Funções Exponenciais e Logarítmicas: da história às aplicações

Carmen Kaiber da Silva

Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

No século XVII o desenvolvimento das ciências no seu conjunto, impulsionou o surgimento de teorias científicas que exigiam muitas experiências, medições precisas e operações matemáticas cada vez mais sofisticadas. Já no final do século XVI estudos ligados a astronomia e navegação necessitavam da realização de uma infinidade de longos e trabalhosos cálculos e conduziram a elaboração de processos melhores e mais econômicos para a realização dos mesmos.

Utilizando a idéia de transformar multiplicações em somas surgem os "logaritmos", termo criado por Napier resultante da composição das palavras gregas ***logos*** (razão) e ***arithmos*** (números).

John Napier (1550-1617), nobre escocês, teólogo e matemático e Jobst Bürgi (1552-1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, relojoeiro, matemático e inventor, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos respectivamente em 1614 e 1620. Os trabalhos de Napier e Bürgi, que não eram matemáticos profissionais, foram desenvolvidos quase que simultaneamente, embora cada um desconhecesse inteiramente o outro. De acordo com Boyer (1996.216) os princípios fundamentais das obras dos dois autores eram os mesmos, pois ambos partiram das propriedades das seqüências aritméticas e geométricas, e as diferenças estariam, principalmente, na terminologia e nos valores numéricos que usavam.

Após a publicação, em 1614, da primeira tábua de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1631), professor da Universidade de Londres e de Oxford em trabalho conjunto com Napier, propôs o uso de potências de dez para a construção de uma nova tábua de mais fácil utilização, surgindo assim os logaritmos ordinários ou decimais.

Em linguagem atual (que se diferencia em alguns aspectos das idéias originais de Napier), os logaritmos têm a propriedade básica "o logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números".

Considerando essa propriedade uma tábua de logaritmos consiste de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo. Para multiplicar dois números basta somar seus logaritmos pois o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. De modo análogo, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos; para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente; para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

Atualmente, as tábuas de logaritmos e outras tabelas matemáticas deixaram de ser utilizadas como instrumento de cálculo devido a utilização de calculadoras e outros recursos computacionais. No entanto, vários fenômenos físicos, químicos, biológicos econômicos e diversas leis matemáticas são relacionados com os logaritmos, o que torna seu estudo de grande importância.

Na definição de logaritmo de Napier está implícito o conceito de função, embora os logaritmos tenham sido criados anteriormente a introdução do conceito de função na Matemática. Napier tinha como objetivo facilitar operações aritméticas, mas suas tábuas, que estabeleciam uma correspondência entre um número e o seu logaritmo, caracterizam uma função.

Atualmente o ensino de funções está baseado na concepção de função como expressão analítica, a introdução do conceito como conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações. Aliado a tradicional organização linear dos conteúdos de Matemática, esta abordagem transformou o estudo das funções no Ensino Médio em algo extremamente abstrato e formal. Nesse contexto esse trabalho propõe uma abordagem das funções exponencial e logarítmicas ressaltando o aspecto histórico do desenvolvimento dos logaritmos no sentido de possibilitar ao estudante uma familiarização com as idéias básicas que lhe deram origem partindo, a seguir, para o estudo de aplicações e problemas.

É possível estudar situações-problema que envolvam temas como juros, crescimento populacional, desintegração radioativa, eliminação de drogas pelo organismo e outros que estão vinculados às funções exponenciais e logarítmicas e integram a Matemática a outras áreas do conhecimento.

Esta abordagem que utiliza o contexto histórico, a prática da resolução de problemas e da modelagem como caminho metodológico, possibilita um trabalho motivador, dinâmico e produtivo destacando não só os conhecimentos específicos adquiridos, mas também, o desenvolvimento de habilidades como compreender problemas, propor estratégias de resolução, prever e avaliar resultados, gerar modelos matemáticos, aplicar a outras situações e propor problemas novos.

