

## **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**

SETSUKO TAKARA MABUCHI

PUC/SP

Nas últimas décadas, observando as práticas dos professores de Matemática, constatou-se que conteúdos geométricos eram, cada vez mais, relegados a segundo plano; como consequência, várias gerações de estudantes apresentam uma formação deficiente em geometria, incluindo os atuais professores. Uma das hipóteses é que conteúdos de geometria que os professores não aprendem durante sua formação também não são por eles ensinados.

Quanto à transformação geométrica, apesar de ser um tema apresentado em várias propostas curriculares desde a década de 70, é pouco conhecida e, portanto, raramente abordada por professores de Matemática em suas aulas. Além de explorar a idéia de movimentos (presentes em telas de vídeo), o ensino da geometria, usando as transformações geométricas como ferramentas é mais intuitivo e significativo para estudantes do ensino fundamental do que a abordagem por métodos tradicionais.

O objetivo deste trabalho é contribuir para uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas, destacando a conveniência de seu estudo nos cursos de formação de professores.

Usando resultados de pesquisas bibliográficas, são apresentados os aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos das transformações geométricas; as investigações das hipóteses e conhecimentos prévios de estudantes sobre o assunto e a presença do tema nas propostas curriculares oficiais. Além disso, por meio de um estudo de caso, é apresentada a abordagem das transformações geométricas realizada num curso de formação de professores.

## **Aspectos históricos, epistemológicos e matemáticos**

No desenvolvimento histórico das transformações geométricas, consideraram-se as contribuições de matemáticos desde Euclides, com *Os Elementos*, até Felix Klein, com o Programa Erlanger no século XIX. Destacou-se, nesse intervalo de tempo, o trabalho de Descartes e Fermat na Geometria Analítica e de Desargues e Pascal no século XVII. Assinalou-se a importância do desenvolvimento da Geometria Projetiva, realizada por Poncelet e Chasles no século XIX, com o uso das transformações geométricas e da noção de invariantes na geometria.

Na investigação epistemológica sobre o tema, assinalou-se a análise de Piaget e Garcia, considerando que, apesar de as primeiras idéias sobre transformações de figuras terem sido esboçadas por Euclides, foram necessários mais de dois mil anos para essas noções serem incorporadas à geometria. A suposição desses autores é que foi preciso que outros métodos ou conceitos se desenvolvessem para que tais noções fossem aprofundadas. As contribuições da álgebra e da análise, desenvolvidas nos séculos XVI, XVII e XVIII, foram fundamentais para a gênese das transformações geométricas como transformações no plano e no espaço.

Na análise matemática, destacou-se que a mudança entre os quadros, geométrico e algébrico, permitiu esclarecer e evidenciar aspectos importantes que envolvem a noção nesses dois campos, além de mostrar a conexão existente entre a álgebra e a geometria.

## **Investigações das hipóteses e conhecimentos prévios dos estudantes**

A partir da década de 80, investigações apontaram que, nas atividades sobre reflexão em reta, a escolha de algumas variáveis didáticas como posição do eixo no papel, complexidade da figura, posição relativa eixo-objeto e outras, levavam a procedimentos incorretos ou resoluções específicas dos alunos.

Esses estudos são fontes importantes para um melhor conhecimento dos procedimentos, dificuldades e erros dos estudantes e contribuem para que o

professor planeje atividades para superar os obstáculos na aprendizagem do assunto.

No trabalho, são apresentadas pesquisas sobre reflexões em retas desenvolvidas na Inglaterra por Hart e outros, em 1985, com estudantes de 14 anos; na França por Grenier, em 1985, com alunos de 13 e 14 anos; e na Espanha, por Gutierrez e Jaime, em 1987, na Escola de Magistério.

Atividades semelhantes às utilizadas nas pesquisas foram usadas para analisar os desempenhos de alunos do ensino fundamental e médio de duas escolas da rede particular de ensino de São Paulo. Verificou-se que os procedimentos eram semelhantes aos apontados pelas pesquisas.

### **Presença das transformações geométricas nos currículos escolares**

A partir da década de 60, mudanças no ensino da Matemática levaram a reformulações nos currículos escolares. As propostas das três últimas décadas apresentam enfoques diferentes sobre o tema.

No início da década de 70, as transformações geométricas foram introduzidas nas propostas curriculares oficiais no Estado de São Paulo, no documento *Guia curricular de Matemática para o 1º grau*, com orientações dadas pelo movimento Matemática Moderna. O formalismo dos conteúdos era muito precoce para os estudantes de 11 a 14 anos.

