

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONHECIMENTOS DO ALUNO X CONHECIMENTOS DO PROFESSOR

AS ESTRUTURAS ADITIVAS E A SALA DE AULA

Estudos da Educação Matemática vêm mostrando que os alunos das séries iniciais apresentam dificuldades importantes quando da resolução de problemas aditivos, em particular aqueles de estruturas mais complexas e menos usuais em sala de aula e nos livros didáticos (Vergnaud, 1986; Borba, Pessoa e Santos, 1997).

De acordo com Vergnaud (1991), "existem vários tipos de relações aditivas e, em consequência, vários tipos de adições e subtrações" (p. 161). Segundo este autor, as relações aditivas podem encadear-se de diversas maneiras e oferecer uma grande variedade de estruturas de problemas. Para ele, uma mesma expressão numérica pode ser indicada para a resolução de problemas de diferentes estruturas. Neste sentido, diferencia *cálculos numéricos* de *cálculos relacionais*, o primeiro ocorrendo pela mobilização e resolução de um algoritmo, sem haver necessariamente conexão a aspectos semânticos e estruturais de uma situação-problema, e por isso não havendo necessariamente relações implícitas no cálculo; o segundo envolve a consideração da atividade matemática no contexto de uma situação-problema, neste caso, uma mesma expressão proposta pode trazer relações de diferentes naturezas, dependendo da estrutura deste problema.

Uma mesma proposta de cálculo numérico, inserida em uma situação-problema, poderá envolver diferentes cálculos relacionais, dependendo da estrutura proposta no

¹ crispessoa@hotmail.com

problema. Pesquisadores em educação matemática classificaram os problemas de adição e subtração em várias estruturas diferenciadas (Carpenter e Moser,1982; e Vergnaud,1986).

Vergnaud(1986;1991) considera o campo conceitual das estruturas aditivas formado por seis categorias básicas de problemas de adição e subtração:

Categoria1 - *composição de duas medidas* – Duas medidas que se compõem para dar lugar a uma terceira medida. Não ocorre aumento nem diminuição das quantidades envolvidas, apenas uma combinação entre elas, ou seja, é um problema considerado estático.

Categoria2 - *uma transformação ligando duas medidas* – Uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar a uma outra medida. Ocorre uma transformação no estado inicial de uma quantidade, modificando seu estado final.

Categoria3 - *um relacionamento estático ligando duas medidas* – Uma relação une duas medidas. Compara duas quantidades distintas, em uma situação.

Categoria4 - *composição de duas transformações* – Duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação, ou seja, a partir de duas transformações dadas (T1 e T2), determina-se uma terceira (T3) composição das anteriores.

Categoria5 - *uma transformação ligando dois relacionamentos* – Uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para dar lugar a um outro estado relativo.

Categoria6 - *composição de dois relacionamentos estáticos* – **Dois estados relativos** (relações) se compõem para dar lugar a um estado relativo. Assemelha-se à categoria 1, diferenciando-se da mesma por envolver números inteiros relativos.

Outros pesquisadores, como Carpenter e Moser(1982), de forma semelhante, também classificaram os problemas de adição e subtração. Neste caso, eles discriminam quatro categorias básicas de problemas (*Combinação, Mudança, Comparação e Igualização*):

1-Problemas que envolvem combinação: estes problemas descrevem um relacionamento estático entre duas quantidades e suas partes.

2-Problemas que envolvem mudança: este tipo de problema envolve um relacionamento dinâmico, pois a partir de uma quantidade inicial e através de uma ação direta ou indireta causa-se um aumento ou diminuição na mesma.

3-Problemas que envolvem igualização: este tipo de problema envolve a mesma espécie de ação encontrada nos problemas de mudança, mas existe, também, uma comparação envolvida. Problemas de igualização envolvem a mudança de uma quantidade para que as duas venham a ter a mesma quantidade ou o mesmo número de atributos.

4-Problemas que envolvem comparação: envolve a comparação entre duas quantidades. Neste tipo de problema a diferença entre duas quantidades precisa ser encontrada. Ao contrário dos problemas de mudança e de igualização, que envolvem uma dinâmica, estes são estáticos.

