Construção de Curva de Hermite Via Quatérnios

Prof[aa] M.Sc. Lenira Pereira da Silva
Centro Federal de Educação Tecnológica de Sergipe
Escola Técnica Federal de Sergipe
lenirapsilva@uol.com.br
Prof[o] Dr. Lenimar Nunes de Andrade
Universidade Federal da Paraíba
Departamento de Matemática
lenimar@mat.ufpb.br

1.0 - Introdução

Animar em Computação Gráfica significa "trazer à vida". Assim, podemos dizer que a animação computacional é uma demonstração visual de uma mudança de posição (deslocamento). Tradicionalmente isto vem sendo usado nos negócios relacionados ao entretenimento, como por exemplo o movimento do Pato Donald em um desenho animado.

Este trabalho trata de uma pequena parte do mundo da animação – **animação rotacional**. Iremos limitá-lo ao estudo de um método de representação rotacional através de **Curvas Cúbicas de Hermite**, este baseado em sua maior parte, nos **quatérnios**, um tipo de número quadridimensional

2.0 - Noções Básicas

Para o entendimento desse trabalho é necessário o conhecimento dos conceitos e resultados básicos sobre:

-Produto Interno e Produto Vetorial no R^3 ;
-Transformações Lineares;
-Coordenadas Homogêneas;
-Matrizes de rotação do tipo 2x2;
-Matrizes de rotação do tipo 3x3;
-Translação;

Além disso, é preciso estudar outros métodos de rotação do espaço tridimensional, tais como:

-Ângulos de Euler; e
-Quatérnios. e alguns métodos de interpolações

2.1- Quatérnios

Denotaremos o conjunto dos quatérnios por ***H*** (em homenagem a Hamilton). Em geral, elementos dos quatérnios serão denotados pelas letras minúsculas ***p,q*** ou ***r.***

Definição : Sejam $i^2 = j^2 = k^2 = -1;\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$
Então um elemento $q \in H$ é definido como sendo um elemento da seguinte forma :

$$q \quad [w, v] \quad [w, (x,y,z)] \quad w + ix + jy + kz \quad w,x,y,z \in R;$$

onde i, j, k é a base ortonormal do R^3

2.3 - Matemática Quatérnia

Usando a definição de quatérnios encontramos os seguintes resultados :

- ***Adição :*** $q + q' = [w + w', v + v'];$
- ***Multiplicação :*** $qq' = [ww' - v.v', v \times v' + wv' + w'v];$
- ***Conjugado :*** $q^* = [w, -v]$;
- ***Norma :*** $\|q\| = \sqrt{q.q^*} = \sqrt{w^2 + v.v}$;
- ***Inverso :*** $q^{-1} = \dfrac{q^*}{\|q\|^2}.$

2.4- Quatérnios Unitários

Definição : Seja $q \in H.$ Se $\|q\| = 1,$ então q é dito um *quatérnio unitário.*

Adotaremos por H_1 como sendo o conjunto dos quatérnios unitários, os quais formam uma *hiper - esfera* unitária no espaço 4D (R^4).

Proposição : Seja $q = [w, v] \in H_1.$ Então existe $v' \in R^3$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$ tais que

$$q = [\cos\theta, v' \operatorname{sen}\theta].$$

3.0 – Outras Funções

Definição : Seja $q \in H_1,$ onde $q = [\cos\theta, v \operatorname{sen}\theta].$ A *função logarítmica* é definida por :

$$\log q = [0, \theta v].$$

Definição : Para um quatérnio da forma $q = [0, \theta v],$ $\theta \in R$ e $v \in R^3$ com $|v| = 1,$ a *função exponencial* é definida por :

$$\exp q = [\cos\theta, v \operatorname{sen}\theta].$$

Definição : Sejam $q \in H_1,$ $\alpha \in R.$ A exponenciação q^α é definida por :

$$q^\alpha = \exp(\alpha \log q)$$

4.0 - Métodos de Interpolação

4.1 - Interpolação Entre Duas Rotações

1.0 – Interpolação Linear de Euler : LinEuler;

2.0 – Interpolação Linear Matricial : LinMat;
3.0 – Interpolação Linear Quatérnia: Lerp;
4.0 – Interpolação Linear Esférica Quatérnia: Slerp.

