

A TENSÃO ENTRE RIGOR E INTUIÇÃO **NO ENSINO DE CÁLCULO E ANÁLISE***

Frederico da Silva Reis**

1. Apresentando uma hipótese de trabalho e a questão de investigação

Iniciaremos este estudo, assumindo como hipótese de trabalho que um dos problemas do ensino do Cálculo e da Análise está relacionado à existência de uma relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição. Refletir, investigar e, então, melhor compreender essa relação, passa, portanto, a ser um dos objetivos deste estudo. Um outro objetivo, decorrente do primeiro, é compreender melhor, o lugar e o papel do ensino de Cálculo e Análise na formação matemática do professor de matemática.

Tomando por base nossa prática profissional de professor de Cálculo e de Análise, formulamos a seguinte questão de investigação para este estudo:

Como a relação entre rigor e intuição encontra-se nos manuais didáticos de Cálculo e de Análise, como ela é percebida / enfrentada pelos seus autores e pesquisadores e quais são suas possíveis implicações na formação matemática do professor ?

Obviamente, não esperamos obter uma resposta una e definitiva para cada uma das questões que constituem o problema central de pesquisa. Ainda assim, levantando discussões e apontando direcionamentos, esperamos contribuir para uma ação formativa do professor de Cálculo e/ou Análise, o que certamente implicará em mudanças em sua ação pedagógica.

* Tese defendida na FE/UNICAMP em 23/02/2001, sob a orientação do Prof. Dr. Dario Fiorentini.

** Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.
Doutor em Educação Matemática – FE / UNICAMP.

2. Configuração da pesquisa e metodologia

Inicialmente, nossa pesquisa se pautou pelo exame de diversos estudos histórico-filosóficos sobre o desenvolvimento do Cálculo e da Análise e seus reflexos no ensino destas disciplinas e pela leitura de estudos / pesquisas recentes sobre questões relacionadas ao ensino / aprendizagem destas disciplinas.

Tendo em vista o nosso objetivo de compreender como acontece ou é tratada a relação tensional entre rigor e intuição no currículo público (manuais didáticos) e como ela é percebida e encarada pelos seus autores e estudiosos, optamos por centrar foco no conceito de Limites e Continuidade. A opção por este foco deve-se ao fato de que é em torno dele que tanto histórica quanto pedagogicamente, o problema da tensão entre rigor e intuição tem atingido um de seus pontos mais críticos. Portanto, tanto a análise dos livros didáticos quanto as entrevistas com os autores tiveram como núcleo central os conceitos de limite e de continuidade.

Selecionamos, no total, doze manuais didáticos de Cálculo e de Análise. Visando obter uma análise mais representativa e consistente, optamos por subdividi-los em três grupos:

1) Livros didáticos de Cálculo

O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold – Editora Harbra – Volume 1 – São Paulo – 1982;

Cálculo com Geometria Analítica – Earl William Swokowski – Editora Makron Books – Volume 1 – São Paulo – 1994;

Cálculo A – Diva Marília Flemming & Míriam Buss Gonçalves – Editora Makron Books – Volume Único – São Paulo – 1992;

Cálculo com Geometria Analítica – C. H. Edwards Jr & D. E. Penney – Editora Prentice-Hall – Volume 1 – São Paulo – 1998.

2) Livros didáticos de Cálculo e de Análise do Professor Geraldo Ávila

Cálculo 1 – Geraldo Ávila – Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1982;

Introdução ao Cálculo – Geraldo Ávila – Editora Livros Técnicos e Científicos – Volume Único – Rio de Janeiro – 1998;

Introdução às Funções e à Derivada – Geraldo Ávila – Editora Atual – Volume Único – São Paulo – 1994;

Introdução à Análise Matemática – Geraldo Ávila – Editora Edgard Blücher – Volume Único – São Paulo – 1993.

3) Livros didáticos de Análise

Conceitos Fundamentais da Matemática – Bento de Jesus Caraça – Editora Livraria Sá da Costa – Volume Único – Lisboa – 1951;

Princípios de Análise Matemática – Walter Rudin – Editora Ao Livro técnico S.A. – Volume Único – Rio de Janeiro – 1971;

Análise I – Djairo Guedes de Figueiredo – Editora UNICAMP – Volume Único – Campinas – 1996;

Análise Real – Elon Lages Lima – Editora IMPA – Volume 1 – Rio de Janeiro – 1993.