Estes quatro tipos básicos de problemas apresentam variações dependendo do valor desconhecido na situação-problema, totalizando 16 estruturas diferenciadas.

Vergnaud(1991) afirma que "estas distinções não se fazem habitualmente no ensino elementar, tampouco no ensino secundário"(p.164). Alguns estudos (Borba e Santos,1997; Borba, Pessoa e Santos,1997) apresentam como resultado as dificuldades dos alunos do ensino fundamental na resolução de alguns destes tipos de problemas de estruturas aditivas e levantam a hipótese de que estas dificuldades podem ser causadas pela falta de variedade de problemas ensinados na escola.

Uma pesquisa realizada com 60 volumes de livros didáticos de matemática de 1ª a 4ª série, editados no Brasil (Borba, Pessoa e Santos,1997), mostra que os livros não contemplam os diferentes tipos de problemas, detendo-se nos de estruturas mais simples, dificultando assim que os alunos resolvam problemas aditivos sob várias perspectivas, que realizem diferentes estruturações mentais e habituando-os a só resolver os problemas de estruturas mais elementares, não oferecendo-lhes a oportunidade de trabalhar com seu conhecimento potencial. Desta forma, o material didático usual não auxilia o aluno a pensar a adição e subtração sob estruturas mais complexas, que exigem um raciocínio diferenciado. Isso ajuda a entender a detecção

de lacunas em termos de desenvolvimento dos alunos no âmbito do campo conceitual das estruturas aditivas.

Diante disto, surgem várias questões pertinentes: os alunos apresentam dificuldade em compreender as relações implícitas nos problemas aditivos, os livros didáticos não contemplam estes tipos de problemas, Como os professores estão compreendendo os aspectos conceituais envolvidos nesses problemas? Será que a dificuldade de compreensão também passa por este segmento? Como está se dando a transposição didática neste campo conceitual?

OBJETIVOS E OPERACIONALIZAÇÃO DA PESQUISA

Este estudo objetivou analisar a compreensão dos alunos do último ano de um curso de formação de professores sobre a resolução dos problemas aditivos, comparando-se com a compreensão dos alunos da quarta série do Ensino Fundamental.

Foi realizada uma coleta com 73 alunos de um curso de formação de professores e 73 alunos de quarta série, todos de escola pública, utilizando os diferentes tipos de problemas de estruturas aditivas propostos por Carpenter e Moser(1982) e por Vergnaud(1986;1991).

Foram elaborados 19 problemas de estruturas diferenciadas: problemas do tipo *mudança* e suas 6 subdivisões; *comparação* e suas 6 subdivisões; *combinação* e suas 2 subdivisões; e *igualização* e suas 2 subdivisões. À exceção dos problemas do tipo *igualização*, todos os outros tipos acima citados têm equivalência com os problemas propostos por Vergnaud. A estes 16 problemas, foram acrescentados mais três propostos por este autor e que não têm equivalência com a classificação de Carpenter e Moser. São problemas do tipo *composição de duas transformações*; *transformação ligando duas relações*; e *composição de duas transformações estáticas*. Estas três últimas classes de problemas, tratam, implicitamente, de números relativos.

SÍNTESE DOS RESULTADOS

Nas análises dos resultados, observamos que existem erros que podem ser diferenciados em três naturezas: *erros de cálculo relacional*, *erros de cálculo numérico* e *erros de inversão*.

Nas dificuldades em 'cálculo relacional', os sujeitos não demonstram compreender as relações implícitas na situação-problema, pois, uma mesma operação proposta pode trazer relações de diferentes naturezas, dependendo da estrutura deste problema. Muitas vezes o sujeito deixa-se 'enganar' pelas 'falsas pistas' semânticas que o problema oferece.

Na análise dos erros de cálculos relacionais, encontrou-se 54,8% dos futuros professores que erraram o problema do tipo *comparação- quantidade maior desconhecida – termo a menos* (Ana Paula tem 324 canetas. Ela tem 111 canetas a menos que Maria, sua prima. Quantas canetas Maria tem?). Como foi afirmado acima, a dificuldade pode ser gerada pela "pista" oferecida pelo problema, pois utiliza-se a expressão 'a menos' e na realidade, uma adição resolveria o problema. Mais da metade dos futuros professores apresentaram dificuldade em 'encontrar' a operação correta para o problema, apenas 13,7% dos alunos apresentaram erro de cálculo relacional.

