A CONSTRUCAO DO CONHECIMENTO MATEMATICO E A PROVA DE IMPOSSIBILIDADE.

Borges, Marcos Francisco[1]
Otte, Michael[2]

Por volta de 2000 a. C., os Babilônios e os Egípcios utilizavam o número para expressar as medidas de comprimentos e peso na resolução de problemas ligados a mensurações práticas, surgidas diretamente de situações empíricas, conduzindo-os a idéia de frações. Mais tarde, com os Gregos essa idéia é ampliada com o desenvolvimento do que chamamos hoje números racionais: os inteiros e suas razões.

Os matemáticos gregos descobrem através da geometria que podiam associar os números aos comprimentos de segmento de reta. As operações aritméticas podem ser realizadas através das construções geométricas, a cada comprimento corresponderá um número racional e a cada número racional um comprimento.

Os pitagóricos acreditavam não haver "espaços" entre um número racional e outro, ou seja, não existiam segmentos de reta que não tivessem comprimento racional.

Os matemáticos gregos gostavam de lidar com a comparação de grandezas de mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes.

Por volta do século V a.C., ao compararem o lado e a diagonal de um pentágono ou do quadrado unitário, percebem que em determinadas construções havia certos segmentos com comprimentos que não correspondiam a nenhum número racional, constatam então que não havia nenhuma unidade de medida, por menor que fosse, que pudesse medir ao mesmo tempo a diagonal e o lado do pentágono ou do quadrado, pois eles são segmentos incomensuráveis.

A concepção pitagórica de que tudo dependia dos números inteiros e das proporções entre eles, e de que todas as grandezas de toda espécie são comensuráveis, se desmorona, surge então, a primeira grande crise nos

---

[1] Prof. da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT, mestrando em Educação pela UFMT. maribor@terra.com.br
[2] Prof. Doutor do Institut für Didaktic der Mathematik, Universidade Bielefeld/Alemanha - Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMT.

fundamentos da Matemática, com o surgimento da razão de segmentos incomensuráveis.

Apesar dessa crise possibilitar a descoberta dos números irracionais, o conceito de número não foi ampliado, pois os pitagóricos insistiam em considerar como número apenas os racionais, desenvolvendo concomitantemente uma teoria geométrica das grandezas que separando a aritmética da geometria.

O escândalo lógico causado pelos incomensuráveis permanecia até então restrito apenas aos pitagóricos, mas Hipasus de Metapontum (ou talvez outro) o divulga fora da seita pitagórica, o que segundo Boyer (1987) lhe custou à morte num naufrágio sendo-lhe erigido um túmulo em seu nome como ele estivesse morto, Eves (1997) apresenta outra versão dizendo que ele foi lançado ao mar como punição divina por ter tornado público o segredo da incomensurabilidade a estranhos.

É muito incerta a época da descoberta da incomensurabilidade, provavelmente por volta do século V a.C. entre os anos de –450 e –410, como esse conceito surgiu, o seu desenvolvimento e a cronologia.

Várias são as correntes que discutem sobre a descoberta da existência de grandezas incomensuráveis, enquanto alguns escritores como Van der Waerden, associam essa descoberta a prova indireta de Aristóteles da diagonal e lado do quadrado baseados nos números lado e diagonal, descritos por Platão, e ao teorema de Pitágoras, outros escritores, como Fritz, defendem o aparecimento das grandezas incomensuráveis no pentágono associado à Divisão em Média e Extrema Razão (DEMR).

Acreditando em um desenvolvimento dos números lado e diagonal[3] para o pentágono, Heller observa (figura 01) que a diagonal – d_{n-1} – do pentágono torna-se o lado S_n do próximo pentágono maior, e que a diagonal d_n é a soma do lado e da diagonal, S_{n-1} e d_{n-1} para o novo pentágono, aparecendo então as relações de repetição $S_n = d_{n-1}$ e $d_n = d_{n-1} + S_{n-1}$.

