OFICINA 2F97

EXPLORANDO PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

LILIAN NASSER (CETIQT/SENAI)
JOSÉ ALEXANDRE RAMOS PEREIRA (SEE/SME-RJ)
CARLOS ARTHUR GARCIA GOULART (SME-RJ)
Projeto Fundão – IM/UFRJ

OBJETIVOS: - valorizar o ensino de geometria;
- desenvolver o raciocínio lógico através da resolução de problemas geométricos interessantes;
- estimular a formulação de conjecturas;
- apontar vantagens do uso de softwares de geometria dinâmica para visualizar a solução de problemas geométricos.

PÚBLICO-ALVO:

- Professores de Matemática do 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e do ensino médio;
- Alunos de graduação de Matemática.

Durante anos, o ensino de geometria foi deixado em segundo plano, o que ocasionou a falta de ênfase em atividades que exigissem raciocínio lógico em sua resolução, e a total ausência de domínio do processo dedutivo. Como conseqüência, observa-se que, atualmente, os alunos do ensino fundamental e médio não são estimulados a pensar ou raciocinar, e principalmente, não se pede que justifiquem suas respostas.

Um grupo do Projeto Fundão (Instituto de Matemática da UFRJ) desenvolveu projeto de pesquisa para investigar meios de aprimorar a habilidade de argumentação de alunos a partir da 5ª série, contando com a colaboração de professores das redes municipal e estadual do Rio de Janeiro e licenciandos do IM-UFRJ. Este estudo sugere que seja valorizada a experimentação e a argumentação informal, como um primeiro passo para o desenvolvimento da habilidade de argumentação.

Segundo (Hanna, 1990), há vários tipos de prova, e a nível do ensino fundamental e médio deve-se aceitar não apenas a prova formal, aquela que é tradicionalmente aceita pelos matemáticos, mas também deve ser incentivada a prova ingênua, entendida como uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependo da idade e do ano de escolaridade do aluno. Balacheff (1987) e Rezende & Nasser (1994) identificaram os seguintes tipos de provas:

- justificativa pragmática: o aluno se baseia apenas em alguns exemplos para concluir que o resultado é verdadeiro;
- recorrência a uma autoridade: justificativa baseada na autoridade do professor, ou do livro-texto;
- exemplo crucial: o aluno justifica com um exemplo um raciocínio que poderia ser genérico;
- justificativa gráfica: baseada apenas numa figura.

- justificativa informal: o aluno explica informalmente porque o resultado é verdadeiro, sem nenhum rigor matemático.

Desse modo, os alunos devem ser incentivados a justificar suas respostas da melhor maneira possível, aceitando-se que usem exemplos, contra-exemplos, figuras, apóiem-se numa autoridade, ou apresentem uma argumentação informal (Rezende e Nasser,1994). Várias estratégias com esse objetivo foram testadas em sala de aula, com resultados positivos. Uma das estratégias que se mostrou eficiente foi a aplicação de problemas-desafio, que exigissem raciocínio lógico, e até construções geométricas adequadas.

A prova pode exercer diversas funções: validar um resultado, explicar ou elucidar, preparar para o domínio do processo dedutivo, promover descobertas, além de promover a comunicação das idéias. Na escola básica, no entanto, o principal papel da prova deve ser o de explicar porque o resultado é verdadeiro.

A habilidade de argumentar deve ser construída nos alunos, desde as séries iniciais, através de atividades variadas como jogos, problemas desafio, ou exigindo justificativas para todas as respostas. Uma estratégia que auxilia bastante é: ***estabelecer conjecturas e verificar sua validade*****,** com o auxílio de softwares de geometria dinâmica: Cabri Geomètre ou Geometer's Sketchpad.

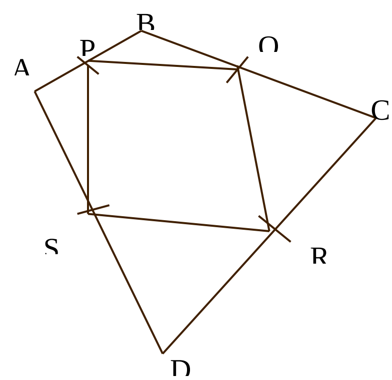
Nesta oficina, será discutida a importância do uso desses softwares de geometria dinâmica como ponto de partida para a exploração de problemas geométricos. Serão apresentados alguns problemas curiosos e teoremas geométricos antigos (Gerdes & Cherinda, 1991), que em geral não aparecem nos livros didáticos. Vamos explorar soluções alternativas e mostrar como os softwares de geometria dinâmica podem ser úteis na visualização da solução, e na formulação de conjecturas que resolvam o problema. Depois de convencidos da validade ou não do resultado, os alunos devem justificá-lo ou procurar um contra-exemplo.

Atividades:

1) Teorema de Varignon (séc. 17):

Sejam ABCD um quadrilátero qualquer, e P, Q, R, S os pontos médios de seus lados.

