Niterói, 28 de agosto de 2001.

À SBEM

Atendendo solicitação datada de 20/08/01, estou remetendo na seqüência o texto completo da oficina apresentada no VII ENEM, "A Leitura Matemática do Mundo", para ser incluída nos anais do evento.

Como na solicitação é destinado espaço de 2.000 palavras para oficinas, e espaço bem maior para outras formas de apresentação, tudo leva a crer que houve equívoco na fixação do espaço.

Para efeito de comparação, uma comunicação cuja apresentação raramente atinge 30 minutos, teve o espaço fixado em 3.000 palavras. Desta maneira, uma comunicação está tendo nos anais, espaço 50% maior, embora sua duração no evento tenha sido 6 vezes menor que um oficina. A desproporção fica ainda mais evidente quando a painéis e conferências foi destinado espaço de 7.000 palavras, quase quatro vezes maior que o espaço destinado às oficinas, cuja duração foi 3 vezes maior. Como estas desproporções ferem frontalmente o jeito matemático de pensar, fui levado à hipótese do equívoco.

Fiz as considerações acima porque embora tenha feito grande esforço para ser conciso, não consegui me limitar ao espaço oferecido. Por isso, escrevi um texto maior, já que qualquer redução representava uma mutilação no trabalho. Para evitar isso, solicito que o texto seja incluído nos anais com as dimensões atuais.

Antecipadamente grato,

Renato J.C. Valladares

Rua Mem de Sá 169 Ap. 1.903, Niterói, RJ. Cep: 24220-260. Tel: (0xx21) 2711-2076; 2611-2450; 9913-1486. E-mail: rjcv@mailbr.com.br

A LEITURA MATEMÁTICA DO MUNDO

RENATO J.C. VALLADARES

1 - MATEMÁTICA CULTURAL: Seguindo um velho hábito, abrimos o jornal de manhã. Com uma arraigada fidelidade ao princípio "a esperança é a última que morre", procuramos as boas novas. Por escassez ou por serem desinteressantes, elas estão ausentes. O jeito é nos contentarmos com más notícias. Dentre elas, uma se ocupa da crise argentina dizendo que "Um teorema euclidiano importante enuncia que a menor distância no plano entre dois pontos é uma linha reta. O tango é um contra-exemplo e o projeto de Domingo Cavallo é outro; aliás a história argentina é uma tentativa constante de romper com este postulado. A dificuldade é uma verdadeira característica desse país vizinho. Se há um caminho longo e tortuoso entre duas posições e uma fácil e tranqüila, eles sempre fazem a opção pelo mais difícil.".

Nesta notícia a Matemática aparece como um elemento de comparação, que ajuda o jornalista a dar a informação. É muito comum o uso deste procedimento. Ao fazer referência a um fato que foi comprovado, diz-se que o fato "foi provado por ***a*** mais ***b***". A certeza de alguém sobre alguma coisa é expressa sob a forma "certo como dois mais dois são quatro". Um cronista esportivo informa uma classificação antecipada, dizendo que "tal clube está matematicamente classificado". Uma atriz ao dar uma entrevista disse que a "comédia é a Matemática do palco". Um jornalista ao escrever sobre botequins disse que, em geral, nestes estabelecimentos "os azulejos são assentados em losango". É comum o uso de expressão do tipo 1,1 mil reais, onde o milhar aparece como um múltiplo da unidade tal como o quilômetro é um múltiplo do metro. Observamos algo similar em expressões como 4,27 milhões de dólares ou 12,43 bilhões de litros de água, muito comuns na imprensa.

As citações acima são correntes e as pessoas entendem sem maiores explicações por serem manifestações da cultura geral do cidadão. A Matemática surge, então, como uma componente desta cultura que, por este motivo, pode ser entendida como uma expressão cultural da Matemática ou mais brevemente, ***Matemática Cultural.*** Como o leitor pode perceber, esta expressão da Matemática ultrapassa em muito os limites das citações acima. Se prestarmos atenção, veremos Matemática Cultural por toda parte. A imprensa e a publicidade são fontes inesgotáveis. Nas compras, nos impostos, na TV ou nas leis pode-se perceber o bom ou mau uso, ou mesmo a falta que a Matemática faz.