Em 1986, em São Paulo, foi elaborado o documento *Proposta Curricular para o Ensino da Matemática*, que sugeria introduzir noções de simetria a partir do ciclo básico (7 e 8 anos), usando materiais como espelhos e papéis para dobraduras.

Em 1994 e 1996 foi publicada, pela Cenp-SP, a coleção *Experiências Matemáticas - 5ª a 8ª série*, com atividades destinadas a promover a participação do aluno na construção dos conhecimentos.

No Brasil, novas recomendações sobre as transformações geométricas no ensino fundamental foram apresentadas nos PCNs em 1997 e 1998.

Propostas curriculares oficiais de outros países (Estados Unidos, França e Espanha) indicam presença marcante das transformações geométricas no ensino da geometria.

Por ser mais acessível do que as propostas curriculares, o livro didático torna-se um importante material de apoio para o professor organizar aulas, e, por isso, uma breve análise de como as transformações geométricas são abordadas nas coleções didáticas é apresentada no trabalho. Alguns livros incorporaram as novas propostas ao ensino da geometria, principalmente os de 1ª a 4ª série. Mas ainda há aspectos a serem considerados em livros de 5ª a 8ª série, como a desvalorização da geometria, relegada na maior parte das vezes aos últimos capítulos, a falta de conteúdos importantes, conteúdos e abordagens inadequadas, sem uma ligação clara entre as transformações geométricas e as noções de congruência e de semelhança. São poucas as coleções didáticas de 5ª a 8ª série que abordam o tema como ferramenta para o ensino da geometria.

### **Estudo das transformações geométricas em curso de formação de professores**

Este trabalho relata o acompanhamento de uma turma de professores em formação num curso realizado na PUC, em 1999, para professores com licenciatura curta em Ciências e que complementavam a formação em Matemática. Delineado o perfil desse grupo, observou-se que a maior parte tinha de 1 a 5 anos de experiência docente em Matemática e alguns nunca haviam lecionado essa disciplina. Cerca de 50% assinalaram que haviam estudado geometria apenas no curso de licenciatura e cerca de 50% admitiram não ensinar ou ensinar muito pouca geometria nas aulas de Matemática.

No teste realizado para verificar os conhecimentos prévios dos professores, verificou-se que alguns deles possuíam noções superficiais de simetria em figuras e cerca de 70% desconheciam termos como vetor, translação e rotação.

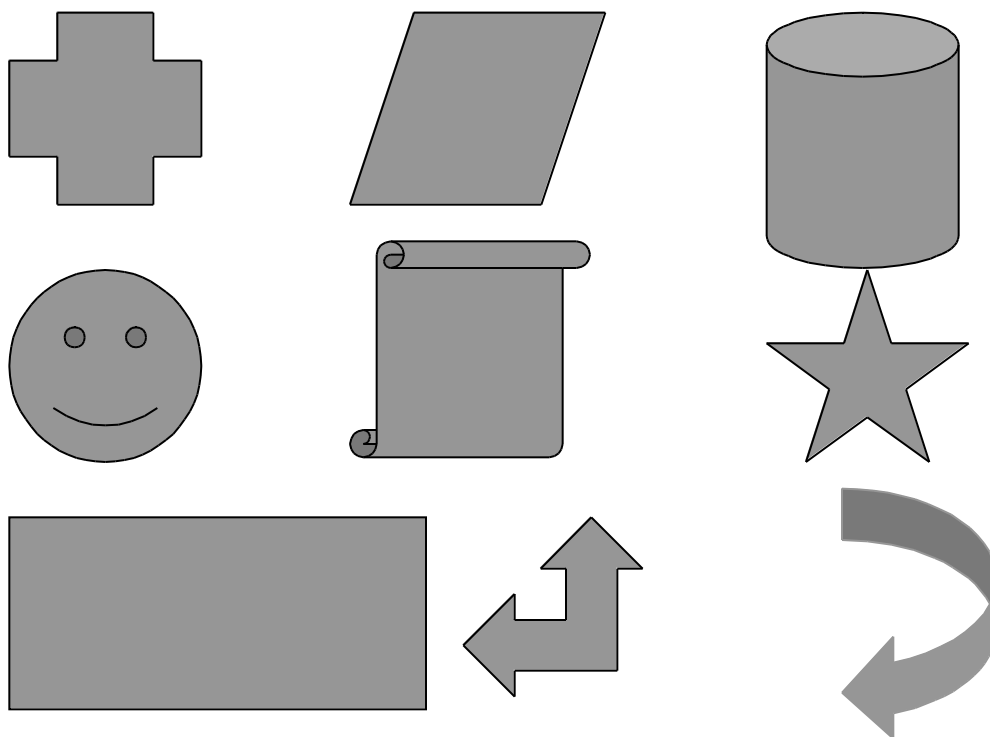
Com base nesse diagnóstico, verificou-se que esses professores não tinham conhecimentos matemáticos sobre transformações geométricas, e um

