RECURSOS COMPUTACIONAIS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

(Oficina 1G82)

Victor Giraldo

(Instituto de Matemática – UFRJ)

victor@dmm.im.ufrj.br

Fundamentação e Justificativas

Em nossas atividades em ensino superior de matemática, nos cursos iniciais de cálculo, tivemos oportunidade de observar, por diversas vezes, os procedimentos de alunos recém egressos do nível médio em relação às conexões entre as três principais representações de funções reais de uma variável: gráficos, tabelas e fórmulas. Constatamos que, quase que invariavelmente, estes procedimentos se restringem ao seguinte:

1. substituir valores (em geral escolhidos arbitrariamente) na expressão algébrica de uma função dada;
2. marcar os pontos correspondentes no plano cartesiano;
3. interpolar esses pontos por meio de curvas ou segmentos de retas.

Desta forma, verifica-se que a conexão entre as três representações se dá somente da seguinte forma:

fórmula ← tabela ← gráfico

Neste trabalho, propomos uma série de atividades, utilizando computadores ou calculadoras gráficas, planejadas com o objetivo de "completar" o diagrama acima, isto é, estabelecer as demais conexões, particularmente a ligação direta entre gráfico e fórmula. Na concepção das atividades, destacamos inicialmente a comparação entre dois aspectos fundamentais:

- propriedades quantitativas: aquelas que dizem respeito aos valores de uma função em um subconjunto finito de pontos do domínio;
- propriedades qualitativas: relativas à análise do comportamento de uma função globalmente no domínio, num intervalo, ou, de forma geral, num subconjunto infinito do domínio.

Por exemplo, a existência de máximos e mínimos de função seriam propriedades qualitativas, já os seus valores nestes pontos, propriedades quantitativas.

A estratégia empregada por alunos para traçar gráficos, conforme o descrito acima, lança mão somente de propriedades quantitativas da função, isto é, de seus valores em pontos. Da mesma forma, os algoritmos computacionais para gerar gráficos se baseiam na determinação de uma quantidade finita de pontos. A diferença aqui, é claro, está no fato de que, como a capacidade de cálculos da máquina é imensamente maior que a humana, os pontos gerados ficam suficientemente próximos para que se crie a seguinte ilusão: o que se vê na tela parece ser uma curva, quando na verdade se trata de um conjunto discreto[1].

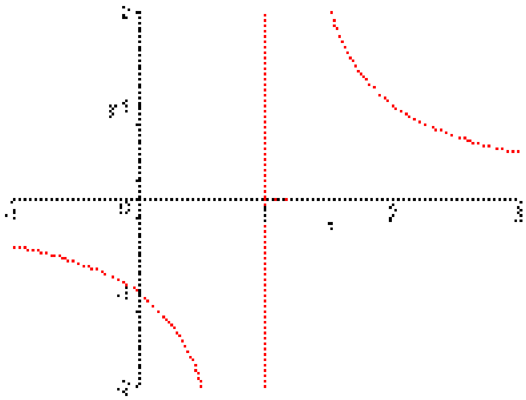
Em contrapartida, a noção de infinito é inatingível pela máquina. Portanto, as propriedades qualitativas que um indivíduo pode usar para esboçar gráficos não são acessíveis aos computadores. Por exemplo, do ponto de vista de um algoritmo computacional é indiferente traçar uma parábola ou qualquer outra curva, enquanto que um ser humano dispõe da informação qualitativa de que o gráfico de uma função é uma parábola se e só se esta é do segundo grau.

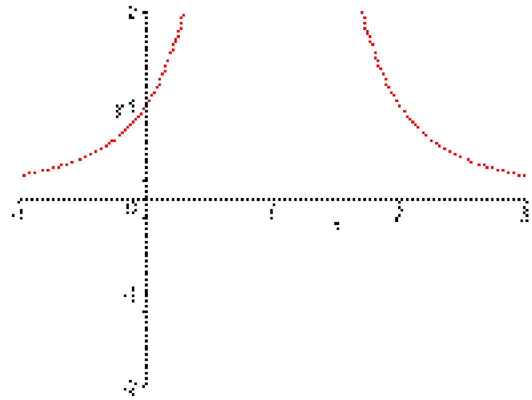
Essas limitações da máquina podem dar origem a situações onde a representação computacional não corresponde ao modelo matemático.

