SIMETRIA DE ROTAÇÃO: Investigando uma seqüência Didática com o Cabri-géomètre

Abraão Juvêncio de Araújo

Resumo

Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa que avalia os efeitos didáticos de uma seqüência de atividades sobre o conceito de rotação em torno de um ponto e o de simetria rotacional, desenvolvida num ambiente computacional com o Cabri-géomètre II. A seqüência didática foi experimentada numa classe de 6ª série do ensino fundamental, com 28 alunos, interagindo em duplas, e foi composta de seis sessões que privilegiaram situações de construção, foi projetada em consonância com as previsões de seus efeitos, em função das possibilidades de ação, de formalização e de validação, bem como das concepções a serem desenvolvidas. Os resultados mostraram que houve uma evolução na compreensão das propriedades referentes às figuras construídas por meio de rotação, bem como na percepção da relação que se estabelece entre o ângulo de rotação e o número de partes correspondentes das figuras com simetria rotacional, quando comparados com o desempenho no pré-teste. Observou-se ainda que as estratégias utilizadas, na resolução dos problemas de construção, mudavam de acordo com o nível de dificuldade de cada questão, em função das variáveis manipuladas.

O conceito de simetria está muito presente no mundo físico e ocupa lugar de destaque no cotidiano das pessoas ¾ nas formas existentes na natureza, nas construções humanas, nas artes, nas ciências etc. (Noël, 1988), Dreyfus e Eisenberg (1990) afirmam que "***O papel da simetria na matemática é bem conhecido, mas o seu papel no processo de ensino-aprendizagem é uma história pouco contada***".

Introdução/problemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª à 8ª série (1998) são a favor da incorporação do estudo das transformações isométricas como um excelente ponto de apoio para a compreensão das propriedades de figuras planas. Ainda de acordo com os PCNs, ***"as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas ... porque***

permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico".

Do ponto de vista das pesquisas, encontramos relatos sobre um estudo realizado por Hart (1982), que investigou a concepção de alunos das escolas do ensino secundário da Inglaterra, na faixa etária de 14 anos de idade, quando interagindo com uma seqüência de atividades, sobre rotação. Essa autora observou o desempenho desses alunos em situações que exploravam a posição do centro de rotação, a preservação da distância do centro de rotação aos pontos correspondentes da figura, e a inclinação dos objetos desenhados na folha de papel.

Em suas conclusões, Hart afirma que, nas situações em que o aluno teria que: desenhar imagens de figuras rotacionadas de um quarto de volta, as dificuldades variavam, consideravelmente, dependendo da posição do centro de rotação e da inclinação dos objetos; localizar a posição do centro de rotação, onde eram dadas uma figura composta pelo desenho original e sua imagem, obtida por uma rotação de um quarto de volta, os erros mais comuns se configuravam: (a) quando os alunos desenhavam o ponto conservando o ângulo reto, mas não a distância do ponto desenhado aos pontos correspondentes da figura; ou (b) quando desenhavam o ponto mantendo constante a distância dele aos pontos extremos da bandeira, mas não conservando o ângulo reto.

Em nosso experimento, cujas atividades foram desenvolvidas num ambiente computacional com o Cabri-géomètre II, analisamos a evolução do aluno ao enfrentar atividades, sobre os conceitos de rotação em torno de um ponto e de simetria de rotação, com ênfase nesse último, nas quais terão que manipular a medida do ângulo de rotação, a posição do centro de rotação e a distância do centro de rotação a dois pontos correspondentes. Verificamos, ainda, o comportamento dos alunos diante das situações que se assemelham àquelas desenvolvidas por Hart em seu experimento.

O Cabri-géomètre[1] é um software que apresenta características que permitem utilizar o computador como uma ferramenta auxiliar para promover a

---

[1] O Cabri-géomètre vem sendo desenvolvido desde meados dos anos oitenta por J.M. Laborde, no LSD2-IMAG, laboratório do CNRS (Centro Nacional da Pesquisa Científica) e da Universidade Joseph Fourier, em Grenoble – França.

aprendizagem de conceitos geométricos. O Cabri-géomètre, segundo Laborde & Capponi (1994), apresenta características importantes, a exemplo das ***primitivas de desenhos puros***, definidas como um conjunto de objetos elementares (ponto, reta, etc.), e das ***primitivas geométricas***, definidas por ações elementares (traçar uma reta paralela a uma reta dada, determinar o ponto médio de um segmento etc.). Outra característica importante apresentada por este ambiente computacional consiste na ***manipulação direta do desenho***. Essas características permitem construções que se fazem no ambiente com papel e lápis e obter, por deslocamento contínuo de seus objetos de base, uma multiplicidade de desenhos ligados aos mesmos objetos.

