PLANOS TANGENTES A SUPERFÍCIES USANDO MAPLE

Autores: André Nagamine[1]
Afonso Henriques[2]
Fabíolo Moraes Amaral [3]

[1, 2] Profs. de Matemática - Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
[3] Bolsista: Bacharelando em Matemática – UESC; Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional – GPEMAC, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
e-mail [1]: andren@uesc.br
[2]: henry@uesc.br
[3]: fabioloms@bol.com.br

1.0 - INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o avanço tecnológico e a disseminação cada vez maior dos computadores em diversos seguimentos da sociedade, em especial na educação, tem sido alvo de muitos trabalhos, pesquisas e discussões. Frente a essas novas tecnologias o desafio que se tem é, como dominar, adaptar e utilizar essas novas tecnologias no âmbito educacional e, em particular, no ensino da matemática. Nesse sentido o presente trabalho tem como objetivo propor a utilização do software ***Maple***[©] (versão **V**) na disciplina de Cálculo, em especial, no que tange ao desenvolvimento de procedimentos (programas) no ***Maple*** que geram animações gráficas de planos tangentes ao gráfico de uma função $z = f(x, y)$ em diversos pontos de uma região ***R*** do plano contida no domínio de ***f***, onde ***f*** é uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais primeiras, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, contínuas em ***R***.

2.0 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar o estudo baseamo-nos em conceitos do Cálculo Diferencial tais como: derivadas parciais, derivadas direcionais, gradiente. Além disso foram consideradas, a teoria de situações didáticas de G. Brousseau (1986), a noção de jogo de quadros de R. Douady (1986) e a transposição informática.

2.1 – Situações Didáticas

Guy Brousseau (1986) propôs uma modelização do processo da aprendizagem sob forma de situações didáticas desenvolvidas a partir da classificação em três tipos de interação do aluno com o saber em jogo:

1) Situações de Ação; 2) Situações de formulação; 3) Situações de validação.

Uma ***situação didática*** é, segundo Brousseau (1986), ***o conjunto de relações***

© Waterloo Maple Inc., Canadá.

estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objetos)***, um sistema educativo*** (o professor) ***para provocar a aquisição de um saber constituído ou em constituição***.

Para analisar o processo de aprendizagem sob forma de teoria de situações didáticas, Brousseau (1986) desenvolve as interações (ação, formulação e validação) nas seguintes noções ou dialéticas:

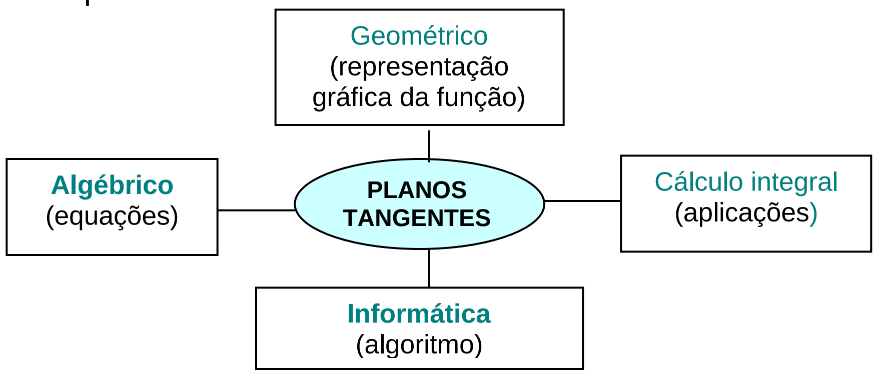
> ***Dialética da situação de ação:*** Consiste em colocar o aluno numa situação de ação, onde a intervenção do professor é de certa forma controlada, pois este irá interferir apenas em momentos específicos, de modo a provocar uma aprendizagem por adaptação. Nessa altura o aluno exprime suas escolhas e decisões por ação sobre a influência do meio.
>
> ***Dialética da situação de formulação:*** Situação em que o aluno troca informações com uma ou várias pessoas. É o momento no qual o aluno ou vários alunos explicitam por escrito ou oralmente as ferramentas utilizadas para a solução.
>
> ***Dialética da validação:*** É a etapa em que o aluno deve provar que o modelo criado por ele, é válido. O objetivo principal da ***situação de formulação*** é a comunicação lingüística, em quanto na ***validação*** é o debate sobre a certeza das asserções e interações com o meio, verificando a verdade das asserções formuladas no momento da ***ação*** e da ***formulação***.
>
> ***Institucionalização -*** fase na qual o professor fixa convenientemente e explicita o estudo cognitivo do saber.