As funções exponencial e logarítmica surgem em certas questões onde o aumento ou a diminuição de uma certa grandeza se faz proporcionalmente ao valor da grandeza presente num dado instante. Assim, tem-se como aplicações: juros compostos, crescimento populacional, cultura de bactérias, eliminação de drogas pelo organismo, desintegração radioativa (datação com Carbono-14), cálculo do pH de substâncias, pressão atmosférica, magnitude de terremotos, medição de altura de nível sonoro, entre outras. Seguem-se algumas das referidas aplicações.

Escala Richter

Os terremotos que ocorrem na Terra provocam vibrações, denominadas ondas sísmicas. Estas ondas são registradas por sismógrafos que gravam tais vibrações usando traços em ziguezague que mostram a variação de amplitude dos terremotos. A duração, a localização e a magnitude de cada terremoto podem ser determinadas por estes aparelhos, instalados em estações sismológicas em todo o mundo.

A lei de Weber (Ernest Heinrich Weber, 1795-1878), para respostas de seres humanos a estímulos físicos, declara que diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variações da intensidade do estímulo proporcionais ao próprio estímulo. Baseado nesta lei a escala Richter foi desenvolvida por Charles F. Richter, em 1935, para comparar dados e efeitos de terremotos.

Assim a lei matemática que permite a medição da magnitude de um terremoto é constituída por uma função logarítmica da amplitude das ondas sismológicas gravadas em um sismógrafo. Ajustes são feitos para incluir dados como a distância entre as estações sismológicas e o epicentro do terremoto e o intervalo entre duas ondas.

Richter usou a fórmula a seguir para determinar uma escala para medição da força dos terremotos:

$$M = \log_{10} A(mm) + 3.\log_{10}\left[8.\Delta t(s)\right] - 2{,}92,$$

onde ***M*** é a magnitude do terremoto (que originou a tabela Richter), ***A(mm)*** é a amplitude (em milímetros) do terremoto e Δ***t*** é o intervalo (em segundos) entre as ondas S (superficial) e P (pressão máxima), ambos medidos no sismógrafo.

A tabela a seguir foi construída com base nos efeitos dos terremotos e na medição de sua magnitude:

Magnitude Richter	***Efeitos***
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 quilômetros do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto, pode causar sérios danos numa grande faixa de área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto, pode causar grandes danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

A fórmula mostra que a escala Richter é baseada nos logaritmos base 10. As medidas das intensidades de terremotos crescem exponencialmente. Isso quer dizer que, se "***x"*** é a medida da magnitude de um terremoto na escala Richter, então, na verdade sua intensidade foi de $y = 10^{x}$.

A seguir apresenta-se dados referentes a terremotos ocorridos e sua magnitude na escala Richter:

Local e data	Escala Richter
São Francisco, 1906	8,3
São Francisco, 1989	7,1
Irã, 1990	7,3
México, 1985	8,1

Baseado nos dados acima:

a) Compare os terremotos de São Francisco de 1906 e de 1989.

b) Compare o do Irã -1990 e o do México -1985.

Desintegração radioativa - Método de datação Carbono-14

O Carbono-14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono. A quantidade de C^{14} na atmosfera mantêm-se constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante. O carbono-14 é criado nos vegetais durante o processo da fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão de vegetais. Quando o ser morre, a absorção cessa mas o C^{14} nele existente continua a se desintegrar.

Assim, o método do carbono-14 é usado para determinar a idade de descobertas arqueológicas. Através do Contador Geiger, é possível estimar a quantidade ($\boldsymbol{y}$) de isótopos de carbono-14 por átomo de carbono presente em objetos de madeira ou fósseis. Sabendo a quantidade de tais isótopos existente em um ser ou árvore viva ($\boldsymbol{y_0}$), sabendo que estes isótopos se desintegram e que seu número diminui exponencialmente a partir do momento em que o ser ou árvore deixa de viver e sabendo a meia-vida (MV) do carbono-14 (tempo em que a quantidade inicial se reduz à metade – 5570 anos) os cientistas podem estimar a idade do objeto ou fóssil encontrado.