Considerações teóricas

Um dos objetivos fundamentais da geometria consiste em estabelecer uma relação entre ***forma*** e ***medida***. De um lado, ela se preocupa em determinar os critérios que permitem identificar, a priori, se duas figuras têm a mesma forma; por outro lado, ela tem a preocupação de determinar as regras que permitem desenhar uma figura a partir de suas propriedades.

O estudo de simetria consiste de situações nas quais a relação entre forma e medida se estabelece de maneira bastante explícita, e se apóia na noção de transformação geométrica.

O conceito de simetria, do ponto de vista matemático, se fundamenta em dois conceitos: o de isometria e o de invariância de uma figura por um grupo de isometrias (Weyl, 1952). No estudo da simetria, três elementos intervêm de forma indissociável: a transformação, a figura geométrica e a invariância da figura, em face da transformação.

Convém explicitar o significado que será atribuído aqui a esses três elementos essenciais.

A transformação é entendida como uma função ***T*** do plano Π no plano Π $(T : \Pi \to \Pi)$ que associa a cada ponto ***A*** do plano (***A*** Π) um outro ponto ***A′*** = ***T***(A), também pertencente ao plano.

As transformações que preservam distâncias entre pontos são denominadas de ***transformações isométricas***. Assim, dizemos que ***T*** é uma transformação isométrica se, dados dois pontos quaisquer ***A*** e ***B***, então a distância entre A e B é igual à distância entre suas imagens ***T*(*A*)** e ***T*(*B*)**, ou seja, $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(T(A),T(B))$. Pode ser provado, a partir dessa definição, que uma isometria transforma retas, semi-retas e segmentos de retas em retas, semi-retas e segmentos de retas, respectivamente. Assim, triângulos e quadrados são “levados” em triângulos e quadrados, respectivamente. Além disso, uma isometria preserva medida de ângulos.

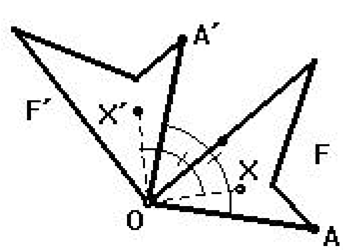
Uma figura geométrica é um conjunto qualquer de pontos do plano.

A invariância de uma figura ***F***, em face de uma transformação, diz respeito ao fato de essa transformação não alterar esse conjunto de pontos.

Assim, diz-se que uma figura ***F*** é simétrica relativamente a uma transformação isométrica ***T*** se a figura ***F*** é invariante por ***T***, isto é, se a transformação aplicada à figura ***F*** tem como imagem a própria figura ***F***, ou seja, ***T*(*F*)** = ***F***.

As isometrias são classificadas em quatro tipos: ***reflexão,*** em relação a uma reta; ***rotação***, em torno de um ponto; ***translação***; e ***reflexão*** com deslizamento. Dentre estas, destacam-se, para o estudo das simetrias no ensino fundamental, as de ***reflexão*** e de ***rotação***, tendo em vista que as simetrias de translação e de reflexão com deslizamento, a rigor, só podem ocorrer em figuras ilimitadas.

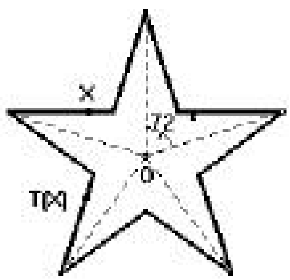
Uma rotação de um ângulo α em torno de um ponto ***O*** é a transformação, denotada por $T_{0,\alpha}$: Π ♦ Π, que leva um ***X*** (um ponto qualquer do plano ∏) num ponto $X' = T(X)$, de tal modo que a distância de ***X´*** ao ponto ***O*** é a mesma que a de ***X*** a ***O***, ou seja, $\mathrm{d}(X,O) = \mathrm{d}(T(X),O)$. Além disso, leva o ponto O em O [***T*(*O*)** = ***O***] e a medida do ângulo orientado[2] ***X*O*X´*** é igual a α.



[2] Supondo-se adotar no plano uma orientação positiva, dado um ângulo orientado _ A, sua medida é, então, um número real α, positivo, nulo ou negativo.

Dessa forma, pode-se provar que toda rotação de um ângulo α em torno de O, denotado por $T_{O,\,\alpha} : \prod \rightarrow \prod$, é uma isometria, ou seja, dados X e Y $\prod$, $\mathrm{d}(X,Y) = \mathrm{d}(T(X),T(Y))$.