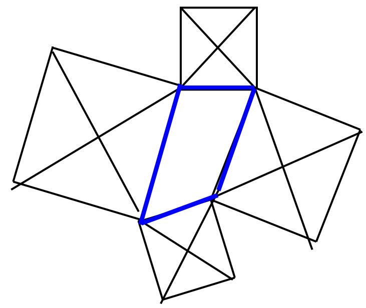
Então o quadrilátero PQRS é um paralelogramo.



Verificar a validade do resultado experimentalmente

Demonstrar o teorema

2) Considere um quadrilátero qualquer. Constrói-se no seu exterior quadrados sobre os seus lados, e determina-se os centros desses quadrados. Então:



✓ Ligando os centros dos quadrados construídos sobre lados opostos, obtém-se segmentos que têm o mesmo comprimento e são perpendiculares;

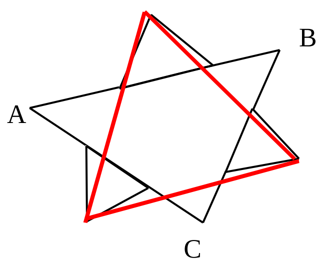
✓ Será que os centros dos quadrados construídos formam um novo quadrado ?

✓ Se o quadrilátero original for um paralelogramo, verifica-se que os quatro centros dos quadrados construídos sobre os lados constituem os vértices de um novo quadrado.

3) Teorema de Napoleão (1769-1821)

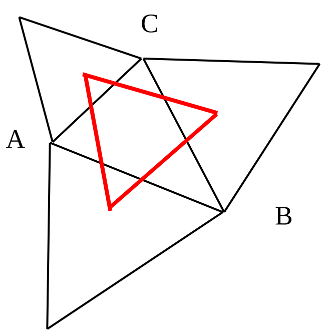
✓ **1ª versão**

Considere um triângulo escaleno ABC qualquer. Divide-se cada lado em três partes iguais, e constrói-se um triângulo equilátero sobre o segmento do meio de cada lado do triângulo. Nessas condições, unindo-se os novos vértices desses três triângulos construídos, obtém-se um triângulo equilátero.



✓ **2ª versão:**

Considere um triângulo escaleno ABC qualquer, e constrói-se triângulos equiláteros sobre seus três lados. O triângulo que tem como vértices os baricentros desses três triângulos é um triângulo equilátero.



Tarefas: - Verificar a validade dos resultados experimentalmente
- Mostrar que as duas versões são equivalentes
- Demonstrar o teorema

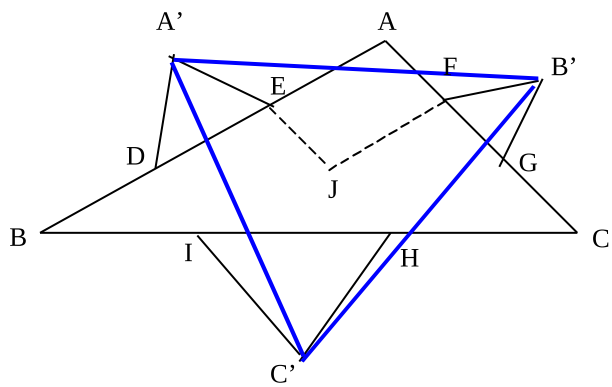
Demonstração do Teorema de Napoleão:

O Teorema de Napoleão foi tema de alguns artigos da Revista do Professor de Matemática da SBM (números 4, 14 e 42), formulado como na 2ª versão, onde algumas demonstrações são apresentadas. Já no livro de Gerdes e Cherinda (1991), o teorema aparece enunciado na 1ª versão, sem demonstração.

Como a demonstração do Teorema de Napoleão não é imediata, embora envolva apenas conhecimentos básicos de geometria, apresentamos abaixo demonstrações para as duas verões, que ,como vimos, são equivalentes.

1ª versão

Considere um triângulo escaleno ABC qualquer. Divide-se cada lado em três partes iguais, e constrói-se um triângulo equilátero sobre o segmento do meio formado sobre cada lado do triângulo. Nessas condições, unindo-se os novos vértices desses três triângulos construídos, obtém-se um triângulo equilátero.



Sejam D e E os pontos que dividem o lado AB em 3 partes iguais, F e G os pontos que dividem o lado AC em 3 partes iguais, H e I os pontos que dividem o lado BC em 3 partes iguais.

Seja J o ponto de interseção das retas paralelas aos lados AB e AC, passando respectivamente pelos pontos E e F. Então AEJF é um paralelogramo e AE = JF, AF = EJ e $\hat{A} = E\hat{J}F$.

Considere os triângulos B'JF e A'JE , que são congruentes pelo caso ALA, pois:

- Os ângulos A'EJ = B'FJ = $\hat{A}$ + 60º;
- JF = A'E pois JF = AE = ED = A'E por construção;
- B'F = EJ pois EJ = AF = FG = B'F por construção.

