

II. A necessidade dos dois passos na indução

Uma interpretação incorreta freqüente do Princípio da Indução Matemática consiste em considerar que uma das suas componentes não é de fato essencial, em particular a que estabelece a base da indução. Avital e Lebeskind (1978), Ernest (1984) e Young (1908) ponderam que uma maneira interessante de convencer um aluno de que esta componente é essencial consiste em apresentar argumentos indutivos errôneos e situações nas quais o passo indutivo pode ser demonstrado mas o passo básico não.

Watanabe (1986) apresenta uma “demonstração” por indução matemática de que “para qualquer que seja o número natural n, se numa classe com n alunos um for inteligente, então todos os alunos são inteligentes”, e desafia o leitor a encontrar o erro na argumentação apresentada. Problemas com essa mesma estrutura são apresentados em vários dos artigos que analisamos e o seu exame pelos alunos é sugerido com o propósito de alertá-los para a necessidade da articulação entre os dois passos do Princípio da Indução Matemática.

Pela nossa experiência docente, a procura do erro na demonstração tradicionalmente apresentada é uma tarefa que pode se revestir de bastante dificuldade. Já presenciamos uma situação estrema na qual um aluno, após se esforçar, sem sucesso, para entender uma explicação sobre o erro existente na argumentação errônea apresentada concluiu: “Não consigo encontrar o erro de forma alguma, estou achando que esta proposição é verdadeira...”

Dentre os artigos que examinamos somente Brumfiel (1974) descreve como os estudantes, em um curso de Cálculo inicial, resolveram esse tipo de problema. As respostas dadas pelos seus alunos revelaram dificuldades relacionadas com a demonstração de uma implicação.

III. A diversidade de conceitos que permeiam a indução.

Se analisarmos o Princípio da Indução Matemática, chegaremos à conclusão que as dificuldades de muitos alunos com esse princípio e com o seu emprego na resolução de problemas não deveria nos surpreender. A presença de múltiplas implicações e quantificações reveste esse princípio de uma complexidade lógica com a qual os estudantes não estão acostumados a lidar quando se deparam pela primeira vez com o seu estudo.

Podemos distinguir os vários conceitos que se entrelaçam no enunciado desse princípio e intervém no seu emprego como método de prova.

- o próprio conceito de prova

- o conceito de função a valores proposicionais, $P = P(n)$, que associa a cada n o valor verdade de uma proposição $P(n)$.

- os conceitos de quantificador existencial e universal

- o conceito de enunciado implicativo quantificado e o conhecimento de métodos de prova de enunciados desse tipo.

- o conceito de função a valores proposicionais no caso particular dessas proposições serem implicações. Ou seja, considerar funções que associam a cada valor k o valor verdade de uma implicação $P(k) \quad P(k+1)$

- O conceito de relação de recorrência ou de função definida recursivamente.

Pelo que vimos relatado nos artigos que analisamos os alunos têm dificuldades com os diversos conceitos subjacentes à indução e que apresentamos acima.

Brumfiel (1974) comenta que a versão do passo indutivo com a qual os alunos trabalham se restringe a P(k)   P(k+1). Esse autor considera que os estudantes não percebem a necessidade de alguma quantificação; trabalham com a implicação pensando em k como um número e não como uma variável. Além disso alguns alunos interpretam o passo indutivo como (k N P(k))   k N P(k+1), ou seja, da seguinte forma: “se é verdade para todo natural k, então é verdade para todo natural k+1”.

É claro que parte das dificuldades encontradas pelos alunos ao resolver um problema usando indução matemática pode estar relacionada com conceitos e técnicas próprias ao contexto do problema (algébrico, geométrico, etc.). Avital e Libeskind (1978) constitui o único artigo que encontramos que faz comentários detalhados sobre as dificuldades técnicas de cunho algébrico que os alunos podem encontrar para provar o passo indutivo.

Potencialidades do tratamento da Indução Matemática. Raciocínio Indutivo e Recursivo.