domínio sobre o assunto é fundamental para que seja abordado nas salas de aula. Optou-se, então, por realizar um trabalho com os conteúdos matemáticos sobre as transformações geométricas e, ao mesmo tempo, discutir situações didáticas que orientassem as práticas docentes.

Procurou-se fundamentar o trabalho nos estudos de pesquisadores em educação matemática, como nos níveis de Van Hiele, na teoria das situações didáticas de Brousseau (modelização do processo de aprendizagem), e na dialética ferramenta-objeto (organização do ensino em fases), e jogo de quadros de Douady. As atividades tinham por objetivo permitir que a construção dos conhecimentos geométricos fosse feita pelos próprios professores e foram extraídas da apostila elaborada pelo professor-doutor Saddo Ag Almouloud da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Algumas dessas atividades foram:

### Atividade 1: Dobrando e coincidindo<sup>3</sup>

Entre as figuras abaixo, recorte aquelas que podem ser dobradas uma única vez, de modo que as duas partes coincidam.



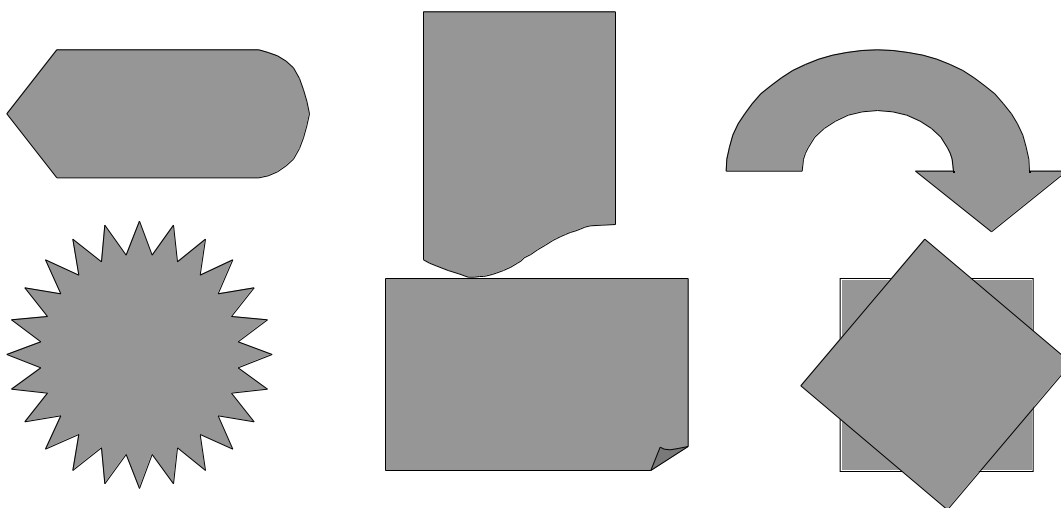
A seguir, cole abaixo, destacando com lápis e régua, o vinco da dobradura que permitiu fazer com que as duas partes coincidissem. Figuras como essas, para as quais existe uma dobradura mediante a qual as duas partes obtidas coincidem, são denominadas **figuras simétricas** e o vinco da dobradura é seu **eixo de simetria**.

2) Nem sempre é possível dobrar a figura pelo seu eixo de simetria (se é que ela possui um).