2.2 – Jogo de Quadros

A ***Noção de jogo de quadros*** foi introduzida na didática da matemática por Regine Douady (1986) para tornar explícito que uma das características importantes da Matemática é a capacidade de mudança de ***ponto de vista,*** de tradução de um problema de um quadro para outro, com a finalidade específica de acessar outras ferramentas de resolução que as inicialmente previstas.

Um quadro é constituído segundo Douady, de ferramentas de uma parte da Matemática, de relações entre objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.

O conceito de ***planos tangentes a superfícies***, por exemplo está situado em pelo menos quatro quadros:



As noções de registro que descrevemos a seguir e a de jogo de quadros de Douady são os conceitos didáticos que mais influenciam no processo experimental do presente estudo, colocando o aluno em situações de ação, formulação e validação, isto é, tomando como base a modalidade de processo de aprendizagem proposto por Brousseau (1986).

2.3 – Noções de registro e ponto de vista

A noção de registro pode ser entendida na Matemática como forma de identificar ou representar objetos matemáticos. Segundo ***Almouloud*** (1997), para trabalhar com a Matemática, ensinar e aprender Matemática, é necessário saber:

- que uma noção matemática funciona em vários registros (denotação), identificando-a;
- identificar objetos matemáticos e/ou mudar de quadro.

Apoiado em Marc Rogalski, ***Almouloud*** sugere quatro aspectos que podem ser levados em consideração, a saber:

1. Para aprender um conceito matemático é necessário saber em quais domínios ele funciona e compreender vários pontos de vista ligados a esse saber;
2. Provar teoremas ou resolver problemas, mudar de quadro, bem como escolher o registro de representação, muitas vezes se faz necessário;
3. Às vezes é importante saber distinguir um conceito e sua representação num registro. Para isso torna-se muito útil dispor de várias representações desse saber nos diferentes tipos de registros;
4. Para passar de conhecimentos já adquiridos a novos conhecimentos, é necessário, às vezes, mudar de um quadro no qual os conhecimentos novos não

têm ainda sua colocação, para outro quadro onde eles intervêm naturalmente (eventualmente como ferramenta de resolução) e operar, depois, uma transferência.

Nesse contexto, a fim de melhor compreender o estudo de ***planos tangentes a superfícies,*** talvez seja necessário:

- fazê-lo funcionar sobre vários quadros ou pontos de vista, digamos: ***geométrico*** (***gráficos tridimensionais***); ***algébrico***; ***informático*** e ***teórico***.
- olhá-lo sob dois pontos de vista: Geométrico / Algébrico
- representá-lo nos dois registros: Simbólico / Gráfico ou desenho

Muitas vezes, no ensino vigente, esses aspectos não são levados em consideração, e muitos alunos são geralmente presos ao registro de fórmulas. Em particular, eles têm dificuldades de lidar com termos de registros simbólicos, bem como com noções de apreensão perceptiva e operatória de objetos geométricos.