De acordo com os diversos autores pesquisados, o ensino aprendizagem da indução no ensino médio e superior inicial não tem sido bem sucedido. Os alunos vêem a indução como um ”método no qual você assume algo que você quer provar, e aí prova esse algo” (Baxandall, Brown, Rose e Watson, 1978; citado em Ernest, 1984), ficam confusos, achando que se está assumindo como verdadeiro o que se pretende provar e que portanto nada está realmente sendo demonstrado.

Quase todos os autores que trabalham com o tema sugerem que se amplie a gama de problemas propostos aos alunos, a fim de abranger vários contextos para que o aluno não acabe pensando que “indução significa tomar uma equação envolvendo n e adicionar algo dos dois lados para produzir uma equação similar com n+1 no lugar de n” (Woodall, 1975).

Consideramos que de fato o trabalho com a indução matemática pode ser ampliado para além do que se observa freqüentemente – seu uso ritualístico e mecânico – a fim de abranger problemas em outros contextos como teoria de grafos[2] e verificação de algoritmos, por exemplo, e principalmente para proporcionar ao aluno a oportunidade de um desenvolvimento explícito de dois paradigmas do raciocínio matemático: o raciocínio indutivo e o raciocínio recursivo. Estes dois paradigmas são importantes métodos de resolução de problemas.

No raciocínio indutivo tipicamente se procura discernir o padrão da lei de formação de uma seqüência a partir do cálculo de alguns dos seus primeiros termos a fim de formular uma conjectura para o termo geral dessa seqüência que depois precisa ser demonstrada, muitas vezes por indução matemática e recursão.

O raciocínio recursivo se refere à abordagem de resolução de problemas na qual resolvemos um problema supondo que já sabemos como resolve-lo em um caso mais simples. O procedimento é dito recursivo no sentido que “chama a si mesmo”. O desenvolvimento do paradigma recursivo é essencial e considerado um dos temas centrais em Matemática Discreta. (Maurer, 1995)

Young (1908) já salientava que o sucesso da demonstração por indução se apoia na habilidade de expressar qualquer situação P(n) em termos da situação imediatamente anterior P(n-1), mesmo quando esta última não é especificada. De fato, pensar recursivamente, isto é, procurar determinar como a solução para n = k sugere a solução para n = k+1 já traz embutida a demonstração do passo indutivo do Princípio da Indução Matemática. Poderemos observar também que o conhecimento de n_0 tal que a solução de um problema P(n) para n=n_0 está determinada, e do procedimento recursivo para achar a solução de P(k+1) conhecendo a solução de P(k), permite formular um algoritmo para resolver o problema P(N) para um N dado. O procedimento recursivo intervém novamente no momento de provar que o algoritmo está correto usando indução matemática.

Os únicos livros didáticos em português que dão ênfase ao raciocínio recursivo são Bezerra (1995) e Graham, Knuth e Patashnik (1995), pelo menos foram os únicos que encontramos.

Conclusão

[2] Problemas de indução matemática no contexto de grafos podem ser encontrados por exemplo em Avital e Hansen (1976), Kenney e Hirsch (1991) e Maurer (1995).

O estudo que realizamos nos permite orientar nossa pesquisa nessa área buscando respostas a muitas das questões perturbadoras com as quais o professor que tem a seu cargo promover a aprendizagem da indução se depara.

Pelo que vimos nessa investigação inicial, propostas, implementações e avaliações de seqüências de ensino de indução matemática, teoricamente fundamentadas, ainda são raras. Além dos trabalhos de Dubinsky (1986 e 1989) só encontramos o préprint de Harel (2000) e o artigo de Sfard (1988), sendo que este último é um artigo sucinto demais para permitir uma discussão mais aprofundada do mesmo. As propostas de Dubinsky e Harel são bastante distintas. Enquanto a proposta de Dubinsky aposta na utilização de uma linguagem de programação para ajudar os alunos a fazer as construções mentais necessárias à compreensão da indução, Harel se apoia na introdução ao estudo de indução através de atividades de resolução de problemas recursivos implícitos pelos alunos. (Hanói, número de regiões do plano cortado por retas..., possibilidade de cobrir tabuleiros...)

Consideramos então oportuno estender este trabalho fazendo inicialmente uma análise cuidadosa das propostas pedagógicas presentes nos artigos de Dubinsky e Harel, bem como dos resultados de suas implementações, análise esta orientada pelas seguintes questões:

- Como se pode explicar a forte tendência (e resistência à mudança) dos alunos a demonstrar enunciados universalmente quantificados através de uns poucos (muitas vezes um) caso particular?

