Oficina: Argumentação em matemática: uma habilidade a ser desenvolvida

Autores:
Prof[a]. Anna Lucia Benevides (SME e Projeto Fundão –UFRJ) e
Prof[a]. Maria Palmira da Costa Silva (SEE, SME-RJ e Projeto Fundão- UFRJ)

Desenvolver o raciocínio lógico seja um dos objetivos incluídos dos planejamentos de quase todos os professores de matemática, embora os alunos passem pela escola sem que sejam apresentadas atividades que desenvolvam esse raciocínio ou que os preparem para o domínio do processo dedutivo. Na última década, os livros de matemática dedicados ao Ensino Fundamental têm sido modernizados - apresentando problemas desafiadores e contextualizados - a cada ano, tornando-se mais interessantes e motivadores. A atual realidade mostra que a maioria dos alunos não está aprendendo a raciocinar enquanto estuda os diversos conteúdos da matemática. Na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para não tem nenhuma finalidade. Não vendo uma ligação significativa do conteúdo com sua vida, o aluno apenas repete os modelos dados pelo professor ou aplica fórmulas. Isto é, em nenhum momento é questionado ou levado a pensar por quê a resposta é aquela ou mesmo se ela é coerente com a pergunta proposta.

O fato supracitado já foi observado internacionalmente. Além disso, os trabalhos com o objetivo de levar o aluno a desenvolver a argumentação e a provar uma afirmação matemática têm constituído uma linha de pesquisa, que vem crescendo e está cada vez mais presente em congressos e publicações de Educação Matemática. Entretanto, porque desenvolver atividades de argumentação em sala de aula?

Galbraith (1981, p. 4) apresentou uma lista de componentes necessários para a compreensão, construção e avaliação de provas:

(a) entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares;
(b) detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação;
(c) utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado;
(d) reconhecer o domínio de validade de uma generalização;
(e) interpretar corretamente condições e afirmativas;
(f) apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência;
(g) reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição;
(h) ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento.

Essa relação de competências confirma nossa crença de que os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo. Logo, se não os ajudarmos a desenvolver habilidades como as citadas por Galbraith, como iremos garantir que serão capazes de argumentar satisfatoriamente? É claro que essas habilidades são adquiridas aos poucos, dependendo da experiência e maturidade dos alunos. De qualquer modo, o professor deve estar ciente de que deve explorar em suas aulas de matemática, atividades variadas - jogos, problemas desafiadores ou simplesmente exigindo justificativas para todas as respostas- com o objetivo de ajudar o aluno a desenvolver tais habilidades durante seus anos escolares.

Observa-se que nas séries iniciais, a criança é mais expontânea e consegue explicar seu raciocínio oralmente e com naturalidade. Conforme os o passar dos anos, essa espontaneidade diminui e o aluno não consegue justificar suas soluções nem oralmente, nem por escrito. Portanto, a essa habilidade deve ser trabalhada desde as primeiras séries, para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, ou numa questão de matemática.

Pensando na atual conjuntura educacional matemática, a equipe do Projeto Fundão elaborou estratégias que são usadas para desenvolver as habilidades de argumentação dos alunos:

· após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema;

· avaliar justificativas apresentadas por outros estudantes;

· problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico são sempre propostos, não importa o tópico que esteja sendo abordado;

· o mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas;

· uso do computador (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la, ou a procurar um contra - exemplo;

· após uma atividade, onde os alunos têm como objetivo encontrar um processo generalizador para solucionar o problema, o professor junto com os alunos reformula uma das redações formuladas, que foi escolhida ao acaso;

· descrever uma atividade realizada na sala de aula.

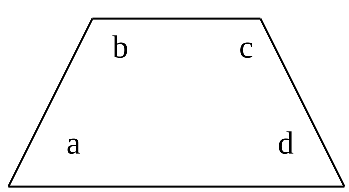
Alguns exemplos de atividades:

Atividade 1

Conteúdos envolvidos: soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros; classificação de quadriláteros.

Enunciado:

A soma dos ângulos internos de um trapézio é 360^o .
Justifique esta afirmação.