Evidentemente, a Matemática que se estuda nas escolas fundamental e média, que chamaremos brevemente de ***Matemática Escolar***, desempenha um forte papel no desenvolvimento da Matemática Cultural, da qual o cidadão se serve ao longo da vida. Neste trabalho veremos que a Matemática Cultural pode ser usada nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática Escolar, obtendo-se desta forma, uma saudável interação

MATEMÁTICA CULTURAL $\leftrightarrow$ MATEMÁTICA ESCOLAR

2 - MATEMÁTICA ESCOLAR: O professor pode se valer do verdadeiro manancial de idéias que é a Matemática Cultural. Será proveitoso para os processos de ensino e aprendizagem usar Matemática cultural para despertar o interesse dos alunos. Assim, se o assunto for equação algébrica, polinômio ou progressão geométrica, as aulas podem ser ilustradas com exemplos de compras a prazo, investimentos financeiros, divulgação de boatos, o contágio da dengue ou a fábula do xadrez e do trigo. Piadas envolvendo simetria aparecem em tirinhas de jornais, onde personagens ficam observando suas imagens no espelho. Normas de uso do solo usam diversos conceitos de geometria. O mistério do "somar e subtrair" que tanto intriga os estudantes nos procedimentos algébricos, pode ser amenizado se for identificado procedimento similar (o "fazer e desfazer") que é usado pelo feirante que colocou batatas em um prato da balança e um peso de 1 quilo no outro. Ao ver que este prato ficou mais baixo, o feirante coloca um peso de 200 gramas no prato com batatas e, face ao equilíbrio obtido, conclui que estas pesam 800 gramas. Outra ocorrência do "fazer e desfazer" se dá quando damos uma moedinha para facilitar o troco ou quando a solução de um problema nos leva a trocar, em uma soma, uma parcela de 5 por duas de 2,5, como será feito adiante, na seção 8.

Poderíamos falar em muitas situações em que a Matemática Cultural pode ser usada como motivação para a Matemática Escolar. Seria possível mostrar outras tantas situações em que a Matemática Escolar dá origem à Matemática Cultural. Entretanto, para evitar um excessivo alongamento, neste trabalho nos concentraremos em algumas situações.

3 - RELAÇÃO DE ORDEM: Observemos os seguintes textos que foram publicados em jornais e na TV. Eles foram discutidos nos trabalhos de nossa autoria citados em [V2] e [V3] e alguns aspectos da discussão serão complementados aqui.

i) ".... na fazenda Barriguda, de 4.900 hectares, estão acampadas 65 famílias...".

ii) "O parque municipal de Nova Iguaçú mede 1,1 mil hectares, o que equivale a 10 aterros do Flamengo ou ao tamanho do bairro de Copacabana.".

iii) "Agora, maiores de 14 anos não poderão mais dirigir ciclomotores.".

iv) "Adolescentes com idades entre 16 e 18 anos estão proibidos de guiar mobiletes e outras pequenas motocicletas.".

v) "Mede mais de três campos do Maracanã e pesa sete vezes mais que o ***Titanic***.".

O texto iii foi falado na TV e os demais foram publicados em diferentes edições de um mesmo jornal, com circulação no Grande Rio. No texto "i", fala-se numa grande área de terra, sem fazer qualquer tipo de comparação que possibilite ao leitor aquilatar o tamanho da fazenda.

Pode-se argumentar que isto não era necessário, pois a área está informada em hectares. Como o leitor deve ter aprendido na escola que 1 hectare tem 10.000 metros quadrados, ele pode fazer as contas e ver que a fazenda tem 49 milhões de metros quadrados. Como ele sabe o "tamanho" de 1 metro quadrado, é só multiplicar por 49 milhões e estimar as dimensões da fazenda.

Ora, as coisas não são bem assim. Embora número seja uma noção matemática muito usada para quantificar, para que a quantificação fique clara, é necessário que se refira a grandezas conhecidas e em quantidades habituais. Se por um lado espera-se que o leitor médio de um jornal de circulação urbana conheça o tamanho do metro quadrado, por outro lado não se pode esperar que ele esteja habituado a lidar com muito mais do que as centenas de metros quadrados de um terreno residencial.

Neste sentido, o texto "ii" deixa claro que em outro momento de sua "vida editorial", o jornal teve esta preocupação, pois ao se referir ao parque de Nova Iguaçú, teve o cuidado de comparar sua área com a de um parque e um bairro do Rio bem conhecidos do seu leitor médio. Desta forma, foi redigido um texto muito melhor, sob a ótica da informação quantitativa.

Como comparações quantitativas são feitas com auxílio da relação de ordem, ($\geq$, ***maior ou igual***), vemos que numa notícia, o jornal valeu-se desta relação, enquanto na outra, esqueceu-se de sua existência.

Na notícia "v" embora hajam boas comparações, não há nenhuma referência a unidades de medida para quantificar o tamanho ou o peso da plataforma. Isto impossibilita uma percepção exata destas grandezas. Assim, a notícia sobrevalorizou a relação de ordem usada na comparação que substituiu quantificação exata que seria obtida com o uso de unidades de medida.

