Novas Tecnologias e o Ensino de Função, Taxa de Variação e Acumulação

José Aires de Castro Filho[1]

Introdução

Estudos apontam que os conteúdos de álgebra e funções são uma das maiores barreiras em cursos de matemática (Barbosa e Neto, 1995, Vergnaud, 1997). Essas dificuldades podem ser explicadas pela forma como esses conceitos são introduzidos e ensinados na escola, a qual enfatiza apenas as regras para manipulação de símbolos (Gimenez e Lins, 1997). A escola tradicional acredita que ao introduzir os símbolos e as regras, está se ensinando o próprio conceito matemático. Uma corrente mais recente defende que conceitos matemáticos considerados complexos devem ser introduzidos desde cedo no currículo de uma maneira informal e usando os conhecimentos intuitivos dos alunos (Spinillo, 1993, Kaput, 1994). Alguns autores, por exemplo, apontam que o conceito de taxa de variação pode ser utilizado como um ponto de entrada para compreender conceitos de álgebra e funções (Confrey e Smith, 1994, Kaput, 1994). Taxa de variação representa a razão entre duas quantidades, mais especificamente a relação entre a variação de uma medida e a variação do intervalo de tempo passado durante a variação da medida (Gomes, 1995). Essa noção possui importância para a compreensão de conceitos como integral e derivada, estudados em cálculo, assim como para compreender conceitos em ciência como fluxos ou crescimento populacional.

Vários estudos tem mostrado que ferramentas computacionais e tecnológicas geradoras de gráficos em tempo-real tais como software de simulação ou sensores acoplados à computadores auxiliam os alunos à desenvolver o conceito de taxa de variação e função, em contexto ligados a movimento (Nemirovsky, Tierney, & Wright, 1998, Stroup, 1995).

Apesar dos resultados positivos, muito pouco dessa tecnologia tem chegado à sala de aula. Uma das razões é a falta de familiaridade dos professores com essas abordagens que enfatizam o uso de tecnologia e o desenvolvimento conceitual ao invés da manipulação simbólica. Ao mesmo tempo, estudos apontam que professores do ensino fundamental e médio apresentam dificuldades na compreensão de conceitos matemáticas subjacentes ao uso de funções (Even, 1993, Stein, Baxter, e Leinhardt, 1990). Portanto, o uso de novas tecnologias para o ensino da matemática também devem possibilitar o desenvolvimento conceitual por parte do professor. O argumento é que para serem usadas pelos professores de forma efetiva, os mesmos devem ter a possibilidade de desenvolver suas próprias noções sobre conceitos matemáticos.

O presente trabalho discute o uso de duas tecnologias: o sensor de movimento e o Diagrama Interativo Conta Bancária, os quais objetivam introduzir o estudo de taxa de variação respectivamente nos seguintes contextos: movimentos e transações bancárias. Além disso, o trabalho discute como o uso dessas tecnologias pode ser usada como ferramentas para o desenvolvimento conceitual de professores de uma forma vinculada ao ensino.

Método

Local e contexto

O estudo foi realizado em uma escola de ensino médio em Austin, EUA. Oito professores de matemática estavam implementando um currículo introdutório sobre funções na disciplina Álgebra I. A abordagem diferia do método tradicional uma vez que os alunos eram introduzidos ao estudo de funções a partir de situações-problema e o estudo de gráficos e só posteriormente eram iniciados na manipulação de equações. O uso de tecnologia também era enfatizado no currículo. Diversas tecnologias foram utilizadas, mas apenas duas são discutidas no presente trabalho[2].

Tecnologia: Sensores de Movimento e Diagramas Interativos

Um sensor de movimento é um aparato que coleta informações sobre posição, velocidade e aceleração de objetos a partir da emissão e detecção de ultra-som. Ao ser acoplado a computadores e software, o sensor pode gerar gráficos e

---

[1] Universidade Federal do Ceará (e-mail: j.castro@ufc.br)

[2] Para uma descrição mais completa, consultar Castro-Filho (2000).

tabelas, que podem ser utilizados para modelar diversos tipos de movimento utilizando-se funções. Sensores de movimentos podem ser utilizados para introduzir noções sobre funções. Por exemplo, pode-se estudar a inclinação de uma reta como uma tava de variação constante. Outras situações podem envolver caminhar a diferentes velocidades e em diferentes direções. Os gráficos de velocidade vs. tempo e posição vs. tempo podem ser observados simultaneamente. A velocidade pode então ser estudada como a taxa de variação da posição em relação ao tempo.