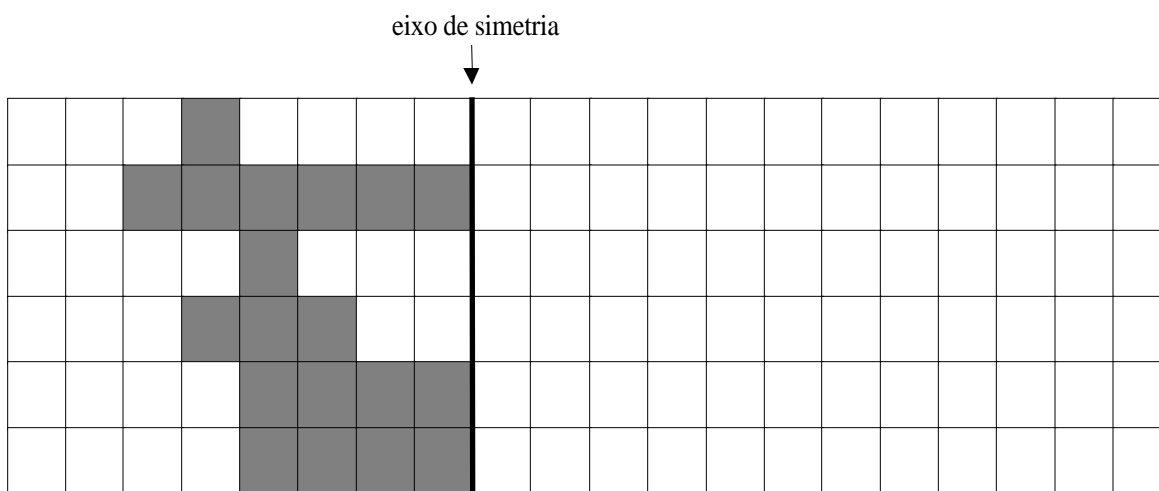
Imagine que as figuras abaixo tenham sido desenhadas na lousa. Para prever se elas são ou não figuras simétricas e, em caso positivo, onde se

<sup>3</sup> Atividade extraída de um trabalho desenvolvido pelo Projeto de Educação Continuada (PEC) na PUC-SP.

localizam seus eixos de simetria, você não poderia dobrar a lousa. Explique como faria para tal previsão, desenhando os eixos de simetria.



3) No quadro abaixo está desenhada parte de uma figura simétrica e seu eixo de simetria. Complete-a



O objetivo da atividade proposta era introduzir a noção de figura simétrica e de eixo de simetria, de forma experimental, realizando dobras nas figuras do primeiro item e, no segundo, sem a manipulação das figuras.

A noção de figura simétrica foi dada como a figura repartida, por meio de uma reta, em duas partes, as quais se superpõem quando é feita uma dobra pela reta. Esta seria o eixo de simetria da figura. Essa “definição local” mostrou-se útil na resolução dos problemas e também como meio de validação das conclusões.

Nosso propósito era mostrar, porém, que é uma definição cujo uso se limita a figuras recortáveis e, por isso, deveria ser substituída por outros procedimentos mais eficazes.

A complexidade da figura e o número de eixos de simetria foram variáveis que influíram nas estratégias dos professores. Observamos que algumas pessoas não conseguiam imaginar o eixo de simetria de determinadas figuras, chegando mesmo a recortá-las e dobrá-las para poder visualizar os eixos.

### **Atividade 3: Descobrindo a simetria ortogonal (ou axial)**

- a) Numa folha de sulfite marque uma reta  $d$  e um ponto  $P$  fora dela.
- b) Dobre a sua folha sulfite seguindo a reta  $d$  e marque o ponto coincidente com  $P$ .
- c) Desdobre a sua folha e nomeie esse ponto de  $P'$ .
- d) Crie o segmento  $PP'$ , nomeie de  $O$  a interseção do segmento  $PP'$  e da reta  $d$ .
- e) Compare os segmentos  $OP$  e  $OP'$ . Qual é a natureza dos ângulos formados pela reta  $d$  e o segmento  $PP'$ ? O que representa a reta  $d$  para o segmento  $PP'$ ?

#### **Definição:**

- 1 - O ponto  $P'$  assim construído é o simétrico de  $P$  em relação à reta  $d$ .
- f) Qual é o simétrico de  $P'$  em relação à reta  $d$ ? Explique por quê.
- 2 – Dizemos que os pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação à reta  $d$ . A reta  $d$  é chamada eixo de simetria.
- g) Apoiando-se no que você acabou de descobrir, explique a seguinte asserção: “O ponto  $A'$  é simétrico de um ponto  $A$  em relação a uma reta  $t$ ”.
- h) Proponha um processo para a construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto  $M$  em relação a uma reta  $r$ .

O objetivo era fazer o professor elaborar o conceito matemático de ponto simétrico a outro e chegar a algum processo de construção com régua e compasso.