$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360^o$$

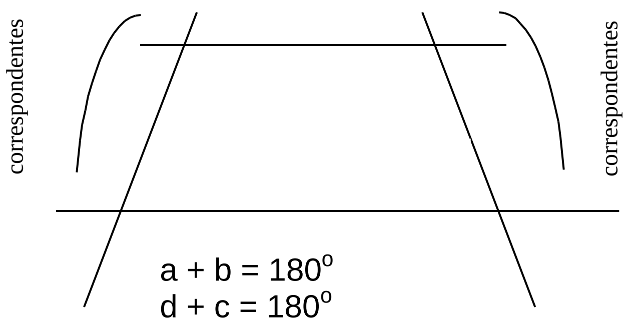
Sér

Comentários:

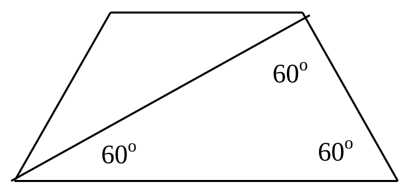
Muitos alunos ainda mostraram dificuldade ou particularizaram. Para provocar a discussão sobre os erros cometidos e desenvolver a capacidade de análise dos alunos, após a resolução individual, algumas soluções foram escolhidas para o desdobramento da atividade, como se segue.

A seguir estão algumas das justificativas apresentadas pelos estudantes. Considerando estas justificativas, responda:

1. Qual justificativa é mais parecida com a que você daria?
2. Qual justificativa é melhor para explicar a um colega?
3. Para qual justificativa seu professor daria melhor nota?

<table>
<tr>
<td>A)


$a + b = 180^o$
$d + c = 180^o$

Então $a + b + c + d = 360^o$.
Obs: ângulos correspondentes são congruentes.</td>
<td>B)


Cada triângulo tem:
$60^o + 60^o + 60^o = 180^o$

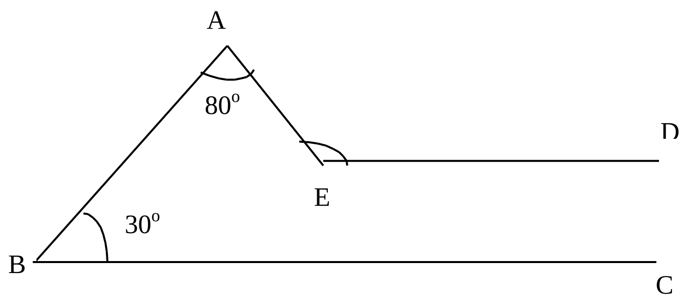
Como são dois triângulos:
$180^o \times 2 = 360^o$.</td>
</tr>
<tr>
<td>C)
Nós já vimos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^o.
O trapézio é um quadrilátero. Então, a soma dos ângulos internos de um trapézio é 360^o.</td>
<td>D)
Cada triângulo tem 180^o .Dividindo essa figura em dois triângulos, obtemos 360^o.</td>
</tr>
</table>

Atividade 2

Conteúdos envolvidos: soma dos ângulos internos de um triângulo; teorema das paralelas cortadas por uma transversal.

Enunciado:

Na figura ED//BC, calcule a medida do ângulo $A\hat{E}D$ e descreva o seu procedimento para encontrá-la.



Série em que foi aplicada: 7ª série;

Comentários:

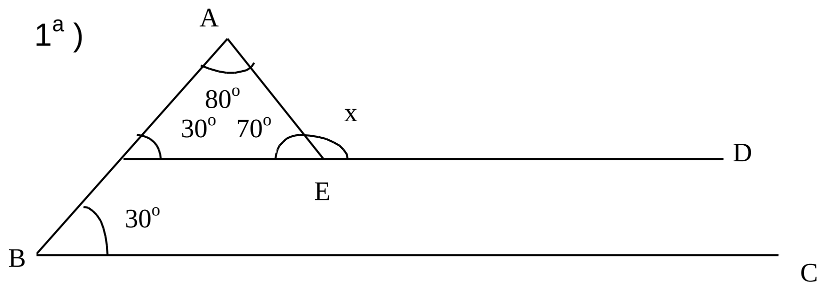
O índice de acerto dessa tarefa foi pequeno, o que motivou a professora desdobrar a atividade. O aluno deveria escolher uma solução entre as selecionadas pela professora e descrevê-la.