4.1.1 - Slerp

É um método de interpolação para duas rotações de quatérnios unitários, o qual é definido da seguinte forma:

A ***curva Slerp*** forma um ***grande arco*** (***geodésica***) na esfera quatérnia unitária. Além disso, ela conecta os dois quatérnios através de ***menor caminho***.

O vetor posição da Slerp tem ***velocidade angular constante*** o qual caracteriza a curva como sendo “***otima***”.

4.2 - Interpolação Entre Uma Série de Rotações

Quando interpolamos entre uma série de rotações surgem os seguintes problemas:

1.0- A curva não é suave nos pontos de controle;
2.0- A velocidade angular não é constante; e
3.0- A velocidade não é contínua nos pontos de controle.

Uma forma de contornar estes problemas é pelo uso de uma curva adequada, e para atender à todas estas especificações, estudaremos as Curvas Cúbicas Paramétricas, dentre elas:

Curva de Hermite;
Curva de Bézier;
Curvas Splines,

E suas versões quatérnias (ou quaterniônicas).

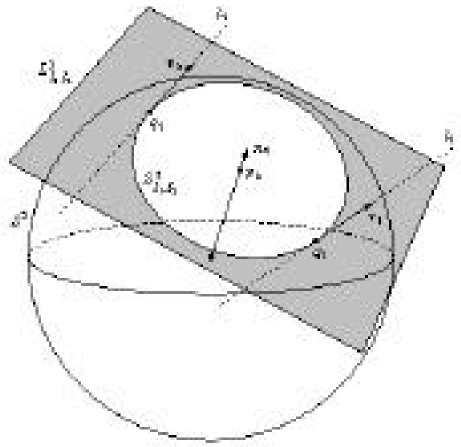
5.0 - Curva de Interpolação de Hermite em S^3

Considere o seguinte problema :

Dados dois pontos q_1 e $q_2 \in S^3$ e dois vetores v_1 e $v_2 \in S^3$ tangentes a q_1 e q_2, respectivamente, como construir uma curva de interpolação de Hermite $Q(t) \in S^3$, para $0 \le t \le 1$, a qual satisfaça as seguintes condições :

$$Q(0) = q_1; \quad Q(1) = q_2; \quad Q'(0) = v_1 \quad \text{e} \quad Q'(1) = v_2.$$

6.0 - Construção do Método



(a)

Contrução de uma 2-esfera $S^2_{t,A}$ $(= S^3 \cap L^3_{t,A})$.

Os passos básicos da construção desse método são;

1.0 - Uma 3 - esfera S^3é cortada por um hiper plano L^3para gerar uma 2 - esfera S^2;

2.0 - A 2 - esfera S^2 é cortada por um plano 2D para gerar duas curvas cirrculares; e

3.0 - As duas curvas circulares são então combinadas para juntas gerarem uma curva de interpolação de Hermite em S^3.

Assim, o problema de Interpolação de Hermite em S^3 está essencialmente reduzido ao de uma dimensão inferior, ou seja, uma 2-esfera.

7.0 - Interpolação de Hermite em S^2

Considere o seguinte problema :

