A questão da lógica elementar da Matemática e o aluno do Ensino Superior

Silvia Dias Alcântara Machado
PUC- SP
M. Tereza L. Carvalho
UNESP-FEG

Introdução

O ensino da matemática sofreu a partir da década de 70 um movimento pendular, saindo dos excessos de formalização dos anos 70 ao mais recente pragmatismo " concretista ", qual seja, aprender através de problemas . Na realidade a palavra de ordem "resolver problemas" foi interpretada pela maior parte dos livros didáticos, como apresentar problemas com suas resoluções, seguidos de problemas análogos a serem resolvidos pelo o aluno. Isso levou a que os alunos pensassem que só seriam capazes de resolver um "exercício", se já lhes tivesse sido apresentado um análogo, para "se inspirarem "na resolução. Pensamos que essa é a principal causa de um certo imobilismo de grande parte dos alunos que adentram a Universidade.

Acreditamos que ambos os extremos foram e são pedagogicamente desastrosos pois evidenciaram a impossibilidade desses tipos de ensino em desenvolver no aluno uma compreensão do que é fazer matemática .

Procuramos, então, um "caminho do meio" , que contemple tanto a verdadeira "resolução de problemas" quanto introduza o aluno na forma peculiar do pensar matemático. Esse "pensar matemático" supõe o conhecimento da lógica elementar, subjacente a todo o fazer matemático.

No entanto a aprendizagem formal das "tabelas verdade", introduzida no ensino dos anos 70, não mostrou eficácia semântica, pois não se observava um acréscimo significativo nas competências dos alunos, ao se depararem com os formalismos da ciência.

Por outro lado, no quadro atual do ensino de Matemática as dificuldades relativas à aprendizagem da lógica mencionadas anteriormente persistem, uma vez que a fundamentação da lógica em vigor na Matemática é negligenciada.

Isso nos sugeriu a pergunta : como fazer com que o aluno se aproprie dessa lógica elementar da matemática e a torne operacional ?

A seguir relatamos uma atividade elaborada por Marc Legrand com o intuito de responder a essa pergunta, seguida da pesquisa iniciada há dez anos, utilizando essa atividade e questões correlatas.

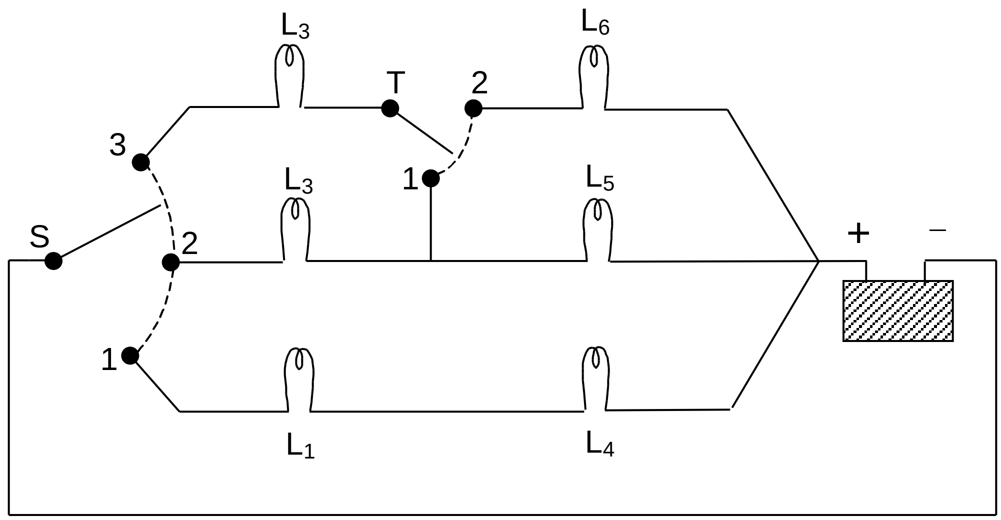
Circuito ou a regra do debate matemático

Marc Legrand (1990) criou uma atividade de nome "circuito ou a regra do debate matemático" com o objetivo de explicitar as regras da matemática elementar.