Agora, dizemos que uma figura F é ***simétrica***, em relação a uma rotação de um ângulo α, se existe uma rotação $T_{O,\alpha} : \prod \rightarrow \prod$, de tal forma que, qualquer que seja o ponto X pertencente à figura F, sua imagem T(X) é também um ponto que pertence à figura F.



Pelo exposto, conclui-se que o conceito de simetria de rotação está relacionado aos três elementos já mencionados anteriormente: transformação isométrica (a rotação), figura geométrica e invariância dessa figura em face da rotação. E quanto à transformação (a rotação), pode-se observar que três elementos intervêm: o centro de rotação, o ângulo de rotação e o sentido da rotação.

A seqüência didática

A seqüência de que trata este texto foi idealizada a partir dos pressupostos teóricos descritos anteriormente. Para tanto, as situações de aprendizagem deveriam ser construídas visando à elaboração da manipular a medida do ângulo de rotação, a posição do centro de rotação e a distância do centro de rotação a dois pontos correspondentes.

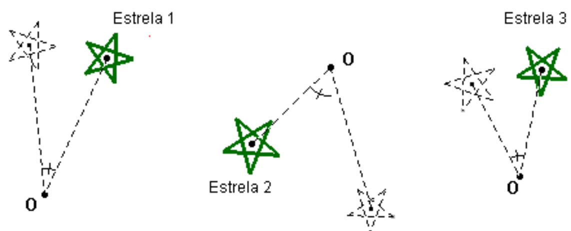
Assim, a seqüência completa seria composta de um conjunto de seis sessões, e tomaram como base as variáveis já evidenciadas na fundamentação teórica, tendo como referência os conceitos de rotação em torno de um ponto e de simetria de rotação.

O procedimento experimental dessa investigação se baseou numa adaptação da concepção de Engenharia Didática proposta por Artigue (1992), o qual é composto de três etapas: (i) estudos preliminares; (ii) construção da seqüência didática, seguida da análise a priori e de sua descrição e racionalização; (iii) experimentação da seqüência didática, seguida da análise a posteriori.

A aplicação da seqüência didática se deu com 28 alunos de 6ª série do ensino fundamental, interagindo em duplas homogêneas, em seis sessões, cada uma com a duração de 50 minutos.

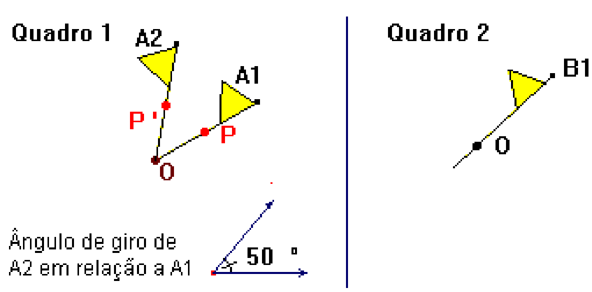
Durante a fase de experimentação da seqüência didática, cada dupla de alunos trabalhou em um microcomputador, equipado com o software Cabri-géomètre, e recebeu um disquete com um arquivo contendo figuras já construídas, ou iniciadas, e uma ficha de trabalho com os comandos e as informações necessárias ao desenvolvimento das tarefas. Além disso, duas duplas selecionadas aleatoriamente tiveram suas atividades gravadas em áudio e em vídeo.

Na 1ª sessão, denominada "as estrelas", o aluno teria que identificar a estrela que, em movimento, descreve uma trajetória circular. As trajetórias descritas eram, respectivamente: circunferência, triangular e elíptica.



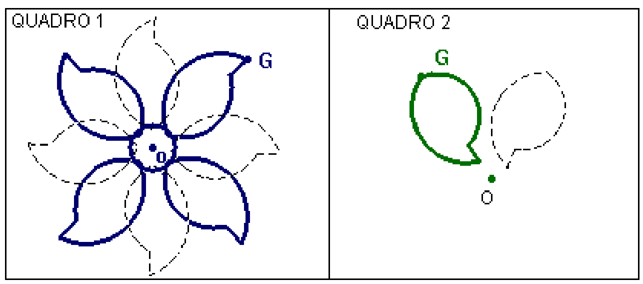
Foi possível perceber que os alunos identificaram a circunferência como sendo a forma geométrica cujos pontos ficam eqüidistantes de um ponto de referência, denominado centro. As justificativas apresentadas se apoiavam na noção que eles tinham do conceito de circunferência ou na comparação das distâncias entre o centro de cada estrela e o ponto de referência (ponto O).