No problema de *mudança – quantidade inicial desconhecida – situação de decréscimo* (Carla tinha alguns selos. Ela deu 234 para sua prima. Carla ficou com 567 selos. Quantos ela tinha antes?), 30% dos professores apresentaram erro de cálculo relacional. Este problema fala em "dar", oferecendo a 'pista' da subtração, mas na verdade a operação necessária para se chegar ao resultado correto é uma adição, levando grande parte dos sujeitos ao erro. Foi apresentado 1,3% de erro de cálculo numérico e 2,7% de erro de inversão.

Nos erros de 'cálculo numérico', os sujeitos apresentam dificuldades na resolução do próprio algoritmo. Uma mesma proposta de cálculo numérico, inserida em uma situação-problema, poderá envolver diferentes cálculos relacionais, dependendo

da estrutura, levando o sujeito a diferentes estruturas mentais para que se estabeleça as relações implícitas a partir dos problemas propostos.

Os erros de cálculo numérico são espantosamente grandes para algoritmos do tipo aditivo. Muitos dos sujeitos resolvem a subtração tirando sempre do maior numeral, independente da posição que este numeral ocupa, pertencendo ao minuendo ou ao subtraendo.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 213 \\ -169 \\ \hline 156 \end{array}$$

O sujeito faz: 9 menos 3, dá 6; 6 menos 1, dá 5 e 2 menos 1 dá 1.

A quantidade de erros numéricos nos problemas de adição é relativamente menor que nos problemas de subtração. Nos algoritmos que necessitam de reserva, a quantidade de erros é bastante grande.

Nos erros de inversão, o sujeito arma o algoritmo da subtração, colocando os números na mesma ordem em que eles aparecem no problema, ou seja, se no problema aparece primeiro o número de menor quantidade (que no caso específico destes problemas com números naturais deveria ser o subtraendo), este transforma-se no minuendo e o de maior quantidade, que aparece em segundo lugar no enunciado do problema, torna-se o subtraendo. Por exemplo, o problema "Joana tinha algumas revistas. Seu tio chegou de viagem e lhe trouxe de presente para a sua coleção 248 revistas. Joana tem agora 785 revistas. Quantas ela tinha antes?"

Neste problema, 8,2% dos professores resolvem da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 248 \\ -785 \\ \hline 543 \end{array}$$

Neste exemplo, os sujeitos fazem 8 menos 5, 3; 8 menos 4, 4; 7 menos 2, 5, sem se preocuparem com as regras mais elementares da subtração.

Os percentuais deste tipo de erro são relativamente pequenos em relação aos outros tipos: 8,2% 1,3% 2,7% e 5,4%. Mas precisamos refletir que daqui a alguns meses estes sujeitos estarão ensinando aos alunos de nossas escolas e não

conseguem perceber a relação minuendo/subtraendo na armação do algoritmo da subtração e colocam a resposta como se fosse válida, sem nem mesmo uma pequena reflexão de que não é possível, no campo numérico dos naturais, tirar uma quantidade maior de uma menor. Não é possível tirar 476 de 345 e obter como resultado 869 (sujeito 25) e se dar por satisfeito.

Vejamos, a seguir, os percentuais de erros dos futuros professores e dos alunos em cada um dos problemas propostos².

TESTE, CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS E COMPARAÇÃO DO PERCENTUAL DE ERROS DOS PROFESSORES E DOS ALUNOS DA 4ª SÉRIE

Joana tinha algumas revistas. Seu tio chegou de viagem e lhe trouxe de presente para sua coleção 248 revistas. Joana tem agora 785 revistas. Quantas ela tinha antes?

Mudança – série inicial desconhecida – situação de acréscimo

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	5,4	0,0
Relacional	2,7	27,5
Inversão	8,2	17,2

Patrícia e Gabriel colecionam chaveiros. Eles têm juntos 205 chaveiros. Gabriel tem 181. Quantos chaveiros Patrícia tem?

