

O INTUITIVO E O LÓGICO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: aspectos históricos, filosóficos e educacionais¹

Renata Cristina Geromel Meneghetti²

RESUMO

Neste trabalho analisa-se como foram tratados os aspectos intuitivo e lógico do conhecimento matemático no desenvolvimento histórico da filosofia geral e, em particular, da filosofia da matemática. Para tal, percorreu-se as seguintes correntes: o realismo platônico e aristotélico; o idealismo de Descartes; o empirismo inglês; o racionalismo de Leibniz; o idealismo transcendental de Kant e as correntes filosóficas matemáticas dominantes no século XIX. Nesse percurso, algumas evidências são explicitadas, base para a elaboração de uma nova proposta filosófica para conhecimento matemático.

Esta pesquisa foi direcionada pela seguinte questão: *qual o papel que o “intuitivo” e o “lógico” desempenham na concepção do conhecimento matemático?*

A investigação, dessa pergunta, se deu mediante um estudo histórico-filosófico, no qual percorremos as seguintes correntes: o realismo platônico; o realismo aristotélico; o idealismo de Descartes; 4) o empirismo inglês; o racionalismo de Leibniz; o idealismo transcendental de Kant; as correntes filosóficas do século XIX: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo.

Desse estudo pudemos constatar que:

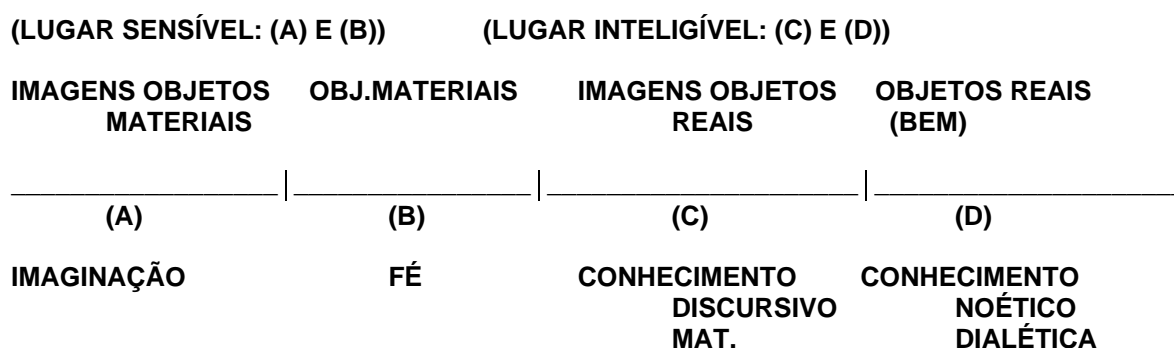
Na teoria de Platão (427-347 a.C.) existem, separadamente, dois lugares: o sensível e o inteligível. Ambos são representados, na alegoria da linha, respectivamente, por dois segmentos desiguais, cada um dos quais recebe uma nova seção obedecendo à mesma proporção. O primeiro segmento, pertencente ao lugar visível, corresponde às imagens dos objetos materiais³. O segundo consiste nos próprios objetos materiais. Semelhantemente, sobre a seção da linha que representa o mundo inteligível, a primeira corresponderá a imagens de

¹ Trabalho originado a partir da tese de doutorado em educação matemática, que teve por título “O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: uma análise a luz da história e da filosofia da matemática”, sob a orientação do prof. Dr. Irineu Bicudo, UNESP- Rio Claro-SP-Br.