Os resultados obtidos foram muito bons. Alguns alunos que erraram a resposta na primeira fase, compreenderam as soluções dos colegas e as descreveram corretamente, o que mostra também um avanço no nível de comunicação de idéias matemáticas. Alguns deles gostaram tanto da atividade que explicaram todas, espontaneamente.

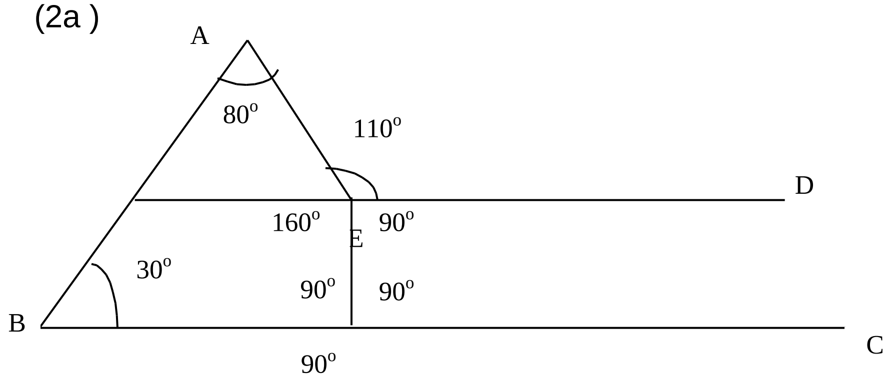
FOLHA DAS RESPOSTAS SELECIONADAS PELA PROFESSORA

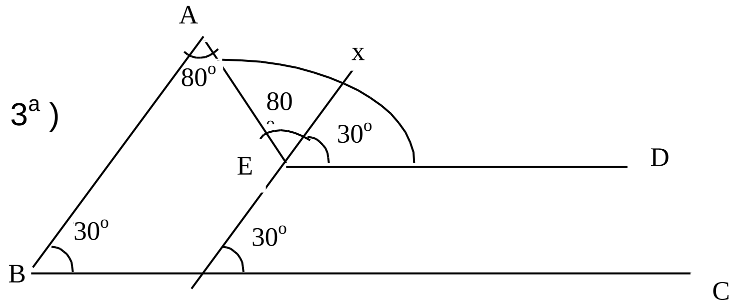
Escolha uma das soluções abaixo, apresentadas pelos seus colegas, e descreva-a.

1ª)



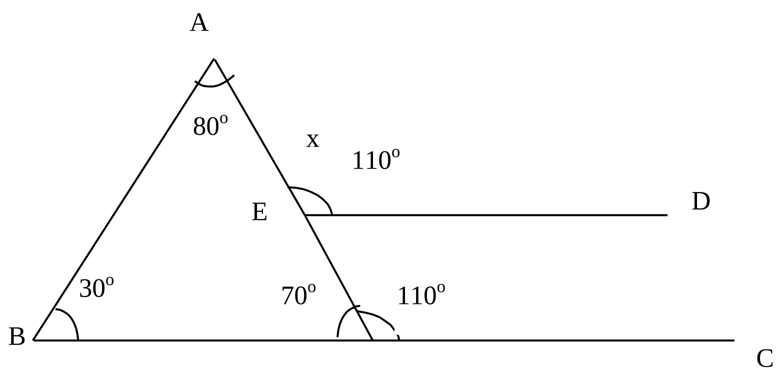
(2a)





3ª)

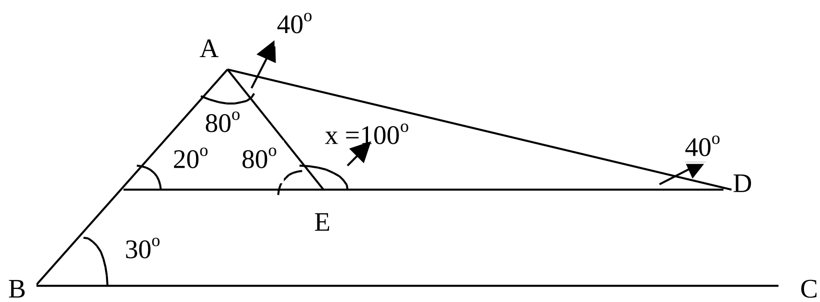
4ª)