Consideremos, por exemplo, as figuras mostradas a seguir, que representam respectivamente os gráficos das funções $f(x)=1/(x-1)$ e $g(x)=1/(x-1)^2$, gerados pelo aplicativo ***Maple***, ambos no intervalo $-1<x<3$ e $-2<y<2$. Ambas as curvas admitem assíntotas verticais em $x=1$, no entanto somente no gráfico de f a reta aparece. Na verdade, a ocorrência desta reta se deve a um erro computacional. O ***software*** não

[1] Na verdade, a questão aqui é ainda mais delicada, já que há uma fundamental diferença entre um *ponto* que aparece na tela do computador e um *ponto* no sentido matemático.

detecta a descontinuidade e trata o gráfico como se este fosse conexo, interpolando pontos indiscriminadamente e gerando assim a aparente assíntota vertical. O gráfico de ***g*** é tratado da mesma forma, mas a reta não aparece apenas por que neste caso os limites laterais em ***x=1*** são ambos positivos.





A partir destas considerações, procuramos formular atividades nas quais sejam confrontadas as diferenças entre os procedimentos humanos (qualitativos e quantitativos) e os algoritmos computacionais (somente quantitativos) para traçado de gráficos. A única conexão entre as três representações de funções possível para a máquina é exatamente fórmula → tabela → gráfico. Assim, através deste confronto, com a eventual ocorrência de erros e limitações computacionais, buscamos chamar a atenção para a possibilidade – mais do que isso, a ***necessidade*** – da análise de propriedades qualitativas e do estabelecimento das demais conexões.

Exemplos de Atividades

Nesta oficina, organizamos as atividades em torno de dois objetivos principais:

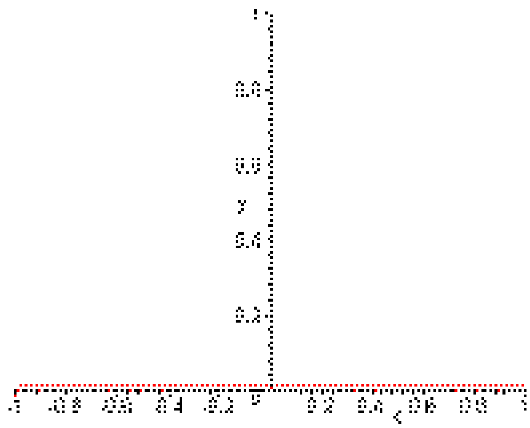
- escolha da janela gráfica;
- escolha das escalas nos eixos cartesianos.

Passemos agora a alguns exemplos de atividades integrantes da oficina. Uma mesma curva, traçada no computador em diferentes janelas gráficas, apresenta muitas vezes aspectos inesperados. Estes aspectos são determinados fundamentalmente pelas escalas dos eixos e pelas limitações computacionais do ***software*** utilizado. As atividades são conduzidas de forma a buscar a explicação matemática dessas visualizações computacionais.

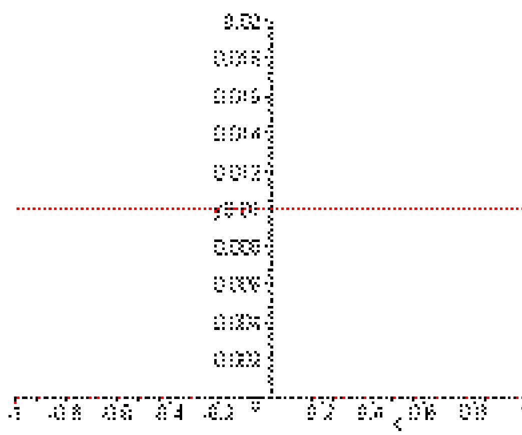
Esta oficina se destina principalmente a professores de ensino médio e alunos de licenciatura em Matemática. As atividades são apresentadas com os aplicativos ***Graphmat*** e ***Maple***, no entanto foram concebidas de forma a poderem ser desenvolvidas em qualquer ***software*** simples que trace de gráficos de funções.