Essa atividade é proposta como um meio de estabelecer concretamente a diferença entre os critérios de verdade pessoais, adquiridos culturalmente, utilizados quotidianamente e aqueles convencionados pelas comunidades científicas, em particular a da Matemática. Nessa atividade, conforme explicitado pelo professor, não são focalizados conhecimentos francamente novos; o objetivo constitui-se em suprimir eventuais maus entendidos em relação a conhecimentos adquiridos anteriormente.

A seguir apresentamos uma descrição resumida da atividade citada. Uma descrição detalhada pode ser encontrada no artigo de M. Tereza Carvalho e Silvia Machado (2001) em português ou no texto em francês de Marc Legrand (1990).

Apresenta-se ao aluno a seguinte figura :



O circuito compõe-se de seis lâmpadas designadas L_1, L_2,..., L_6 e dois comutadores S e T. S pode ocupar as posições S_1, ou S_2, ou S_3 e T as posições T_1 ou T_2.

O professor esclarece o sentido do termo "conjectura", após o que enfatiza que em Matemática, os critérios científicos são, em geral, distintos daqueles utilizados espontaneamente na vida cotidiana. Passa então a definir as regras do "debate”:

- o professor (indicado por P) escreve sucessivamente no quadro um certo número de conjecturas (designadas C1, C2,...), enunciadas a propósito do circuito elétrico considerado.

- P tem uma opinião pessoal sobre essas conjecturas mas, durante um tempo, permanecerá calado.

- os alunos discutem com um parceiro se a conjectura é verdadeira ou falsa

- P abre o debate entre todos os alunos da classe e o conduz.

Em um certo sentido, a atividade “circuito” permite a instituição das leis que vão reger as trocas da "comunidade classe" em Matemática; o professor, como especialista, garante que a lei da classe está de acordo com a da "comunidade científica".

O professor inicia o estudo da primeira conjectura, designada C1.

C1) Se eu vejo a lâmpada 4 brilhar, estou certo de que a lâmpada 1 também brilha.

O debate deve permitir que os participantes percebam a complexidade da situação, pois trata-se de um modelo simplificado de um circuito real e, portanto, segundo a realidade considerada, isto é, em função da experiência concreta de cada um, a conjectura pode ser considerada ambígua, verdadeira ou falha.

Aqui, como se trata de discutir o verdadeiro e o falso em Matemática, não há interesse em se tratar do difícil problema de diferentes escolhas de modelizações, para levar em conta os diversos tipos de circuitos. Assim, será considerada a modelização mais simples, implicitamente convencionada na apresentação do esquema de um circuito denominado normalizado.

O professor deve enfatizar a importância de se estabelecerem os axiomas ou as leis do modelo, convenções adotadas por todos, a fim de evitar ambigüidades. Nesse momento, o importante é que os alunos se convençam da necessidade de uma modelização e do fato de que devem, nela, se basear.

Na modelização proposta, a conjectura 1 é trivialmente verdadeira.

No estudo da conjectura 1, o conhecimento visado não é a apropriação do modelo físico de “circuitos em série”, mas sim a conscientização da necessidade de se basear em um modelo, para que seja possível analisar a escrita de conjecturas cientificamente discutíveis, em termos de verdadeiro/falso.

Após o convencionamento da modelização, o debate prossegue com as seguintes questões: o que acontece se S não está na posição 1? Não é necessário precisar a posição de S na conjectura, para se tomar uma decisão sobre sua veracidade? Torna-se necessário, portanto, precisar o papel restritivo da hipótese em um enunciado do tipo “se... então”.

A próxima conjectura a ser discutida é:

C2) Se a lâmpada 2 não está acesa, então a lâmpada 5 também não está acesa.