2.3 – Transposição Didática

O conceito de ***Transposição Didática*** foi introduzido na didática francesa por Michel Verret e desenvolvido por Yves Chevallard (1991), que o define como: ***"O conjunto de transformações que sofre um saber sábio com a finalidade de ser ensinado".***

Distingue-se bem do saber "sábio" o saber "ensinado" na definição de Chevallard, quando Brousseau situa o processo da ***Transposição Didática*** em três etapas a saber:

1) ***trabalho dos matemáticos - o conhecimento matemático puro é geralmente descontextualizado***;
2) ***trabalho dos alunos - o aluno precisa receber esse mesmo conhecimento matemático puro, porém de forma adaptado ao seu nível cognitivo e, sobretudo, à sua cultura***;
3) ***trabalho do professor - o professor é responsável por essa adaptação, isto é, o transformador do saber "sábio" em saber "ensinado".***

Almouloud (1997) faz-nos lembrar que ***descontextualização*** do saber é fazer abstração das condições particulares que deram um sentido a esse saber com objetivo de ressaltar os conceitos subjacentes e integrá-los num modelo coerente. E

recontextualizar um saber é colocá-lo em situações artificiais para dar um sentido aos novos conceitos.

Balacheff (1994) ao se referir da ***Transposição Didática*** enfatiza o trabalho sobre o conhecimento, permitindo sua representação simbólica e o desenvolvimento dessa representação por um dispositivo informático.

Nessa linha, ao avaliar via ***Maple*** se existem as vantagens de um enfoque computacional, também se faz necessária a passagem do universo ***Maple*** ao universo papel-e-lápis ou vice-e-versa. Esse aspecto é sustentado pelo método de ***transposição didática em meios informatizados*** o qual Ballacheff (1991) chama ***transposição informática***. Portanto, esse trabalho envolve ainda a ***transposição informática***, pois, trata-se de situações relativas ao Ensino Interativo Auxiliado por Computador (EIAC).

3.0 - METODOLOGIA

Para o desenvolvimento dos trabalhos utilizamos uma metodologia baseada em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na ***concepção, na realização, na observação e na análise seqüencial de atividades de ensino*** (Artigue, 1988)***,*** com suportes teóricos fundamentados nos conceitos de derivadas parciais, derivadas direcionais, gradiente, teoria de situações didáticas, noção de jogo de quadros e na transposição informática. Antes de qualquer atividade usando ***Maple,*** os alunos precisam ter o conhecimento e o domínio dos principais recursos desse software isso é feito, em geral, em cursos e minicursos extracurriculares. Após terem o contato, com a teoria das derivadas parciais, planos tangentes, gradiente, vetor normal entre outras, nas aulas tradicionais, os alunos são em seguida orientados para implementarem no ***Maple*** os conceitos discutidos em sala de aula, afim de visualização e interpretação gráfica desses conceitos de forma dinâmica, utilizando o Laboratório de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática-LAPEM. Isso o que ocorre em geral nos horários predestinados para as aulas práticas da disciplina. Finalmente são desenvolvidos os procedimentos capazes de permitirem a “plotagem” de uma superfície que é o gráfico de uma função ***z = f(x, y)*** e, um plano tangente a mesma, que por meio de animação “desliza” tangencialmente sobre a superfície em diversos pontos do gráfico, imagens da função em estudo, definida em uma região do plano.

4.0 – EXPERIMENTO

A título de ilustração, destacamos a seguinte situação-problema, que com base a transposição informática, permite uma visão abrangente do estudo do plano tangente:

> ***dada a função $f:R^2 \rightarrow R$ definida por $f(x,y) = -x^2 - y^2$ (cujo o gráfico é um parabolóide). Desenvolver um procedimento no Maple capaz de "plotar" o gráfico de f e realizar animações gráficas do plano tangente a esse gráfico em diversos pontos de seu domínio, em particular em uma curva definida sobre a superfície do gráfico.***

A implementação de problemas dessa natureza utilizando o ***Maple*** está fundamentada na noção de jogo de quadros, transposição informática, nos conceitos de cálculo diferencial e integral bem como no conhecimento dos principais recursos do ***Maple*** e de sua linguagem de programação.

