

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE SOBRE SUAS ESTRATÉGIAS

OS PROBLEMAS ADITIVOS

Adição e subtração, operações constituintes do campo conceitual das estruturas aditivas, constam dos currículos e programas escolares de matemática, desde as primeiras séries do ensino fundamental. Entretanto, de acordo com diversas pesquisas, os alunos ainda apresentam dificuldades na resolução destes problemas.

Pesquisas de educação matemática mostram como resultado que, mesmo na quarta série do ensino fundamental e no último ano do curso de formação de professores (Pessoa e Falcão, 1999) os alunos apresentam dificuldades quanto à compreensão dos problemas que envolvem estruturas aditivas, principalmente os mais complexos e que são menos utilizados pela escola e pelos livros didáticos (Borba, Pessoa e Santos, 1997; 1998; 1999).

De acordo com Vergnaud (1986), o *campo conceitual das estruturas aditivas* é constituído de situações que envolvem a adição e a subtração isoladamente ou a combinação dessas operações, bem como outros conceitos matemáticos. Vergnaud afirma que a primeira perspectiva conceitual de subtração de uma criança tem conexão com a idéia de decréscimo de uma quantidade. As crianças enfrentam dificuldades para expandirem o significado da subtração de diminuição para outros diferentes casos como, por exemplo, a comparação ou a diferença. Esses casos exigem da criança a competência para a realização do *cálculo relacional*, que a capacita para a escolha da operação adequada ao que o problema propõe e para a realização do *cálculo numérico* correspondente.

Vergnaud, distingue *cálculo numérico* de *cálculo relacional*, como diferentes competências para a resolução de problemas e operações. Os cálculos numéricos são as operações de realização de algoritmos. Os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos na operação.

Ao analisar as estratégias utilizadas pelas crianças e as dificuldades por elas encontradas para resolverem o cálculo relacional dos problemas aditivos, Vergnaud(1986) e outros pesquisadores como Carpenter e Moser(1982) classificaram estes problemas em diferentes categorias, de acordo com o cálculo relacional que enfocam.

A classificação de Carpenter e Moser conta com quatro tipos básicos de problemas, que são divididos em dezesseis subcategorias, dependendo do valor desconhecido:

1- Combinação: descrevem um relacionamento estático entre duas quantidades e suas partes. Variações:

- Combinação - todo desconhecido
- Combinação - parte desconhecida

2- Mudança: envolve um relacionamento dinâmico. A partir de uma quantidade inicial e, através de uma ação direta ou indireta, causa-se um aumento ou diminuição na mesma. Variações:

- Mudança - resultado desconhecido - situação de acréscimo
- Mudança - resultado desconhecido - situação de decréscimo
- Mudança - transformação desconhecida - situação de acréscimo
- Mudança - transformação desconhecida - situação de decréscimo
- Mudança - série inicial desconhecida - situação de acréscimo
- Mudança - série inicial desconhecida - situação de decréscimo

3- Igualização: envolve a mesma espécie de ação encontrada nos problemas de mudança, mas existe, também, uma comparação envolvida. Envolvem a mudança de uma quantidade para que as duas venham a ser iguais. Variações:

- Igualização - acréscimo na quantidade menor
- Igualização - decréscimo na quantidade maior

4- Comparação: envolve a comparação entre duas quantidades. Nesse tipo de problema a diferença entre duas quantidades precisa ser encontrada. Ao contrário dos problemas de mudança e de igualização, que envolvem uma dinâmica, esses são estáticos. Variações:

- Comparação - diferença desconhecida - termo a mais
- Comparação - diferença desconhecida - termo a menos
- Comparação - quantidade menor desconhecida - termo a mais
- Comparação - quantidade menor desconhecida - termo a menos
- Comparação - quantidade maior desconhecida - termo a mais
- Comparação - quantidade maior desconhecida - termo a menos

Uma mesma proposta de cálculo numérico, pode levar a diferentes cálculos relacionais, dependendo da estrutura do problema.

