

REPRESENTAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS NO PLANO NO ENSINO FUNDAMENTAL

CÁRMEN LÚCIA BRANCAGLION PASSOS
PRAPEM/FE//UNICAMP - UNIFRAN

O presente estudo refere-se a uma parte da pesquisa de Doutorado¹ que aborda as representações, as interpretações e a prática pedagógica no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental.

O trabalho desenvolvido em cursos de formação de educadores para as séries iniciais do Ensino Fundamental (anteriormente, Ensino Primário ou de 1º Grau) mostrou, ao longo de uma dezena de anos, as dificuldades dos futuros professores em relação à Geometria. Na prática de sala de aula foi possível perceber que esses futuros professores apresentavam um conhecimento restrito ou nulo à respeito do assunto e que provavelmente a Geometria não havia sido focalizada em seus respectivos cursos no Ensino Fundamental, na época, de 1º Grau.

Durante toda sua vida, os alunos interagirão com objetos concretos em um espaço físico. Tanto o real como as interações podem ser matematizados, isto é, podem ser representados esquematicamente como entes geométricos. O espaço físico não é a única fonte de matematização, mas sua importância deve ser ressaltada, desde que os alunos do Ensino Fundamental elaboram o espaço lógico-matemático a partir das ações que efetuam sobre os objetos concretos em seu espaço real.

Em um cenário de controvérsias a respeito do ensino da Geometria, onde muitos desafios emergem das situações práticas na escola, buscou-se identificar, em episódios de ensino na sala de aula, noções geométricas manifestadas pelos alunos e também investigar a maneira como as professoras agem perante essas manifestações. A questão a investigar que norteou os trabalhos foi: Como os alunos representam e interpretam representações geométricas e como o professor percebe e explora essas representações?

¹ *Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A Geometria na Sala de Aula*. Campinas: UNICAMP, 2000.

A pesquisa foi desenvolvida como um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo, focalizando resolução de problemas geométricos. O universo de investigação foi composto por alunos e professoras de cinco classes (uma particular e quatro públicas) de 4ª série (9-10 anos) do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo.

No episódio de ensino aqui apresentado, foi entregue para cada um dos alunos várias caixas cuja forma geométrica era de um cubo ou de um prisma reto de base retangular, solicitando que cada aluno desenhasse a sua caixa. O objetivo dessa atividade foi o de verificar como os alunos representavam no plano um objeto tridimensional, isto é, observar qual conhecimento eles apresentavam sobre esse tipo de representação, e conseqüentemente sobre o sólido geométrico.

Como mostram pesquisas de Piaget e Inhelder (1977), a representação do espaço das crianças não é uma simples “leitura” rápida e perceptível do seu ambiente, mas é construída a partir de sua manipulação e interação ativa com o meio.

Segundo Piaget, no processo de construção do espaço, logo que a criança adquire a capacidade de representar as relações espaciais para ela mesma, ela pode executar determinadas ações que implicam a necessidade de que ela considere as relações espaciais como não diretamente observáveis.

O senso comum pode levar o professor a imaginar que a visão dos objetos e a manipulação dos mesmos são recursos suficientes para que o aluno aprenda Geometria.

Pais (1996) distingue quatro elementos fundamentais, no processo de representação plana do espaço tridimensional, que intervêm fortemente na aprendizagem da Geometria, exercendo que cada um deles uma influência considerável nessa representação, ou seja: objeto, desenho, imagem mental e conceito. Esses quatro elementos não podem ser considerados desvinculados um dos outros; além disso, o autor destaca o papel que tanto a intuição como a experiência exercem no processo de elaboração conceitual.