Dados dois pontos q_1 *e* q_2 ë S^2 e dois vetores v_1 *e* v_2 tangentes a S^2 em q_1 *e* q_2, respectivamente, como iremos construir uma curva de Interpolação de Hermite Q(t) ë S^2 , $0 \leq t \leq 1$, a qual satisfaça as seguintes condições de limitações :

$$Q(0) = q_1; \quad Q(1) = q_2; \quad Q'(0) = v_1 \quad e \quad Q'(1) = v_2 .$$

8.0 - Combinação Circular em S^2

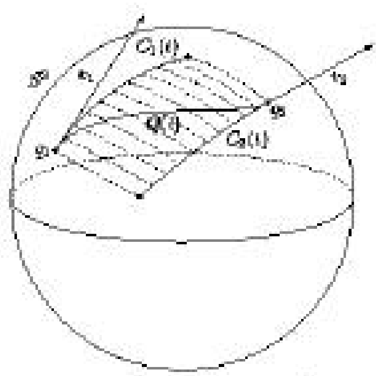
Para cada $0 \le t \le 1$, considere o menor caminho (*geodésica*) $\tilde{a}_t$ ë S^2 o qual conecta os dois pontos $C_1(t)$ *e* $C_2(t)$ ë S^2.

O ponto $Q(t)$ é definido como sendo o ponto interior de $\tilde{a}_t$ o qual subdivide o arco geodésico $\tilde{a}_t$ na proporção de $t{:}1-t$. É trivial provar a partir da definição de Q os resultados :

$$Q(0) = C_1(0) = q_1 \qquad e \qquad Q(1) = C_1(1) = q_2.$$

Contudo, não é trivial provar o fato de que :

$$Q'(0) = C_1'(0) = v_1 \qquad e \qquad Q'(1) = C_1'(1) = v_2.$$



Curva combinada em S^2

Para resolvermos este problema devemos construir uma curva circular C_i(t) ë S^2, $0 \le t \le 1$, $i = 1{,}2$, para que elas satisfaçam :

$$C_i(0) = q_i \; ; \; C_i(1) = q_i \;\text{ e }\; C_i'(0) = v_i$$

Através de uma combinação suave das duas curvas circulares C_1 e C_2, podemos construir uma curva de interpolação de Hermite em S^2 a qual satisfaz as quatro condições de limitações dadas.

9.0 - Curva de Hermite em S^3

A curva de interpolação de Hermite $Q(t)$ é construída através da combinação suave de dois grandes arcos circulares $C_1(t)$ e $C_2(t)$ com a função combinação $f(t)$, $0 \le t \le 1$.

Seja γ_t o arco circular geodésico o qual conecta os dois pontos $C_1(t)$ e $C_2(t)$, então o ponto da curva circular combinada $Q(t)$ é definido como sendo o ponto interior de γ_t o qual subdivide o arco geodésico γ_t na proporção de $f(t)1 - f(t)$. A equação da curva de $Q(t)$, $0 \le t \le 1$, é dada por :

$$Q(t) = \exp(f(t)\log(C_2(t)C_1(t)^{-1})).C_1(t) = \exp((1 - f(t))\log(C_1(t)C_2(t)^{-1})).C_2(t)$$

A função combinação $f(t)$ deve satisfazer as seguintes condições de limitações :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad e \quad f'(1) = 0$$

10.0 - Como Aplicar Velocidade Angular

Uma velocidade angular ω_i pode ser specificada em termos dos eixos de rotação (x_i, y_i, z_i) ë S^2 e do ângulo de rotação $2\theta_i$ ë $[0, 2\pi]$ por $\omega_i = 2\theta_i(x_i, y_i, z_i)$. A rotação correspondente 3D com uma velocidade angular constante , ω_i para alguma unidade de tempo, é representada pelo quatérnio unitário.

$$(\cos\theta_i, \mathrm{sen}\theta_i(x_i, y_i, z_i)) \text{ ë } S^3.$$

Seja $\hat{q}_i = (\cos\theta_i, \mathrm{sen}\theta_i(x_i, y_i, z_i))q_i$ ë S^3 então o quatérnio unitário $\hat{q}_i$ representa o resultado do sólido o qual é obtido aplicando a rotação $(\cos\theta_i, \mathrm{sen}\theta_i(x_i, y_i, z_i))$ no sólido de orientação q_i.

