O CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM KANT[1]

Renata Cristina Geromel Meneghetti[2]

RESUMO

Este trabalho visa uma compreensão da filosofia de Emanuel Kant (1724-1804), principalmente, no que se refere à constituição do saber matemático. Historicamente o trabalho de Kant surge como uma crítica às duas correntes filosóficas (reducionistas) que permeavam no século XVII, a saber, o empirismo e o racionalismo. Assumindo uma postura intermediária entre tais correntes, Kant inova a forma de se conceber o conhecimento. Em sua filosofia, considerou o sujeito como elaborador de seu próprio conhecimento e defendeu que o conhecimento matemático é de natureza sintética ***a priori***, i.e., nasce da experiência, porém deve tornar-se independente dela. O trabalho de Kant, contextualizado na história da filosofia da matemática, inspirou uma sugestão de proposta pedagógica para a Educação Matemática.

Emanuel Kant (1724-1804), grande filósofo posterior ao renascimento europeu, encontrava-se situado no cruzamento das duas correntes filosóficas que permeavam o século XVII: o racionalismo e o empirismo.

O racionalismo sustentava que o conhecimento era válido somente se adquirido exclusivamente pela razão. Afirma a existência de idéias inatas e transforma a causa do conhecimento em necessidade analítica. O ideal racionalista é que todo conhecimento chegue a estruturar-se do mesmo modo em que está estruturada a matemática.

O empirismo somente admite, como fonte do conhecimento certo, o sensorial; e por este motivo, nega a existência de conceitos universais. Nesse

[1] Este trabalho foi elaborado a partir de parte da minha tese de doutorado: “O INTUITIVO E O LÓGICO: uma análise a luz da história e da filosofia da matemática”, desenvolvida sob a orientação do Prof. Dr. Irineu Bicudo.

[2] Professora do Departamento de Matemática (SMA/ICMC), da Universidade de São Paulo (USP), campus de São Carlos; e-mail:rcgm@icmc.sc.usp.br

sentido, os conteúdos mentais não são inatos, são adquiridos e a causa é fundamentada no hábito.

A filosofia de Kant surge como uma crítica a essas correntes. Enquanto que os racionalistas e os empiristas centravam sua atenção no objeto, Kant centra-a sobre o sujeito que conhece; a causalidade em Kant enraíza-se no sujeito.

Em Kant, o conhecimento é uma elaboração do sujeito, as coisas "em si" não são cognoscíveis[3]. Conhecer é uma função ativa do sujeito, não é receber algo que está aí, senão criar algo que se conhece, em termos kantianos, colocar algo. Para ele, não podemos conhecer, com necessidade e universalidade, portanto a priori, a não ser que nosso próprio espírito crie segundo seus níveis.

É na intuição sensível que busca sua certeza e segurança. Nossas representações, por serem nossas, são somente fenômenos. O fenômeno é objeto da intuição sensível e é constituído de dois elementos: a forma da intuição (espaço e tempo), que pode ser conhecida e determinada completamente a priori, e a matéria (elemento físico) ou o conteúdo, que significa algo que se encontra no espaço e no tempo e que, por conseguinte, contém uma existência e corresponde à sensação[4]. A matéria nunca pode ser dada de maneira determinada a não ser empiricamente. Assim, no criticismo de Kant em todo conhecimento podemos distinguir uma matéria, o conteúdo, e uma forma. A matéria procede do objeto conhecido, e a forma é imposta pelo sujeito. A intuição nos permite apreender o objeto, representá-lo; o conceito nos permite, através dessa representação, pensá-lo. A capacidade de intuir os objetos, i.e., de apreendê-los em função da maneira que esses objetos nos afetam, chama-se sensibilidade, a capacidade de pensar os objetos, i.e., de relacioná-los, chama-se entendimento. Nossa sensibilidade tem moldes aos quais as coisas se adaptam para serem representadas; esses moldes são as formas da sensibilidade.

A sensibilidade nos dá a intuição[5]; o entendimento, o conceito. Para Kant, enquanto o conceito é uma unidade mental dentro da qual está compreendido um

---

[3] "É-nos completamente desconhecida a natureza dos objetos em si mesmo independentemente de toda esta receptividade da nossa sensibilidade." (Kant, 1997, p.79).