Temos então : $B'\hat{J}F = E\hat{A}'J = \alpha$ e $A'\hat{J}E = F\hat{B}'J = \theta$

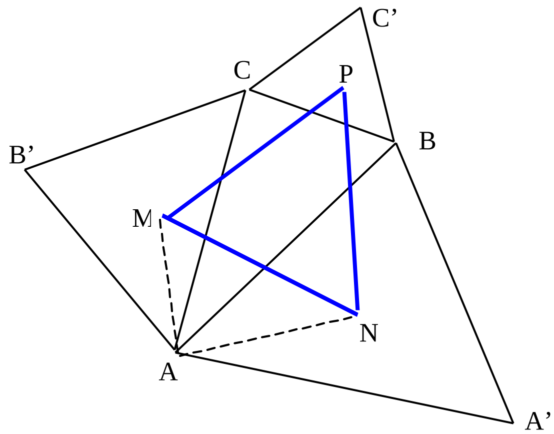
Pela Lei angular de Tales, temos: ($\hat{A}$ + 60º) + α + θ = 180º

Segue que $\hat{A}$ + α + θ = 120º $A'\hat{J}B' = E\hat{J}F + \alpha + \theta = 120^0$

Analogamente, mostra-se que $B'\hat{J}C' = A'\hat{J}C' = 120^0$

Esse resultado mostra que os pontos A' , B' e C' são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro J que os contém.

2ª versão: (adaptado de Matsufuji, RPM 14 p. 47)
Considere um triângulo escaleno ABC qualquer, e constrói-se triângulos equiláteros sobre seus três lados. O triângulo que tem como vértices os baricentros desses três triângulos é um triângulo equilátero.



Sejam M , N e P os baricentros dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC.
No triângulo ABC temos, pela Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha \text{ ,onde } \alpha = \hat{A}$$

Logo, $\cos a = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

A área do triângulo ABC é dada por $S = \dfrac{bc.sen\alpha}{2}$? $sen\alpha = \dfrac{2S}{bc}$

Considere o triângulo AMN. Como M é o baricentro do triângulo AB'C, ***MA*** = $\dfrac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero de lado b ? $MA = \dfrac{2}{3}.\dfrac{b\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$

Analogamente, $NA = \dfrac{c\sqrt{3}}{3}$.

Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo AMN, temos:

$$MN^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\frac{b\sqrt{3}}{3}.\frac{c\sqrt{3}}{3}.\cos(60^0 + \alpha) =$$

$$= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\left(\cos 60^0 \cos\alpha - sen60^0 sen\alpha\right) =$$

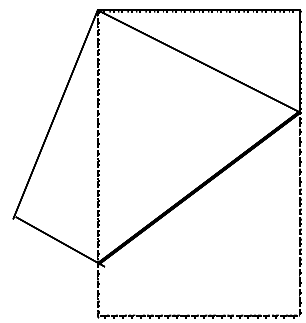
$$= \frac{b^2+c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2S}{bc}\right) =$$

$$= \frac{b^2+c^2}{3} - \frac{b^2+c^2-a^2-4S\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{6}$$

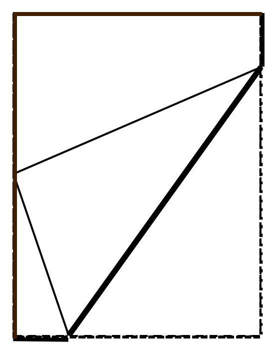
Analogamente, repetindo o raciocínio para os triângulos BNP e CPM, encontramos o mesmo valor para os lados NP e MP, donde segue que o triângulo PMN é equilátero.

4) Problemas de dobras de uma folha de papel

a) Uma folha de papel retangular de 20 cm por 30 cm é dobrada de maneira que os vértices opostos se toquem.
Ache o comprimento da dobra.



b) Uma folha de papel retangular de 20 cm por 30 cm é dobrada de maneira que um vértice toque o ponto médio do lado não adjacente maior.
Ache o comprimento da dobra.



Com certeza, a exploração desses problemas geométricos (com ou sem o uso do computador) é estimulante, e exige a formulação de conjecturas, que devem ser comprovadas ou refutadas, por meio da apresentação de contra-exemplos. São teoremas e problemas estimulantes, que ajudam a ver a geometria como um tópico útil e interessante de ser estudado.

Referências:

Balacheff, N. (1987): Aspects of Proof in Pupils'practice of School Mathematics. In: D. Pimm: Mathematics, Teachers and Children, p. 216-235. Londres.

Dalcín, M. (2000): O problema de Napoleão. Revista do Professor de Matemática nº 42, p.28-30. SBM

Gerdes, P. & Cherinda, M. (1991): Teoremas Famosos da Geometria. Instituto Superior Pedagógico, Moçambique.

Hanna, G. (1990): Some pedagogical Aspects of Proof. In: Interchange, vol. 21, p. 6-13. The Ontario Institute for Studies in Education, 1990.

Matsufuji, A. R. (1989): O teorema de Napoleão. Revista do Professor de Matemática nº 14, p.47-48. SBM

Nasser, L. e Tinoco, L. (1999): Helping to develop the ability of argumentation in mathematics. Atas do PME-23, vol. 1, p. 303. Israel.

Nasser, L. e Tinoco, L. (2001): Argumentação e Provas no Ensino de Matemática. Projeto Fundão, UFRJ.

Rezende,J. e Nasser,L. (1994): Kinds of argumentation used in geometry. Atas do PME-18, vol. 1, p. 66, Lisboa, Portugal;