A seguir são apresentadas sugestões de atividades que possam facilitar o estudo das funções exponencial e logarítmica. Considera-se que os estudantes já estejam familiarizados com as noções de variável, variável discreta, variável contínua, dependência, regularidade e generalização. Os resultados devem ser discutidos e analisados.

1) Construção do modelo exponencial (variável discreta)

Calcule o número de resultados possíveis, em função do número de moedas lançadas. Use moedas de R$ 0,01; R$ 0,05; R$ 0,10; R$ 0,50 e R$ 1,00.

Procedimento:

- lançar uma moeda e verificar os resultados possíveis;
- lançar 2, 3, 4, e 5 moedas distintas verificando os resultados.

a) Construa uma tabela relacionando o número de moedas lançadas e o número de resultados obtidos.

b) Construa o gráfico que representa a situação.

c) Construa o modelo matemático.

2) Eliminação de droga pelo organismo (modelo exponencial contínuo)

Uma medicação é ministrada por via intravenosa em um sujeito. A medicação é levada pelo sangue aos órgãos que a absorvem ou eliminam. Suponha que a cada hora a medicação se reduza a 1/3 da quantidade presente.

a) Encontre um modelo matemático que indique a cada hora x, a quantidade de medicação presente.

b) Se a quantidade de medicação ministrada é 30g como fica este modelo matemático?

c) Construa o gráfico.

3) Decaimento radioativo

As substâncias radioativas apresentam decaimento de forma aproximadamente exponencial. O cobalto-60, que é amplamente utilizado no tratamento de pacientes com câncer, tem meia-vida de 5,26 anos. Isto é, a cada 5,26 anos, a quantidade em gramas da substância se reduz à metade do que se tinha anteriormente. Se um hospital comprar 20mg deste isótopo, quanto restará após 10,52 anos? E após 15 anos?

4) Juros compostos

Considere um investimento de R$ 20.000,00 à uma taxa de 10% ao mês. Calcule o montante mês a mês até o final de 5 meses usando juros simples e juros compostos. Represente as duas situações graficamente. Encontre os modelos matemáticos que descrevem estas situações.

5) Crescimento populacional

Observe, na tabela abaixo, a evolução da população brasileira:

Ano	***n.º de habitantes***
1872	9.930.478
1890	14.333.915
1900	17.438.434
1920	30.635.605
1940	41.165.289
1950	51.941.767
1960	70.070.457
1970	93.139.037
1980	119.002.70
1991	146.825.475
2000	169.590.693

Baseado na tabela construa um gráfico que mostre a evolução da população brasileira entre 1872 e 2000. Use papel milimetrado e admita que no eixo horizontal cada centímetro represente 10 anos e no eixo vertical cada centímetro represente 20 milhões de brasileiros.

Como seria este gráfico se, a cada década, a partir de 1890 a população tivesse crescido, em número de habitantes, o mesmo que cresceu de 1890 a 1900? Discuta os resultados.

6) Crescimento populacional

Um certo país tinha uma população de 30 milhões de habitantes há 5 anos atrás. Admitindo-se uma taxa de crescimento anual de 1,2% ao ano, construa uma tabela que mostre a evolução da população ano a ano. Encontre a expressão matemática que possibilite fazer previsões futuras para esta população caso seja mantida a mesma taxa de crescimento. Construa o gráfico.

As atividades e aplicações apresentadas se constituem em uma pequena amostra do potencial do trabalho a ser desenvolvido abordando as funções exponencial e logarítmica dentro do enfoque proposto. A bibliografia sugerida enriquecerá de maneira significativa o trabalho.

Bibliografia:

BOYER, Carl B.. ***História da Matemática***. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

LIMA, Elon Lages. ***Logaritmos.*** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

POZO, Juan Ignacio (org.). ***A solução de problemas.*** Porto Alegre: Artmed, 1998.

SWOKOWSKY, E.W..***Cálculo com Geometria Analítica***. São Paulo: Makron Books, 1994.