Verifica-se em relação à conjectura C2 que os seis casos possíveis constituem-se de um contra - exemplo, dois fora de assunto e três exemplos.

Essa situação, como foi mencionado, acarreta dificuldade para muitos alunos. O problema é que essa conjectura é falsa sem ser "totalmente falsa". De fato, três exemplos tendem a mostrar que ela é verdadeira e um contra-exemplo indica que é falsa.

Observa-se que a conjectura C2 é didaticamente importante porque provoca o aparecimento dessa dificuldade e faz com que o conflito se manifeste . A análise dessa conjectura permite explicitar a tripla regra fundamental adotada pelos matemáticos, a saber:

1. Uma conjectura não pode ser considerada simultaneamente verdadeira e falsa;
2. Uma conjectura é considerada falsa desde que admita um contra - exemplo;
3. Uma conjectura é considerada verdadeira se é demonstrado que a existência de qualquer contra - exemplo conduz a um absurdo, isto é, coloca em questão diretamente ou indiretamente uma das regras acima.

Em prosseguimento à descrição da atividade "circuito", observa-se que após o estabelecimento das três convenções fundamentais que determinam o sentido do falso e do verdadeiro, em Matemática, as próximas conjecturas são escritas com as notações usuais "L_i = a lâmpada i está acesa, Não L_i = a lâmpada i está apagada" e, da mesma forma, S_i = o comutador S está na posição i".

A próxima conjectura:

C3) Se não L_5, então não L_2

permite aos estudantes colocar em prática as convenções precedentes e, sobretudo, propicia ocasião de se discutir concretamente os conceitos de contraposta e recíproca.

A conjectura seguinte

C4) Se L_3, então L_2.

evidentemente falsa, permite apontar que a resposta é evidente porque não há nenhum conflito semântico, uma vez que não há exemplos. Essa discussão sobre o consenso fácil tem por objetivo auxiliar a superação do obstáculo resultante do conflito “formal-semântico” da conjectura 6.

C5) Se L_1 ou L_6, então L_3 ou L_4.

C6) Se L_1 e L_3, então L_2 e não L_5.

O estudo das conjecturas C5 e C6 permite que sejam precisados os significados do “e” e do “ou” em Matemática.

A paradoxal conjectura C6 é muito eficaz para estabelecer a regra “em Matemática pode-se declarar falsa uma conjectura somente se é possível lhe opor um contra - exemplo. ·Esse julgamento, é oposto ao raciocínio do cotidiano, no qual é suposto que não se deve falar para não se dizer nada. Em outros termos, na vida cotidiana exige-se implicitamente, para que uma asserção seja declarada verdadeira, que afirme alguma coisa de utilidade”.

As idéias que surgem da discussão da conjectura C6 podem ser assim resumidas:

- em Matemática, o que é significativo e útil não são os axiomas, os teoremas ou as definições isoladamente, mas sim os pares: enunciados gerais - exemplos de aplicações;

- em Matemática, não se deve principalmente declarar falso o que é inútil, pois isso seria atribuir a essa “inutilidade” uma importância que ela não possui e uma consistência abusiva, pois afirmar que uma conjectura é falsa, é dar uma informação que não está absolutamente contida na afirmação “isso não serve para nada”.

Pesquisa Empírica

A partir de 1990 desenvolvemos essa atividade do circuito em uma das primeiras aulas do curso de Álgebra Linear na licenciatura e bacharelado em Matemática. A atividade, conforme o número de alunos, se estende por uma hora mais ou menos, após o que, os alunos trabalham com exercícios de verificação sobre a veracidade ou não de afirmações sobre assuntos já conhecidos.

Logo após a aplicação da atividade do "circuito", quando do debate estabelecido com a classe, durante a correção dos exercícios sobre verdadeiro - falso enfatizamos as regras do debate matemático nos reportando à atividade feita. A álgebra linear, por sua natureza, é um campo fértil em teoremas, lemas etc. Assim, o aluno é defrontado freqüentemente com a necessidade de justificar suas afirmações.