A partir dos resultados de pesquisas, percebe-se que estes problemas não vêm sendo trabalhados amplamente, não exploram todo o conhecimento, todas as relações que o aluno pode fazer nesse campo conceitual.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA

Segundo Henry(1991), uma das regras vigentes no contrato didático de grande parte das salas de aula é: “Um problema se resolve fazendo operações. A tarefa consiste em encontrar a ‘boa’ operação e realizá-la sem erro. Pelo uso de algumas palavras, o enunciado permite adivinhar a operação a ser feita”. Essas “regras” estabelecidas, muitas vezes implicitamente, podem vir a gerar um *obstáculo didático*², trazendo aos alunos dificuldades para resolverem os *cálculos relacionais* dos problemas.

Vergnaud(1986) observou que os problemas mais difíceis para os alunos são aqueles em que os verbos que dão a informação numérica são semanticamente contrários à operação adequada à resolução do problema, ou seja, quando se fala em “menos, perdeu, deu” e a operação, ao invés de ser de subtração, como a ‘pista’ leva a crer, na verdade é de adição e vice-versa. Se a criança não tiver uma verdadeira compreensão das relações implícitas no problema,

² Obstáculo didático é definido por Perrin-Glorian(1995) como aqueles obstáculos que parecem depender de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo, que resultam de uma transposição didática.

ou seja, se não estiver atenta aos cálculos relacionais, provavelmente sentirá dificuldade.

A INTERAÇÃO SOCIAL E OS PROBLEMAS ADITIVOS

Originalmente as pesquisas em interação, mais propriamente aquelas que trabalharam com a hipótese do conflito sócio-cognitivo, da escola de Genebra (Doise, Mugny, Perret-Clermont(1975), especialmente), utilizavam tarefas piagetianas, que, em princípio, não são objeto de ensino sistemático na escola. Posteriormente, Perret-Clermont e colegas transferiram esse tipo de investigação à esfera escolar, para verificarem se os resultados eram semelhantes. Com esse objetivo, Schubauer-Leoni e Perret-Clermont(1980), utilizaram conceitos matemáticos nas investigações e verificaram que os resultados são semelhantes aos originais, onde, resumidamente, pode-se afirmar que o trabalho coletivo apresenta melhores e maiores progressos que os trabalhos realizados individualmente. Vygotsky(1995) considera a interação social como o fator que desencadeia o desenvolvimento cognitivo, estimulando o debate e o conflito, que se fundamentam na comunicação social.

Acredita-se que a aprendizagem pode ocorrer de diversas formas. A aprendizagem de um conteúdo ou a resolução de um problema, conjuntamente, pode vir a ser uma situação favorável para que dificuldades sejam superadas. A resolução de um problema pode levar o aluno a refletir sobre tal, mesmo que, às vezes, de forma superficial e fragmentária. Essa reflexão, muitas vezes, não é explicitada e ele não toma consciência sobre seu pensamento. No entanto, na interação, ele precisa explicitar suas idéias para que o colega as conheça e possam, assim, compartilhar esse pensamento de forma que ambos possam construir a solução.

Nessa relação pode-se observar a maneira como cada membro influi no processo de aprendizagem e resolução de problemas do outro. Uma situação escolar em que os alunos devam resolver problemas e devam construir conjuntamente o conhecimento (em conflito ou cooperação), mediado pela explicitação de idéias, pode vir a ser, portanto, uma importante via para a construção do conhecimento.

OBJETIVOS E OPERACIONALIZAÇÃO DA PESQUISA

Este trabalho objetivou identificar estratégias de resolução dos problemas aditivos no pré-teste e suas possíveis modificações na sessão de interação e no pós-teste; analisar as dificuldades dos alunos nos procedimentos de resolução dos cálculos relacionais e suas possíveis superações em função da discussão com o companheiro.

Participaram deste estudo 66 sujeitos de duas quartas séries de uma escola pública estadual de Olinda, Pernambuco.