[4] (Cf. Kant, 1997, p. 586).

[5] Uma intuição pode ser pura (***a priori***) ou empírica. A intuição empírica nunca dá origem a uma proposição universalmente válida e muito menos apodíctica.

número indefinido de seres e de coisas, a intuição é uma operação, o ato do espírito que toma conhecimento diretamente de uma individualidade, ela nos dá conhecimento de um objeto particular, único. O conhecimento resulta da conjunção de intuições e conceitos.

A teoria de Kant se distingue do racionalismo porque um conhecimento que não se funda na experiência não leva a novidade alguma. Distingue-se do empirismo, pois a experiência sensível, para ele, não é auto-suficiente para explicar o conhecimento científico, porque as afirmações científicas devem ser necessárias, ou seja, são assim e não podem ser de outra maneira. Do mesmo modo, os sentidos não ocasionam a universalidade. Portanto, a necessidade e a universalidade dos juízos da ciência, não têm sua origem nos objetos da experiência.

Nem extremamente empirista e nem extremamente racionalista, esta foi a postura de Kant. Do empirismo tomou a experiência, pois, para ele, todo conhecimento parte da experiência; do racionalismo, as condições a priori (universalidade e necessidade), pois a ciência, apesar de partir da experiência, deve torna-se independente dela. O conhecimento vai resultar da união do dado (que é a matéria) e do posto (que é a forma).

Considerando que a ciência se compõe de juízos - meios de expressão do conhecimento científico - Kant classificou tais juízos em dois grupos: analíticos e sintéticos. Os analíticos são os juízos nos quais o conceito do predicado está contido no conceito do sujeito. Os juízos sintéticos são aqueles nos quais o conceito do predicado não está contido no conceito do sujeito. Estes últimos acrescentam ao conceito do sujeito um predicado que nele não está pensado e dele não podia ser extraído por qualquer tipo de decomposição. O fundamento de legitimidade dos juízos sintéticos está na experiência, na percepção sensível. O fundamento dos juízos analíticos jaz no princípio de identidade, pois o predicado, contido no sujeito, não fará mais que repetir no predicado aquilo que há no sujeito;

são verdadeiros em virtude de sua forma, nada acrescentam ao sujeito, apenas por análise o decompõem em seus elementos parciais[6].

Kant defendeu que a ciência não pode ser constituída por juízos analíticos, como queria Leibniz, pois se assim o fosse ela seria vã, seria pura tautologia, uma repetição do que já está contido nos conceitos dos sujeitos. Por outro lado, se a ciência fosse constituída por juízos sintéticos, por ligações de fatos, como queria Hume, não seria ciência, seria um costume sem fundamento, não teria validade universal e necessária.

Com isso Kant concebeu os juízos científicos como sendo ao mesmo tempo sintéticos e a priori, ou seja, são juízos sintéticos que têm dos analíticos a virtude de serem a priori, isto é, são universais e necessários (independentes da experiência).

Mas, como são possíveis os juízos sintéticos a priori na matemática?

Tais juízos são possíveis na matemática porque esta ciência se funda no espaço e no tempo, que são intuições a priori, esta foi sua argumentação.

O espaço é a priori por que é absolutamente independente da experiência, ele é suposto na experiência, pois não podemos ter experiência de nada senão no espaço.

Na geometria, os juízos sintéticos[7] a priori são possíveis, pois nela o espaço puro é o suposto constante. Assim, o espaço é o fundamento das verdades geométricas.

> "Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os

[6] Para exemplificar diz Kant: "Quando digo, por exemplo, que todos os corpos são extensos, enuncio um juízo analítico, pois não preciso ultrapassar o conceito que ligo à palavra corpo para encontrar a extensão que lhe está unida; basta-me decompor o conceito, isto é, tomar consciência do diverso que sempre penso nele para encontrar este predicado; é, pois, um juízo analítico. Em contrapartida, quando digo que todos os corpos são pesados, aqui o predicado é algo completamente diferente do que penso no simples conceito de um corpo em geral. A adjunção de tal predicado produz, pois, um juízo sintético." (Kant, 1997, p.43).