Atividade 1: Ao lado, vemos o gráfico de $f(x)=1/(x^6+100)$, com $-1<x<1$ e $0<y<1$.

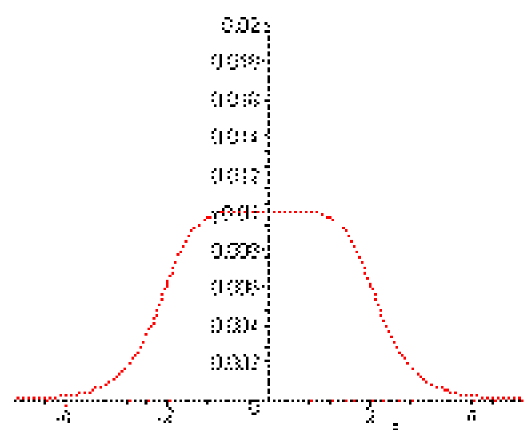
O valor máximo atingido por f é $y=0.01$, para $x=0$. O intervalo escolhido para y é portanto muito maior que os valores a função, logo esta se assemelha a uma reta horizontal muito próxima do eixo x.



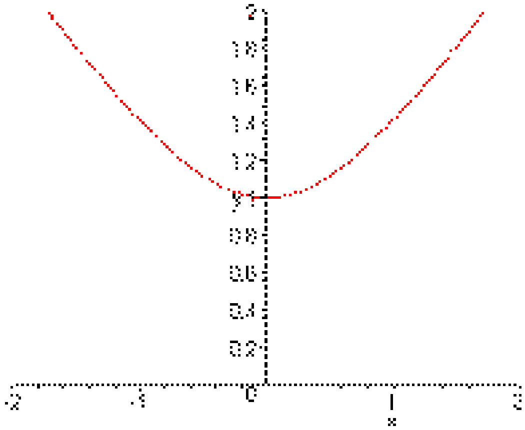
A seguir, mudamos o intervalo de y para $0<y<0.02$. Os valores da função não são mais muito menores que os do intervalo escolhido, no entanto, o intervalo no eixo x foi mantido. Para valores de x entre –1 e 1, o termo x^6 é muito pequeno, portanto os valores de y ficam muito próximos de 0.01, o que confere ao gráfico um aspecto semelhante ao de uma reta.

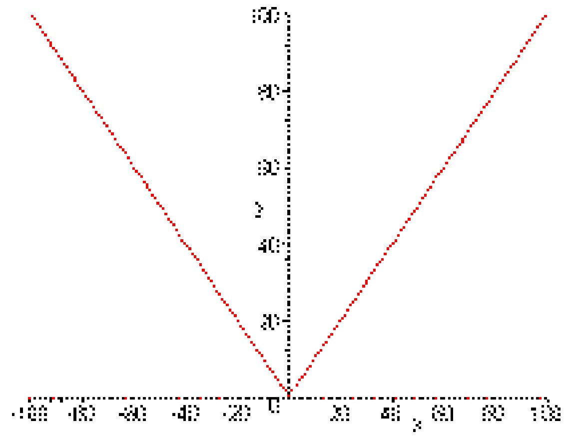


Finalmente, ampliando o intervalo no eixo y, conseguimos visualizar mais claramente as regiões de crescimento e decrescimento da função.