Para a resolução desse problemas consideramos os seguintes aspectos fundamentais:

- **modelo estático –** ***consiste na implementação no Maple, dos elementos a serem utilizados na resolução do problema***; tais como: o gráfico (superfície) de ***f***, uma curva sobre a superfície (caminho percorrido pelo plano tangente ao longo da superfície) e o plano tangente.
- ***definição dos pontos*** – conjunto de pontos utilizados para definir o caminho percorrido pelo plano tangente. Para o problema em discussão, tal conjunto consiste em uma curva parametrizada sobre a superfície.
- ***construção da animação*** – consiste na reunião dos elementos acima, dispostos numa certa seqüência lógica (o procedimento em si, usando a linguagem de programação do ***Maple***), capaz realizar a construção da animação do plano tangente sobre a superfície sem qualquer ambigüidade.
- ***análise dos resultados*** –verificação de possíveis erros de programação que podem interferir nos resultados esperados.

O programa implementado no ***Maple*** que resolve o problema acima encontra-se em anexo. O referido programa é compilado pelo ***Maple*** e, em seguida executamos o programa (***Planotan***), como um comando interno do ***Maple***, utilizando a seguinte sintaxe: **Planotan(-x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2,[sin(t),cos(t)],t=0..2*Pi);**

5.0 – RESULTADOS

A execução do programa em anexo que resolve o problema acima resulta no gráfico abaixo (***fig. 1***), a qual descreve a composição da superfície do gráfico de ***f(x,y)= -x²-y²***, da curva parametrizada (nesse caso um circunferência) e do plano tangente. Para se ter uma noção de como a animação é visualizada no ***Maple*** colocamos abaixo (***fig.2***), as diferentes configurações do plano tangente ao longo da curva.

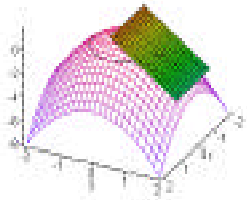
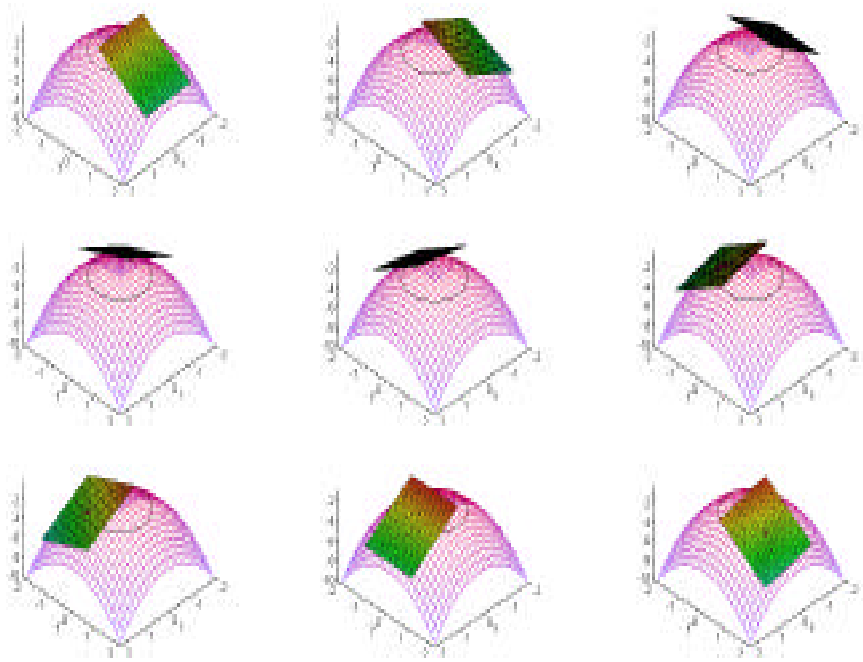


fig.1

Os resultados obtidos nessa atividade mostram que os recursos de programação no ***Maple*** podem servir como uma poderosa ferramenta no processo de estruturação, aplicação e visualização dos conteúdos de Cálculo. Para que o procedimento de animação do plano tangente sobre a superfície esteja bem definido e não contenha os chamados "bugs" é necessário ter um completo domínio das técnicas de programação bem como o domínio dos tópicos de Cálculo envolvidos nas atividades.