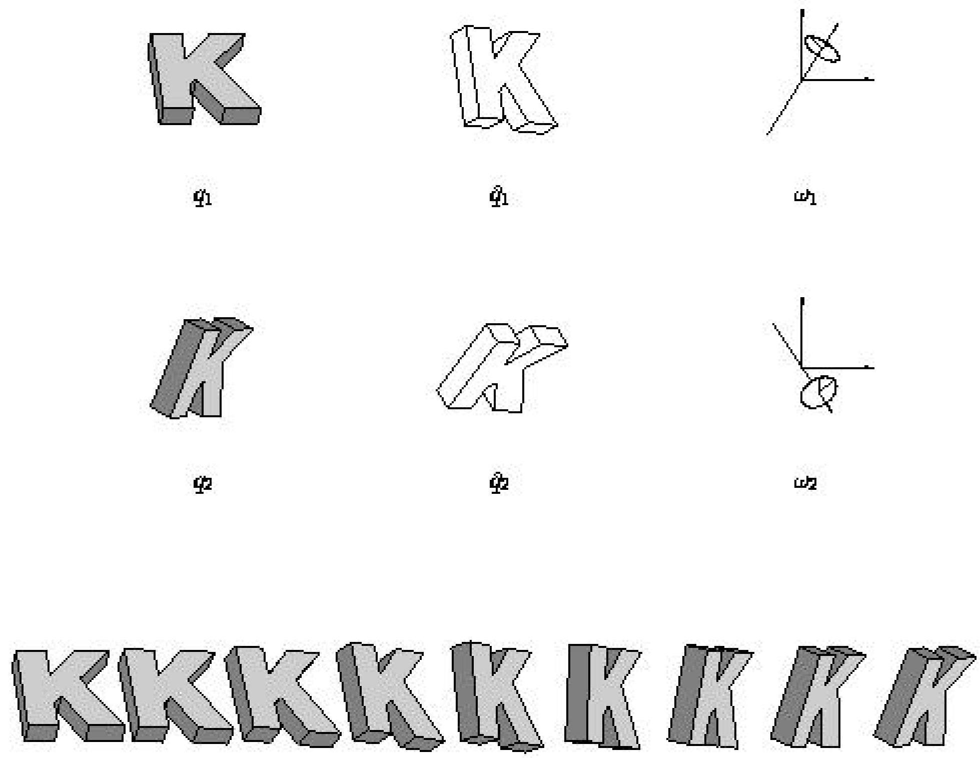
O vetor tangente correspondente v_i ë $Tq_i(S^3)$ é calculado através do seguinte resultado :

$$v_i = \frac{1}{2}\text{ù}_i . q_i \text{ ë } T_{q_i}(S^3).$$

O movimento rotacional do sólido é obtido pela mudança de sua orientação correspondente na Curva Quatérnia de Hermite $Q(t)$, $0 \le t \le 1$, construída em $SO(3)$ para que ela satisfaça as quatro condições de limitações :

$$Q(0) = q_1, \; Q(1) = q_2, \; Q'(0) = \text{ù}_1 \; e \; Q'(1) = \text{ù}_2$$

11.0 – Aplicação



Interpolação de Hermite de um sólido orientado

12.0 – Bibliografia

[1] – KIM, Myung Son, NAM, Kee-Won. **Hermite Interpolation of Solid Orientations with Circular Blending Quaternion Curves**. Capturado em 06 mai. 1999. Online. Disponível na Internet http://www.cgvr.graphics.postech.ac.kr/mskim/quaternion.html

[2] – KUIPERS, Jack B.. **Quaternions and Rotations Sequences: A Primer with Aplications to Orbit, Aerospace and Virtual Reality**. New Jersey: Princeton University Press, 1999. 372p.

[3] – SHARP, Brian. **Hermite Curves**. Capturado em ago. 2000. Online. Disponível na internet http://www.gramasutra.com/features/20000530/sharp_01.html.

[4] SHOEMAKE, Ken. **Animating Rotation with Quaternion Curves.** Computer Graphics (Proc. Of SIGGRAPH'85), vol. 19, nº 3, 1985, pp. 245-254.