É fundamental explicitar que cremos, fortemente, que autores de livros didáticos certamente influenciam o ensino por relacionar, eventualmente, os fatos históricos ou sua visão dos mesmos com sua própria proposta pedagógica, por exemplo, na tomada de decisão de com que rigor tratar o Cálculo ou qual a abordagem intuitiva que se deve dar à Análise. Diante desta opção / convicção, contactamos e entrevistamos os seguintes professores, que pronto concordaram em ser entrevistados:

1) Roberto Ribeiro Baldino; graduado em Engenharia pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, em 1956; mestre pela Universidade de Stanford – USA; doutor pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA; foi professor da UFRGS, da UFRJ e da UNESP – Rio Claro; autor de diversos artigos relacionados ao ensino de Cálculo; orientador de dissertações e teses na área de Educação Matemática;

2) Geraldo Severo de Souza Ávila; bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo – USP, em 1956; mestre e doutor pela Universidade de New York – USA; foi professor do ITA, do Instituto de Física Teórica – UNESP, da Universidade de Wisconsin – USA, da Universidade Georgetown de Washington – USA, da UnB, da UNICAMP e atualmente, é professor da UFG; foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática e é membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da Academia de Ciências do Estado de São Paulo; autor, dentre outros, dos livros *Introdução ao Cálculo* e *Introdução à Análise Matemática*;

3) Djairo Guedes de Figueiredo; graduado em Engenharia Civil pela Universidade do Brasil – RJ, em 1956; mestre e doutor pela Universidade de New York – USA; foi professor do IMPA, da UnB, da Universidade de Illinois – USA, da Universidade de Wisconsin – USA, da Universidade de Chicago – USA, da Universidade Maryland – USA, da UFRJ e atualmente, é professor da UNICAMP; é membro titular da Academia Brasileira de Ciências; autor, dentre outros, dos livros *Análise I* e *Equações Diferenciais Parciais*;

4) Elon Lages Lima; bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, em 1954; mestre e doutor pela Universidade de Chicago – USA; foi diretor e, atualmente, é professor do IMPA; foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática e é membro titular da Academia Brasileira de Ciências; autor, dentre outros, dos livros *Análise Real* e *Curso de Análise*.

3. Alguns resultados da pesquisa

O primeiro conjunto de respostas diz respeito à forma como a intuição e o rigor encontra-se presente nos manuais de Cálculo e Análise. A análise realizada em nossa tese mostra que estes manuais refletem um relação desigual e dicotômica entre rigor e intuição na apresentação dos conteúdos, ocorrendo uma primazia do primeiro elemento deste par tensional em detrimento do segundo.

De fato, dos seis livros analisados de ensino de Cálculo para o ensino superior, apenas dois (ÁVILA, 1998 e EDWARDS & PENNEY, 1998) não utilizam a abordagem rigorosa dos conceitos de limite e continuidade, seguindo a tradição ϵ - δ weierstrassiana. Com isso, o “enfoque clássico intuitivo” (LEITHOLD, 1982), que todos defendem para o ensino de Cálculo, é disfarçado sob a máscara de umas poucas figuras e gráficos que rapidamente perdem espaço para uma sequência de teoremas e propriedades, os quais, obviamente, devem ser demonstrados ou têm sua demonstração deixada a cargo do leitor.

Em síntese, podemos dizer que a proposta de ensino de Cálculo apresentada pelos livros didáticos é, ainda, predominantemente formalista e procedimental.

De fato, a grande quantidade de exercícios relacionados ao cálculo de limites e verificação das condições de continuidade de funções demonstra, no fundo, um viés procedimental que deveria estar fundamentado num conhecimento conceptual (HIEBERT, 1986).

Lembramos que, na prática da sala de aula do Cálculo, tanto o procedimental como o conceptual vêm carregados de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Cabe aos professores, então, refletir sobre uma melhor utilização, como referência para suas disciplinas, de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa dos conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos.