Neste ponto lembremos que medições também são comparações (mais exatas!) e, por isso, usam a relação de ordem. Entretanto, fazer as medições usadas ou não nos textos em discussão, não é tarefa dos seus autores. Posto isso, continuemos a análise.

Assim, os textos "i", "ii" e "v" mostram diferentes maneiras da imprensa lidar com a relação de ordem, que pode ter um uso equilibrado; ser completamente esquecida ou ser exageradamente valorizada. Mas as coisas não param por aí. No texto "iii" a relação de ordem foi usada de forma desastrosa. Como pessoas com 15, 17, 22, 37 ou 53 anos são maiores de 14 anos, ao informar que "Agora, maiores de 14 anos não poderão mais dirigir ciclomotores.", o noticiário terminou dizendo que, por exemplo, as pessoas com 33 anos estavam proibidas de dirigir estes veículos, o que não é verdade.

Para discutir o texto "iv", consideremos inicialmente que a notícia se referia ao fato da idade mínima para dirigir ciclomotores ter aumentado de 14 para 18 anos. Assim, acreditamos que a notícia dos 16 anos tenha sido um equívoco do repórter, que deve ter tido a intenção de escrever 14 anos. Entretanto, com 14 ou 16 anos o uso da relação de ordem (que aparece sob a forma de intervalo) reduziu o poder de informação da notícia. Afinal, adolescentes com 13 anos, embora fora da faixa entre 16 e 18 (ou entre 14 e 18), também são proibidos de dirigir ciclomotores, mas a notícia não informa este fato. Assim, em vez de enriquecer a notícia como ocorreu em "ii", a relação de ordem empobreceu o texto "iv".

Vale observar que o jornal que usou a relação de ordem para melhorar o texto "ii" é o mesmo que ao usá-la, piorou o texto "iv" e deixou de usá-la para melhorar o texto "i".

4 – SOLUÇÃO NA ESCOLA: Vemos assim que a relação de ordem recebe um tratamento heterogêneo por parte da imprensa. Se procurarmos, veremos que o mesmo acontece com outras noções matemáticas. Entretanto, também não é difícil encontrar noções matemáticas que recebem tratamento coerente na imprensa. Assim, coloca-se a questão de saber o porquê de umas noções serem abordadas de forma coerente enquanto outras recebem tratamento inverso.

Acreditamos que uma parcela deste porquê se encontre no fato do viés matemático de algumas noções não ser claro para todo mundo. Desta forma, estas noções são abordadas de forma assistemática, ficando ao nível do entendimento pessoal ou de intuição das pessoas que "fazem" a imprensa. Entretanto, estas pessoas são profissionais com formação universitária cuja adequação se reflete em outros aspectos do produto de seu trabalho, que em geral é de boa qualidade. Tanto isto é verdade que o cidadão vai buscar em jornais e noticiários rádio ou TV, boa parte das informações que julga necessárias à sua vida.

Num arroubo corporativista poderíamos pensar que a solução deste problema estaria na introdução de Matemática nos cursos universitários de Comunicação Social. Para alívio dos estudantes destes cursos, entendemos que não é este o caso e, adiante, na seção 9, reforçaremos este entendimento. Isto significa que o problema pode (e acreditamos que deve) ser resolvido na escola elementar e média. Dentre as muitas soluções que os professores de Matemática certamente apresentarão, pode-se discutir o assunto com os alunos, levando textos onde aparecem (ou deviam aparecer) noções matemáticas. O bom e mau uso, ou mesmo o não uso destas noções pode ser objeto de pesquisa ou discussão a serem feitas com a turma. Os diferentes usos e o caráter cultural ou técnico de uma noção matemática também podem ser observados. Por exemplo, a forma como a relação de ordem se expressa como um "menor ou igual" numa inequação, na definição de um intervalo ou em outro contexto matemático, passando (em outros contextos) para formas quase tão rígidas (no intervalo de idades no texto "iv"), até expressões bem mais brandas como nas comparações "... equivale a 10 aterros do Flamengo ou ao tamanho do bairro de Copacabana." (no texto "ii"), onde o rígido "igual" da Matemática é substituído pelo flexível "equivale" da vida diária.

Este tipo de procedimento desperta a consciência do estudante, sobre a Matemática. Isto sem dúvida se refletirá na formação do cidadão que ele é. Assim, se ele vier a ser jornalista, saberá se valer de recursos matemáticos para trabalhar melhor. Se ele optar por outra carreira, será um leitor mais atento, sabendo escolher o melhor dentre os serviços de informação disponíveis. Enfim, se o professor de Matemática mostrar para seus alunos a Matemática Cultural (na relação de ordem ou em outro qualquer conceito), em menos tempo do que se possa imaginar os alunos levarão este conhecimento para a vida, incorporando-os à sua cultura geral e, acreditamos, capacitando-se a viver melhor.