A análise das situações mostrou que representar um objeto tridimensional em uma superfície plana, não se constitui em uma tarefa simples, pois o conceito visual de qualquer objeto que possua volume somente pode ser representado em um meio tridimensional. Dessa forma, quando se

desenha um objeto sobre uma superfície plana, o que se obtém é uma “tradução” deste objeto, ou seja, a sua representação por meios bidimensionais de alguns fatores estruturais, essenciais ou particulares, do conceito visual. Segundo Reggini, (1985), as figuras obtidas podem parecer planas, como os desenhos de uma criança, ou ter profundidade, como os quadros com linhas de fuga, mas em ambos os casos, a integridade do conceito visual não pode se reproduzir, totalmente, no plano.

As investigações a respeito das representações de objetos tridimensionais têm mostrado que as crianças utilizam vários tipos de representações quando são solicitadas a fazer representações de poliedros. Além disso, as pesquisas mostram que fatores culturais afetam essa representação e também a interpretação de suas representações bidimensionais (Bishop, 1983). Segundo Soller (1991), a transferência de informação da Geometria Plana para a Espacial, e vice-versa, pode causar diversas dificuldades: para interpretar desenhos que representam formas tridimensionais; para representar em desenho as linhas paralelas e perpendiculares do modelo, revelando no desenho a profundidade; para orientar corretamente as vistas laterais do objeto, entre outras.

Nesta investigação foi possível verificar que muitos dos alunos apresentaram dificuldades na representação de objetos tridimensionais, principalmente quando tentavam desenhar em perspectiva paralela. Segundo Freudenthal (1983), *“... ver, interpretar e produzir desenhos em perspectiva não é uma habilidade simples, mas sim algo que tem que ser aprendido. De nenhuma maneira posso dizer como é a imagem mental de um cubo (na realidade depende de várias circunstâncias). Certamente implica muitas outras características do que as que uma pessoa vê ou se espera que veja. Implica em tudo o que se necessita para reconhecer, fazer, produzir e reproduzir cubos. Inclui faces, ainda que não se podem ver mais que três de uma vez e pode não se estar seguro do número real, quatro, seis, ou oito...”* (Freudenthal, 1983, citado por Soller, G. G., 1991, p.179).

As palavras de Freudenthal conduzem a reflexões a respeito de como as representações geométricas são tratadas na sala de aula, onde, muitas vezes, se reproduzem desenhos sem considerar o que estes estão representando.

A maioria dos alunos deste estudo, ao representar o cubo mostrou uma certa familiaridade com o objeto, achando fácil desenhá-lo a partir de dois quadrados, ligados pelos segmentos que representam as arestas. Essa facilidade em representar um cubo no plano fez com que outros alunos, ao sentirem dificuldade em representar o prisma de base retangular, por exemplo, desistissem desse desafio, optando pela representação do cubo.

Entretanto, vários outros fizeram um tipo de representação para o cubo (Figura 1), que poderia ser caracterizado como pertencente ao chamado *diagrama de Schlegel*, conforme explicitado por Soller (1991).

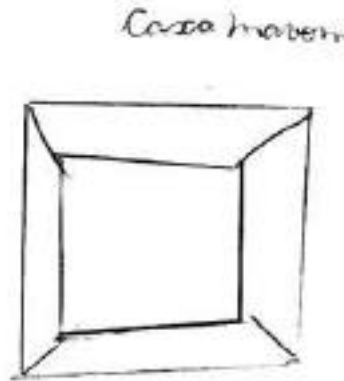


Figura 1 - Representação do cubo.

Segundo Soller (1991), esse tipo de representação ocorre quando: “... olha-se o esqueleto de um poliedro, situando o ponto de vista muito próximo ao centro de uma das faces, dá a impressão de que esta face envolve as demais. Se se projeta sobre um plano o conjunto de arestas, aparece um polígono maior – que é a face que se fixa – que contém o restante das faces” (p.186). O referido autor afirma que mentalmente pode-se obter essa forma do seguinte modo: coloca-se o sólido apoiado contra uma parede, imaginando que se “retira” a face que se tem à frente e que as outras faces vão se “esticando” em direção da parede, até que fiquem planas contra ela. Finalmente, retorna-se com a face que havia sido tirada, como pode ser observado pela seqüência de figuras ilustradas abaixo:

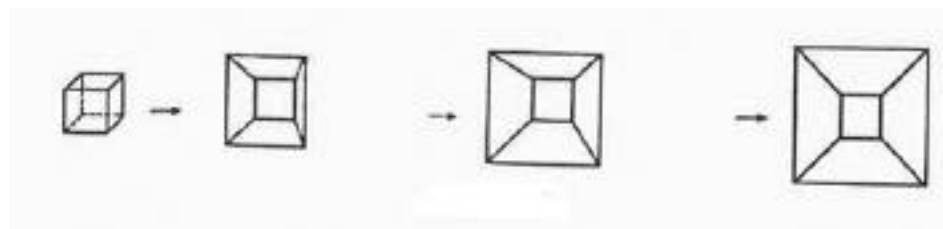


Figura 2 - Representação do Diagrama de Schlegel (cubo).

Um dos alunos precisou de três momentos diferentes para a representação do paralelepípedo. Na primeira vez, desenhou apenas um quadrado, Figura 3-a, e perguntou à professora se seu desenho estava correto. A professora perguntou: “*não está faltando nada?*” Ele observou como um colega estava procedendo e pediu ajuda no traçado. Seu colega fez o desenho em perspectiva para ele. Observando como havia ficado o desenho, ele completou-o com mais duas faces, as quais numerou como sendo 4 e 5, Figura 3-b. Parecendo não concordar com o que estava vendo, pediu outra folha de papel para a pesquisadora e fez o terceiro desenho, Figura 3-c, representando o paralelepípedo como sendo uma das figuras do diagrama de Schlegel, numerando cada uma das faces, indicando a face oculta com o número 6 por uma seta.

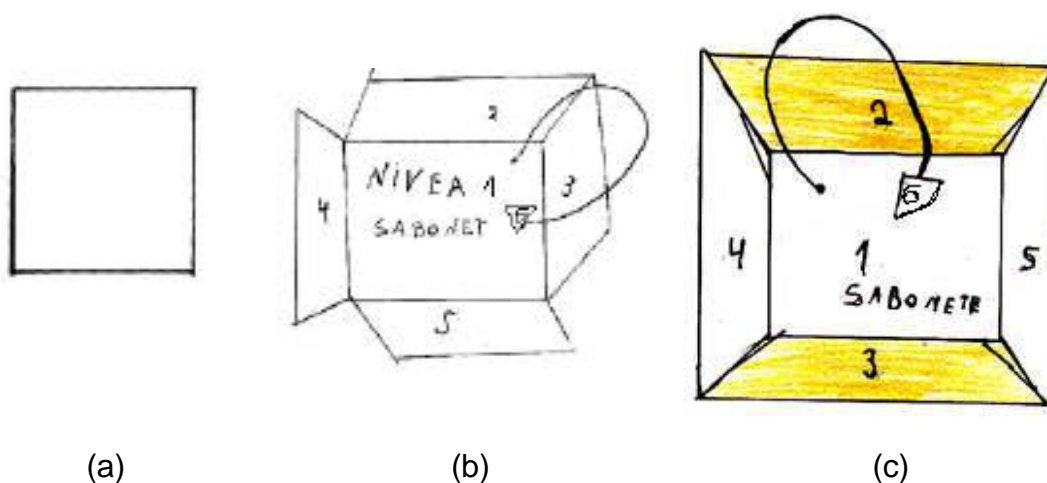


Figura 3 – Representação do paralelepípedo por um dos sujeitos.