² Depto. de Mat. USP- São Carlos- rcgm@icmc.sc.usp.br

³ Platão denomina imagens as sombras, os reflexos e todas as representações similares.

objetos reais e a segunda aos próprios objetos reais, ou seja, às Idéias⁴. No primeiro segmento do mundo inteligível, a alma serve-se dos originais do mundo visível, procedendo, a partir de hipóteses, não rumo a um princípio, mas a uma conclusão. A tal parte pertencem as noções matemáticas ou dianoéticas. A outra parte do inteligível leva a um princípio não hipotético, o Bem, e é atingida por meio exclusivo das idéias tomadas em si próprias, portanto, sem o auxílio das imagens utilizadas no caso anterior; tal parte corresponde à dialética. O esquema abaixo visa ilustrar essa situação:



Na teoria de Platão aquilo que o mundo oferece aos sentidos é falso e ilusório; é no lugar inteligível que se encontram verdades, entes e realidades em estado de pureza (as idéias). As idéias são as essências existentes das coisas do mundo sensível. A ciência deve ter por objeto o ser real (as idéias).

O conhecimento consiste na elevação (através da dialética) do mundo sensível ao mundo supra-sensível.

No esquema acima, vemos que a matemática se localiza no lugar inteligível, sendo propedêutica a dialética. Noções matemáticas refletem idéias e possuem seus protótipos no domínio das realidades eternas. Os matemáticos fazem uso do raciocínio e não dos sentidos.

Com isso concluímos que no realismo platônico, além de haver uma clara separação entre o mundo sensível e o mundo inteligível, o conhecimento permanece unicamente no mundo inteligível.

⁴ As idéias são as essências existentes das coisas do mundo sensível. Cada coisa no mundo sensível tem sua idéia no mundo inteligível.

O realismo tem sua continuidade com Aristóteles (384-322 a.C.). Esse último teve como principal propósito desfazer a dualidade entre o sensível e o inteligível. Os conceitos reproduziram as estruturas inerentes aos próprios objetos. A partir do mundo sensível, as formas inteligíveis são extraídas por abstração, a qual segue os seguintes passos:

(i) a partir da realidade, faz-se abstrações levando em consideração as características comuns dos 'objetos';

(ii) na elevação de um nível para o seguinte posterior os objetos são agrupados a partir de suas classes de equivalências;

(iii) o conceito genérico é o supremo da pirâmide. Refere-se à representação abstrata e diz respeito a todas as determinações nas quais os objetos estão de acordo.

Assim, no realismo aristotélico, o conhecimento, apesar de nascer do mundo sensível, separa-se cada vez mais deste, por meio do processo de abstração, e o conceito, propriamente, é análogo à idéia de Platão; sendo o conhecimento universal considerado como superior às sensações e à intuição.

A partir do século XV a filosofia entra em crise, justificada, principalmente pelos seguintes fatores: a destruição da unidade religiosa (o advento do protestantismo); a descoberta da terra (apoiada no fato de o planeta ser redondo); e a descoberta do céu (a terra deixa de ser o centro do universo). A partir dessa crise, origina-se uma posição completamente diferente que surge com a idéia de precaução e cautela, trata-se do idealismo de Descartes (1596-1650), que concebeu como verdade primeira, o pensamento. Baseado no tão conhecido princípio: "Penso, logo existo", Descartes procurou extrair do eu um mundo de pontos e figuras geométricas. Concebeu como únicas fontes do conhecimento: a intuição intelectual e a dedução. Entendeu o mundo sensível como composto de pensamentos obscuros e confusos, que davam margem à dúvida; por este motivo, refutou a experiência como fonte de conhecimento.

Desta forma, buscou fundamentar a ciência em princípios racionais e lógicos. O raciocínio discursivo, na figura da matemática universal, toma uma posição privilegiada na escala do conhecimento.

A partir disso, a filosofia moderna passa a questionar: ‘como tirar o mundo exterior do pensamento e do eu? Surgem, então, duas correntes filosóficas: o empirismo e o racionalismo.

No empirismo destacaram-se: Locke (1621-1704), nessa mesma época também Newton (1643-1727), na seqüência, Berkeley (1685-1753), e, em seguida, a filosofia de Hume(1711-1776), ponto culminante dessa linha filosófica.