5 - UM PONTO & VÍRGULA NA CONSTITUIÇÃO: Em abril ou maio de 1999, o Ministério da Previdência baixou um decreto regulamentando as aposentadorias, que exigia ***de forma simultânea***, idade mínima e tempo mínimo de contribuição, para que o benefício fosse concedido. Esta dupla exigência causou uma enorme polêmica, envolvendo diversos setores da sociedade, pois no ano anterior (1998), houve uma emenda constitucional - a emenda da previdência - que, com foi amplamente noticiado na ocasião, estabelecia estas exigências ***de forma alternativa***. Isto é, bastava que o segurado satisfizesse uma das condições para que tivesse direito à aposentadoria.

Assim, aqueles que se opunham ao decreto, especialmente os setores oposicionistas ao governo do presidente Fernando Henrique, diziam que o decreto era inconstitucional, pois contrariava o que fora estabelecido na emenda da previdência. Contrariamente, os que defendiam o decreto, diziam que ele era constitucional, já que obedecia plenamente à emenda da previdência, pois esta não dizia que as exigências eram alternativas.

Dando seqüência ao assunto um jornal informou que o supremo ia decidir sobre os aposentados e, a seguir, transcreveu o texto da emenda da previdência, onde estava escrito que “é assegurada a aposentadoria no regime geral da Previdência Social, nos termos da lei, obedecidas as seguintes condições: 35 anos de contribuição, se homem , e 30 anos, se mulher; 65 anos de idade, se homem, e 60 anos, se mulher”. O jornal ainda explicava que “Na interpretação dos juristas do Ministério da Previdência, o ponto e vírgula após a palavra “mulher” teria a função de “e”, tornando as exigências cumulativas.”. A seguir, o jornal transmitia a opinião do presidente da Câmara dos Deputados segundo quem “Certamente, essa dúvida só será resolvida pelo Supremo”.

Não é difícil concordar com o presidente da Câmara, pois se havia quem dissesse que o ponto vírgula tinha função de “e”, poderia igualmente haver quem achasse que ele tinha função de “ou”. Afinal, do jeito como está escrita a emenda, o ponto e vírgula não tem uma significação precisa, possibilitando as duas interpretações.

A essa altura, o leitor deve estar perguntando onde está a Matemática neste caso. Para esclarecer este ponto, podemos formular o seguinte exercício: "Dentre os números a seguir, sublinhe os que são menores que 10; pares. 1; 4; 5; 6; 9; 10; 14; 17; 18; 20; 21".

Se um professor passar este exercício para uma turma, possivelmente obterá respostas diferentes, pois se o ponto & vírgula for interpretado como "ou" a resposta será "1; 4; 5; 6; 9; 10; 14; 18 e 20". Se for interpretado como "e", a resposta será "4; 6". Logo, se o professor estiver interessado em problemas com uma única solução, a redação está inadequada.

Como se espera da constituição que ela admita uma única interpretação, vemos que a emenda da previdência está mal redigida. Assim, usando raciocínios de Matemática básica, podemos ver e, o que é mais importante, levar nossos alunos a verem que os legisladores foram extremamente infelizes ao escrever nada menos que nossa lei máxima. Cabe perguntar: Por que?

A resposta não é mais uma questão matemática. Entretanto, ao se buscar uma resposta plausível, necessariamente iremos avaliar a qualidade do trabalho dos deputados e senadores que, independente do partido a que pertençam, são igualmente responsáveis pela redação das leis, quer seja pela participação direta na tarefa de redigi-las, quer seja usando os mais diversos meios para denunciar uma redação imprecisa.

Assim, usando raciocínio matemático para discutir questões não matemáticas, isto é, usando o jeito matemático de pensar, a Matemática ajuda a formar cidadãos capazes de se informar e, em conseqüência, exercer a cidadania de forma mais completa.

6 - OS AZULEJOS: Suponhamos que uma pessoa queira ladrilhar um banheiro. Compra azulejos com 15 centímetros de largura, e chama um ladrilheiro. Ao mostrar o serviço, aponta uma parede, diz que ali ficará a pia e pede para os azulejos ficarem centrados, para evitar que a arandela, o espelho e a torneira fiquem assimétricas em relação aos azulejos. Ao constatar que a tal parede mede 1,10m, o ladrilheiro diz que não dá para centrar os azulejos, pois como estes medem 15 cm, cada fileira terá 7 azulejos e um filete de 5cm. Completa a explicação dizendo que para centrar os azulejos, o filete devia ser divido em dois, sendo assentados um de cada lado. Como o filete inicial é de 5 cm, daria origem em dois filetes de 2,5 cm, que por serem muito estreitos, não dariam bom acabamento. O dono da obra aceita explicação e manda fazer o serviço com os azulejos descentrados.