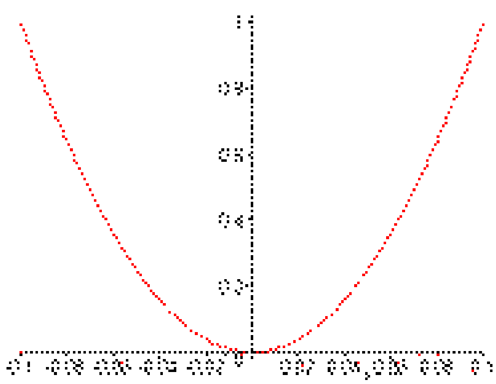
Atividade 2: Vemos abaixo o ramo de hipérbole $y=(x^2+1)^{1/2}$, representado primeiramente para $-2<x<2$ e $0<y<2$ e, a seguir, para $-100<x<100$ e $0<y<100$.

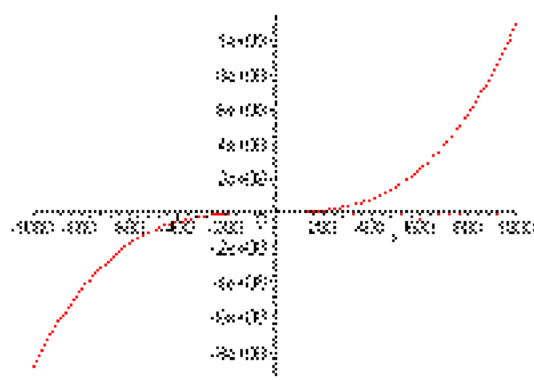




Para valores grandes de x, os valores de x^2+1 ficam relativamente próximos a x^2. Por esta razão, para estes valores, podemos considerar que $(x^2+1)^{1/2}$ é aproximadamente $(x^2)^{1/2}=|x|$, logo gráfico se assemelha ao da função módulo.

Atividade 3: As figuras abaixo representam o gráfico da função, $f(x)=x^3+100x^2$, traçado para $-0.1<x<0.1$ e para $-1000<x<1000$, respectivamente.



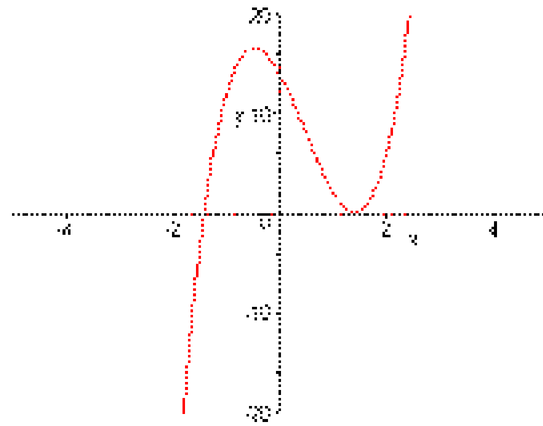


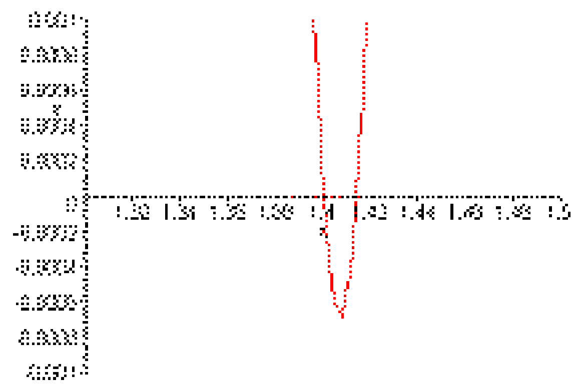
Na figura da esquerda, como os valores de x são pequenos, a parcela x^3 é muito menor que a parcela $100x^2$, tornando-se imperceptível à escala do computador, e o gráfico de f fica parecido com a curva $y=x^3$. Já na figura da direita, o contrário ocorre: para esses valores de x, $100x^2$ é muito menor que x^3, portanto o gráfico se confunde com $y=x^3$.

<u>Atividade 4</u>: Observamos aqui o gráfico do polinômio $f(x)=(x^2-2)\,(5x-7)$.

O polinômio tem como raízes os números $-2^{1/2}$, $2^{1/2}$ e $7/5$. As raízes positivas são portanto muito próximas, diferindo apenas na casa decimal dos centésimos.