Notamos que embora alguns alunos assumam as regras e passem a utilizá-las, outros continuam relutantes e voltam a "recair" e confundir a lógica do cotidiano com a da matemática.

Verificamos então que para desenvolver um ensino capaz de dar consciência ao aluno das peculiaridades da lógica matemática e de fazer com que ele consiga faze-la funcionar, quando de suas explicações, provas e demonstrações é necessário insistir em problemas do tipo "verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas”, que obriga o aluno a "pensar matematicamente”, pois a justificativa deverá estar embasada na lógica elementar , ou seja, se for falsa deve dar um contra - exemplo , se for verdadeira deverá demonstrar.

Em 2000, ao ministrar algumas aulas de Álgebra Superior para o quarto ano, tivemos contato com alunos que haviam tido aulas de Álgebra linear conosco há dois anos atrás. Qual não foi nosso espanto ao verificarmos que dentre eles ainda haviam alunos que demonstravam com exemplos e afirmavam que era falso, sem justificar.

Concluímos que embora a atividade seja útil ela é somente "um início " no caminho da solução do problema proposto. É necessário que os professores todos estejam atentos às justificativas de seus alunos, incentivem-nos a construir contrapostas de teoremas, a construir contra exemplos , etc.

Em 2001 estamos ministrando aulas de Teoria dos Números e Álgebra Superior a uma turma de quarto ano, que teve Álgebra Linear conosco no segundo ano.

O curso todo tem sido dado através de atividades que contém, em geral, ao menos uma questão, sobre a veracidade de afirmações. As correções em classe das atividades são feitas após nossa analise dos protocolos, o que proporciona que criemos um debate sobre as questões mais controversas. Nesses debates provocamos os alunos a explicitar as regras da lógica elementar matemática.

A seguir apresentaremos uma questão e a solução dada por esses alunos:

Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justifique:

a)Todo grupo aditivo comutativo pode ser munido de mais uma operação que lhe dê uma estrutura de anel

b)Todo anel é um grupo aditivo abeliano

c)D = { a + b$\sqrt{2}$ / a,b $\in$ Z } é sub anel de Q

d)E = { a + b$\sqrt{2}$ / a,b $\in$ Z } é sub anel de R

e) Z$_3$ é um corpo comutativo

f) Z$_6$ é um corpo comutativo

g)A equação 3x = 2 tem solução em Z$_3$

h) Um divisor de zero num anel comutativo com unidade não tem um inverso multiplicativo

i)F: C $\to$ M$_2$ (R) , F(a+bi) = $\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix}$ **, é um homomorfismo sobrejetor**

Cinco das nove afirmações são falsas (a, c, f, g, i) e os alunos deveriam dar um contra - exemplo ou mostrar que eram falsas pois negavam um teorema demonstrado.

Dos nove alunos consideraremos apenas os 8 que tem menos do que 25% de faltas as aulas.

	a		c		f		g		i	
1	CE		CE		D		F CE		F CE	
2	CE		CE		CE		F D		F CE	
3	CE		CE		D		F CE		F CE	
4	CE		CE		D		F CE		F CE	
5	CE		CE		CE		V D		F	
6	CE		D		D		F CE		F CE	
7	CE		CE		D		F CE		F CE	
8	CE		CE		CE		F CE		F CE	

FCE: Falso justificado através de um contra - exemplo pertinente

FD: Falso justificado através da negação de um teorema e/ou definição

F: Falso sem justificação

VD: Verdadeiro justificado através de uma demonstração (com erro)

x: alegação de um resultado ou definição ou termo mal interpretado

-: forma de expressar-se confusa

	certo	-	x	total
FCE	25	2	4	31 - 77,5%
FD	2	4		6 - 15 %
F			1	1 - 2,5%
VD			2	2 - 5 %
	67,5%	5%	17,5%	

Conclusão: Apenas uma resposta de 40 não foi justificada, as outras, embora contendo erros de justificativa seguiram as regras da lógica elementar, mesmo as que afirmaram ser a afirmação verdadeira embora fosse falsa, apresentaram ensaios de demonstração. Ë importante notar que quando se tentou justificar a falsidade da afirmação através da negação de um resultado teórico ao invés de um contra - exemplo, o aluno teve mais dificuldade de expressar-se.