Diariamente, ao começar seu dia, ele verá seu rosto refletido em um espelho assimétrico em relação aos azulejos. A arandela e a torneira padecem do mesmo defeito. Se conformará com a estética menor do que a desejada no dia que comprou os azulejos, pois o ele foi convencido que seu desejo era impossível.

7 - ERA MESMO?: Para responder examinemos a descrição matemática do problema. Reescrevendo tudo em centímetros, vemos que a parede tinha 110cm e os azulejos 15cm. Assim, em cada fileira caberiam 7 azulejos inteiros e um filete de 5cm. Isto é, o problema é descrito pela soma

i) (15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + 5 = 110,

onde as parcelas de 15 aparecem entre parêntesis, por se referirem a azulejos inteiros, cuja colocação é mais simples e, por isso, são somadas em separado.

Ao saber que o proprietário queria os azulejos centrados, o ladrilheiro pensou em uma solução cuja descrição matemática é dividir por 2 a parcela menor que 15, obtendo duas parcelas que deveriam aparecer, uma de cada lado da soma, que agora passaria a ser

ii) 2,5 + (15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + 2,5 = 110.

Como as parcelas de 2,5cm significavam filetes muito estreitos, o ladrilheiro descartou a solução, convenceu o proprietário que seu desejo era impossível e assentou os azulejos de acordo com a soma "i".

Para ver se o ladrilheiro tinha ou não razão, recoloquemos o problema nos seguintes termos matemáticos: ***Expressar de todas as formas possíveis, 110 como uma soma com parcelas não superiores a 15, de tal forma que existam exatamente duas parcelas menores que 15 e que estas sejam iguais***. Uma solução é dada pela soma "ii", que foi descartada. Devemos portanto procurar outra. Para isto basta lembrar que duas parcelas iguais e menores que 15 podem ser obtidas pela divisão por 2, de uma parcela menor que 30. Para isto, basta aplicar a propriedade associativa na soma "i", reescrevendo-a como

(15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + (15 + 5) = (15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + 20 = 110.,

onde aparece uma parcela 20 (menor que 30, como desejávamos). Dividindo-a por 2, obtemos duas parcelas de 10 que dão origem à solução

iii) 10 + (15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15) + 10 = 110.

A solução representada pela soma acima, dá a simetria desejada e ainda apresenta a vantagem adicional dos filetes serem de 10cm, que são mais largos que o filete de 5cm que foi usado na solução assimétrica dada pela soma "i".

8 - RECURSOS MATEMÁTICOS: Uma forma de usar o problema acima em sala, é rastrear os recursos matemáticos. Com este objetivo observemos que para obter a soma "i", inicialmente divide-se 110 por 15, o que permite escrever 110 = 7 x 15 + 5. Como 7 x 15 é igual a uma soma com 7 parcelas 15, obtemos a soma "i". Com o objetivo de simetrizar os azulejos, divide-se 5 por 2, obtendo 2,5. A seguir, desfaz-se esta divisão substituindo a parcela 5 por duas parcelas 2,5. Neste caso, usou-se o "fazer e desfazer" (reveja seção 2). Ao reposicionar uma destas parcelas, usou-se a propriedade comutativa.

Antes de prosseguir convém observar que as divisões 110 ÷ 15 e 5 ÷ 2 tiveram objetivos diferentes. Na primeira o quociente 7 dava o número de azulejos inteiros e o resto 5 dava a largura do primeiro filete. A outra divisão tinha o objetivo de determinar a largura dos novos filetes que substituiriam o primeiro. Neste caso, o resto 1 não seria útil e a divisão estendeu-se, dando o quociente fracionário 2,5. O leitor interessado nos diferentes usos da divisão pode ler nosso trabalho "A Divisão e seus Dividendos" citado em [V1].

Passemos à 2ª solução (a que resolveu o problema). Para obtê-la, foi necessário lembrar que ao dividir por 2 um número menor que 30, obtemos um número menor que 15. Aplicando este fato à soma em estudo e, usando a propriedade associativa, substitui-se uma parcela de 15 e uma de 5, por uma de 15 + 5 = 20 < 30. A partir deste ponto foram repetidos procedimentos usados na 1ª solução. É interessante observar que o caráter "prático" da constatação que "a metade de um número menor que 30 é um número menor que 15", e o caráter "teórico" da propriedade associativa da soma foram igualmente importantes na resolução do problema.