Diagramas interativos (Confrey & Maloney, 1998) são um conjunto de aplicativos em Java (Java applets) projetados para permitirem a investigação de conceitos em matemática e ciências (Confrey, Castro-Filho e Maloney, 1998). O Diagrama Interativo Conta Bancária[3] (doravante chamado apenas de Conta Bancária) objetiva a exploração dos conceitos de taxa de variação e acumulação no contexto de operações bancárias comuns como depósitos e retiradas. A taxa de variação pode ser acumulada para gerar gráficos de saldo vs tempo. A Tela do Conta Bancária mostrada na figura 1 apresenta dois gráficos, um de operações diárias e outro do saldo por dia. O gráfico de saldo por dia não pode ser produzido diretamente. Um gráfico de operações diárias vs. tempo tem de ser produzido a fim de que o gráfico de saldo vs. tempo possa ser atualizado. Isso permite o estudo da relação entre dois gráficos. A taxa de variação é representada por operações diárias (depósitos ou retiradas), que podem ser atualizados interativamente através de botões. O usuário pode investigar idéias intuitivas sobre integral ao acumular quantidades para produzir gráficos de saldo por dia, ou pode analisar gráficos de saldo por dia para produzir gráficos de operações diárias.

INSERIR FIGURA 1 +/- AQUI

Participantes

O presente estudo reporta resultados relativos a quatro dos professores da escola, Roberto, Rosa, Teresa e Felipe, ao utilizarem o sensor de movimento e o conta bancária. Todos os quatro professores já haviam ensinado Álgebra I anteriormente e já haviam explorando as tecnologias durante um treinamento com

[3] Em inglês: Bank Account Interactive Diagram.

todos os professores da escola. No entanto, essa era a primeira vez que eles estavam trabalhando com essa abordagem e com essas tecnologias para ensinar.

Procedimento e análise dos resultados

Métodos qualitativos de pesquisa foram utilizados. Os dados foram coletados por meio de entrevistas e observações. Todos os quatro professores participaram de entrevistas antes e após o término das aulas com o Sensor de Movimento e o Conta Bancária. Os pesquisadores também realizaram observações e anotações durante a aulas. Além das observações, as aulas também foram filmadas e posteriormente transcritas para análise. A análise utilizou um processo de codificação e construção de categorias (Strauss & Corbin, 1998). Os principais resultados são apresentadas abaixo.

Resultados

Durante as observações e entrevistas foram encontrados evidências de algumas dificuldades acerca de taxa de variação. Essas dificuldades, no entanto, se constituíram em oportunidades de aprendizagem para os professores. A seguir apresentamos as descobertas apresentadas pelos professores acerca do conceito de taxa de variação e sua relação com o estudo de funções.

Um fenômeno pode produzir gráficos distintos, porém relacionados.

Felipe, um dos professores observados, apresentou inicialmente uma concepção de que os gráficos de velocidade vs. tempo produzidos pelo sensor de movimento sempre se referiam a eventos em que algum objeto estava se movendo. Da mesma forma, gráficos de posição vs. tempo sempre se referiam a objetos em repouso. Durante uma entrevista para explorar essas noções, Felipe encontrou uma contradição em seu pensamento, ao produzir um movimento em frente ao sensor e observar o computador produzir simultaneamente gráficos de posição vs. tempo e velocidade vs. tempo (gráficos 1 e 2). Felipe achou confuso que dois gráficos diferentes estivessem se referindo ao mesmo fenômeno:

> **Felipe**: Eu preciso pensar porque é que nós vamos fazer a mesma caminhada, uma vez para medir Posição vs. tempo e depois fazer a mesma caminhada para medir Velocidade vs. tempo.

INSERIR GRÁFICOS 1 E 2 +/- AQUI

Felipe entendia que a velocidade podia ser obtido a partir do gráfico de posição vs. tempo, encontrando-se a inclinação da reta. De fato, para ele, encontrar a velocidade nesse gráfico era mais lógico do que ter um outro gráfico separado. Felipe começou a articular que de fato existem duas quantidades diferentes (posição e velocidade) as quais estão representadas em dois gráficos diferentes. Ele então explicou como encontrar a velocidade num gráfico de posição vs. tempo.