[7] "Que a linha reta seja a mais curta distância entre dois pontos é uma proposição sintética, porque o meu conceito de reta não contém nada de quantitativo, mas sim uma qualidade. O conceito de ***mais curta*** tem de ser totalmente acrescentado e não pode ser extraído de nenhuma análise do conceito de linha reta. Tem de recorrer-se à intuição, mediante a qual unicamente a síntese é possível" (Ibid., p. 47).

> casos completamente a priori, sem ter pedido modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica, e contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo de generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo." (Kant, 1997, p.580, negrito nosso).

Da mesma forma, Kant mostra que o tempo é a priori (independe da experiência) e que ele é uma intuição. O tempo é a priori, pois acontecer significa que, no decurso do tempo, algo vem a ser. Não podemos de maneira alguma conceber um acontecimento sem o tempo. Ele também é uma intuição e não conceito, pois é único, podemos intuí-lo, apreendê-lo imediatamente, mas não pensá-lo mediante um conceito, como se fosse uma coisa entre muitas coisas.

Os juízos na aritmética são sintéticos a priori, pois necessito intuir o tempo para adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir.

Assim argumenta Kant que ao pensarmos o conceito da soma de sete e cinco, pensamos na reunião de dois números em um só (ou seja, em acrescentar cinco a sete), e não qual é esse número único que reúne os outros dois: "7+5 não é uma proposição analítica. Pois nem na representação do 7, nem na do 5, nem na reunião de ambos, penso o número 12 (. . .)".[8]

Ademais, na visão de Kant, princípios que jazem na matemática como a=a, o todo é igual a si mesmo, ou (a+b) >a, o todo é maior que a parte, etc., apenas são admitidos porque podem ser representados na intuição. Em tais casos o predicado está inerente ao conceito, não como pensado no próprio conceito, mas sim mediante uma intuição que tem que ser acrescentada ao conceito.

Portanto, toda matemática representa um sistema de leis a priori que se impõe a qualquer percepção sensível. Isto é possível porque o espaço e o tempo, bases das matemáticas, não são coisas que nós conhecemos por experiência, mas, antes, formas de nossa faculdade de perceber as coisas e, portanto, são

[8] (Kant, 1997, p. 200).

estruturas que nós, a priori, fora de toda a experiência, imprimimos sobre nossas sensações para torná-las objetos cognoscíveis, ou seja, são intuições puras, mediante as quais, são possíveis os juízos sintéticos a priori da matemática; eles são, portanto, os fundamentos lógicos da matemática.

Portanto em o conhecimento matemático é um conhecimento racional por construção de conceitos; onde construir um conceito significa apresentar a priori a intuição que lhe corresponde. O conhecimento matemático considera o geral no particular, no entanto, o objeto do conceito, ao qual o individual corresponde deve ser pensado como universalmente determinado.

O matemático caminha para a construção de proposições sintéticas e universais, mediante uma cadeia de raciocínio, sempre guiado pela intuição:

> "Embora todos estes princípios e a representação do objeto, de que esta ciência se ocupa, sejam produzidos totalmente a priori no espírito, nada significariam, se não pudéssemos sempre mostrar o seu significado nos fenômenos (nos objetos empíricos) (. . .). A matemática cumpre esta exigência pela construção da figura, que é um fenômeno presente aos sentidos (embora produzido a priori). O conceito de quantidade, nesta mesma ciência, procura apoio e sentido no número e este, por sua vez, nos dedos, nas esferas de coral das tábuas de calcular, ou nos traços e pontos que se põem diante dos olhos. O conceito é sempre produzido a priori, juntamente com os princípios sintéticos ou fórmulas extraídas desse conceito; mas o seu uso e aplicação a supostos objetos só pode encontrar-se na experiência, cuja possibilidade (quanto a forma) contêm a priori." (Kant, 1997, pp. 259-260).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tivemos como foco principal uma compreensão da concepção de conhecimento matemático presente na filosofia de Kant, mas, que importância teria esse estudo para a Filosofia da Educação Matemática?