Esse processo conhecido como antifairese[4] motivou o processo de construção dos pares de números lado e diagonal, esse processo não acaba nunca o que demonstra que não existe tal unidade comum. Os números lado e diagonal

[3] Os números lado e diagonal são seqüências de números obtidos de uma certa relação de repetição que pode ser usada para obter aproximações para a razão da diagonal de um quadrado e o seu lado.
[4] O processo da antifairese é a versão geométrica do algoritmo Euclidiano para a obtenção do máximo divisor comum de dois números.

são formados da seguinte forma, o novo lado é a soma dos números lado e diagonal anterior, a nova diagonal é a soma da diagonal anterior mais duas vezes o lado anterior. Considerando $l_1 = 1$ e $d_1 = 2$ o valor do lado e diagonal do pentágono, então $l_2 = l_1 + d_1 = 2$ e $d_2 = d_1 + 2\ l_1 = 3$; ...; $l_9 = l_8 = d_8$ e $d_9 = l_8 + 2.l_8$ e assim sucessivamente. Podemos observar que se $r_n = d_n/l_n$, obtemos $r_1 = 2$; $r_2 = 1{,}333...$, ... , $r_9 = 1{,}618...$, esse processo recursivo nos leva a aproximações por falta e excesso se alternando até chegar ao valor de $(1 + \sqrt{5})/2$.

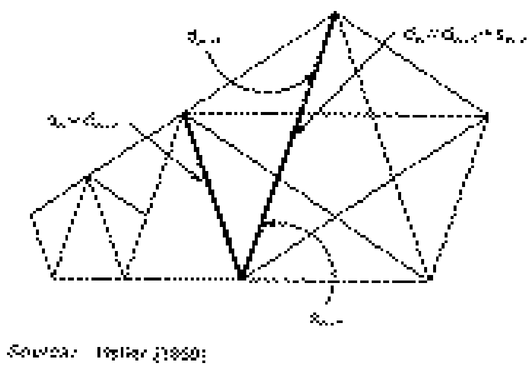


Fig. 01

Fritz e Heller acreditam que Hipasus observou e provou a incomensurabilidade através da série de pentágonos e pentagramas que se obtém ao ser traçadas as diagonais. Podemos observar (figura 02) que ao traçarmos as cinco diagonais do pentágono, elas formam um pentágono regular menor no centro do pentagrama invertido. Ao ser traçadas as diagonais desse novo pentágono regular invertido no centro do pentagrama, veremos um outro pentagrama sendo formado, mostrando que esse processo vai ocorrendo sucessivamente, uma reprodução rumo ao infinito, o que nos leva a concluir que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional, ou seja, não existe uma grandeza, por menor que seja, capaz de medir ao mesmo tempo a diagonal e o lado do pentágono.

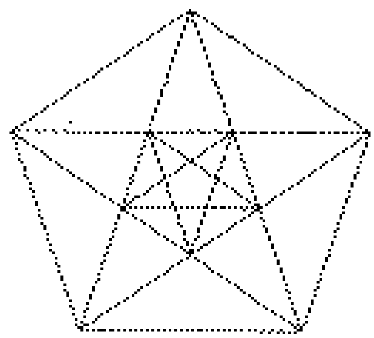


Fig. 02

A outra corrente que se opõe ao surgimento dos incomensuráveis através do pentágono, defende o seu aparecimento através aplicação do teorema de Pitágoras, ou pela prova indireta de Aristóteles da diagonal e lado do quadrado baseados nos números lado e diagonal.

A primeira referência sobre a incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com o seu lado se baseia na idéia da distinção entre pares e ímpares, atribuída a Aristóteles (384-322 a.C.) como aparece no seu Prior Analytics, pela aplicação do teorema de Pitágoras a triângulos retângulos isósceles (figura 03).

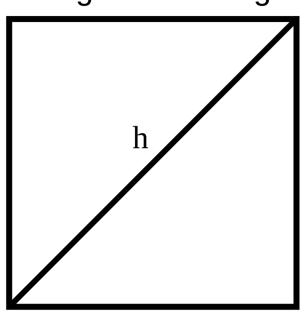


Fig. 03

A prova aparece da seguinte forma: Ao se traçar a diagonal de um quadrado obtemos um triângulo retângulo isósceles, de hipotenusa h e cateto c. Supondo que a diagonal (h) e o lado (c) desse quadrado, sejam comensuráveis, isto é, que a razão h/c é racional e igual a p/q, onde p e q são inteiros sem fator comum. Do teorema de Pitágoras temos que $h^2 = c^2 + c^2$ $\quad (h/c)^2 = 2c^2$ $\quad h^2/ c^2 = 2$ como $h^2 = 2c^2$, temos que h^2 deve ser par, e então se h é par, portanto c deve ser ímpar. Fazendo $h = 2r$ e substituindo na equação $h^2 = 2c^2$ vem $4r^2 = 2c^2$, ou $c^2 = 2r^2$. Então c^2 deve ser par; logo c é par. Como tínhamos provado que c deve ser ímpar e um inteiro não pode ser simultaneamente par e ímpar, resulta que por esse método indireto a hipótese de h e c leva a uma conclusão absurda, ou seja, a idéia de serem comensuráveis é falsa.