Combinação subsérie desconhecida

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	8,2	0,0
Relacional	4,1	10,3
Inversão	0,0	0,0

² Cabe ressaltar que os problemas propostos ao grupo de alunos são os mesmos do grupo de professores, a diferença consistindo nos números propostos. Para os alunos, todos os valores numéricos são para operações sem reserva, com o grupo de adultos foram utilizados números que exigiam reserva nas operações. Por isso há um percentual baixo de erros numéricos com a 4ª série. Os resultados com alunos de 4ª série são do estudo piloto da pesquisa de mestrado (Pessoa, 1998) a qual teve como objetivo verificar especificamente as dificuldades dos alunos em cálculos relacionais e não as de cálculos numéricos, por esta razão, trabalhamos com operações sem reserva.

Mariana e Túlio encontraram conchinhas na praia. Mariana achou 213 e Túlio achou 169. Quantas conchinhas Mariana achou a mais que Túlio?

Comparação – diferença desconhecida – termo a mais

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	13,6	0,0
Relacional	2,7	75,8
Inversão	0,0	0,0

Para a festa de aniversário da minha irmã, eu fiz 512 coxinhas. Fui na padaria e comprei outros salgados. A festa teve 1019 salgadinhos. Quantos salgados eu comprei na padaria?

Mudança – transformação desconhecida – situação de acréscimo

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	2,7	3,4
Relacional	4,1	72,4
Inversão	1,3	10,3

Vera e Solange são feirantes. Vera vendeu 333 laranjas, ela vendeu 198 a mais que Solange. Quantas laranjas Solange vendeu?

Comparação – quantidade menor desconhecida – termo a mais

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	15	6,8
Relacional	9,5	13,7
Inversão	0,0	0,0

Paula e Igor têm uma criação de coelhos. Paula tem 617 e Igor tem 233 a menos que Paula. Quantos coelhos Igor tem?

Comparação – quantidade menor desconhecida – termo a menos

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	28,7	0,0

Relacional	1,3	55,1
Inversão	0,0	0,0

O pai de Rômulo comprou 415 litros de refrigerante para o seu aniversário, sua mãe não sabia e também comprou os refrigerantes. Mas ela comprou 356 litros. Quantos litros a mãe de Rômulo comprou a menos que o pai?

Comparação – diferença desconhecida – termo a menos

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	21,9	3,4
Relacional	1,3	82,7
Inversão	0,0	0,0

Adalberto tem 938 quilos de batata em sua fazenda e Roberto tem 815. Quantos quilos de batata Adalberto precisa vender para ficar com a mesma quantidade de Roberto?

Igualização – decréscimo na quantidade maior

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	2,7	0,0
Relacional	0,0	3,4
Inversão	0,0	0,0

Mariano e Marcelo marcam a quantidade de gols que seus times fazem durante o ano. O time de Mariano já fez até este mês 794 gols e o time de Marcelo fez 532 gols. Quantos gols o time de Marcelo precisa fazer para empatar com o time de Mariano?

Igualização – acréscimo na quantidade menor

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	6,8	6,8
Relacional	4,1	13,7
Inversão	0,0	0,0

João tinha 637 bolas de gude. Jogando com seus colegas perdeu 313 bolas. Quantas João tem agora?

Mudança – resultado desconhecido – situação de decréscimo

	Níveis de escolaridade	
--	------------------------	--

	(% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	4,1	3,4
Relacional	1,3	13,7
Inversão	0,0	0,0

Carla tinha alguns selos. Ela deu 234 para sua prima. Carla ficou com 567 selos. Quantos ela tinha antes?

Mudança – série inicial desconhecida – situação de decréscimo

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	1,3	3,4
Relacional	30	72,4
Inversão	2,7	3,4

Janaína tinha 494 lápis de cor. Na escola ela deu alguns para suas amigas. Janaína agora tem 235. Quantos lápis ela deu?