Abaixo segue uma exposição sucinta a respeito das filosofias de Hume e Newton, o que é suficiente para uma caracterização desta corrente de pensamento⁵.

Para Hume a única fundamentação sólida que podemos fornecer à ciência é a experiência e a observação. Concebeu que o pensamento é constituído de percepções, as quais recebem a seguinte classificação: (i) as impressões (elementos primitivos da experiência), são percepções fortes e vivas; (ii) os pensamentos (ou as idéias), são cópias de nossas impressões, e, portanto, são percepções fracas e obscuras. Entendeu por prova os argumentos derivados da experiência que não davam lugar à dúvida ou à oposição. Em Hume, o esforço máximo da razão humana consiste em reduzir os princípios, produtos de fenômenos naturais, a uma maior simplicidade, e restringir os diversos efeitos particulares a um pequeno número de causas gerais, mediante raciocínios baseados na analogia, na experiência e na observação. Newton concebeu que a ciência constitui-se em um corpo de verdade absolutamente seguro a respeito do mundo natural. A matemática tinha por fim propiciar uma explicação para os fenômenos observados, e deveria moldar-se em função da experiência. As leis matemáticas eram dedutíveis e também verificáveis por meio dos fenômenos físicos.

Caracterizando a linha racionalista temos Leibniz (1646-1716), o qual considerou que a certeza do conhecimento não pode ser oriunda da experiência, mas jaz unicamente na razão. Para ele, a experiência proporciona as verdades de fato que são confusas e obscuras. O ideal do conhecimento é o conhecimento

⁵ Para saber sobre as filosofias de Locke e Berkeley e mesmo para obter maiores informações sobre as demais, sugerimos a referência MENEGHETTI (2001).

necessário, o qual nos fornece as verdades da razão, que são inatas, virtualmente impressas e independentes da experiência.

Como uma crítica tanto ao empirismo como ao racionalismo, temos o idealismo transcendental de Emanuel Kant (1724-1804). Este filósofo, defendeu que a ciência não pode ser constituída por juízos analíticos, como queria Leibniz, pois se assim o fosse ela seria vã. Por outro lado, se a ciência fosse constituída por juízos sintéticos, ou seja, por ligações de fatos, como queria Hume, não seria ciência, mas um costume sem fundamento, não teria validade necessária e universal. O conhecimento resulta da conjunção de intuições (fornecidas pela sensibilidade) e de conceitos (fornecidos pelo entendimento), e é uma função ativa do sujeito. A intuição nos permite apreender o objeto, representá-lo; o conceito nos permite, através dessa representação, pensá-lo.

Depois de Kant a experiência é novamente posta de lado e as bases filosóficas passam a ser repensadas.

Processo semelhante ocorreu na filosofia da matemática. No início do século XIX surge três correntes filosóficas: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo, que pretendem dar conta da natureza do conhecimento matemático. Um ponto comum entre elas é que todas abandonaram a experiência como fonte de conhecimento.

No logicismo destacam-se: Frege (1848-1925) e Russell (1872-1970).

O primeiro pretendia reduzir a aritmética à lógica, como havia ocorrido a aritmetização da análise, se conseguisse seu intento, toda a matemática clássica à lógica. Considerou a aritmética um corpo de verdades analíticas e a priori, ou seja, os únicos princípios exigidos para as afirmações aritméticas são aqueles da lógica. Em sua filosofia, o número foi concebido como um objeto lógico, ideal, não tendo existência espaço-temporal, cujo acesso se dá unicamente por meio da razão. No logicismo de Frege há uma busca pelo predomínio total, na aritmética, do aspecto lógico do conhecimento; e, em consequência, há a exclusão do aspecto intuitivo.

Já Russell apresentou uma postura mais radical, a de reduzir toda a matemática à lógica. Adotou a posição de que o mundo existe independente de

nossa percepção. As verdades matemáticas são verdades lógicas (produtos de convenções lingüísticas) e, portanto, não dizem respeito ao conhecimento empírico e também não podem expressar conhecimento subjetivo.