Ao utilizarem os conteúdos discutidos em sala de aula na construção das animações, usando o ***Maple***, os alunos encontram, num certo sentido, uma aplicação de tudo o que foi aprendido e, ao mesmo tempo, exercitam tais conhecimentos. O resultado final é a visualização gráfica de onde podem ainda ser extraídas mais informações de certa forma impossíveis de caracterizá-las na lousa.



6.0 – CONCLUSÃO

Sem dúvida nenhuma, dado ao avanço tecnológico, é preciso ampliar cada vez mais as pesquisas relacionadas com o uso do computador no ensino da Matemática. Frente a esse novo paradigma os estudantes se sentem seguros e motivados, mesmo que os trabalhos implementados em ambiente computacional sejam localizados, ou seja, baseados essencialmente nos aspectos de estudos de caso. Pois, além dos conceitos matemáticos discutidos, os estudantes aprendem indiretamente diversos recursos computacionais necessários nas suas vidas acadêmicas, além de servirem de suportes para prosseguirem seus estudos a nível de pós-graduação.

7.0 – BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD ***Ag, Saddo. Fundamentos da Didática da Matemática e Metodologia de Pesquisa***, Caderno de Educação Matemática Vol. III, PUC-SP, 1997***.***

ARTIGUE, M. ***Ingénnierie Didactique.*** Recherches en Didactique de Mathematiques. França, v. 9, nº 3, p. 245-308, 1988.

BALLACHEFF N., ***Contribuition de la didactique et de l'épistémologique aux recherches en EIAO***, actes des 13ème journnées Francophones sur l'Informatique, Formation Intelligemment A. Ordinateur, Genève, pages 9-38, 1991.

BROUSSEAU, Guy. ***Theorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.*** Thèse d'etat, Univesité de Bordeaux I, 1986.

CHEVALLARD, **Y**. ***et*** **Marie-Alberte Johsua*****: La transposition didactique***. Éditions de la Pensée Sauvage, ed. 1991

DOUADY, Regine. ***Jeux de cadre et dialectique outil-objet.*** RDM, vol. 7, nº 2, 1986.

HEAL, K. M.,...[et al]. ***MAPLE V: Learnig guide.*** Canadá, Springer-Verlag, 1998.

HECK, André. ***Introduction to Maple***. New York, Springer-Verlag, 1993.

LEITHOLD, Louis. ***O Cálculo com Geometria Analítica,*** São Paulo: Harbra. Vol. .2.

MUNEM, Mustafa A. e Foulis David J. ***Cálculo.*** Rio de Janeiro: Guanabara Dois. Vol. 1 e 2.

SWOKOWSKI, Earl William. ***O cálculo com Geometria Analítica.*** São Paulo: McGraw-Hill. Vol 1 e 2.

VALENTE, J. Armando. ***Computadores e conhecimento: repensando a educação*** - Campinas [SP], gráfica central da Unicamp, 1993.

ANEXO

O procedimento Planotan abaixo realiza a animação do plano tangente ao gráfico de uma função z=f(x,y), ao longo de uma curva traçada no gráfico de f.