Já um exame dos livros de Análise, aqui destacados, mostra que as diferenças entre suas abordagens passam por uma maior ou menor utilização de noções topológicas e pela alteração na ordem de apresentação ou na natureza de alguns conteúdos. Afinal de contas, como afirma o próprio Ávila, *“rigor e formalismo são ingredientes essenciais de um curso de Análise”*.

De fato, se por um lado, com a Aritmetização da Análise chegou-se à “Idade do Rigor” (BOYER, 1974), mais de um século depois é necessário reconhecer a existência de diferentes “níveis de rigor” (GRATTAN-GUINESS, 1997). Isso, no contexto da prática docente universitária, significa que o “rigor acadêmico”, dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível (LLINARES & SÁNCHEZ, 1996) dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc), numa perspectiva muito próxima daquela defendida por Baldino.

Neste sentido, concordamos com Ávila quando este afirma que os manuais de Análise, hoje em circulação no Brasil, não são adequados aos cursos de Licenciatura em Matemática e, por isso, tem um projeto de elaborar um material de Análise especificamente voltado para a formação matemática do professor de matemática. Essa adequação, entretanto, não deve ser entendida como afrouxar, facilitar ou atenuar o curso de Análise. Ao contrário, significa proporcionar uma outra abordagem, igualmente profunda, só que sob uma outra concepção de conhecimento. Uma abordagem que permita uma exploração múltipla e flexível (envolvendo aspectos formais e não-formais) dos conceitos e idéias matemáticas, e não sob um enfoque teórico único, por melhor que este seja. Enquanto isso não acontecer, o livro de CARAÇA (1951), embora também limitado, parece, dentre todos os analisados, aquele que melhor atende a esta expectativa, pois explora os conceitos matemáticos sob diferentes ângulos: o histórico-filosófico, o cultural e o social.

Um segundo conjunto de respostas à nossa questão de investigação diz respeito ao modo como os profissionais brasileiros, com larga experiência em pesquisa, ensino e produção de material didático para o ensino de Cálculo e Análise, percebem e enfrentam a relação entre rigor e intuição no ensino da matemática.

Segundo mostram os resultados em nossa pesquisa, todos os nossos depoentes apresentam, embora de modo diferente, uma visão que relativiza e flexibiliza essa relação.

Com efeito, enquanto três dos nossos entrevistados (Baldino, Djairo e Elon) parecem reconhecer, de modo semelhante a GRATTAN-GUINESS (1997), a existência de diferentes níveis de rigor, e provavelmente também de intuição, um (Ávila) parece perceber a intuição e o rigor como entidades, talvez dicotômicas, que se complementam, as quais aconteceriam em momentos diferentes: *O rigor é importante numa fase... de maior amadurecimento do aluno, quando ele já tem um espírito crítico...* (Ent. Ávila – nov/98). Para Ávila, a intuição sempre deveria preceder o rigor, por isso, em seu livro de *Introdução ao Cálculo*, a conceituação intuitiva de derivada precede uma conceituação mais rigorosa de limite e continuidade.

Os dois depoentes, que apresentaram uma visão mais relativista de rigor, foram Baldino e Djairo. Entretanto, se, de um lado, para Djairo, o rigor varia ao longo do tempo, como mostra através da história do Cálculo e da Análise ou ao longo dos anos de escolarização, de outro, para Baldino, o rigor varia de acordo com o contexto em que os conceitos matemáticos são trabalhados. Ou seja, para Baldino, o rigor com que se prova ou justifica uma afirmação matemática num curso de Cálculo para a Engenharia ou para a Física é, normalmente, diferente daquele utilizado no Bacharelado em Matemática ou na Licenciatura. Ou seja, para ambos, haveriam diferentes níveis de rigor e caberia ao professor atingir ou não determinado nível, tendo em vista os conhecimentos prévios dos alunos e a finalidade da disciplina na formação matemática do futuro profissional.

Elon, ao criticar o uso e abuso dos ϵ s e δ s num curso de Cálculo ministrado a sua filha, quando fazia Biologia, parece também reconhecer a existência de diferentes níveis de rigor, sobretudo quando aceita ou recomenda, dependendo do contexto em que o curso se realiza, diferentes modos de justificar ou provar. Tal flexibilidade, entretanto, parece ser reduzida quando trata-se, por exemplo, de um curso de Análise, o qual deveria privilegiar o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo. Assim, poderíamos dizer que Ávila e Elon tendem a apresentar um conceito não-dialético da relação entre rigor e intuição. Isto, de certa forma, pode ser evidenciado quando afirmam que o curso de Cálculo deve privilegiar a intuição e a Análise, o rigor.