No formalismo de Hilbert (1862-1943), o propósito é o de unir o método logicista com o método axiomático, e com isso garantir a consistência nas investigações em matemática.

Nesta linha, as coisas existem desde que novos conceitos e novas entidades possam ser definidos sem contradição, nesse sentido, a matemática é reduzida a uma coleção de fórmulas.

No intuicionismo moderno, no qual destaca-se Brouwer (1881-1966), a matemática em sua formação abstrata é considerada puramente intuitiva, e independente da lógica. Toda matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais por meio de métodos construtivos “intuitivamente claros”. A linguagem e outros aparatos simbólicos, inclusive a lógica, não são instrumentos matemáticos, mas meios de comunicação das idéias matemáticas e, portanto, deixam de ser básicos à matemática.

O intuicionismo reduz o conhecimento matemático ao conhecimento subjetivo.

Apesar da tentativa e de todo esforço desempenhado, nenhuma dessas três correntes filosófica conseguiu fornecer à matemática uma fundamentação sólida⁶, e a natureza do saber matemático passou novamente questionada.

A característica mais marcante de toda essa análise é de que, com exceção de Kant, os aspectos intuitivo e lógico foram considerados sempre como excludentes, ou seja, em nenhuma situação tais aspectos se apresentam como complementares no processo da constituição do conhecimento matemático. Diante disso, acreditamos que é necessário que na concepção do conhecimento da matemática seja considerado, equilibradamente, ambos os aspectos: intuitivo e lógico, visto que, a história tem nos mostrado que priorizar apenas um deles leva fatalmente a um fracasso. Ademais, uma vez concebendo que as ações pedagógicas de um professor de matemática, sejam influenciadas, entre outros

⁶ Cf. Snapper, 1979.

fatores, por sua concepção de conhecimento matemático, acreditamos que as considerações, que aqui se faz, são de grande importância para a Educação Matemática.

BIBLIOGRAFIA

- ARISTÓTELES. *Organon IV: analíticos posteriores*. Trad. e Nota P. Gomes, Guimarães editores, Lisboa, 1987.
- AURI, R. (ed.) *The Cambridge Dictionary of Philosophy*. Cambridge University Press, 1996.
- BERKELEY, G. *The Principles of Human Knowledge*. Enciclopédia Britânica 'Great Books', 1980.
- BICUDO, I. Platão e a Matemática. *Revista Letras Clássicas*, n.2, pp.301-315, 1998.
- BURTT, E.A. *As Bases Metafísicas da Ciência Moderna*. Trad. J. Viegas Filho e O. A. Henriques. Revisão P. C. Moraes. Editora Universidade de Brasília, 1991.
- CASSIRER, E. *Substance and Function-and Einstein's Theory of Relativity*, Dover Publications Inc., 1953.
- COUTURAT, L. *Les Principes des Mathématiques*, Paris, 1980.
- D'AMBRÓSIO, U. Etnomatemática: um programa. *Educação Matemática em Revista*. SBEM, ano I, n.1- 2o semestre de 1993.
- DUMMETT, M. *FREGE philosophy of mathematics*. Havard University Press. Cambridge, Massachusetts, 1991.
- DESCARTES, R. *La Geométrie*. Trad. e Intr. P. O. Soler. Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1947.
- _____. *The Geometry*. Trad. D. E. Smith e M.L.Latham. Dover Publications, Inc. New York, 1954.
- _____. *Regras para a Direcção do Espírito*. Trad. J. Gama. Lisboa, edições 70, 1989a.
- _____. *Discurso do Método*. Trad. E. M. Marcelina. Comentários D.Huiman. Editora Ática, 1989b.