9 - MATEMÁTICA NO TRABALHO: Acabamos de ver que o problema dos azulejos pode ser resolvido com recursos matemáticos simples, que se aprende nos cursos elementar e médio. Por outro lado existe uma enorme quantidade de banheiros, cozinhas varandas, terraços, jardins, etc, com azulejos, ladrilhos, pisos de pedra ou tábuas, revestimento de lambris, etc, com assimetrias que reduzem o efeito estético.

Num primeiro momento podemos ser tentados a atribuir este problema aos operários da construção civil que, devido a condições sabidamente adversas, não têm a devida formação escolar, tendo aprendido a trabalhar na escola da vida.

Entretanto, fica difícil sustentar esta versão frente ao fato óbvio que se o ladrilheiro da seção 6 não teve a devida formação escolar, o mesmo pode não ter ocorrido com o dono da casa, que o contratou. No entanto, o dono da casa aceitou a explicação do ladrilheiro em vez de apontar a solução viável.

A impossibilidade de atribuir os problemas acima à baixa escolaridade dos operários, fica ainda mais evidente se nos lembrarmos dos muitos edifícios construídos com defeitos como acima. Entretanto, a construção de edifícios é supervisionada por engenheiros e arquitetos que estudaram Matemática na universidade. Assim devemos encontrar o porquê deles não ensinarem seus operários a assentar azulejos de acordo com a solução 2. Qualquer professor de Matemática com experiência em cursos de engenharia ou arquitetura sabe que as matérias ensinadas nestes cursos não abordam de forma direta os tópicos citados na seção 8. Quando muito, estes tópicos são abordados indiretamente, como pré-requisitos para o desenvolvimento dos programas universitários. Como não é de esperar que tópicos estudados de forma indireta sejam usados de forma direta, entende-se porque a Matemática que se estuda na universidade não ajuda na solução do problema dos azulejos.

Assim, a escola elementar e média são os locais adequados para a bordagem de problemas como o dos azulejos, do ponto & vírgula, da relação de ordem e muitos outros. Esta abordagem tem a dupla vantagem de, por um lado, semear através da escola, Matemática Cultural que integrará a cultura geral do cidadão, melhorando a compreensão do mundo. Por outro lado, podem se constituir em poderoso recurso a ser usado por professores e alunos para facilitar os processos de ensino e aprendizagem, reduzindo ou mesmo eliminando os indesejáveis rótulos "teórico" e "prático" que citamos no final da seção 8.

10 - PESQUISA ELEITORAL: A partir deste ponto ultrapassaremos os limites da Matemática Escolar e rastrearemos a continuidade, que integra a Matemática Universitária, mas tem aspectos simples que bem poderiam ser abordados no nível médio (veja [V4]). Para isto estudaremos três casos reais que abordam pesquisa eleitoral, imposto de renda e aspectos da legislação do menor. Iniciemos pelas pesquisas.

Nos primeiros dias do mês de outubro de 2000, logo após o 1º turno das eleições municipais, os jornais se ocuparam de pesquisas eleitorais que, segundo se afirmava, haviam cometido muitos erros. Em especial, duas delas chamavam a atenção. Um instituto previu que no Rio de Janeiro, o candidato Luiz Paulo Conde obteria uma votação da ordem de 37%. O mesmo instituto previu que no Recife, o candidato Roberto Magalhães obteria cerca de 52% dos votos. Nenhuma das previsões se confirmou, apresentando erros, o que era de esperar, já que pesquisas eleitorais apresentam estimativas e não previsões exatas. Os erros cometidos foram da ordem de 3%, pois a votação de Luiz Paulo Conde foi pouco maior que 34%, enquanto Roberto Magalhães obtinha pouco menos que 50% . O erro do Rio foi considerado normal, dentro da margem de tolerância. Com o erro do Recife aconteceu o contrário. Ele não foi aceito, tendo sido considerado uma "zebra".

Cabe então perguntar: Porque o mesmo erro, da ordem de 3% foi considerado normal para o Rio e uma "zebra" para o Recife? A resposta é simples: No Rio a diferença não alterou a expectativa sobre o resultado da eleição (ida do candidato para o 2º turno). Com o percentual de 52% previsto no Recife, o candidato seria eleito no 1º turno, enquanto com o percentual inferior a 50% realmente obtido, o candidato teve que disputar o 2º turno.

11 - O IMPASSE: Assim, um erro da ordem de 3% não é, ***a priori***, "grande" nem "pequeno". Para dimensioná-lo é necessário analisar suas conseqüências. Se estas forem "pequenas", como ocorreu com Luiz Paulo Conde, o erro diminui. Se forem “grandes”, como no caso de Roberto Magalhães, o erro cresce. Realmente, não é “pequeno”, o erro de apontar como eleito, um candidato que teve que disputar o 2^{o} turno, e que acabou sendo derrotado, como se viu posteriormente.

