ESTUDANDO VETORES COM CABRI-GÉOMÈTRE II[1]

Marilena Bittar[2]

Nesta oficina serão discutidas possibilidades do uso de Cabri-Géomètre para o ensino e aprendizagem do conceito de vetor. A oficina deverá começar com uma breve explanação de algumas dificuldades dos alunos no estudo de vetores, mais particularmente das dificuldades em diferenciar propriedades vetoriais de propriedades afins. Em seguida serão propostas atividades, a serem realizadas com Cabri-Géomètre, que favorecem o estudo destas dificuldades. Estas atividades giram em torno da noção de representante de uma classe de equivalência, da diferença entre coordenadas de um ponto e coordenadas de um vetor; da relação entre equação de uma reta e vetor diretor da reta e, finalmente da noção de combinação linear de um vetor em função de dois outros vetores dados

Introdução

Discutimos nesse texto parte de uma pesquisa realizada na França, dedicada a estudar dificuldades dos alunos na construção do conceito de vetor. A partir da análise de livros didáticos foi possível estabelecer alguns teoremas em ação (Vergnaud, 1990), que os alunos seriam suscetíveis de construir, como por exemplo: "As coordenadas de um vetor dependem de sua posição no espaço, assim se seu representante está no primeiro quadrante suas coordenadas serão positivas, no terceiro quadrante suas coordenadas serão negativas e assim por diante". Uma vez levantadas hipóteses sobre a construção do conceito de vetor, foi elaborada uma seqüência didática visando confrontar os alunos a esses falsos invariantes construídos por eles. Nessa seqüência foram propostas atividades a serem realizadas no ambiente tradicional, papel lápis, e em um ambiente informatizado constituído de Cabri-Géomètre. Esse ***software*** foi escolhido por permitir trabalhar algumas características do objeto vetor que no ambiente papel e lápis ficam mais "escondidas".

---

[1] Este trabalho é inspirado de resultados de pesquisa da tese de doutorado da autora (Bittar, 1998).

[2] Professora do Departamento de Matemática e do Mestrado em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

A noção de vetor é introduzida de forma geométrica (um segmento de reta com direção, sentido e comprimento) tendo por objetivo resolver problemas de geometria. Este tipo de apresentação geométrica contribui para que os alunos tenham dificuldades na compreensão da noção de vetor quando é preciso se distanciar de propriedades geométricas. As coordenadas de um vetor são definidas a partir de seus pontos extremidades mas independem de sua posição no plano (ou no espaço), no entanto esta apresentação, ligada de maneira bastante forte à geometria, pode levar os alunos a estabelecer relações entre o comportamento das coordenadas de um vetor e o comportamento das coordenadas de um ponto gerando a falsa concepção de que a posição ocupada por um vetor (representante de um vetor) no plano ou espaço é importante para determinar suas coordenadas.

Nós pensamos que o uso de um novo instrumento no ensino pode impor um contrato (Brousseau, 1986) diferente do habitual, o que pode ser revelador das dificuldades dos alunos e também das escolhas do professor. Este novo instrumento pode permitir trabalhar de maneira indireta alguns aspectos ligados à noção de vetor, como por exemplo a noção de representante. Assim escolhemos trabalhar com o ***software*** de geometria Cabri-Géomètre que oferece novas possibilidades de trabalho sobre vetores. Trata-se de um ***software*** dinâmico: pode-se traçar um vetor na tela do computador e em seguida locomovê-lo observando por exemplo os efeitos de uma translação sob as coordenadas de um vetor. Assim o aluno pode perceber a relação existente entre coordenadas de um vetor e sua posição no espaço. Este software oferece também aos alunos um meio de controle de suas ações: pode-se conjecturar em papel-lápis e em seguida verificar a validade de sua conjectura com o auxílio do ***software***.

A seguir apresentamos algumas atividades que fizeram parte da seqüência didática que elaboramos e aplicamos com alunos do ensino médio francês. Essas atividades serão propostas aos participantes da oficina, e após a realização das mesmas, serão discutidas estratégias possíveis de resolução, assim como objetivos e resultados obtidos com os alunos. Maiores detalhes sobre a seqüência que elaboramos são encontrados em (Bittar, 1998).