Quatro das nove afirmações são verdadeiras (b, d, e, h); para justificar os alunos deveriam demonstrar deduzindo dos resultados conhecidos. É importante notar que a única afirmação, que apresenta alguma dificuldade na demonstração é a h.

	b		d		e		h	
	VD		VD		VD		FCE	
	VD		VD		VD		VD ou FCE	
	VD	-	V		VD		F	
	VD		VD	-	VD		-----	
	VD		VD		VD		VE	
	VD	-	VD	-	VD		F	
	VD	-	VD		VD		VE	
	VD	-	VD		VD		VE	

VD: Verdadeiro, justificado através de uma demonstração correta.

VE: Verdadeiro, tentativa de justificação através de exemplo.

FCE: Falso justificado através de um contra - exemplo não pertinente

F: Falso sem justificativa

----: Não fez

VD ou FCE: o aluno tentou demonstrar não conseguiu, tentou então um contra - exemplo

x: alegação de um resultado ou definição ou termo mal interpretado

-: forma de expressar-se confusa

- -: forma de expressar-se muito confusa

		-	- -	x	total
VD	11	6	6		23 - 72%
VD ou FCE				1	1 - 3%
VE				3	3 - 9,5%
FCE				1	1 - 3%
F				2	2 - 6%
----				1	1 - 3%
V				1	1 - 3%

Conclusão: Das 32 respostas apenas 3 afirmaram que a frase era falsa e dessas uma tentou dar o contra - exemplo. É importante notar que 10% dos alunos tentaram justificar que era verdadeiro dando um exemplo! O aluno que tentou demonstrar não conseguiu e tentou então um contra - exemplo, agiu de acordo com o raciocínio cientifico matemático.

Verifica-se então que embora todos tenham no início tentado justificar que era verdadeiro através de demonstrações dedutivas; quando a questão é mais difícil , ou seja quando não conseguem uma demonstração, parece que "apelam" para o raciocínio cotidiano tentando um exemplo como demonstração.No entanto quando das entrevistas com esses alunos, verificamos que todos eles alegaram que haviam feito simplesmente uma verificação, para perceber se num caso conhecido a afirmação feita se verificava pois não conseguiam perceber como fazer a demonstração.

Conclusão final:

Os resultados mostram que de uma forma geral os alunos compreenderam a lógica elementar matemática no que diz respeito à demonstração, e que o que numa primeira analise parecia ser um traço da utilização da lógica do cotidiano, como no caso de demonstrar que é verdadeiro através de exemplo, na realidade havia acontecido pelo fato de que alguns alunos não conseguirem fazer a demonstração. Percebe-se também que os alunos tiveram um melhor desempenho nas questões falsas que nas verdadeiras. De qualquer maneira julgamos que os resultados apontam um caminho promissor no uso da atividade do "circuito" combinado com a utilização freqüente em todos os domínios matemáticos de problemas sobre a veracidade de afirmações para sanar as dificuldades dos alunos com a forma de trabalhar a matemática.

Referencias Bibliográfica

CARVALHO, M. T. L; MACHADO, S.D.A. ***O Aluno Universitário e a lógica matemática***. A publicar.

LEGRAND, M., 1990. “Circuit ou les Règles du Débat Mathématique”. In: ***Enseigner Autrement les Mathématiques en DEUG A Prémiere Année***. Lille: IREM.

___________, 1996. “Debat Scientifique en Cours de Mathématiques”. In: ***Enseignement des Mathématiques: des repères entre savoirs, programes et pratiques***. Grenoble: IREM.