Para responder a essa questão é necessário, primeiramente, contextualizar o trabalho de Kant na história da filosofia da matemática. Um estudo nessa direção nos permite dizer que, de Platão ao século XIX, com exceção de Kant, o conhecimento, em particular o conhecimento matemático, foi considerado ou (i) objeto puro da razão, ou (ii) objeto puro da experiência e ou intuição. Por exemplo, nos trabalhos de Newton (1643-1727), Locke (1621-1704), Berkeley (1685-1753) e Hume (1711-1776) é enfatizado o aspecto empírico do conhecimento em detrimento do lógico; em contrapartida, nos trabalhos de Platão (427-347a.c.), Descartes 1596-1650) e Leibniz (1646-1716), percebemos uma ênfase no aspecto lógico em detrimento do intuitivo (empírico).

Nesse contexto, a filosofia kantiana foi uma tentativa de se considerar, equilibradamente, na constituição do conhecimento, ambos os aspectos: o intuitivo e o lógico. Entretanto, apesar de tal tentativa, depois de Kant a experiência é novamente posta de lado. Este fato esteve presente também na Filosofia da Matemática; no século XIX surgem três correntes filosóficas que pretendem dar conta da natureza do conhecimento matemático, a saber, o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. Tais correntes, ainda que de bases filosóficas distintas, possuíam como característica comum o abandono da experiência como fonte de conhecimento. Ademais, o logicismo e o formalismo para levarem a cabo seus objetivos, eliminaram, do conhecimento matemático, o aspecto intuitivo. Por outro lado o intuiconismo eliminou do conhecimento o aspecto lógico.

Essas três linhas filosóficas, que permearam no século XIX, falharam em seus propósitos, e a natureza do saber matemática passou a ser novamente questionada.

Desse estudo obtemos que parece ser insuficiente dar conta do saber matemático enfatizando apenas um dos aspectos: intuitivo ou lógico; e essa análise nos levou a defender a importância de se considerar, equilibradamente, ambos aspectos (intuitivo[9] e lógico) na constituição do saber matemático. Observemos que Kant já havia sugerido esse equilíbrio, defendendo que o

[9] Aqui o intuitivo está sendo compreendido no sentido kantiano, já posto inicialmente, ou seja, a intuição pode ser tanto empírica (oriunda da experiência) ou ***a priori*** (não dependente da experiência).

conhecimento matemático é de natureza sintética a priori, ou seja, nasce da experiência, mas deve tornar-se independente dela; entretanto, em nossa concepção, o termo ‘equilibradamente’ está significando que não se pode dizer que o intuitivo precede o lógico ou que o lógico precede o intuitivo, tomando apenas um deles uma posição privilegiada, mas o intuitivo apóia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados. Isto porque estamos também considerando que o processo pelo qual essa constituição se dá não é estático e sim dinâmico (dialético), tomando a forma de uma espiral. Assim, propomos, ainda, que seja necessário haver em cada um dos níveis dessa espiral um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo.

Essa é uma proposta filosófica que tem a pretensão de ser vista como uma possível proposta para a Educação Matemática, uma vez que, a Filosofia da Educação Matemática parece ser, de certa forma, influenciada pela Filosofia da Matemática.

Isso é apontado, por exemplo, por René Thom (1971) ao dizer que: “quer se queira ou não, toda pedagogia, mesmo se escassamente coerente, repousa sobre a filosofia da matemática”[10]. Há, também, com respeito a esse ponto de vista, o trabalho de Paul Ernest em seu livro “”***The Philosophy of Mathematics Education***”, que inclui entre um dos componentes para analisar as crenças do professor de matemática, sua visão a respeito da natureza da matemática.[11] Condizente com a realidade de nosso país, existe o estudo realizado por Fiorentini (1995), que baseado na confluência de vários movimentos que ocorreram historicamente no Brasil, aponta seis tendências em educação matemática, a saber, a formalista clássica (vigorou até final da década de 50), a empírico ativista (difundida nas décadas de 60 e 70), a formalista moderna (após 1950), a tecnicista e suas variações, a construtivista (década de 60 e 70) e a sócioetnocultural (mais atual); dois dos componentes para essa classificação foram: a concepção de matemática e a crença de como se dá o processo de obtenção, produção e descoberta do conhecimento matemático; ambos estão vinculados a uma filosofia