Uma prova geométrica análoga a que desenvolvemos no pentágono pode ser apresentada para o lado e à diagonal do quadrado. Em Boyer (1974:54) ela é apresentada da seguinte forma: Se no quadrado ABCD (figura 04) é traçado sobre a diagonal DB o segmento DC_1=AD e em C_1 se levanta a perpendicular C_1 D_1, a razão de BD_1 para BC_1 será igual à de BD para AD. Novamente, se em BD_1 se traça PD_1 = C_1D_1 e se constrói PR perpendicular a PB, a razão da hipotenusa para o lado será ainda igual à de antes.

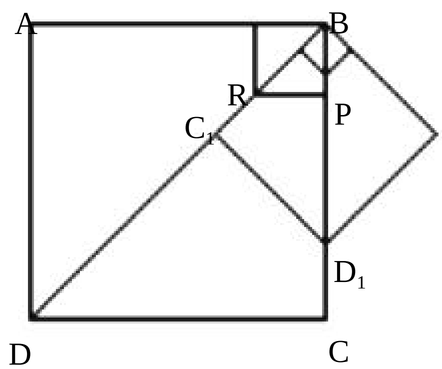


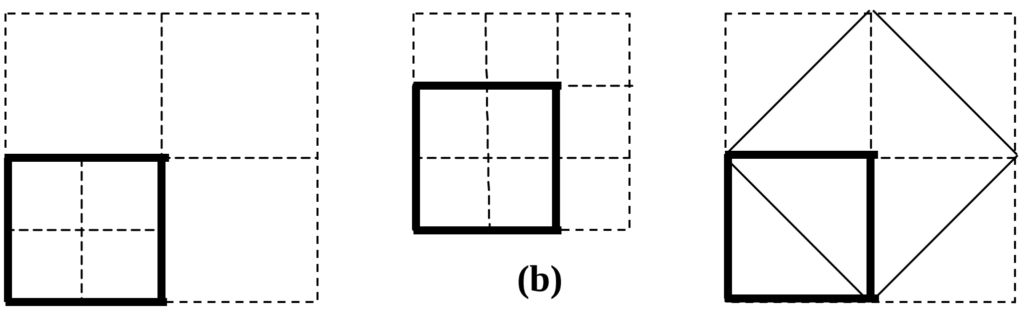
Fig. 04

Knorr mostra que os números lado e diagonal também podem ser utilizados para o caso do quadrado. Observando a figura 04 se dissermos que l_1 = C_1D_1 e d_1 = D_1B são os números lado e diagonal de um quadrado então CB = l_2 = l_1 = d_1 e DB = d_2 = d_1 + $2l_1$ são também lado e diagonal de outro quadrado.

O mesmo processo interminável da antifairese mostrando a não existência de uma unidade comum como ocorreu no pentágono, pode ser vista no quadrado. Considerando l_1 = 1 = d_1, então l_2=l_1+d_1=2 e d_2=d_1+$2l_1$=3 e assim sucessivamente, fazendo r_n = d_n/l_n, temos r_1 =1; r_2 = 1,5; r_3 = 1,4; ... ; r_6 = 1,414428 ..., um processo recursivo que nos leva a uma aproximação por falta e excesso se alternando até chegar a √2 = 1,4142135.

Uma outra demonstração aritmética é utilizada para mostrar como se deu à descoberta dos segmentos incomensuráveis. Knorr utiliza alguns teoremas relativos aos números pares e ímpares aplicados ao quadrado. Através da passagem do diálogo de "***Menon***" de Platão, onde Sócrates solicita ao escravo Menon que construa um quadrado cuja área seja igual ao dobro da área de um quadrado dado. (Fig 05)

Sócrates desenha um quadrado que tem dois pés de lado (a área é de quatro pés quadrados), e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área, isto é, oito pés quadrados. Diz ele: "Mostre-me exatamente o lado deste quadrado. Se não puder dizê-lo com números, mostre-me então o comprimento no desenho". O escravo propõe em seguida um quadrado com o lado de quatro pés – por conseguinte o dobro do lado. Quando Sócrates desenha a figura (a), o escravo percebe que esta área será quatro vezes maior, e corrige a proposta para um com lado de três pés. Sócrates desenha a figura (b), que mostra que este quadrado também é grande demais, com nove pés quadrados. Finalmente, Sócrates propõe a figura (c).[5]



(b)

(a) Fig 05 **(c)**

Esse diálogo mostra o conhecimento adquirido pelos gregos além da duplicação de um segmento de reta, a duplicação do quadrado.