A seqüência experimental foi composta por um pré-teste, duas sessões de interação e um pós-teste.

O pré-teste foi composto de 16 problemas da classificação de Carpenter e Moser. Os alunos resolveram-nos individualmente, sem interferência. Os objetivos desse pré-teste foram verificar o nível geral de desempenho da turma na resolução dos problemas; identificar os mais difíceis para o grupo, de acordo com o percentual de erros, dentre os quais foram escolhidos cinco para fazerem parte dos problemas propostos nas sessões de interação; identificar e obter dados para serem comparados com o pós-teste.

Nas sessões de interação, o trabalho foi realizado com uma dupla de cada vez. Os alunos resolveram os cinco problemas que se apresentaram como mais difíceis³ para as turmas no pré-teste.

O pós-teste foi realizado individualmente, com os 16 tipos de problemas de Carpenter e Moser, os quais apresentaram a mesma ordem de grandeza nas três situações. Essa etapa ofereceu subsídios para comparar o pré e o pós-teste e analisar os dados obtidos no pré-teste, sessão de interação e pós-teste.

PROBLEMAS MAIS DIFÍCEIS PARA O GRUPO

A tabela 1 apresenta os percentuais de erros dos problemas mais difíceis no pré-teste:

Tabela 1: Percentual de erros, por tipo de problema no pré-teste (problemas que foram selecionados para a sessão de interação).

Tipo de problema aditivo	% de erros
Combinação - parte desconhecida	45

³ Entende-se aqui como problemas mais difíceis aqueles que apresentaram um maior percentual de erros no pré-teste.

Mudança – série inicial desconhecida - situação de Acréscimo	65
Mudança – transformação desconhecida – situação de Acréscimo	68
Comparação - diferença desconhecida - termo a mais	48
Comparação - quantidade maior desconhecida – termo a menos	50

Os tipos de problemas apresentados na tabela 1 são os menos trabalhados em sala de aula e pelos livros didáticos e, os quatro últimos tipos apresentados na tabela trazem em seus enunciados a pista semântica contrária à operação mais eficaz para a resolução do problema.

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ALUNOS

Ao responderem ao pré-teste, os sujeitos utilizaram-se de algumas estratégias. Entretanto, ao resolverem os problemas em interação, eles passaram, a criar diferentes estratégias, a partir das discussões com o colega. No pós-teste, algumas dessas estratégias que surgiram ou se aperfeiçoaram nas sessões de interação, passaram a aparecer nas resoluções feitas pelos sujeitos individualmente. A seguir, apresenta-se uma análise do surgimento das estratégias de resolução dos problemas.

- **Fazer uma adição e uma subtração e verificar qual é o resultado mais válido**

Essa estratégia surge no pré-teste, entretanto, a frequência é maior nas sessões de interação e no pós-teste, pois, pelo acordo de trabalho, na interação eles deveriam verificar a validade das respostas. Eles, então, faziam as duas contas e verificavam qual das respostas se encaixava melhor ao que era proposto pelo problema.

No pós-teste essa estratégia voltou a aparecer com uma frequência maior que no pré-teste, tendo em vista que, agora, grande parte dos sujeitos parecia ter uma preocupação maior sobre o que o problema pedia. Além disso,

eles passaram pela experiência de poderem adquirir formas diferentes de resolução, através das discussões com o colega.

- **Prova real**

No pós-teste, a utilização da prova real, para verificar a correção da resposta ou do pensamento no sentido de validar uma hipótese, apresentou uma maior frequência do que no pré-teste, onde ela surgiu em apenas 10% dos casos; no pós-teste ela chegou aos 33%, predominando nos alunos que fizeram parte das duplas em que essa prática foi bastante presente na interação.