Desta maneira, parece que se chega a um impasse. Por um lado, pesquisas eleitorais não apresentam previsões exatas e sim estimativas que necessariamente têm margens de erro. Por outro lado, o fato da margem de erro ser pequena, não assegura que o erro seja pequeno. Para complicar as coisas, a imprensa noticiou que um deputado insatisfeito com os erros das pesquisas "... está preparando um projeto de lei que proíbe a divulgação de pesquisas com margem de erro superior a um por cento...".

Esta proposta é inócua pois a redução da margem de erro não resolve o problema. Para ver isto, lembremos algumas situações em que houve disputa apertada. No 1^{o} turno das eleições em São Paulo, o candidato Paulo Maluf venceu o candidato Geraldo Alkmin por uma diferença bem menor que 1%. Fato similar ocorreu no Rio de Janeiro, na disputa entre César Maia e Benedita da Silva. Muito provavelmente, nenhuma pesquisa teria sido capaz de determinar vencedor nestas disputas, mesmo que suas margens de erro fossem da ordem de 1%, já que a diferença real foi menor que este percentual. Entretanto, muitas pesquisas se pronunciaram corretamente sobre a imprevisibilidade destas disputas, usando a classificação "empate técnico". Voltando ao Recife, vemos que lá também existia uma situação imprevisível, pois raciocinando com a margem de erro de 3%, o prognóstico de votação pouco maior que 52% não excluía (como de fato não excluiu) a possibilidade de uma votação inferior a 50%. Entretanto, diferente das outras situações, esta não poderia ser classificada com "empate técnico", pelo simples fato de não haver com quem empatar.

Esta situação nos remete à velha piada em que o único passageiro de um ônibus estava sentado em um lugar onde a chuva entrava, molhando-o todo. Ao ouvir a sugestão do motorista, para trocar de lugar, o passageiro correu o olhar pelo ônibus vazio e perguntou desconsolado "tocar com quem?". No caso das pesquisas, em vez da pergunta "empatar com quem?", uma boa alternativa é a criação de uma nova classificação que pode ser denominada "prognóstico imprevisível" ou algo similar.

12 - UMA DESCONTINUIDADE: Como a condição ***sine qua non*** para um candidato se eleger, é obter mais que 50% dos votos válidos, pode-se descrever a situação eleitoral de cada candidato em função de sua votação, com auxílio de uma função real E. Numerando a situação "eleito", com o número 1 e "não eleito" com 0, a função E se define por $E(t) = 0$, se $t \leq 50$ e $E(t) = 1$ se, $t > 50$. É fácil ver que a função E é descontínua em 50. Assim se estivermos trabalhando com um número ***a***, "próximo" a 50, cujo cálculo tenha uma margem de erro, que inclua o número 50, não podemos ter certeza quanto à resposta dada por E, quando for calculada em ***a***.

Foi exatamente o que aconteceu no Recife. Para ver isto, usemos mais uma vez a margem de erro de 3 (3%). Isto é, admitiremos que o número 52 (percentual de votação de Roberto Magalhães) foi calculado com uma margem de erro 3. Logo, era esperada uma votação entre os percentuais (52 - 3 =) 49% e (52 + 3 =) 55%. Assim, o ponto de descontinuidade 50 (50%) estava na margem de erro, o que impossibilitaria qualquer previsão, sendo melhor usar a classificação "prognóstico imprevisível" sugerida acima.

13 - CONTINUIDADE E APROXIMAÇÕES: Os raciocínios acima deixam claro que a existência de descontinuidades dificulta os cálculos aproximados e as aproximações em geral, que se baseiam na expectativa que "pequenas variações" nas causas acarretarão "pequenas variações" nos efeitos. Assim as situações em que ocorrem aproximações serão melhor abordadas se existir continuidade nos processos matemáticos (funções) que determinam estas situações, pois a continuidade é uma teoria que relaciona os efeitos com suas causas. Este fato deixa clara a importância da continuidade nas diversas utilizações de recursos matemáticos, pois a todo momento se trabalha com aproximações. Afinal, nossa cultura conduz ao uso de números decimais, não obstante a grande dificuldade em obter valores decimais exatos. Esta dificuldade decorre de muitas razões, como as imprecisões inerentes a cada situação ou o fato de somente números inteiros e racionais (irredutíveis) cujo denominador tenha apenas fatores primos 2 ou 5 terem expansão decimal finita.