Mudança – transformação desconhecida – situação de decréscimo

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	17,8	13,7
Relacional	5,4	13,7
Inversão	0,0	0,0

Ana Paula tem 324 canetas. Ela tem 111 canetas a menos que Maria, sua prima. Quantas canetas Maria tem?

Comparação – quantidade maior desconhecida – termo a menos

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4 ^a série
Numérico	0,0	0,0
Relacional	54,8	13,7
Inversão	0,0	0,0

Marília tinha 718 papéis de carta. Sua mãe lhe deu 512 papéis. Quantos papéis de carta Marília tem agora?

Mudança – resultado desconhecido – situação de acréscimo

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	1,3	0,0
Relacional	9,5	48,2
Inversão	0,0	0,0

Nilda tem 697 livros e Cláudio tem 383 livros a mais que ela. Quantos livros Cláudio tem?

Comparação – quantidade maior desconhecida – termo a mais

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	2,7	3,4
Relacional	30	17,2
Inversão	0,0	0,0

Leonardo e Marcelo são irmãos e fazem aniversário juntos. Leonardo ganhou de seu pai R\$ 658,00 e Marcelo ganhou R\$ 514,00. Quantos reais eles ganharam ao todo?

Combinação – todo desconhecido

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	2,7	3,4
Relacional	6,8	17,2
Inversão	0,0	0,0

Joana ganhou R\$ 345,00, foi a uma loja e gastou R\$ 476,00. Como está a situação de Joana agora?

Composição de duas transformações

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	4,1	0,0
Relacional	5,4	37,9
Inversão	5,4	10,3

Paulo estava devendo 479 figurinhas a João. Pagou 262. Quantas Paulo ainda deve a João?

Transformação entre duas relações estáticas

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	20,5	6,8
Relacional	4,1	44,8
Inversão	0,0	0,0

Isabele estava devendo R\$ 729,00 a Laís, mas Laís agora lhe deve R\$ 387,00. Então, na realidade, quanto Isabele está devendo a Laís?

Composição de duas relações estáticas

	Níveis de escolaridade (% de erros)	
Tipos de erro	Professores	4ª série
Numérico	8,2	3,4
Relacional	5,4	27,5
Inversão	0,0	0,0

CONCLUSÕES

Nos cálculos relacionais, os sujeitos apresentam dificuldades em compreender as relações implícitas na situação-problema, deixando-se, muitas vezes, enganar pelas pistas semânticas que o problema oferece.

Os erros dos professores e dos alunos da 4ª série não se diferenciam muito, no que diz respeito aos cálculos relacionais, numéricos e de inversão. Como podemos observar, mesmo no último ano do ensino médio, às vésperas de se tornarem professores, estes alunos apresentam um percentual alto de erros, demonstrando assim, dificuldades não só na compreensão dos problemas, como também na resolução de algoritmos de subtração e dificuldade na compreensão das propriedades mais elementares desta operação.

Ao evidenciar empiricamente a proximidade de alunos e professores, em termos de dificuldades de interpretação e compreensão dos problemas, questiona-se: como estes professores poderão trabalhar com os alunos, ajudando-lhes a construir um

conhecimento que nem eles próprios parecem ter conseguido construir em bases sólidas?

BIBLIOGRAFIA

Borba, R.; Pessoa, C. & Santos, R. O livro didático de matemática de 1ª a 4ª série e o ensino-aprendizagem das estruturas aditivas, *Anais do XXVI Congresso Interamericano de Psicologia*, PUC - São Paulo, 1997.

Borba, R. & Santos, R. *Analizando a resolução de problemas de estruturas aditivas por crianças de 3ª série*, Anais da 49ª Reunião anual da SBPC-MG, 1997.

Carpenter, T. & Moser, J. The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skill. In Carpenter; Moser and Romberg, (Orgs.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale: Erlbaum, 1982.

Vergnaud, G. Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didático das Matemáticas. Um Exemplo: As Estruturas Aditivas. In: *Análise Psicológico* 1(V). Págs. 75-90. 1986.

Vergnaud, G. Los Problemas de Tipo Aditivo. *El Nino, las Matemáticas y la Realidad – Problemas de la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria*, Editorial Trillas, México, 1991.