Temos como exemplo uma dupla (Ama./Van.) em que as alunas resolveram todos os problemas do pré-teste sem se utilizarem da prova real. Na sessão de interação, essa passou a ser uma prática constante da dupla. No pós-teste as duas alunas, individualmente, utilizaram-se desse recurso nos seus cálculos. Essa foi uma estratégia criada pela dupla, no momento da interação, depois elas passaram a adotá-la como válida em outros momentos, atingindo, assim, um dos objetivos de interagir: trocar idéias, construí-las e reconstruí-las conjuntamente e, depois, utilizá-las em outros momentos da vida, em outros contextos. Segundo Brousseau(1996), quando o aluno consegue utilizar o conhecimento construído em outras situações, realmente houve aprendizagem.

- **Complemento**

Os alunos buscam um número que, juntando com um dos números do problema, possa chegar ao total ou ao outro número que o problema dá. Eles realizam-na da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 432 \\ + \quad \underline{\quad\quad\quad} \\ 795 \end{array}$$

(Números do problema de tipo **Combinação – parte desconhecida**: “Uma fábrica de picolés produziu, hoje, 795 picolés. 432 eram de morango e o restante de chocolate. Quantos eram os de chocolate?”)

Eles tentam encontrar um número que, somado com 432, dê como resultado 795, mostrando, assim, que compreenderam que o problema traz o todo e uma das partes, e que cabe a eles encontrarem a outra. A maioria das duplas buscou um número dentro de uma lógica, ou seja, começaram buscando 3 centenas e assim por diante, porém, outras buscaram um número aleatoriamente, colocando qualquer número para ver se conseguiam chegar ao resultado desejado. Algumas vezes contavam de um em um e verificavam que não era muito válido fazerem dessa forma: *“vai gastar muito tempo”* e passavam a tentar encontrar formas mais eficientes, como, por exemplo, um número a partir de 3 centenas.

Essa foi uma estratégia que não apareceu nos protocolos do pré-teste. Essa estratégia surgiu como sugestão de um dos sujeitos da dupla, e quando conseguiram resolver através dela, o outro passou a sugerir a sua utilização: *“E se a gente fizer como da outra vez?”* (fazendo referência a este tipo de resolução), mostrando que aceita como válida a estratégia sugerida pelo outro. Muitas vezes, tentaram utilizá-la em outros problemas, porém perceberam que é um procedimento que só vale para alguns determinados tipos de problemas. É uma estratégia que apareceu no pós-teste, nos protocolos dos sujeitos que a utilizaram na interação.

Portanto, esses casos podem levar a crer que a interação ajudou o aluno a criar um significado para o problema, a partir da significação do outro, além de considerar a estratégia do outro como válida e incorporá-la na sua forma de resolução. Os alunos que sugeriram esse tipo de estratégia também continuaram utilizando-a, apesar de não a terem usado no pré-teste, talvez porque perceberam que sua formulação foi validada a partir do confronto com o ponto de vista do companheiro.

Vejamos como exemplo uma dupla (Car./Ira.) que, no pré-teste (individualmente), utilizou-se apenas dos números propostos nos problemas e realizou uma conta; na sessão de interação surge a idéia de utilização da estratégia de complemento, porém, a sugestão é feita dizendo que era preciso contar de um em um até chegar ao número que se pretendia. A colega afirmou que não era preciso contar de um em um. Era suficiente fazer uma conta, mas, ainda não sabia como fazê-la. Ambas tentaram de várias formas resolver essa dúvida, até que chegaram à conclusão de que bastaria encontrar um número

que completasse o outro para chegar ao objetivo. Essa estratégia foi adotada como válida por essas alunas no pós-teste.

Pode-se perceber que o companheiro que recebeu a sugestão de uma estratégia considerou esse procedimento válido e incorporou-o como estratégia para ser utilizada na resolução de outros problemas. Essa atitude consegue mostrar que um dos objetivos das situações didáticas foi atingido, o de utilizar o conhecimento construído em outras situações, ou seja, o de reaplicá-lo em diversos contextos. É interessante, também, observar que eles percebem que nem sempre uma estratégia eficaz na resolução de um problema é eficaz na resolução de outro.