14 - A LEI DO MENOR: A noção de continuidade ultrapassa a Matemática e descreve outras formas de conhecimento. Para ver como isto ocorre, vamos nos valer de um editorial publicado num jornal. Ele criticava a legislação brasileira, que estabelece a idade de 18 anos como limite mínimo para que um cidadão possa ser julgado por um crime. O articulista escreveu que “O parâmetro atual estabelece que o limite legal entre maior e menoridade é o dia do 18^0 aniversário. Se delinqüir um dia antes, o criminoso é inimputável, se resolver faze-lo 24 horas depois, estará sujeito às penas da lei. Por que? Qual é a diferença?”.

Uma emissora de TV levou ao ar um capítulo de novela versando sobre assunto similar. Um bandido fez alguns reféns e a polícia solicitou que sua mãe pedisse a ele, que se entregasse. Esta se recusou a faze-lo, alegando que o filho completara 18 anos recentemente. Por isso, se fosse preso, seria condenado a muitos anos de prisão.

O jornalista considerou como uma inadequação na lei, o fato de uma pequena variação de tempo, no momento em que uma infração é cometida, possibilitar uma grande variação no rigor da punição ao infrator.

O autor da novela se valeu do mesmo fato.

Esta situação guarda estreita semelhança com a situação eleitoral descrita um pouco acima. Para ver isto tomemos a função P definida por P(t) = 0 se t < 18; P(t) = 1 se t ≥ 18. Fazendo t representar a idade, 0 representar a situação legal do menor e 1 representar a situação do adulto, vemos que P descreve a situação de cada cidadão, frente à legislação criminal, em função da idade. Em 18 P tem uma descontinuidade que motivou os trabalhos do editorialista e do novelista.

Como era de esperar, nem um nem outro fez referência à noção matemática de continuidade. Entretanto, autores, leitores e espectadores poderiam tê-la usado de forma sistemática para elaborar ou compreender melhor estes trabalhos. O mesmo se pode dizer em relação às pesquisas eleitoras. Assim, entendemos que as pessoas ficariam melhor habilitadas para a vida se a continuidade fosse estudada (de forma simples, é claro!) na escola de nível médio.

15 - IMPOSTO DE RENDA: Ainda sobre a continuidade vejamos, num jornal, a tabela de imposto de renda na fonte. Os ganhos entre 0 e 900 reais são isentos, enquanto os ganhos na faixa entre 900 e 1.800 pagam 15% de imposto. No cálculo do imposto nesta faixa, deve ser deduzida uma parcela de R$ 135,00.

Se não houvesse esta dedução, uma pessoa que ganhasse 901 reais, pagaria 135,15 de imposto e ficaria com o ganho real de (901 - 135,15 =) 765,85 reais. Por outro lado, uma pessoa que ganhasse 900, estaria isenta e teria o ganho real de (900 - 0 =) 900 reais. Neste caso, uma "pequena variação" no ganho implicaria numa "grande variação" no imposto a pagar e, conseqüentemente, a tabela seria incoerente pois uma pessoa que ganhasse mais poderia terminar com um ganho real menor do que se ganhasse menos.

Para sentir o problema, imaginemos o "presente de grego" que receberia um trabalhador que ganhasse 900 reais e tivesse obtido um aumento de 10%. Seu salário passaria a ser de 990, sobre os quais pagaria 15% de imposto, o que dá (990 x 0,15 =) 148,50. Assim, ele ficaria com um ganho real de (990 - 148,50 =) 841,50, bem menor que os 900 que ele tinha antes do aumento. Entretanto, a parcela de 135 reais a ser deduzida, impede que isto aconteça pois, neste caso, seu imposto seria de (148,50 - 135 =) 13,50 e seu ganho real seria (990 - 13,50 =) 976,50, maior que os 900 que ganhava antes do aumento.

Para evitar este tipo de incoerência, a tabela deve evitar que pequenas variações nos ganhos impliquem em grandes variações no imposto a pagar. Em outras palavras, a tabela deve ser descrita por uma função contínua, como será visto um pouco a frente. Antes, porém, observemos que a tabela evita outra ocorrência desta icoerência, quando determina uma tributação de 27,5% e uma parcela a deduzir de 360 reais, para ganhos superiores a R$ 1.800,00. Se em vez de 360, esta parcela fosse - por exemplo - de R$ 400,00, uma pessoa que ganhasse R$ 1.801,00 pagaria R$ 95,27 de imposto enquanto outra pessoa que ganhasse 1.800 seria tributada em 135 reais. Novamente, teríamos uma incoerência, decorrente de "uma pequena variação no ganho implicar em uma grande variação no imposto a pagar". Só que agora, a