Portanto, o "escândalo lógico" decorrente da descoberta da incomensurabilidade só vai começar a ter solução com a teoria das proporções escrita por Eudoxo por volta de 375 a.C (livro V, dos Elementos de Euclides), que tinha um caráter exclusivamente geométrico se afastando da teoria aritmética dos pitagóricos que tratava dos números pares e ímpares, ou seja, dos números inteiros e suas relações, aplicada às quantidades comensuráveis.

Os gregos foram os primeiros a utilizar nas suas provas o princípio da contradição, marcando a diferença do pensamento grego com a matemática conhecida anteriormente, baseada em evidências visuais. Mesmo que os Babilônios tivessem conhecimento que a √2 ou a √5 não poderia ser escrita com um número razoável de dígitos era impossível que eles pudessem provar, porque essas provas

[5] In BEKKEN (1994:33, 34)

eram construtivas, e essas construções no caso da incomensurabilidade aparecia como uma construção da impossibilidade.

A prova da irracionalidade da $\sqrt{5}$ (pentágono) ou a da $\sqrt{2}$ (quadrado) representa um exemplo muito prematuro do espírito cientifico na humanidade.

Mas, além do problema surgido com os incomensuráveis, os gregos ainda tiveram pela frente outros três problemas famosos, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, utilizando para sua construção, instrumentos como a régua não graduada (ou sem escala) e o compasso euclidiano.

Esses problemas tornaram-se famosos porque não podiam ser resolvidos geometricamente pela construção de um número finito de linhas retas e círculos, a não ser por aproximação (Struik, 1992:76).

O problema da duplicação do cubo, o mais famoso dos três, também chamado de problema Deliano está relacionado a uma lenda sobre os atenienses por volta de 430 a.C.

Para fazer parar a peste que assolava o país, os habitantes dessa cidade enviaram um mensageiro para consultar o oráculo de Apolo localizado na ilha de Delos no arquipélago grego. Foram aconselhados pelo Oráculo que a peste só cessaria se o altar de Apolo fosse exatamente duplicado no seu tamanho. O altar tinha a forma de um cubo, cuja aresta era de um cúbito. Os atenienses construíram o novo altar constituído por um cubo cuja aresta tinha dois cúbitos de comprimento. As tentativas falharam para satisfazer o deus, a peste continuou, pois o altar ao invés de ser duplicado tinha um tamanho oito vezes maior do que o primitivo. O pedido de Apolo era impossível de se realizar, pois para satisfazê-lo era necessário que a aresta do cubo tivesse $\sqrt[3]{2}$ de comprimento.

O problema da duplicação do cubo na história da matemática aparece primeiro com uma abrangência mais geral: achar um cubo cuja razão para um cubo dado seja igual à razão de dois segmentos de reta dados.

O primeiro a dar um importante passo para a resolução desse problema foi Hipócrates de Chios (460-380 a.C) ao conseguir reduzi-lo, provando que o problema da duplicação do cubo era o mesmo de se conseguir achar duas médias proporcionais entre dois segmentos dados, ou seja, dados os segmentos de reta $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ achar $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ tal que $\boldsymbol{a:x = x:y = y:b}$. A transferência dessa idéia para a duplicação do cubo passa a ter o seguinte enunciado: Dado um cubo de lado $\boldsymbol{a}$, achar o lado de um cubo cujo volume seja o dobro do cubo dado. Em notação moderna escrevemos esse problema como sendo: $b^3 = 2a^3$. Utilizando a tripla proporção proposta por Hipócrates o problema fica escrito da seguinte forma $\boldsymbol{a}:x = x:y = y:2\boldsymbol{a}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

Portanto, $\boldsymbol{a}^3/x^3 = (\boldsymbol{a}:x)^3 = (\boldsymbol{a}/x)(x/y)(y/2\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}/2\boldsymbol{a} =$ _. Logo, $\boldsymbol{a}^3 =$ _ x^3 então $x^3 = 2\,\boldsymbol{a}^3$, e $x = \boldsymbol{b}$. o que mostra que é possível à duplicação, ao se encontrar duas médias proporcionais x e y entre dois segmentos de retas dados ***a*** e 2***a***, sendo ***b*** a aresta do cubo cujo volume é o dobro do de um cubo de aresta ***a***.