A sintaxe do comando é dada por

> Planotan(f,x=a..b,y=c..d,[g(t),h(t)],t=e..f,ops)

onde,

f - expressão ou função de duas variáveis
x=a..b - variação de x (a e b devem ser valores numéricos)
y=c..d - variação de y (c e d devem ser valores numéricos)
[g(t),h(t)] - parametrização da curva sobre o gráfico
t=e..f - variação do parâmetro t (devem ser numéricos)
ops - opções gráficas que podem ser: grid, frames, numpoints(relativo à curva), view e style.

```
Planotan:=proc(func::{algebraic,procedure},xrange::name=range(constant),yrange::n
ame=range(constant),curva::list(algebraic),trange::name=range(constant))local
> x, y ,t, s, op3, vart1, vart2, F, op1, op2, k, a1, a2,g, func1, func2, a3, op4, op5;
> x:=op(1,xrange);
> y:=op(1,yrange);
> t:=op(1,trange);
> if type(func, procedure) then
>    if nops({op(1, evalf(func))})=2 then
>      if nops(indets(func(x,y), name) minus indets(func(x,y), constant) minus {x,y})=0
         then
>        F:=func
>        else ERROR(`a função possui parâmetros desconhecidos`)
>      fi;
>      else ERROR(`a função deve ser definida com duas variáveis`)
>    fi;
>    else
>    if nops(indets(func, name) minus indets(func, constant) minus {x, y})=0 then
>      F:=unapply(func, x, y);
>      else ERROR(`a expressão da função possui parâmetros desconhecidos, ou o
       nome das variáveis não corresponde com a variação`);
>    fi;
> fi;
> if nops(curva)<>2 then
>    ERROR(`a parametrização da curva deve possuir apenas dois argumentos`);
> fi;
> if nops(indets(curva, name) minus indets(curva, constant) minus {t})>0 then
>    ERROR(`a parametrização da curva possui parâmetros desconhecidos`);
>  fi;
```

```
> op1:=[25, 25];
> op2:=20;
> op3:=50;
> op4:=wireframe;
> op5:=xxx;
> vart1:=op(1, op(2, trange)); vart2:=op(2, op(2, trange));
> func1:=unapply(op(1, curva), t); func2:=unapply(op(2, curva), t);
> if nargs>5 then
>    for k from 6 to nargs do
>      if op(1, args[k])=grid and type(op(2, args[k]), list(posint)) then
>        op1:=op(2, args[k])
>        elif op(1, args[k])=frames and type(op(2, args[k]), posint) then
>        op2:=op(2, args[k])
>        elif op(1, args[k])=numpoints and type(op(2, args[k]), posint) then
>        op3:=op(2, args[k])
>        elif op(1, args[k])=style then
>        op4:=op(2,args[k])
>        elif op(1,args[k])=view then
>        op5:=op(2, args[k])
>        else ERROR(`opção(ões) adicional(is) incorreta(s), consultar a lista de
         opções nas instruções do procedimento`);
>      fi;
>    od;
> fi;
> if op5=xxx then
>    a1:=plot3d(F(x,y), xrange, yrange, style=op4, grid=op1, shading=z):
>    else
>    a1:=plot3d(F(x,y), xrange, yrange, style=op4, grid=op1, view=op5, shading=z):
> fi;
> a2:= plots[spacecurve] ([curva[1], curva[2], F(curva[1], curva[2])], trange,
color=black, numpoints=op3):
>     g:=(F,s)->D[1](F)(func1(vart1+s*(vart2-vart1)/op2), func2(vart1+s*(vart2-
vart1)/op2)) *(x-func1(vart1+s*(vart2-vart1)/op2)) + D[2](F)(func1(vart1+s*(vart2-
vart1)/op2), func2(vart1+s*(vart2-vart1)/op2))*(y-func2(vart1+s*(vart2-vart1)/op2)) +
F(func1(vart1 +s*(vart2-vart1)/op2), func2(vart1+s*(vart2-vart1)/op2)):
> for s from 0 to op2 do
> a3[s]:=plot3d(g(F,s), x=(func1(vart1+s*(vart2-vart1)/op2)-1)..(func1(vart1+s*(vart2-
vart1)/op2)+1), y=(func2(vart1+s*(vart2-vart1)/op2)-1)..(func2(vart1+s*(vart2-
vart1)/op2)+1), shading=zhue): od:
> plots[display]([a1, a2, plots[display]([seq(a3[s], s=0..op2)], insequence=true)],
axes=framed);
> end:
```