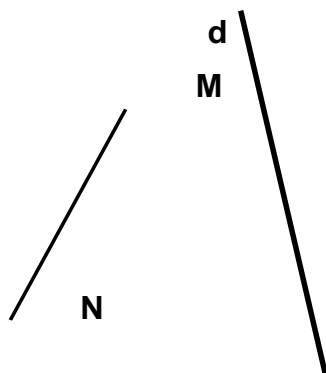


Os diversos itens da atividade estabeleciam relações e informações que permitiam elaborar o conceito e, finalmente, a construção do ponto simétrico a outro em relação a uma reta, mas previam-se dificuldades nesses itens, pois o teste diagnóstico realizado com o grupo havia detectado problemas na análise de relações geométricas entre figuras.

Com base nos princípios da dialética ferramenta-objeto, é importante usar a mudança de quadros ou domínios. Nesta atividade, a interação dos diversos quadros, das grandezas, das medidas, dos conceitos geométricos e das construções com régua e compasso, permitiu elaborar o conceito e um processo de construção do simétrico de um ponto em relação a uma reta. Foi uma atividade essencial para que esse conceito fosse apreendido e uma construção fosse estabelecida. A falta de familiaridade com a linguagem geométrica foi, de fato, um aspecto que precisou ser trabalhado em todas as atividades do curso, para que os professores percebessem a importância do uso correto dos termos geométricos e da precisão da linguagem matemática.

#### **Atividade 4: Construindo o segmento simétrico de um segmento dado**

a) Crie um segmento MN e uma reta d conforme desenho abaixo.



b) Explique como construiria o simétrico do segmento MN em relação à reta d. Construa-o e nomeie-o de OP.

c) Compare os segmentos MN e OP. Justifique a sua resposta.

d) Seja L um ponto qualquer da reta d. Qual é o simétrico de L em relação à reta d?

Os objetivos eram: reconhecer que um segmento é um conjunto de pontos e que seu simétrico é o segmento determinado pelos simétricos dos pontos do segmento dado; destacar que o simétrico de um segmento em relação a uma reta é outro segmento congruente ao segmento dado; destacar que os pontos do eixo de simetria são os pontos fixos da reflexão em reta.

A maior dificuldade consistiu em não considerar o segmento como um conjunto de pontos, bastando determinar as imagens destes para obter o simétrico do segmento. Aqui, o aspecto pontual da figura não foi levado em consideração, sendo o segmento apreendido como um todo. Para completar o simétrico, estimavam visualmente a localização da outra extremidade, tomando um ponto tal que o segmento imagem ficasse congruente com o segmento dado.

Aqui, observou-se o fato — apontado pela pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da simetria axial de Grenier— de que não é suficiente saber determinar o simétrico de um ponto para saber determinar o simétrico de um segmento ou de uma figura qualquer.

Na discussão da resolução, observou-se que surgiram erros e contradições como, por exemplo, quando um grupo determinou como imagem de um segmento qualquer outro segmento congruente a ele e observou que nem todo segmento congruente a outro é seu simétrico.

Nas últimas aulas do curso, propusemos que uma situação didática semelhante fosse vivenciada pelos professores com seus alunos do ensino fundamental. Exercícios simples sobre reflexão em reta foram apresentados a alunos do ensino fundamental ou médio para que eles mesmos chegassem à noção de figura simétrica à outra e observassem as principais propriedades relacionadas à figura e sua simétrica.

## **Conclusões**

A respeito das transformações geométricas, são importantes para a formação de um professor de Matemática: o conhecimento do desenvolvimento

histórico e epistemológico; os aspectos matemáticos e didáticos e a análise das propostas curriculares, destacando a presença marcante do tema nos currículos oficiais do Brasil e de outros países.

Quanto ao desempenho dos professores em formação e resultados obtidos, constatou-se que: as atividades de construção com régua e compasso foram essenciais para explicitar as características da reflexão em reta e em ponto; houve sensível melhora na comunicação matemática; erros e concepções semelhantes aos diagnosticados pelas pesquisas com estudantes de 14 anos foram detectados nas resoluções dos professores em atividades sujeitas às mesmas variáveis didáticas.

O trabalho dos professores em formação com seus alunos foi fundamental para colocar em prática as experiências vivenciadas no próprio curso e ressaltou também a importância de iniciativas de pequenas investigações e estudos com estudantes, que permitam conhecer suas concepções e dificuldades.

As competências que o professor desenvolver durante seu processo de formação, assim como as concepções de ensino e aprendizagem que incorporar nesse período irão marcar sua atuação profissional. Daí a importância de que ele tenha oportunidade de pôr em prática atitudes e procedimentos metodológicos que lhe servirão de modelo didático em suas atuações em sala de aula.