CONCLUSÕES

Ao interagirem na resolução de um problema, os sujeitos constroem uma hipótese que não estava presente no começo da discussão. Mesmo que ela surja de um dos membros, logo os dois se apropriam da mesma e passam a trabalhar nela. Quando é validada, passam a utilizá-la em outros contextos. Dialogando e tentando chegar a uma resolução conjunta, os alunos chegam a reconstruir suas idéias em função do diálogo e discussão com seu companheiro. Em algumas situações, o aluno atua não só em função do que ele pensa, mas também, em função do pensamento do companheiro, uma vez que estão trabalhando conjuntamente. Acredita-se, portanto, que tal contexto de atividade funciona como importante amplificador das possibilidades de resolução de problemas dos alunos envolvidos.

Uma observação importante constitui-se na modificação das estratégias após a interação com um colega que apresentou suas hipóteses e que conseguiu, junto com o companheiro, validá-las. As hipóteses de resolução surgiram por sugestão de um deles. Eles tentaram aplicá-las e quando conseguiram sucesso, adotaram como válida e tentaram aplicá-la em outras situações, fato que ocorreu durante a própria sessão de interação e, também, no pós-teste.

A estratégia que predominou, inicialmente, foi a de fazer uma conta, muitas vezes, buscando-se uma pista no enunciado do problema. Este é um fato comumente utilizado nos contratos didáticos de matemática. O experimentador, no entanto, perguntava se a resposta encontrada era válida

para o problema, e isso fazia-os voltarem à questão e tentarem, de alguma forma, compreendê-lo. A partir de então, surgiram novas estratégias, na intenção de encontrarem juntos um significado para o problema. Ocorreram interessantes discussões, trocas e construções de idéias, após as primeiras tentativas. Acredita-se, aqui, que a oportunidade de construir hipóteses, em conjunto, com um igual é bastante válida.

Pode-se, finalmente, analisar que neste grupo específico houve uma mudança positiva em função da interação, pois os sujeitos mostraram que adquiriram formas diferentes de verem a resolução de problemas, procurando compreendê-los e construindo significados para eles, apresentando novas estratégias e novas formas de discuti-los. Isso pôde ser observado independentemente do tipo de problema que estava sendo resolvido, do gênero dos sujeitos envolvidos e do padrão que se estabeleceu na interação. Entretanto, a personalidade, os comportamentos dos sujeitos e, algumas vezes, o nível de habilidade influenciaram nas relações e nas discussões.

BIBLIOGRAFIA

BORBA, R.; PESSOA, C. & SANTOS, R. O livro didático e as estruturas cognitivas. *Anais do XXVI Congresso Interamericano de Psicologia*, SP, 1997, p.333.

BORBA, R.; PESSOA, C. & SANTOS, R. Analisando as estruturas aditivas dos livros didáticos de matemática de 1ª a 4ª série. *Anais do VI ENEM, São Leopoldo*, 1998, p.87.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In.: Parra & Saiz (orgs.) *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CARPENTER, T. & MOSER, J. The development of addition and subtraction problem-solving skill. In Carpenter, Moser e Romberg (orgs.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey : Erlbaum, 1982, p.9-24.

DOISE, W.; MUGNY, G. & PERRET-CLERMONT, A-N. Social interaction and the development of cognitive operations. *European Journal of Social Psychology*, 5, 1975, p.367-383.

HENRY, M. *Didactique des mathématiques: une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants*. Paris : Publications IREM, 1991.

PERRIN-GLORIAN, M-J. Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática. *Cadernos de Educação Matemática, São Paulo : PUC-SP, 1995.*

PESSOA, C. & FALCÃO, J. Estruturas aditivas: conhecimentos do aluno e do professor. *Anais do IV EPEM, 1999* (meio magnético).

SCHUBAUER-LEONI, M. & PERRET-CLERMONT, A-N. Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre des problèmes additifs. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1980*, p.297-350.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica, 1*, 1986, p.75-90.

VYGOTSKY, L. *Obras escogidas*, VIII. Madrid : Aprendizaje-Visor, 1995.