Atividade 1. Representante de um vetor

No Cabri-Géomètre, desenhe um vetor qualquer e em seguida, trace um representante desse vetor.

Essa atividade permite colocar em evidência características do vetor que são invariantes: direção, sentido e norma. A construção só será considerada correta quando, ao deslocarmos o 1º vetor traçado, o 2º vetor (o representante) mantiver essas características. Na experiência realizada alguns alunos traçaram "no olho" esse representante, ou seja, desenharam um representante que parecia igual ao primeiro, porém ao deslocar o vetor percebia-se claramente que essa estratégia não era correta.

Algumas estratégias possíveis de resolução são: **t**ranslação, paralelogramo, simetria central, transferência de medidas e compasso. É interessante observar que cada estratégia utiliza diferentes conceitos, todos resultando no traçado de um vetor de mesma direção, sentido e norma que o primeiro vetor traçado. Uma vez acabada esta atividade, constrói-se a macro construção "coordenadas de um vetor", bastando para isso designar como objetos inicias o primeiro vetor traçado e o eixo cartesiano, e o ponto que será a origem no representante. Como objeto final indica-se o representante. A partir desse momento, cada vez que se quiser um representante de um vetor basta usar essa macro construção.

Atividades sobre a relação entre coordenadas de um ponto e coordenadas de um vetor.

Neste parágrafo o objetivo é trabalhar a distinção entre propriedades geométricas e propriedades vetoriais, centrando a atenção sobre o fato de que as coordenadas de um vetor independem de sua posição no plano. Assim estas atividades foram elaboradas tendo por objetivo levar os alunos a elaborarem conjecturas e em seguida, validando-as com o ***software***. Ao verificar que uma conjectura não era verdadeira, o aluno deve justificar o resultado encontrado.

Atividade 2.

Desenhe um vetor qualquer.

Sem utilizar a macro "coordvetor", descreva o que acontece com as coordenadas deste vetor se o deslocamos com a ajuda do "ponteiro".

E com a ajuda do "giro" ?

Na experiência realizada no com alunos franceses, pudemos observar que, inicialmente, a maioria dizia que as coordenadas mudam se deslocarmos o vetor usando o “ponteiro” (que significa um movimento de translação). Essa resposta estava registrada nos cadernos, em seguida eles deviam verificar se suas respostas estavam corretas e realizaram a atividade seguinte, no Cabri-Géomètre que serviu como meio de controle e validação de conjecturas.

Atividade 3.

Com o auxílio da macro construção "coordvetor" calcule as coordenadas do vetor representado na atividade acima e em seguida tente validar suas conjecturas anteriores.

Escreva aqui suas observações.

Atividade 4.

Desenhe abaixo um representante de um vetor de coordenadas positivas e um representante de um vetor de coordenadas negativas.

Refaça estes desenhos (aproximadamente) no Cabri-Géomètre e calcule suas coordenadas utilizando "coordvetor".

O que você observa ?

Alguns alunos traçaram um vetor no 1º quadrante e disseram que para que as coordenadas sejam positivas o vetor deve estar situado no 1º quadrante. Ao verificar que suas conjecturas não estavam corretas, eles tentavam adaptá-las de modo a que se tornassem verdadeiras, reescrevendo a resposta mais ou menos do seguinte modo: ***"as coordenadas são positivas se o vetor estiver no primeiro quadrante, e a coordenada do ponto final deve ficar mais alta..."*** Ou seja, eles insistiam na necessidade do vetor estar no 1º quadrante, não colocando em discussão o fato de que a posição que um vetor ocupa no plano não afeta suas coordenadas. Desse modo a atividade seguinte visa contribuir com a compreensão do significado de coordenadas de um vetor.

Atividade 5.
É possível obter um vetor $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas positivas, com os pontos A e B pertencendo ao terceiro quadrante?
É possível obter um vetor $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas negativas, com os pontos A e B pertencendo ao terceiro quadrante?

Atividades sobre a relação entre a equação de reta e vetor diretor dessa reta

Existe uma tendência entre os alunos (e professores) a, sempre que chamados para representarem um vetor diretor de uma reta, colocarem-no "em cima" da reta, o que pode significar, que, para esse aluno, o vetor diretor de uma reta está sempre sobre a reta, não compreendendo o significado desse conceito. Desse modo, é interessante propor atividades que permitam trabalhar esse conceito. Pode-se levar o aluno a conjecturar sobre a relação entre vetor diretor de uma reta e a equação desta reta. As atividades abaixo foram elaboradas com esse intuito.

