CALCULANDO VOLUMES PELO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Claudia Laus Angelo[1]

Alexandre Novicki[2]

RESUMO:

O objetivo dessa oficina é discutir com os participantes a utilização de elementos da História da Matemática como recurso didático para o ensino-aprendizagem da Matemática. O elemento histórico específico a ser trabalhado é o Princípio de Cavalieri e sua utilização na dedução das fórmulas de volume do cilindro, da pirâmide, do cone e da esfera. Alguns livros didáticos para o Ensino Médio não apresentam justificativas ao leitor para, por exemplo, a fórmula do volume da esfera. Mas o Princípio de Cavalieri nos dá uma alternativa de justificação acessível à compreensão dos alunos. Não há por que nos limitarmos à imposição de fórmulas aos nossos alunos quando podemos construí-las junto a eles.

SOBRE BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647):

Ao nascer em Milão, Itália, por volta de 1598, Bonaventura recebeu o nome de Francesco Cavalieri. Sua família era proprietária de terras em Suna e em Milão, mas foi nesta última que Cavalieri passou a sua infância e iniciou seus estudos.

Em 20 de setembro de 1615 ele se juntou a ordem religiosa dos Jesuados (não dos Jesuítas) em Milão, assumindo o nome de Bonaventura (ou Boaventura) Cavalieri. Em 1616 ele foi transferido para Pisa onde estudou filosofia, teologia e onde conheceu Benedito Castelli que o introduziu no estudo de geometria. Durante os quatro anos que esteve em Pisa, Cavalieri tornou-se um matemático famoso e um dos discípulos de Galileu.

Em 1620 ele voltou para Milão onde tornou-se diácono do Cardeal Federico Borrofmeo. Lá ele estudou teologia por três anos. Ainda tornou-se prior (superior em

---

[1] Professora da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-URI, Santo Ângelo/RS.
Mestre em Educação Matemática pela Unesp-Rio Claro.
E-mail: claulaus@urisan.tche.br ; fone: (0xx55) 3313-5168; fax: (0xx55) 3313-7902.

[2] Aluno do nono semestre do Curso de Matemática da URI, campus de Santo Ângelo.
Professor do Instituto de Educação Cenesista Sepé Tiaraju, Santo Ângelo/RS.
Fone: (0xx55) 3312-7819.

algumas ordens monásticas) na igreja de San Pietro em Lodi e em 1626 no monastério de San Benedetto em Parma. Mas foi a paz e a tranqüilidade dos monastérios que o ajudaram a completar o manuscrito dos seis primeiros livros sobre os “indivisíveis” e enviá-los aos Lordes de Bolonha. Assim, ele foi indicado à cadeira de professor em Bolonha em 1629 e ocupou essa cadeira até sua morte em 1647.

Cavalieri publicou 11 livros de matemática tratando de geometria, trigonometria, astronomia, óptica e logaritmos, mas ele é mais lembrado por seu trabalho sobre os indivisíveis, publicado como “Geometria indivisibilibus continuorum”, em 1635. Segundo BOYER(1999, p. 226):

> O argumento em que se baseia o livro é essencialmente sugerido por Oresme, Kepler e Galileu – que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos.(...) Esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em ***O Método***, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos.

O princípio de Cavalieri foi aplicado por ele e por seus contemporâneos a inúmeros problemas relacionados à quadratura de curvas e superfícies, à determinação de volumes e à posição de centros de massa. Ele serviu ao mesmo propósito do método da exaustão usado pelos gregos, mas a notação dos indivisíveis era mais concisa e conveniente.

O trabalho de Cavalieri foi um importante passo para o desenvolvimento do cálculo, levado adiante no século 17 por outros matemáticos como Newton e Leibniz.

UMA NOÇÃO DE VOLUME:

LIMA et al (1999, p. 251) nos dá a seguinte noção intuitiva de volume: “(...) ***o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa “quantidade de espaço” através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de volume***.”