A visualização do gráfico no computador dá a impressão de que este é tangente ao eixo x, o que estaria associado à ocorrência de uma raiz múltipla. Sabemos no entanto, da expressão algébrica de f (que já é dada na forma fatorada) que isto não ocorre. Na verdade, a curva corta o eixo em dois pontos muitos próximos onde dá a impressão de tangenciá-lo.

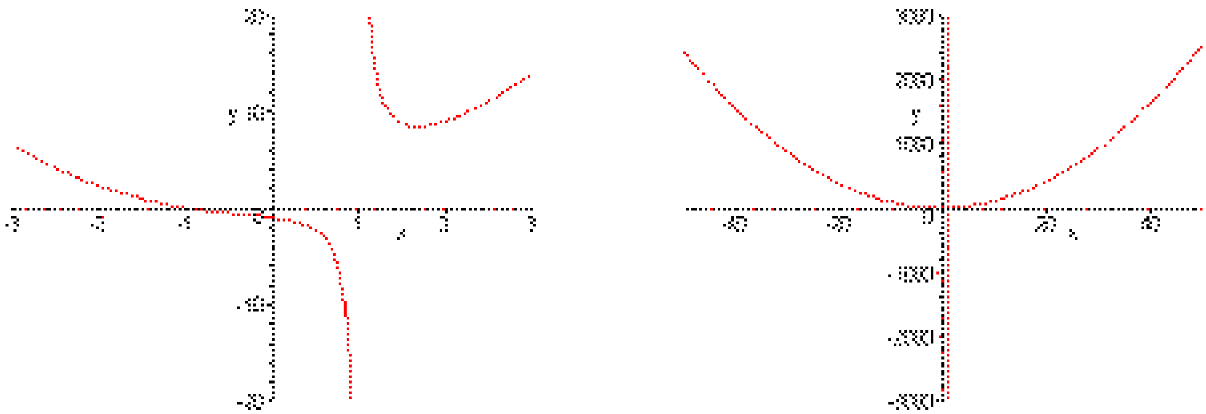




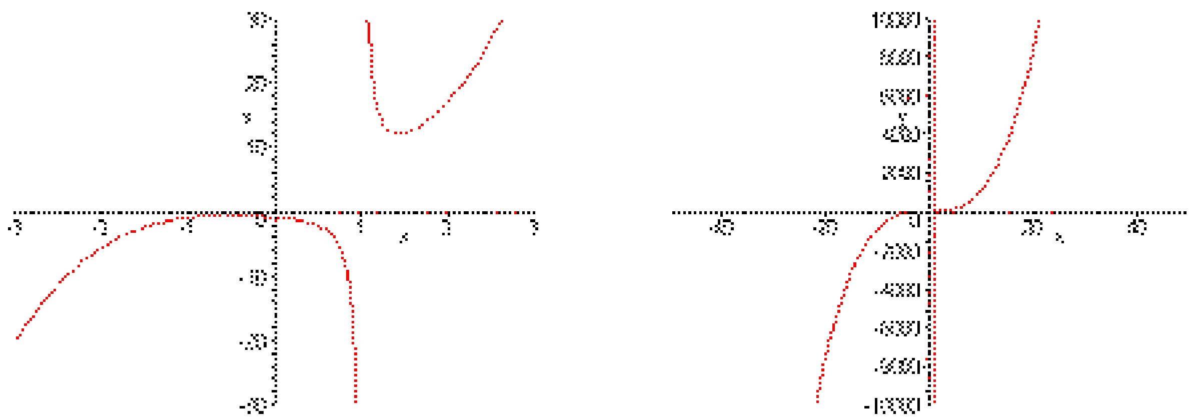
Para conseguir enxergar as duas raízes positivas simultaneamente, devemos aproximar a janela gráfica. No caso, na segunda figura acima, vemos o mesmo gráfico traçado para $1.3<x<1.5$ e $-0.001<y<0.001$.