> **Felipe**: Para cada metro, passa-se um segundo. Outro metro, outro segundo. E então tem-se uma linha e esse é o gráfico. E diz-se posição por tempo, que é velocidade. É por isso que eu achava que esse gráfico aqui (gráfico 1) mostrava a velocidade. E eu entendo que esse gráfico (gráfico 2) apenas mostra a velocidade a cada segundo. E ela permanece constante.

A confusão de Felipe pode ser entendida como uma questão epistemológica: por que dois gráficos são necessários para o mesmo movimento, especialmente no caso de um movimento retilíneo uniforme? A resposta, de que são duas quantidades diferentes não é uma resposta trivial, visto que posição e velocidade são quantidades relacionadas. Velocidade e posição não são duas quantidades independentes como temperatura do ar e altura de uma pessoa.Pode-se encontrar o gráfico de velocidade vs. tempo a partir do gráfico de posição vs. tempo. No caso de uma velocidade constante, pode-se argumentar que o gráfico de Posição vs. tempo seria suficiente.

Ao final da entrevista, Felipe ressaltou que seria importante para os alunos fazerem a atividade com o sensor, pois ajudaria os alunos a entenderem as diferentes comparações que podem ser feitas, como posição vs. tempo e velocidade vs. tempo.

Em sala de aula, Felipe enfatizou o trabalho com os dois gráficos e a discussão da diferença e relação entre os dois. O segmento abaixo ilustra o tipo de diálogo que Felipe teve com os alunos:

> **Felipe**: Ok. Agora…vocês não estão comparando posição com tempo. Agora vocês estão comparando velocidade com o tempo. O que acontece se eu andar como vocês estavam fazendo há pouco tempo atrás, com um passo constante? Eu estou andando da mesma

forma, então, o que eu tenho aqui? [apontando para a tela do computador] eu ando a uma certa velocidade, mas eu a mantenho, vamos dizer, 5 milhas por hora.

Estudante1: Permanece horizontal [referindo-se a que o gráfico continuaria uma linha horizontal]

Felipe: Ok. Muito bem. É por isso que esse gráfico é horizontal. Então, o que vocês acham que vai acontecer, como deve fazer para que o gráfico fique um pouco mais alto. Suba um pouco e depois fique horizontal de novo?

Estudante2: Andar mais rápido.

Estudante1: Vá mais rápido.

Felipe: Ok. Eles estão dizendo, vá mais rápido, mas permaneça no mesmo passo. Se você estava 5 milhas por hora, vá a 7 ou 8 milhas por hora, mas fique na mesma velocidade.

Felipe também analisou um gráfico mostrando os estudantes mudando a velocidade de lento até rápido. No gráfico de posição vs. tempo, Felipe explicou como a posição estava sempre aumentando. No gráfico de velocidade vs. tempo, Felipe discutiu com os alunos, como o gráfico estava mostrando duas linha horizontais, uma para cada velocidade constante.

Posteriormente, em entrevistas e reuniões, Felipe comentou como ele achava importante usar ambos os gráficos com os alunos.

Felipe: Eu achei interessante fazermos o gráfico de posição vs. tempo e velocidade vs. tempo simultaneamente. Porque os alunos puderam comparar e ver as diferenças.

Em uma discussão posterior com outros professores e os pesquisadores, Felipe tornou a comentar sobre a importância de se trabalhar com os dois gráficos para desenvolver a compreensão de funções lineares. Para ele, o gráfico de uma função linear está relacionado com o gráfico de uma função constante. Esse aspecto está ligado a um outro tema que será descrito a seguir: o de que a taxa de variação de uma função linear é constante.