Face a essas considerações de Elon e Ávila, perguntamos: Não existiriam também, diferentes níveis de rigor no ensino intuitivo de Cálculo ou, não existiriam diferentes níveis de rigor e intuição num curso rigoroso de Análise ? É possível ou recomendável isolar o raciocínio hipotético-dedutivo de outras formas de raciocinar matematicamente, como, por exemplo, por indução, abdução ou analogia ? Até que ponto estas outras formas de raciocinar, mais ligadas á intuição que ao rigor, não representam alternativas férteis para a formulação de novas hipóteses e proposições ?

Um aspecto que nos chamou atenção nas entrevistas, sempre que se falava de rigor no ensino da matemática, é a identificação feita, pelos depoentes, entre ensino rigoroso com ensino formalista. Talvez a visão dicotômica entre rigor e intuição, expressa em vários momentos por alguns depoentes, seja decorrente dessa identificação. Entendemos, com base em FIORENTINI (1995), que um ensino formalista aceita como legítimas, apenas algumas formas de rigor no tratamento dos conceitos e expressões matemáticas – aquelas que se fundamentam no modelo euclidiano ou no modelo hilbertiano ou bourbakista.

O modelo euclidiano consiste na sistematização das idéias matemáticas em teoremas e corolários, os quais são deduzidos a partir de leis lógicas e sob um tratamento do tipo hipotético-dedutivo a partir de axiomas / postulados e definições. O modelo bourbakista, por outro lado, é constituído a partir do aperfeiçoamento do modelo euclidiano, o qual passou a ser sistematizado sob o

fundamento das estruturas algébricas e da linguagem da teoria de conjuntos. Perguntamos: Não existiriam outras formas de rigor matemático, seja em Cálculo, seja em Análise, e que não se encaixam nesses modelos formalistas ?

Os exemplos apresentados pelos nossos depoentes, de modos alternativos e aceitáveis de produzir uma demonstração ou justificação matemática, mostram que sim.... Então, não faz sentido identificar, total e absolutamente, ensino rigoroso com ensino formalista.

Entretanto, existiu uma forma de rigor que foi recusado por todos os depoentes: o ensino de Cálculo fundamentado no conceito weistrassiano de limites e continuidade, com épsilons e deltas. Isso já representa um pequeno avanço. Mas, por outro lado, perguntamos: Este tipo de rigor com épsilons e deltas, continua necessário para um curso de Análise visando à formação matemática do professor do ensino fundamental e médio ?

A proposta da Análise não-standard, formulada por Baldino, parece mostrar que não. Mas, acreditamos, há ainda um enorme campo de estudo e experiência a ser desenvolvida em torno dessa questão.

Um terceiro conjunto de respostas à nossa questão de investigação refere-se às possíveis implicações do modo como é concebida e tratada a tensão entre rigor e intuição na formação matemática do professor de matemática dos ensinos fundamental e médio.

Em primeiro lugar, cabe destacar que os nossos entrevistados foram unânimes em considerar a Análise um curso fundamental à formação matemática do professor de matemática. Entretanto, não houve concordância e consistência nas falas dos depoentes com relação à forma como essa disciplina poderia ser melhor desenvolvida, tendo em vista a finalidade de formar o professor de matemática.

Elon, por exemplo, afirma que a Análise Matemática representaria uma forma de se habituar o futuro professor com o método dedutivo. Perguntamos:

Esse seria o principal objetivo do ensino da Análise ? Por trás deste método, não existiria um conteúdo que precisa ser trabalhado e explorado conceitualmente ?

Entretanto, há que se ter cuidado, segundo Ávila, que essa exploração conceitual não seja prejudicada pela escolha de um método rigoroso-formal de tratamento das idéias. Essa preocupação de Ávila reflete-se no fato dele não “estar totalmente satisfeito com o seu livro de Introdução à Análise” para os cursos de formação do professor de matemática e estar, no momento, empenhado em escrever um outro livro de Análise, destinado especificamente aos alunos de Licenciatura em Matemática¹.