Geralmente toma-se como unidade de volume um cubo cuja aresta tenha uma unidade de comprimento. Assim, o cubo de aresta um tem volume um, por convenção, e é chamado de cubo unitário. O volume de um sólido qualquer é o número que exprime quantas vezes este sólido contém o cubo unitário. No entanto, este sólido pode ter uma forma tão irregular que não deixe claro o número de vezes que ele contém o cubo unitário. É preciso, então, obter outros métodos para calcular o volume de sólidos. Dentre estes métodos está o Princípio de Cavalieri que utilizaremos na determinação das fórmulas para o cálculo do volume do prisma, da pirâmide, do cone, do cilindro e da esfera.

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI:

Tendo dois sólidos S_1 e S_2 apoiados sobre um plano α chamado de plano horizontal, todo plano β, paralelo à α, determina nos sólidos S_1 e S_2 as seções planas A_1 e A_2, respectivamente. Se para todos os planos β as seções planas A_1 e A_2 têm a mesma área, o Princípio de Cavalieri assegura que os sólidos S_1 e S_2 têm o mesmo volume.

APLICANDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI:

A utilização do Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de determinado sólido, requer uma comparação desse sólido com algum outro cujo volume seja conhecido.

Uma seqüência didática possível de ser aplicada em sala de aula, que utiliza esse Princípio, é apresentada por TROTTA et al (1980) e DANTE (1999).

Inicialmente, faz-se a comprovação da fórmula para o cálculo do volume do paralelepípedo retângulo (ou bloco retangular), pela decomposição deste em cubos unitários (uma unidade de volume). A fórmula para o cálculo do volume de qualquer prisma decorre da comparação desse prisma com um bloco retangular de mesma altura e cuja área da base seja equivalente a área da base do prisma. Da mesma forma se obtém a fórmula para o cálculo do volume do cilindro. Já a comprovação da fórmula para o cálculo do volume de qualquer pirâmide depende do entendimento inicial de que pirâmides cujas áreas da base são equivalentes e que possuem mesma altura, quando secionadas por planos paralelos ao plano da base, produzem seções de áreas equivalentes. Assim, pela decomposição de um prisma reto de base triangular em três tetraedros (pirâmides de base triangular) de volumes equivalentes, chega-se a comprovação de que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma de mesma altura e mesma área da base. Daí, compara-se o cone com uma pirâmide de mesma altura e área da base equivalente e mostra-se, pelo Princípio de Cavalieri, que possuem volumes equivalentes.

Tendo-se chegado às fórmulas para o cálculo do volume de cilindros e cones, pode-se iniciar a determinação da fórmula para o cálculo do volume da esfera, pelo Princípio de Cavaliere. No entanto, inicialmente é preciso tecer algumas considerações sobre a área das seções da esfera, comparando-as com a área de coroas circulares que variam conforme os planos paralelos ao plano no qual se apoia a esfera, vão secionando a mesma. É possível visualizar que o sólido cujas seções são essas coroas circulares de áreas equivalentes ás das seções da esfera, é um cilindro circular reto de altura igual ao diâmetro da esfera e de área da base igual ao círculo máximo da esfera, “escavado” por duas cavidades cônicas.

Todas estas comprovações serão discutidas detalhadamente durante a realização da oficina, na qual nos valeremos de recursos visuais através de retroprojetor e, dentro dos limites do erro experimental, verificaremos algumas das conjecturas com material concreto.

LIMA (1991, p. 89) propõe três alternativas para se justificar, em nível do Ensino Médio, as fórmulas para volumes de sólidos conhecidos: adotar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, usar o cálculo infinitesimal ou utilizar o Princípio de Cavalieri. Dentre as três ele salienta que o Princípio de Cavalieri "***permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume***". Certamente concordamos com ele.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BIOGRAPHY of Bonaventura Cavalieri. Disponível em: <http://www.verbania.alpcom.it/scuole/cavalieri/cav0e.htm>. Acesso em: 06 jun. 2001.

BONAVENTURA Cavalieri (1598-1647). Disponível em: <http//www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Cavalieri/RouseBall/RB_Cavalieri.html>.

BOYER, C. B. ***História da Matemática***. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

DANTE, L. R. ***Matemática***: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 1999. V. 2.

LIMA, E. L. ***Medida e Forma em Geometria***: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: Graftex, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. et al. ***A Matemática do Ensino Médio***. Rio de Janeiro: Solgraf, 1999. (Coleção do Professor de Matemática).

TROTTA, F.et al. ***Matemática Aplicada***: 2º grau. São Paulo: Moderna, 1980.