Relacionando Conta Bancária com o conhecimento sobre funções do 1o. grau

Um aspecto encontrado na análise de dados foi como os professores relacionaram o uso do Conta Bancária com o estudo de funções lineares. Em entrevistas anteriores os professores já haviam demonstrado um sólido conhecimento a respeito do uso de equações para modelar os tipos mais comuns de problemas envolvendo funções do 1o. grau. Isso também foi evidenciado durante o uso do conta bancária para modelar problemas com depósitos ou retiradas constantes. Durante as lições, os professores constantemente relacionaram os depósitos ou retiradas constantes com o coeficiente de inclinação da reta, conforme é ilustrado no segmento abaixo:

> **Rosa**: [discutindo um gráfico de saldo vs. tempo que foi produzido a partir de um gráfico de depósitos constantes] Ok, vocês vêem algum…
>
> **Estudante3**: Padrão? [falando ao mesmo tempo que Rosa]
>
> **Rosa**: Padrão?
>
> **Estudantes**: Sim. Está aumentando diariamente. [referindo-se ao gráfico de saldo]
>
> **Rosa**: Sim, está aumentando. Esse aumento é constante?
>
> **Es**: Sim.
>
> **Rosa**: E o que significa essa constante aqui?
>
> [Após alguma discussão, os alunos afirmam:]
>
> **Estudantes**: A inclinação [Slope, no original].
>
> **Rosa**: Sim, a inclinação. Ela é constante. Nunca muda. Sua inclinação terá uma taxa constante. Para cada dia que você se move, seu saldo aumenta dez [dólares]. No segundo dia, mais dez [dólares] e assim por diante.

O segmento acima revela que Rosa procurou guiar os alunos para estabelecerem conexões entre os depósitos constantes e a idéia de inclinação de uma reta (slope). Discussões semelhantes foram observadas com todos os professores tanto em entrevistas quanto durante as aulas. A última sentença mostra um outro aspecto que foi observado em todos os quatro professores: A conexão entre o contexto de operações bancárias e o contexto de movimentos retilíneos com velocidade constante. Isso será descrito a seguir

Relacionando os conceitos em diferentes contextos

Essa conexão foi usada por todos os professores em várias ocasiões durante as entrevistas e aulas. Os segmentos abaixo ilustram esses usos:

> **Roberto**: Eu achei muito interessante o fato do currículo abordar inclinação de uma reta [slope] de muitas maneiras diferentes. Como os problemas de velocidade [versus tempo] e posição [versus tempo]. Ou como no Conta Bancária.
>
> **Teresa**: Conta Bancária é a mesma coisa [que sensores de movimento] só que com dinheiro. Então o gráfico do saldo é como o da posição e o gráfico de operações é como o de velocidade.

Esses exemplos mostram como os professores interpretaram gráficos de taxas em função do tempo como gráficos de velocidade vs. tempo ou operações diárias vs. tempo. O mesmo foi observado com gráficos de acumulação em função do tempo, os quais foram tratados simultaneamente como gráficos de posição vs. tempo ou gráficos de saldo vs. tempo. Esses resultados sugerem que os professores desenvolveram um bom conhecimento dos casos envolvendo depósitos ou retiradas constantes e foram capazes de fazer conexões importantes entre o conhecimento na lição específica com o Conta Bancária e os objetivos do currículo. Sempre que os problemas envolviam esse tipo de transação, os professores descreveram ou desenharam de forma bastante precisa os gráficos de transações diárias vs. tempo e saldo vs. tempo. Os professores também escreveram equações para modelar as situações.

Discussão

Os resultados apresentados mostram como o currículo escolar em geral direciona os professores e alunos a lidar com uma gama limitada de gráficos e situações. Ao invés de analisar gráficos com relação à taxa de variação, os diferentes tipos de gráficos são estudados de maneira isolada (funções lineares, quadrática, etc.) e sem estabelecer relações entre gráficos. Isso limita o desenvolvimento conceitual não só de alunos mas também de professores.

Os resultados também sugerem que tecnologia como sensores de movimento ou o Conta Bancária podem ser catalisadores para um maior desenvolvimento conceitual dos professores e um maior uso de computadores e tecnologia integrada ao currículo escolar. Ambas são ferramentas de fácil utilização, o que possibilitou que os professores o integrassem em seu uso cotidiano. Mesmo sendo simples, elas permitiram a investigação de importantes idéias matemáticas, e criaram oportunidades para que os professores refletissem sobre sua compreensão de idéias matemáticas. Os professores em geral tem poucas oportunidades de experimentar o conhecimento matemático como aprendizes. Em geral, suas experiências com o conhecimento matemático são limitadas e não propiciam um desenvolvimento conceitual.

Referências

Barbosa, G. O. e Borges-Neto, H. (1995). Raciocínio Lógico Formal e Aprendizagem em Cálculo Diferencial Integral: O Caso da Universidade Federal do Ceará. Temas e Debates, vol. VIII (6), págs. 60-70.