Quanto ao Cálculo, todos são unânimes em afirmar que este deve ser um curso menos formal, baseado fortemente em aplicações e em situações-problema, fazendo o pêndulo entre intuição e rigor pender mais para o lado da intuição sem que, com isso, deixe de existir algum tipo de rigor, de preferência não-formal (isto é, sem épsilons e deltas, por exemplo).

O nosso estudo, em síntese, parece mostrar que intuição e rigor são dimensões interdependentes, uma não podendo existir sem a outra, embora possamos, equivocadamente, privilegiar uma delas em detrimento da outra. Ambas estão presentes no ensino de Cálculo e de Análise, onde cumprem papéis importantes e complementares na formação do pensamento e do conhecimento diferencial, integral e analítico, tanto do professor de matemática quanto do matemático.

Mas, para que isso de fato aconteça, existe ainda um grande caminho a ser construído pelos docentes formadores de professores. Em primeiro lugar há que se desenvolver um curso de Análise de acordo com as condições intelectuais dos alunos e seus conhecimentos prévios. Se o pensamento analítico implica numa mudança no modo de conceber e encarar o conhecimento matemático, essa ruptura, como nos mostra Baldino, não pode acontecer sem a busca de uma continuidade com a forma como o aluno pensa e trata o conhecimento matemático.

¹ Análise Matemática para Licenciatura – Editora Edgard Blücher – Volume Único – São Paulo – 2001.

O estudo desenvolvido por SOARES; FERREIRA & MOREIRA (1999) parece apontar para essa direção, na medida que defendem, para a formação do professor de matemática, a elaboração de sequências didático-pedagógicas eficazes à mudança conceitual, substituindo, assim, as tradicionais seqüências lógico-formais. Mas, para que essas novas seqüências possam efetivamente problematizar ou ressignificar pseudo-conceitos é preciso que, primeiramente, se investigue e analise as imagens conceituais que os alunos trazem quando ingressam na Licenciatura em Matemática.

Esse processo de problematização, ressignificação e sistematização de conceitos a partir das imagens conceituais dos alunos lembra, de certa forma, a noção de rigor de PERMINOV (1988), especialmente quando ele afirma que o rigor pode ser visto como um *“processo de conceptualização de intuições”*. Nesse processo, umas são mantidas, outras não. Isto significa que nenhuma categoria de intuição pode, de antemão, ser desprezada. O rigor pode e deve complementar a intuição, nunca sobrepujá-la.

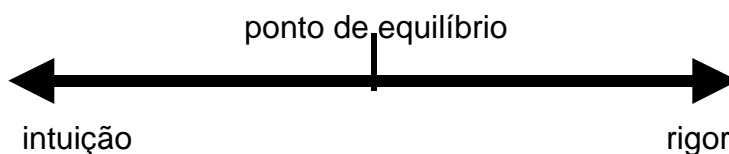
O Cálculo desempenha, simultaneamente, o papel de ponte e de síntese entre um pensamento matemático mais elementar (relacionado a conteúdos como números e funções) e um pensamento avançado mais avançado (relacionado a conteúdos como derivadas e integrais). Entretanto, isto não quer dizer que no ensino de Cálculo deve acontecer a transição de um pensamento mais intuitivo para um pensamento mais rigoroso. O rigor, num outro nível, se faz presente na constituição de conceitos elementares, assim como a intuição, sob múltiplas faces, permeia o desenvolvimento de idéias avançadas.

A Análise, por sua vez, desempenha o papel de desencadeadora da autonomia intelectual do futuro professor, por ampliar, flexibilizar e diversificar seu conhecimento específico dos conteúdos do Cálculo (FIORENTINI; SOUZA JÚNIOR & MELO, 1998). Mesmo assim, acreditamos que é fundamental, neste processo, que se leve em consideração as concepções espontâneas e imagens conceituais dos alunos relacionadas aos conteúdos, os quais deverão ser sistematizados mediante um processo de rigor compatível, podendo este ser lógico-formal ou exploratório.