[10] (Thom, 1971, apud Ernest, 1991, p.296).
[11] Cf. Ernest, 1991, pp. 135-136.

da matemática[12]. Por exemplo, a tendência formalista clássica caracterizava-se pela ênfase às idéias e formas da matemática clássica, sobretudo ao modelo euclideano e à concepção platônica de matemática; a empírico-ativista concebe que o conhecimento matemático emerge do mundo físico e é extraído pelo homem através dos sentidos e encontra suas raízes no empirismo de Locke.

Embora um estudo mais aprofundado ainda seja necessário, essas são as evidências iniciais de que é possível pensar a proposta aqui apresentada como uma proposta filosófica para a Educação Matemática.

BIBLIOGRAFIA

BERKELEY, G. *The Principles of Human Knowledge.* Enciclopédia Britânica 'Great Books', 1980.

BURTT, E.A. *As Bases Metafísicas da Ciência Moderna*. Trad. J. Viegas Filho e O. A. Henriques. Revisão P. C. Moraes. Editora Universidade de Brasília, 1991.

COUTURAT, L. *Les Principes des Mathématiques,* Paris, 1980.

DESCARTES, R. *Regras para a Direcção do Espírito*. Trad. J. Gama. Lisboa, edições 70, 1989a.

________. *Discurso do Método*. Trad. E. M. Marcelina. Comentários D.Huiman. Editora Ática, 1989b.

ERNEST, P. *The Philosofy of Matthematics Education*. Bristol, The Farmer Press, 1991.

FREGE,G. *The Foundations of Arithmetic*. English Translation by J. L. Austin. M.A- Basil Blackwell- Oxford, 1959.

HILBERT (1927). *The Foundations of Mathematics*. In: Heijenoort, V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971, pp. 464-479.

[12] Os demais componentes foram: as finalidades e valores atribuídos ao ensino de matemática, a concepção de ensino, a concepção de aprendizagem, a cosmovisão subjacente, a relação professor-aluno e a perspectiva de estudo e pesquisa com vistas à melhoria do ensino de matemática.

HUME, D. *Tratado de la Natureza Humana*. Editora Nacional, Madrid, edição preparada por Felix Duque, 1981.

HUME, D. *An Enquiry Concerning Human Understanding*. Enciclopédia Britânica 'Great Books', 1980.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Trad. M. P. Santos e A. F. Morujão. Introdução e notas de A. F. Morujão. Fundação Caloute Gulbenkian, Lisboa, 4a edição, 1997.

LEIBNIZ, G. W. *Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano.* Trad. Luiz João Baraúna, Coleção "Os Pensadores" Editora Nova Cultural Ltda, 1996.

LOCKE, J. *An Essay Concerning Human Understanding*. Enciclopédia Britânica 'Great Books', 1980.

MORENTE, M.G. *Fundamentos de Filosofia*. Editora Mestre Jou, São Paulo, 1970.

PALÁCIOS, A.R., PALÁCIOS, A. G. *Geo-Home-Trío & Geometría: Matemática e Filosofia*. Editorial Lumen, Argentina, 1999.

RESNIK, M. D. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Cornell University Press, Ithaca and London, 1980.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*. Cambrid University Press, Cambridge, 1903.

SILVA, J.J. Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática in *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*, Organizadora: Maria Ap. V. Bicudo, São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SNAPPER, E. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism. *Math. Mag*. vol. 52, n.4, september 1979, pp.207-216.

TILES, M. *Mathematics and the Image of Reason.* Routledge, London and New York, 1991.

WILDER, R.L. *Introdution to The Foudations of Mathematics*. Second edition, Wiley International Edition- John Wiley & Sons. Inc. New York- London- Sydney, 1965.