Exemplos de respostas

<u>1ª fase</u> (errada):

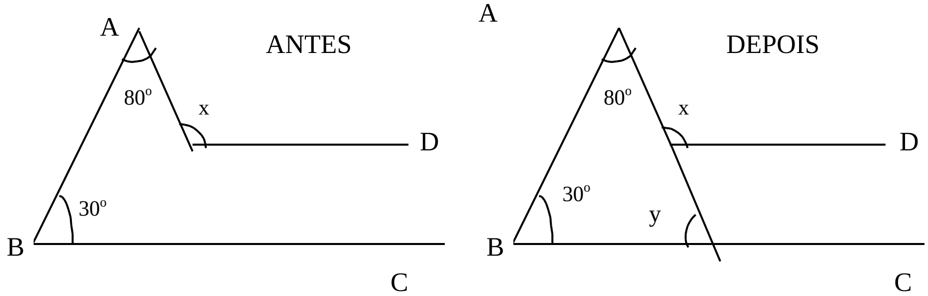
Eu achei isso desenhando o resto do triângulo, ficando assim:

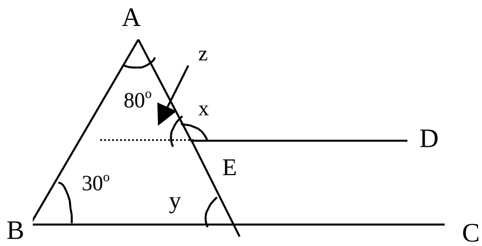


2^a fase: o aluno escolheu a quarta resposta da folha, e explicou assim:

O quarto foi resolvido da seguinte maneira:

Como a soma dos ângulos internos do triângulo dá 180º, a pessoa colocou uma reta ficando assim como está abaixo:





Depois ele descobriu o ângulo y para encontrar o ângulo, ele traçou a reta E e ficou assim como está ao lado:

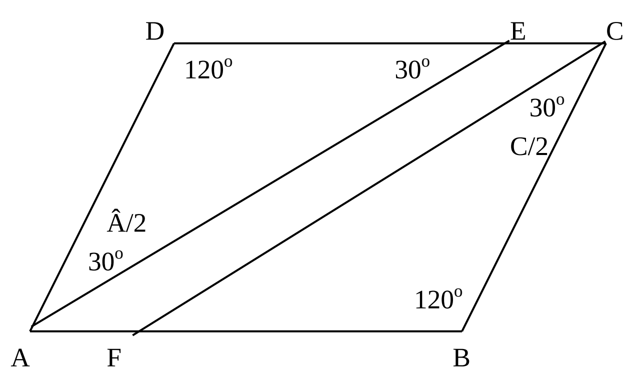
Como o ângulo z é correspondente do ângulo 70, o ângulo z vale 70º sendo assim, x vale 110º.

Durante o trabalho realizado por uma professora do Projeto Fundão- Maria Palmira da Costa Silva- surgiram alguns tipos de provas, atualmente, aceitadas pela comunidade matemática, tendo como exemplos alguns matemáticos consagrados: Resende e Nasser (1994).

Pode-se citar como exemplos de tipos de provas:

- Exemplo crucial: o aluno desenvolve toda a sua argumentação utilizando um exemplo, mas o seu raciocínio pode ser aplicado a um caso geral. Segue abaixo um exemplo desse tipo:

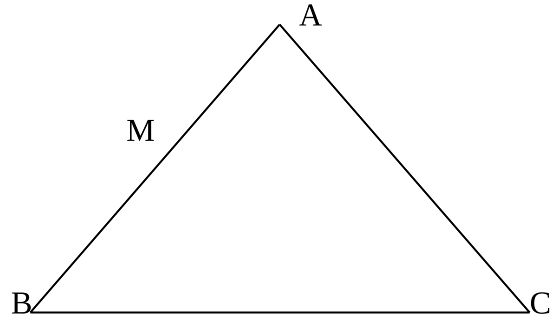
Enunciado: Neste paralelogramo ABCD, AE é bissetriz do angulo Â e CF é bissetriz do angulo C. Prove que AF é igual a CF.