Castro-Filho, J. (2000). Teachers, Math and Reform: An investigation of Learning in Practice. Unpublished doctoral dissertation. University of Texas at Austin.

Confrey, J. , Castro-Filho, J., and Maloney, A. (1997). Interactive diagrams: A new learning tool. In Dossie, J. A. , Swafford, J. O. , Parmantie, M. , and Dossey, A. E. (Eds.) Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Confrey, J. e Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in mathematics, 26, 135-164.

Confrey, J., and Maloney, A (1998). Interactive Diagrams [Computer Software] Quest Math & Science Multimedia. Austin, TX.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. Journal of Research in Mathematics Education, 24(2), 94-116.

Gimenez, J. e Lins, R. C. (1997). Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas, SP: Papirus Editora.

Gomes, A. S. (1995). <u>Concepções e Representações de Relações entre Quantidades.</u> Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving. (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nemirovsky, R. Timey, C, e Wright, T. (1998). Body Motion and Graphing. <u>Cognition and Instruction, 16</u>(2), 119-172.

Spinillo, A. G. (1993) Proporções nas Séries Iniciais do Primeiro Grau. Em Schlieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE.

Stein, M. K., Baxter, J. A. and Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. American Educational Research Journal, 27(4) 639-663.

Strauss, A. and Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research: Techniques and procedures for developing grounded theory. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stroup, W. (1995). Dynamics and calculus for the young leaner. ***Teacher's lab***, May-June, 16-18.

Vergnaud G. (1997) Algebra, additive and multiplicative structures. Is there any coherence at the early secondary level? In M. Hejn_ e J. Novotná (eds.) Actes du colloque European Research Conference on Mathematical Education, Charles University, Podebrady, pp. 33-45.

Figuras e gráficos

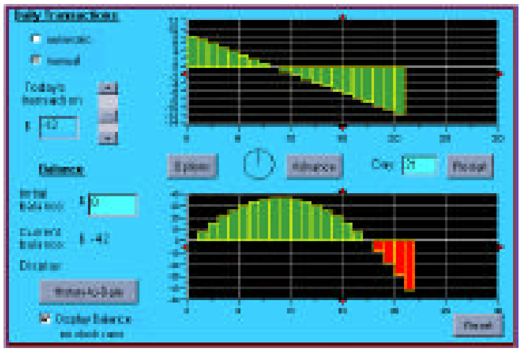

Figura 1 – Tela do Diagrama Interativo Conta Bancária.

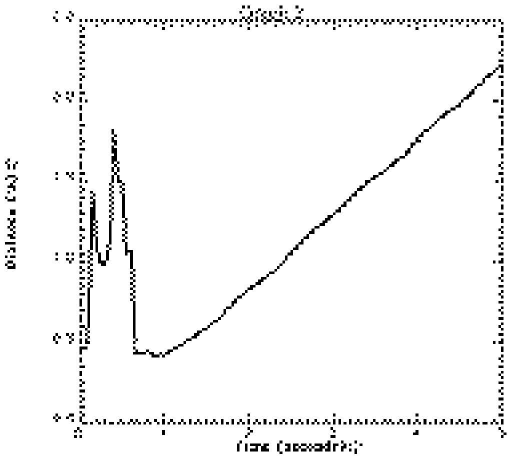

Gráfico 1 – Distância (Posição) vs. tempo.

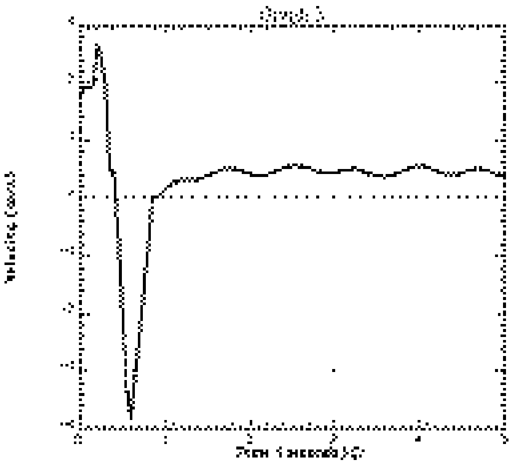

Gráfico 2 – Velocidade vs. tempo.