Na sessão 2, denominada "as bandeiras", o aluno teria que desenhar uma figura por rotações e identificar algumas de suas características.



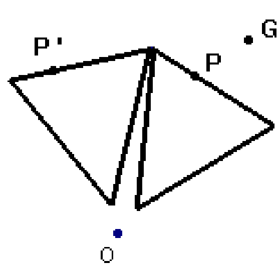
Verificamos que todos os alunos desenharam a imagem da bandeira. Quase todos as duplas perceberam que as distâncias dos pontos correspondentes (P e P´’) ao centro de rotações são iguais (se apoiando na visualização), bem como que a medida do ângulo entre os lados (imaginários) que têm origem no centro de rotação e passam por dois pontos correspondentes é a mesma do ângulo de rotação. Um aspecto que merece destaque está relacionado ao fato de que a estratégia privilegiada por esse grupo-classe, para justificar a igualdade entre as medidas do ângulo de rotação e do ângulo POP’, se apoiou na racionalização do processo de construção. Apenas uma dupla recorreu a procedimentos empíricos, usando os comandos do Cabri-géomètre para medir o ângulo.

Na sessão 3, denominada “o catavento”, o aluno teria que desenhar uma figura com simetria rotacional, conhecendo-se o número de partes correspondentes.



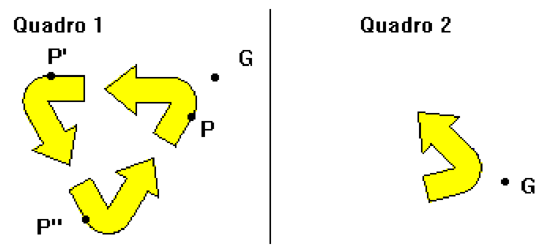
Verificamos que a maioria dos alunos desenhou a figura com simetria rotacional apresentando evidências de que perceberam a relação que se estabelece entre o ângulo de rotação e o número de partes correspondentes, embora tenhamos encontrado alunos que desenharam a figura por tentativas e aproximações. Ressaltamos que essa atividade ainda proporcionou aos alunos uma reflexão sobre as distâncias dos pontos correspondentes ao centro de rotação, levando-os a perceber que essas distâncias são congruentes.

Na sessão 4, denominada de “logotipo”, o aluno teria que desenhar uma figura com simetria rotacional, conhecendo-se duas de suas partes correspondentes e consecutivas.



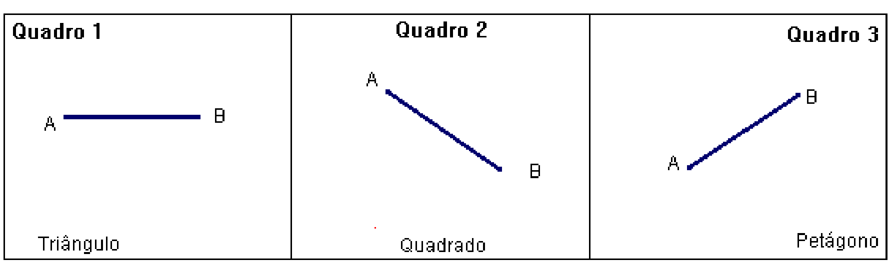
Analisando o resultado geral, observamos que a maioria das duplas conseguiu se apropriar do significado do problema enfrentado e mobilizar seus conhecimentos para resolvê-lo. Entretanto, os alunos resolveram esse problema por tentativa, imaginando a medida do ângulo de rotação, antes de desenhar a figura, ou aplicando rotações sucessivas com uma medida de ângulo qualquer para, em seguida, fazer os ajustes necessários; esses alunos não atentaram para o fato de que a medida do ângulo de rotação poderia ser obtida medindo o ângulo que fica entre os lados (imaginários), ligando o centro de rotação a um par de pontos correspondentes.

Na sessão 5, denominada “logotipo 2”, o aluno teria que desenhar uma figura com simetria rotacional, quando o centro de rotação não havia sido fornecido.



Nessa atividade, embora tenhamos observado que a maioria das duplas desenhou uma figura “semelhante” à figura do quadro 1, contrariando as nossas expectativas na analise a priori, os alunos deram a entender que não tiveram uma boa compreensão dos enunciados e do significado do problema proposto. Apenas três duplas, ao descreverem o procedimento utilizado, fizeram referências às variáveis controladas na situação.

Na sessão 6, intitulada de “polígonos”, o aluno teria que desenhar um triângulo eqüilátero, um quadrado e um pentágono regular, usando rotações.