Soller (1991) explica que os diagramas de Schlegel permitem ver de uma só vez todas as faces, vértices e arestas de um sólido, assim como o número de faces que concorrem em cada vértice. Por outro lado, afirma o autor, o diagrama do cubo também pode ser associado a qualquer prisma cuja

base seja um quadrilátero ou a qualquer pirâmide truncada, cuja base seja um quadrilátero, porque estes poliedros possuem o mesmo número de faces, vértices e arestas e em seus vértices concorrem três quadriláteros, e nessa representação não se valoriza a métrica. Quanto às faces, o que importa é o número de lados dos polígonos correspondentes, mas não a forma deles. Nesse sentido, os sólidos que são topologicamente equivalentes têm o mesmo diagrama de Schlegel. Soller (1991) ressalta que esse tipo de diagrama pode ajudar a solucionar muitos problemas clássicos sobre coloração de faces de poliedros.

Gutiérrez (1996) ressalta que uma pessoa, ao ler uma representação plana de um sólido, tem que recuperar tanta informação perdida quanto for possível. Nesse sentido, citando Parzys (1988), afirma que essa recuperação é chamada de “*reconstituição de significado*”, ressaltando a importância de haver uma certa “conivência” entre o autor da representação e o seu leitor, sendo que esta é possível somente a partir de uma cultura geométrica comum.

Tal conivência refere-se, segundo Gutiérrez (1996), em primeiro lugar à natureza do objeto representado, e, em segundo lugar, ao tipo de representação que é usada, e nesse caso, tanto o autor, quanto o leitor da representação teriam que concordar em usar o mesmo tipo de representação plana. Em outras palavras, a Figura 4-a, ilustrada abaixo, poderia ser interpretada de diferentes maneiras: pode-se pensar no quadrado de fora como a face frontal de um cubo (Figura 4-b), vista de muito perto; ou o quadrado interno como a face frontal de uma pirâmide truncada (Figura 4-c); ou ainda, uma estrutura plana (Figura 4-d).

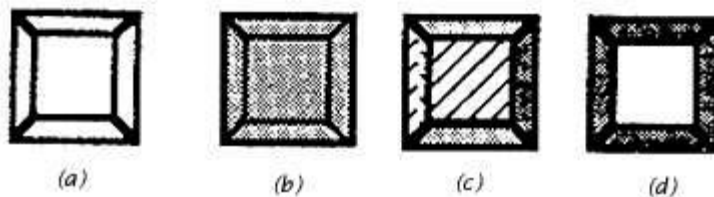


Figura 4 - Diferentes representações planas

Essas considerações evidenciam ser importante para as crianças adquirirem e desenvolverem habilidades que lhes permitam manejar diferentes

tipos de representações planas de objetos tridimensionais. Elas também precisam ser informadas sobre o conhecimento social relativo à Geometria. É importante que as crianças adquiram habilidades que lhes permitam criar, transformar e analisar imagens de objetos tridimensionais gerados da informação trazida por um desenho plano.

Um das alunas fez uma representação do paralelepípedo desenhando uma figura parecida com um retângulo. É interessante notar que a professora da classe não manifestou interesse pelo tipo de representação da aluna, apenas observou a representação, nada comentando.

Alguns alunos não obtiveram sucesso algum, como é o caso da aluna que fez uma representação do paralelepípedo totalmente plana e sem relação entre os comprimentos das arestas, como pode ser constatado Figura 5.



Figura 5 - Representação do paralelepípedo.

O papel do professor teria sido fundamental na interpretação e exploração das ações dos alunos, pois poderia ter introduzido outros tipos de representações, favorecendo a aquisição desse aprendizado. Essa intervenção poderia ser iniciada com a apresentação das diferentes representações feitas pelos alunos e também com diferentes representações planas de objetos espaciais, presentes em revistas, livros didáticos, etc. Comparando essas representações, as discussões poderiam ser conduzidas no sentido de se definirem quais as que melhor representam tais objetos. Além disso, os elementos constitutivos do desenho poderiam ser identificados com os respectivos elementos que constituem o objeto real.