- DEMOPOULOS, W. *Frege's Philosophy of Mathematics*. Havard University Press - Cambridge, Massachusetts- London, England, 1995.
- ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. Bristol, The Farmer Press, 1991.
- FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic*. English Translation by J. L. Austin. M.A-Basil Blackwell- Oxford, 1959.
- _____. *Os Fundamentos da Aritmética*. Trad. L.H. Santos, Coleção 'Os Pensadores', v.6, São Paulo, Abril, 1983.
- _____. *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*, 1879. In: Heijenoort, V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*. Havard University Press, Cambridge, Madschutts, 1971, pp. 1-82.
- FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, ano 3, n.4, 1995.
- GRATTAN-GUINNESS. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*. Duckworth, 1980.
- New York, N.Y, 1962.
- HEIJENOORT, V.(ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879- 1931*. Havard University Press, Cambridge, Madschutts, pp.1-82, 1971.
- HILBERT (1927). *The foundations of mathematics*. In: Heijenoort, V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*. Havard University Press, Cambridge, Madschutts, 1971, pp. 464-479.
- HUME, D. *Tratado de la Natureza Humana*. Editora Nacional, Madrid, edição preparada por Felix Duque, 1981.
- HUME, D. *An Enquiry Concerning Human Understanding*. Enciclopédia Britânica 'Great Books', 1980.
- IMENES, L.M.P. *Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem Matemática*. Dissertação (Mestrado em Ed. Mat.). Rio Claro: IGCE-UNESP.

- KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Trad. M. P. Santos e A. F. Morujão. Introdução e notas de A. F. Morujão. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 4a edição, 1997.
- KENEAL, K., KENEAL, M. *O desenvolvimento da Lógica*. Trad. M.S. Lourenço. 2a ed., Lisboa: Fund. Calouste Gulbenkian, 1991.
- KLINE, M. *O Fracasso da Matemática Moderna*, São Paulo, IBRASA, 1976.
- LEIBNIZ, G. W. *Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano*. Trad. Luiz João Baraúna, Coleção “Os Pensadores” Editora Nova Cultural Ltda, 1996.
- LOCKE, J. *An Essay Concerning Human Understanding*. Enciclopédia Britânica ‘Great Books’, 1980.
- _____. *Ensaio Acerca do Entendimento Humano*. Trad. Anuar Aiex. Nova Cultural, 1997.
- MACHADO, N.J. *Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática*. 2a ed. São Paulo: Cortez:Autores Associados, 1989.
- MENEGHETTI, R.C.G. O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático: uma análise a luz da história e da filosofia da matemática, *tese de doutorado em Educação Matemática*, orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo, IGCE-UNESP- Rio Claro-SP.
- MORENTE, M.G. *Fundamentos de Filosofia*. Editora Mestre Jou, São Paulo, 1970.
- OLIVEIRA, T.A. *Análise Não-Standard uma Apologia ao seu Ensino* Dissertação de Mestrado UNESP-IGCE, Rio Claro 1993.
- PALÁCIOS, A.R., PALÁCIOS, A. G. *Geo-Home-Trío & Geometria: Matemática e Filosofia*. Editorial Lumen, Argentina, 1999.
- PLATÃO. *A República*. Intr. e nota R. Baccou. Trad. J.Guinsburg. São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1973.
- PLATÃO. *A República*. Livro VII. São Paulo: Editora Universidade de Brasília/Ática, 1989.
- RESNIK, M. D. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Cornell University Press, Ithaca and London, 1980.

- RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*. Cambrid University Press, Cambridge, 1903.
- SNAPPER, E. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism. *Math. Mag.* vol. 52, n.4, september 1979, pp.207-216.
- TILES, M. *Mathemetics and the Image of Reason*. Routledge, London and New York, 1991.
- WHITEHEAD, A.N. and RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. In: HEIJENOORT, V.: From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971.
- WILDER, R.L. *Introdution to The Foudations of Mathematics*. Second edition, Wiley International Edition- John Wiley & Sons. Inc. New York- London- Sydney, 1965.