4. Tentando estabelecer metáforas para a tensão entre rigor e intuição

Ao finalizar este estudo, tentaremos estabelecer algumas metáforas para representar a tensão entre intuição e rigor, começando por um pêndulo. O movimento pendular é natural, depende basicamente da gravidade e após um número finito de oscilações ele tende a estabilizar-se numa posição de equilíbrio quando para de oscilar. Além disso, quando em movimento, ele sempre pode atingir seus pontos extremos. O mesmo não acontece com a tensão entre rigor e intuição no ensino da matemática. Em nenhum momento podemos conseguir, por mais que o professor tente, um estado de puro rigor ou um estado de pura intuição.

Talvez uma melhor metáfora, que agora se nos apresenta, seja o de uma reta com dupla seta, onde, numa extremidade pode-se representar o rigor e, na outra, a intuição:



É claro que o ponto ideal é o do equilíbrio, mas este ponto, na verdade, é difícil de ser conseguido no ensino. O trabalho do professor pode situar-se em qualquer um dos pontos dessa reta contínua. O professor tem autonomia para deslocar-se para qualquer ponto dessa reta. Se o deslocamento tenderá a ser, com mais freqüência, para a esquerda (intuição), isso pode denotar uma preocupação pedagógica mais voltada à produção de sentidos e significados e à formação de conceitos. Se o deslocamento for, com mais freqüência, para a direita (rigor), isso poderá significar uma preocupação e uma ação pedagógica mais sintático-procedimental. Essas tendências, mais à direita ou à esquerda, dependem, de um lado, das concepções, valores e conhecimentos do professor e, de outro, das condições intelectuais dos alunos e materiais (aqui, entrariam os livros didáticos) da instituição.

Com base em PERMINOV (1988), também é possível estabelecer uma outra metáfora para a relação entre a intuicionalização, identificada como um movimento de estabelecimento de raciocínios plausíveis (às vezes verdadeiros, às vezes falsos) e a rigorização, identificada como um movimento de conceptualização de intuições. No plano de construção do conhecimento matemático, observamos que:

- 1) O movimento de rigorização não pode iniciar-se antes do movimento de intuicionalização;
- 2) O rigor pode ser concebido como uma grandeza que varia em função da intuição, sendo esta última uma variável independente, enquanto que o rigor é uma variável dependente;
- 3) Como nenhum movimento de intuicionalização se processa em um estado de ausência absoluta de rigor, quando o movimento de intuicionalização se inicia, ele já atua sobre o movimento de rigorização, a partir de um certo patamar diferente de zero.

Então, esta metáfora funcional pode ilustrar o modo como o par tensional rigor – intuição pode ser concebido / tratado no processo de ensino – aprendizagem, não apenas do Cálculo e da Análise, mas também de qualquer campo da matemática e em qualquer nível de ensino. O modelo visual correspondente a esta metáfora se aproximaria, então, de uma curva de uma função $R = f(I)$, em um gráfico cartesiano.

Esta, acreditamos, é a múltipla e flexível compreensão epistemológica que nós, professores de Cálculo e Análise, devemos assumir e demonstrar em nossa prática pedagógica, como forma de superar a abordagem excessivamente rigorosa do ensino tradicional universitário para, só então, articular uma melhor formação do professor de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C. B. (1974). História da Matemática. São Paulo: Edgar Blücher.

FIORENTINI, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil. Zetetiké, 3 (4) 51-60.

FIORENTINI, D.; SOUZA JÚNIOR, A. J.; MELO, G. (1998). Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. Geraldi, C. M. G.; Fiorentini, D.; Pereira, E. M. A. (orgs.) Cartografias do Trabalho Docente: Professor (a)-pesquisador (a). Campinas: Mercado das Letras.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1997). O que foi e o que deveria ser o Cálculo ? Zetetiké, 5 (7) 69-94.

HIEBERT, H. (Ed.) (1986). Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. (1996). Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales em estudiantes para profesores de primaria. J. Gimenez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.). El proceso de llegar a ser um profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Capítulo 4, 95-118. Granada: Comares.

PERMINOV, V. Y. (1988). On the realiability of mathematical proofs. Revue Internationale de Philosophie, 42 (167) 500-508.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. (1999). Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. Zetetiké, 7 (12) 95-117.