A análise dos episódios enfatizou alguns elementos básicos: visualização, representação e interpretação. A visualização espacial foi considerada como uma atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais e espaciais, no estabelecimento de relações e na manipulação de objetos concretos. A visualização foi integrada por quatro elementos principais, quais sejam: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização.

Ressalta-se, nesse contexto, a importância da representação no processo de construção do conhecimento geométrico da criança, pois, ao se ensinar Geometria Espacial, o processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana se complica tendo em vista a necessidade de se recorrer a dois fatores, quais sejam: a interpretação da figura plana para convertê-la em um objeto tridimensional e a interpretação dos conceitos geométricos presentes na figura. Quando se maneja objetos espaciais e que necessitam de representação, mediante figuras planas, fica estabelecido um obstáculo, relacionado com a capacidade de visão espacial dos estudantes e com sua habilidade para desenhar representações planas de objetos tridimensionais ou para interpretar corretamente as representações apresentadas por outras pessoas.

As diferentes reações dos alunos, observadas nesta pesquisa, permitem inferências a respeito das dificuldades de representação plana de objetos tridimensionais, que podem estar relacionadas particularmente com a capacidade de visão espacial dos alunos, com a sua falta de habilidade para desenhar essas representações ou com interpretações incorretas de representações, ou com essas três características interferindo ao mesmo tempo.

A diversidade de representações planas de objetos tridimensionais nos leva a questionar: será que as crianças “vêem” os sólidos da maneira como os representam ou não são capazes de coordenar as diferentes direções dos elementos que integram a representação plana de um poliedro? As marcas deixadas no papel após várias tentativas de representação do objeto mostram que os alunos, durante a realização da tarefa, percebiam certas incorreções.

Quando os alunos realizavam as atividades houve interação entre os aspectos figurais e os aspectos conceituais dos objetos envolvidos e, em

alguns momentos, o aluno ficou preso ao observável do desenho. Uma das maiores dificuldades apresentadas pelos sujeitos ocorreu com relação ao traçado das linhas, que no modelo correspondente, eram paralelas ou perpendiculares. Representar um objeto tridimensional em uma superfície plana, não se constitui em uma tarefa simples, pois o conceito visual de qualquer objeto que possua volume somente pode ser representado em um meio tridimensional. Dessa forma, quando se desenha um objeto sobre uma superfície plana, o que se obtém é uma “tradução” deste objeto, ou seja, a sua representação por meios bidimensionais de alguns fatores estruturais, essenciais ou particulares, do conceito visual.

Convém ressaltar que o desenvolvimento de habilidades, como desenhos de representações geométricas, necessita ser trabalhado no âmbito escolar, com a efetiva intervenção do professor, visto que esse é um tipo de conhecimento social, uma construção que se dá na interação do sujeito com o seu meio cultural.

No processo de ensino-aprendizagem da Geometria, o desenho de figuras geométricas é um recurso largamente utilizado pelos professores para a representação de conceitos e, muitas vezes, constitui-se em obstáculos para a aprendizagem dos estudantes. A prática pedagógica tem mostrado que muitos estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem de conceitos geométricos por apresentarem pouca habilidade em desenhar determinadas figuras geométricas ou para interpretar o que essas figuras estão representando.

Pais (1996), ao tecer considerações epistemológicas e didáticas sobre a presença significativa do desenho nesse processo, resalta que, da mesma forma que o objeto, o desenho é também de natureza essencialmente concreta e particular e, portanto, oposta às características gerais e abstratas do conceito.

Considerando-se o desenvolvimento cognitivo e os aspectos psicopedagógicos das representações geométricas na prática pedagógica, procurou-se também, entender como os alunos progredem nas representações de suas atividades no espaço. Verificou-se que conhecimentos dos adultos, muitas vezes considerados óbvios, não o são para a criança. Com isso, foi possível verificar que a construção do espaço e dos conceitos geométricos

implica em um processo lento e gradual de elaborações e re-elaborações do sujeito.