AD é paralelo e igual a CB, pois DACB é um paralelogramo e DC é paralelo e igual a AB. Supondo que o angulo B é de 120^0 e C é igual a 60, pois são suplementares. Então, C é igual a 30^0, pois CF é bissetriz como DC é paralelo a AB, o angulo D é igual a B que é igual a 120^0 e a é suplementar e igual a 60^0, então A é igual a 30^0. Como ADE é um triângulo, $A+D+E=180^0$ e E é igual a 30^0. Como CBF é um triângulo, $F+B+C=180^0$, então F é igual a 30^0. Se os ângulos são iguais CBF e ADE são semelhantes e CB/DA=DE/FB=CF/AE=1, pois CB é igual a DA.

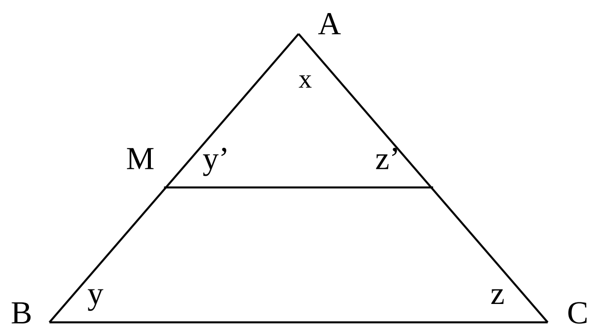
- Exemplo de prova admissível: é a prova que possui uma argumentação aceitável, com diversos níveis de rigor , dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno.

Enunciado: seja ABC um triângulo qualquer, e M o ponto médio de AB. Pôr M, trace MN, paralelo a BC.



1. Mostre que os triângulos AMN e ABC são semelhantes.
2. Mostre que o comprimento de MN é a metade do de BC.
3. Que você conclui sobre a posição de N? justifique sua resposta.

Resposta:



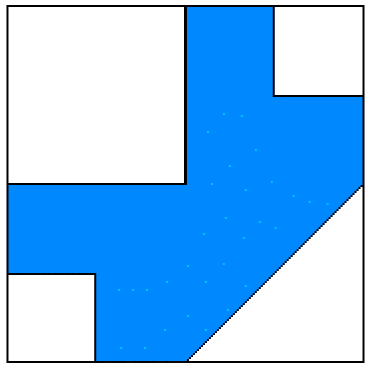
1. O ângulo y é comum aos triângulos ABC e AMN.
   MN//BC, logo os ângulos $x=x'$ & $z=z'$ porque são correspondentes.
   AB/AM=AC/NA=BC/MN

2. M é o ponto médio de AB, logo AM =AB/2
   Como os triângulos ABC e AMN são semelhantes, logo seus lados são proporcionais: AC/2=NA e BC/2=MN.

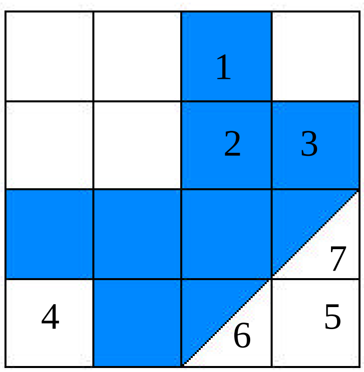
3. Que o ponto N é o ponto médio do lado AC.

- Exemplo de justificativa gráfica: a argumentação do problema é mostrada por meio de um demonstração gráfica

Enunciado: Que fração da área total do quadrado representa a parte pintada?



Resposta do aluno:



Se eu transferir o quadradinho 1 para o espaço 4, o quadradinho 2 para o espaço 5 e o dividir o quadradinho 3 em dois e colocar suas partes nos espaços 6 e 7, vejo que a figura pintada será a metade. logo, a fração é _.

Bibliografia

- Balacheff, N.(1988): Aspects of proof in pupils” practice of school mathematics. Em D. Pimm (Ed): Mathematics, Teachers and Children, 216-235. Londres: Hodder & Stoughton;

- Hanna, G. (1990): Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21(1), 6-13;

- Hanna, G and Jahnke, H.(1996): Proof and proving. In: International Handbook of Mathematics Education, 877-908;

- Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students" approaches to proof. For the Learninhg of Mathematics, 17(1), 7-16;

- Tinoco, L. e Nasser, L(2001):Argumentação e provas. Projeto Fundão, UFRJ, Rio de Janeiro