Essa atividade atingiu os objetivos propostos na medida em que proporcionou aos alunos reconhecerem que os polígonos regulares são figuras com simetria rotacional. Essa conclusão se baseia no fato de que a maioria das duplas conseguiu desenhar os polígonos solicitados, e descrever um procedimento (com pequenas ressalvas) que permite desenhar qualquer polígono regular.

Considerações finais

Os objetivos a que nos propúnhamos, no início do experimento, parecem ter sido alcançados, e de maneira satisfatória. A partir dos resultados obtidos, verificamos que houve uma evolução nas concepções dos alunos com relação à compreensão das características gerais das figuras com simetria rotacional: perceber que esse tipo de figura é formado por partes correspondentes congruentes e que são desenhadas aplicando-se rotações sucessivas em torno de um ponto fixo; identificar a relação que se estabelece entre o ângulo de rotação e o número de partes correspondentes da figura.

Um aspecto observado ao longo das sessões consiste no fato de o aluno fazer uso de saberes adquiridos em sessões anteriores para resolver ou validar os resultados dos novos problemas enfrentados.

Cabe-nos, ainda, fazer algumas considerações acerca de concepções enganosas, referentes a conceitos geométricos, que foram observadas ao longo das atividades desenvolvidas. Por exemplo, verificamos que algumas duplas acreditaram ser o movimento circular o único que dá um giro de 360^o; associaram as linhas curvas, especificamente a trajetória da elipse, como sendo formadas por pedaços de circunferência; definiram medida de ângulo como sendo ***"distância em graus"***, concluíram que as distâncias dos pontos correspondentes P e P' ao centro de rotações são iguais porque o ponto P' se movimentava quando o ponto P era deslocado, ou porque os dois pontos passavam "ao mesmo tempo" pelo centro de rotação.

Finalizando, chamaríamos a atenção para a necessidade de se fazerem novos estudos a fim de que sejam aprofundados muitos dos aspectos levantados neste trabalho, bem como de se levantarem mais elementos que possam contribuir para a reflexão a respeito do ensino-aprendizagem do conceito de simetria rotacional no Ensino Fundamental.

Referências bibliográficas.

ARTIGUE, M. Didactic engineering. In Research in Didactique of Mathematics: Selected papers. La pensée Sauvage, éditions, Grenoble, 1992.

BALACHEFF, N. Domínio epistemológico de validade dos micromundos. In Caderno de Educação Matemática. Volume II. PUC-SP, 1995.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC / SEF, 1997.

____ Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC / SEF, 1998.

BROUSSEAU,G. Ingéniere didactique. D´un problème à l´étude a priori d´une situation didactique. Deuxième École d´Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 1982.

____ Teory of didactical situations in mathematics. (Didactique des Mathématiques, 1970-1990). Mathematics Education Librery, vol.19. Editado e traduzido por Balacheff, Nicolas et al. Kluwer Academic Publishers, DORECHT / Boston / London, 1997.

CHARNEY, R. Aprendendo com resolução de problemas. In Parra. C. & Saiz. I. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

COXFORD, A. F. & USISKIN, Z. Geometry: A Transformation Approach. River Forest, III.: Laidlaw Brothers, 1971.

DANTAS, M.M.S. Ensino da Matemática: um processo entre a exposição e a descoberta. Salvador - BA, CED-UFBA, 1987.

DREYFUS, T. & EISENBERG, Th. Symmetry in Mathematics. In STEEN L. A. Mathematics today. Twelve Informal, Essays. Springer-Verlag, N.Y., 1990.

GALVEZ, G. A Didática da Matemática. In Parra. C. & Saiz. I. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

HART, K. Reflections and rotations. In HART, K. Children’s Understing of Mathematics, 1982.

JAHN, A. P. Des transformations des figures aux applications ponctuelles: étude d’une séquence d’enseignement avec Cabri-gémètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde. Tese de Doutorado da Universidade Joseph Fourier (Grenoble I), França, 1988.

LABORDE, C. Desingning Tasks for Learning Geometry in a Computer-based Environment. In Technology in Mathematics Teaching. In Technology in Mathematics Teaching – a bridge betwenn teaching and learning. Chaetwell-Bratt Ltd, 1995.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-géomètre. In Em Aberto, ano 14, Brasília, INEP, n^{o} 62, 1994.

LIMA, E. L. Isometrias. Coleção do Professor de Matemática – SBM, 1996.

NÖEL, E. La symétrie aujourd'hui. Paris- France: Édtions du Seuil, 1988.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In LINDQUIST, M.M. & SHULTE, A.P. Aprendendo e Ensinado Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

WEYL, H. Symetry. Princeton University Press, 1952.