Atividade 6.
No Cabri-Géomètre, desenhe uma reta qualquer e em seguida represente um vetor diretor desta reta.
Dê as coordenadas deste representante descrevendo brevemente o processo utilizado.

Nessa atividade o aluno pode traçar o vetor sob a reta, e em seguida calcular as coordenadas desse vetor. De fato, quando realizamos a pesquisa com estudantes, essa foi a estratégia majoritária. Assim, para forçar a compreensão de que, desde que mantenha a mesma direção da reta ,o vetor diretor pode estar em qualquer lugar do plano, elaboramos a atividade a seguir, após desativarmos a macro “coordvetor”.

Atividade 7.

Desenhe uma reta qualquer e em seguida represente um vetor diretor desta reta.

Dê as coordenadas deste representante utilizando uma única vez "coordenadas de um ponto" do menu de Cabri-Géomètre.

A única estratégia possível aqui, é traçar um representante de um vetor diretor partindo da origem dos eixos coordenados e, em seguida pedir as coordenadas do ponto extremidade final desse representante. Durante a realização da pesquisa, poucos alunos conseguiram realizar essa atividade, apesar de já terem trabalhado as atividades anteriores e de, aparentemente, terem adquirido o conceito de vetor diretor de uma reta é aquele que dá a direção da reta e de vetor como um conjunto de elementos de mesma direção, sentido e norma, e que, portanto, se quisermos encontrar as coordenadas de um vetor qualquer, basta traçar um representante deste vetor, partindo da origem.

Noção de base em R^2

O objetivo desta atividade é explorar a noção de que dois vetores quaisquer não-colineares do plano, geram o plano.

Atividade 8.

No Cabri.-Géomètre desenhe representantes de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer.

Em seguida desenhe um terceiro vetor $\vec{w}$.

Obtenha uma configuração onde $\vec{w}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Movimente $\vec{w}$ e verifique o que acontece com a combinação anteriormente obtida.

Para a realização dessa atividade, pode-se traçar 3 vetores quaisquer no plano, e. em seguida, traçar representantes desses vetores partindo de uma mesma origem usando a macro construção “coordvetor”. Finalmente, deve-se fazer a projeção de $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, obtendo-se uma configuração onde $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Conclusão...

O caráter dinâmico de Cabri-Géomètre pode fornecer aos estudantes um meio de controle e validação de suas conjecturas, meio este inexistente no ambiente papel e lápis quando trabalhamos esses mesmos conceitos sobre vetores. No caso particular de nossa pesquisa, foi possível detectar de forma mais precisa algumas dificuldades dos alunos e em alguns casos podemos dizer que houve evolução do conceito de vetor. Não significa que conseguimos desestabilizar os teoremas em ação falsos presentes nas ações dos alunos, o que não invalida o uso de Cabri ou a forma de trabalho. A conclusão é que é preciso elaborar novas atividades que levem em consideração aspectos que não foram enfocados o bastante nessa seqüência didática, tais como a importância de um trabalho que leve em consideração simultaneamente os dois aspectos de uma noção : objeto e instrumento.

Bibliografia

BITTAR, M. ***Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Une analyse des manuels en termes d'outil et d'objet. Étude de difficultés d'élèves dans deux environnements: Cabri-Géomètre et papier-crayon.*** Tese de doutorado de Universidade, Universidade Joseph Fourier, Grenoble 1, 1998.

BROUSSEAU, G. ***Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques***, Recherches en didactique des mathématiques, 1986, vol. 7, nº 2,pp. 33-115.

CHEVALLARD, Y. ***La transposition didactique***, Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

DOUADY, R. ***Jeux de cadres et dialectique outil-objet***, Recherches en Didactique de Mathématiques, 1986, vol. 7, n° 2, pp. 5-31.

VERGNAUD, G. ***La théorie de champs conceptuels***. Recherches en Didactique de Mathématiques, 1990, vol 10, n°2.3, pp. 133-170.