A presente investigação revelou que, assim como sugerem outras pesquisas a esse respeito, e também como a prática pedagógica tem evidenciado, os alunos começam reconhecendo as figuras geométricas quanto aos seus aspectos mais globais; a partir do aspecto perceptual, identificam sua forma e suas características planas ou espaciais, e só depois expressam sua compreensão de relações entre a forma e os elementos intrínsecos às figuras geométricas; posteriormente, passam à elaboração de algumas deduções simples.

Os dados indicaram que os professores pesquisados não trabalham os conceitos geométricos considerados como os mais elementares no Ensino Fundamental e que são recomendados nos programas de ensino. Por outro lado, as professoras, quando tentam ensinar Geometria para seus alunos, apresentam muita dificuldade, tanto teórica quanto metodológica, que pode comprometer o processo de aprendizagem dos estudantes.

Considerando-se a importância do ensino da Geometria na formação geral dos estudantes, sem pretender atribuir um sentido mais amplo do que permitem os dados coletados, que não são generalizáveis, ressalta-se a necessidade da efetiva implementação de propostas de ensino que estimulem o aluno a progredir na sua capacidade de estabelecer pontos de referência ao seu entorno e, posteriormente, possibilitem-lhe aprofundá-los por meio de atividades que mostrem, entre outras, a possibilidade da utilização de diagramas, tabelas, mapas, esquemas, permitindo a interação dos conceitos geométricos desde as séries iniciais.

As intensas transformações pelas quais passa a nossa sociedade implicam na transformação constante dos conhecimentos e a exigência de uma formação inicial sólida e, sobretudo atenção para a formação continuada do professor, para que haja garantia na qualidade do ensino. Ressalte-se que a atenção não pode ficar restrita apenas à formação dos futuros professores, mas também, deve ser projetada para perceber as possíveis ações que esses professores estarão delegando às futuras gerações. Considera-se que os educadores, de modo geral, precisam estar atentos que, ao prepararem as novas gerações para o mundo em que terão que viver – mundo esse

rapidamente mutável –, devem estar em contínuo alerta para adaptar seu ensino, tanto em conteúdo quanto em métodos, à evolução destas mudanças que tanto afetam as condições de vida, visto que ao se formar os futuros professores deve-se ter em mente que esses serão os sujeitos que terão penetração no futuro e que muito provavelmente, não será o nosso futuro.

Bibliografia

- BISHOP, A. J. *Space and Geometry*. In LESH, R. e LANDAU, M. (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press – A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers: New York, USA, pp.175-203, 1983.
- FREUDENTHAL, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel: Dordrecht, 1983.
- GUTIÉRREZ, A. *Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures*. In A. R. BATTURO (ed.). *New Directions in Geometry Education*. Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T, pp. 33-42, 1996.
- GUTIÉRREZ, A. *Las Representaciones planas de Cuerpos 3-Dimensionales en la Enseñanza de la Geometría Espacial*. In *Revista EMA*. Bogotá, Colombia. V. 3, n. 3, pp. 193-220, 1998.
- PAIS, L. C. *Intuição, Experiência e Teoria Geométrica*. In *Zetetiké*. Campinas:UNICAMP/FE/CEMPEM. V. 4, n. 6, julho/dezembro, pp. 65-74, 1996.
- PARZYSZ, B. *"Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures*. In *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 79-92. D. Reidel Publishing Company, 1988.
- PASSOS, C. L. B. *Representações, Inpertreções e Prática Pedadógica: A Gemeotria na Sala de Aula*. Campinas: UNICAMP (Tese de Doutorado), 2000.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. *A Imagem Mental na Criança*. Porto: Livraria Civilização – Editora, 1977.
- REGGINI, H. C. *Ideas y Formas: Explorando el espacio com Logo*. Buenos Aires: Ediciones Galápagos, 1985.

SOLLER, G. G. *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis S.A., 1991.