- Como se pode desenvolver a compreensão dos diversos conceitos que permeiam a indução, inclusive a recursão, de tal forma a possibilitar um certo nível de conceitualização da indução ?

- Que tipo de problemas/atividades parecem efetivos na construção da indução matemática?

- Que metodologias de ensino podem ser promissoras para o desenvolvimento de tais atividades?

- Que implicações pedagógicas decorrem dessa análise?

Finalmente, nas referencias que se seguem, acreditamos que se encontra a maior parte dos artigos disponíveis tratando especificamente do ensino de indução matemática.

Referencias

Avital, S. e Hansen, R. T. (1976). Mathematical induction in the Classroom. Educational Studies in Mathematics 7 , 399-411.

Avital, S. e Libeskind, S. (1978). Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues. Educational Studies in Mathematics 9, 429-438.

Baxandall, P.R., Breown, W.S., Rose G.C. e Watson, F.R. (1978). Proof in Mathematics, Institute of Education, University of Keele.

Bell, E.T. (1920).On proofs by mathematical induction. American Mathematical Monthly, 27, 413-415.

Bezerra, L., Barros, P.H.V., Tomei, C. e Wilmer, C. (1995). Introdução à Matemática, Editora da UFSC.

Brumfiel, C.(1974). A Note on Mathematical Induction. Mathematics Teacher, Novembro, 616-618.

Burrell, S. e outros.(1991). Recursive Thinking: A Method for Problem Solving. Em M. Kenney e C.R. Hirsch (eds.). Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12, NCTM, 166-170.

Dubinsky, E. (1986). Teaching Mathematical Induction I. Journal of Mathematical Behavior 5 (3), 305-317.

Dubinsky, E. (1989). Teaching Mathematical Induction II. Journal of Mathematical behavior 8, 285-304.

Ernest, P. (1984). Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion. Educational Studies in Mathematics 15, 174-189.

Ernest, P.(1982). Mathematical induction: a recurring theme. The Mathematical Gazette, 66 (436), 120-125.

Fenton, W. e Dubinsky, E. (1996). Introduction to Discrete Mathematics with ISETL, Springer, -Verlag, NY.

Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O. (1995). Matemática Concreta. LTC.

Greer, B. e Harel, G. (1998).The Role of Isomorphisms in Mathematical Cognition. Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 5-24.

Harel, G. (2000). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. Preprint.

Harel, G. e Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes. Em E. Dubinsky, A. Schoenfeld e J. Kaput.(eds.). Research on Collegiate Mathematics Education, Vol III, AMS, 234-283.

Kenney, M. e Hirsch, C.R. (1991). Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12. NCTM.

Kline, M. (1980). Mathematics: The loss of certainty. Oxford University Press.

Lima, E.L.(ed.). (2001). Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. SBM.

Lowenthal, F. e Eisenberg, T. (1992). Mathematical Induction in School: An Illusion of Rigor? . School Science and Mathematics, 92 (5), 233-238.

Maurer, S. B. (1995). The Recursive Paradigm: Suppose We Already Knew. School Science and Mathematics, 95(2), 91-96.

Palis, G.L.R. (2001) Indução Matemática. Algumas Reflexões. Pré-print. Departamento de Matemática, Puc-Rio.

Poincaré, H. (1946). The foundations of science. Lancaster: Science Press.

Sfard, A. (1988). Operational vs. Structural method of teaching mathematics – case study. Proceedings do PME XII, Hungria, v2, 560-567.

Smith, K. E. (1991). Teaching Induction in Discrete Mathamatics. Em M. Kenney e C.R. Hirsch (eds.). Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12, 171-177.

Watanabe, R. (1986).Vale para 1, para 2, para 3,... Vale sempre? RPM 9, SBM, 32-38.

Woodall, D.R. (1975). Inductio ad absurdam? Mathematical Gazette 59,64-70.

Young, J.W.A. (1908). On Mathematical Induction. The American Mathematical Monthly, Vol XV, n 8-9, 145-153.