<u>Atividade 5</u>: Observamos abaixo o gráfico da função racional $f(x)=(x^3+1)/(x-1)$, traçado primeiro numa janela gráfica com valores relativamente pequenos para as variáveis e, a seguir, num com valores grandes.

Podemos observar que, na segunda janela, a curva adquire a aparência de uma parábola. Isto ocorre por que, para valores grandes de x, os termos independentes do numerador e denominador se tornam desprezíveis. Portanto, os valores de ***y*** se tornam muito próximos a x^2.



De forma análoga, o gráfico de ***f(x)=(x^4+1)/(x-1)*** fica parecido com uma cúbica para valores grandes das variáveis, como podemos observar nas figuras abaixo.



A partir da discussão teórica motivada por esta atividade, podemos colocar a seguinte questão:

Consideremos uma função racional na forma f(x)=p(x)/q(x), onde p e q são polinômios com coeficientes reais, com o grau de p maior que o de q. O que determina o aspecto do gráfico de f quando visualizado em janelas com valores grandes das variáveis?

A observação destes e de mais alguns exemplos irá sugerir que sempre vemos um polinômio cujo grau é diferença entre os graus do numerador e do denominador. De fato, se aumentamos os valores de ***x***, todos as parcelas de graus menores vão se tornando desprezíveis em relação àquelas de maior grau em ***p*** e em ***q***. Neste ponto, a discussão deve ser conduzida para a verificação teórica desta conjectura.

Do algoritmo da divisão para polinômios, temos que existem polinômios ***g*** e ***r*** (quociente e resto da divisão de ***p*** por ***q***), sendo o grau de r menor que o de ***q***, tais que:

$$p(x) = q(x).g(x) + r(x)$$

Portanto:

$$f(x) = p(x)/q(x) = g(x) + r(x)/q(x)$$

Logo:

$$f(x)-g(x) = r(x)/q(x)$$

Como o grau de ***r*** é menor que o de ***q***, temos que ***r(x)/q(x),*** e portanto a diferença ***f(x)-g(x)***, tendem a zero quando ***x*** tende a infinito. Por esta razão, o gráfico da função racional ***f(x)=p(x)/q(x)*** adquire o aspecto do polinômio quociente ***g(x)*** para valores grandes de ***x***.

Consideramos esta atividade um bom exemplo de como uma exploração computacional, onde aproximações e limitações de precisão determinam os resultados produzidos pela máquina, pode conduzir a uma conclusão teórica.

Bibliografia

1 Abrahão, A.M.C. (1998). ***O Comportamento de Professores frente a Alguns Gráficos de Funções f : R->R Obtidos com Novas Tecnologias***. Dissertação de Mestrado, PUC/RJ.

2 Carvalho, L.M. & Giraldo, V. (2000). ***Funções e Novas Tecnologias***, Algumas Perguntas. III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro, 1:24-29, Campos dos Goytacazes, Brasil.

3 Bianchini, W., Giraldo, V., Kubrusly, R., Santos, A.R. (1998). ***Introdução às Funções Reais - Um Enfoque Computacional***. Edição IM/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

4 Blokland, P., Giessen, C. & Tall, D.O. (2000). ***Graphic Calculus for Windows***. www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall.

5 Giraldo, V. & Roque, T. (1997). ***O Uso do Computador no Ensino de Cálculo e sues Pré-Requisitos***. Anais do 1o. Encontro Estadual de Educação Matemática, Rio de Janeiro, Brasil.

6 Palis, G.L.R. (1997). ***Gráficos de Funções com Calculadoras e com Lápis e Papel***. Educação e Matemática, Portugal, 45:37-40.

7 Sierpinska, A. (1992). ***On Understanding the Notion of Function***. In Harel, G & Dubinsky, E. (Eds.), MAA Notes and Report Series, 25-58.

8 Tall, D. (1996). ***Functions and Calculus***. International Handbook of Mathematics Education, 289-326.

9 Vinner, S. (1983). ***Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function***. The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14:293-305.