Uma variedade de métodos surgiu buscando conseguir provar a possibilidade da duplicação, apesar dos gregos saberem intuitivamente que ela era impossível. Várias foram as tentativas para expressar o número $\sqrt[3]{2}$. como uma razão de dois números naturais até se chegar a conclusão que o problema da duplicação do cubo não tem solução quando utilizamos a régua e o compasso euclidianos, outras formas deveriam ser buscadas para a sua solução.

A resolução desse problema somente começou a ser possível, a partir do primeiro grande avanço das técnicas matemáticas em relação aos conhecimentos oriundos dos gregos com Descartes e Pierre de Fermat, determinando que cada ponto corresponde a um par de números e vice-versa, e que equações como x^2, x^3 e xy, podem ser representadas por segmentos de retas ou curvas.

Descartes propunha com sua géométrie que tinha como método geral o estabelecimento da conexão entre a álgebra (equação) e a geometria (reta) um método com uma abrangência mais geral, para resolver os problemas que os gregos não conseguiam resolver, como a duplicação do cubo, não se detendo ao método axiomático, facilitando a aplicação do seu método a curvas das mais diversas naturezas, como as elipses, parábolas entre outras, que podiam ser tratadas através do uso de equações, contribuindo assim para a solução de determinados problemas geométricos.

Assim como os gregos, Descartes considerava a matemática como uma atividade estritamente construtiva, ele tinha os instrumentos necessários para se provar a impossibilidade, mas não a provou porque a prova da impossibilidade não é construtiva, ela é sempre indireta. Na maneira construtiva só conseguimos mostrar que alguma coisa existe, mas não podemos mostrar que as coisas não existem, a tarefa então é outra, porque é necessário o princípio da contradição para podermos utilizar provas indiretas.

O que marca a diferença entre o pensamento dos gregos é o de Descartes é a concepção da idéia de construção. A construção é uma atividade, e toda atividade depende dos meios ou instrumentos que se utiliza, assim podemos definir ou caracterizar a construção pelos seus instrumentos. Nesse sentido construir para os gregos significava utilizar como instrumento a régua e o compasso, já para Descartes não, porque ele ampliava esse conceito da construção, para ele as cônicas eram meios ou instrumentos legítimos da construção.

Descartes procurou através da álgebra, construir soluções para os problemas geométricos por meio de instrumentos que foram generalizações aceitáveis de régua e compasso. Ele não compreendia porque os gregos não utilizaram as cônicas como meio para essa construção, porque elas eram curvas tão mecânicas como o círculo e podia ser construída de uma maneira tão regular quanto o círculo.

Para a resolução do problema da duplicação que estava relacionado a encontrar solução para a equação $x^3 = 2$, Descartes identificava a equação, relacionando-a a curvas, utilizando como método a intersecção de duas cônicas para a resolução de equações cúbicas.

A idéia de provas em geral e de provas através do princípio da contradição em particular foram as grandes contribuições dos gregos para a matemática.

Em 1837, Wantzel mostra ser necessário para a resolução do problema da duplicação cubo transferir os problemas resolvidos geometricamente para uma linguagem algébrica para a compreensão das construções clássicas.

A prova de Wantzel para mostrar a impossibilidade da resolução dos problemas geométricos clássicos proposta pelos gregos, consiste na construção de uma teoria algébrica para dar sustentação à prova da impossibilidade. A prova da impossibilidade não está voltada ao mundo em si, ela aparece dentro de um contexto, Wantzel dizia: é impossível encontrar um polinômio com uma raiz racional sendo as outras construtivas, só isso, o que representa mais ou menos um modelo algébrico do mundo onde constatamos essas coisas, para depois chegarmos a aplicação dessa idéia aos problemas clássicos essa é a grande invenção da matemática.

A matemática é por excelência a ciência da possibilidade e esse aspecto aparece claro no princípio da contradição, esse princípio mostra que todas essas provas têm impossibilidade, são provas indiretas, provas que utilizam o princípio da contradição, assumimos que existe e depois mostramos que não é possível, como vimos com Wantzel: se fosse um número construtível já seria um número racional, aparece a contradição, porque podemos mostrar que a terceira raiz da equação não é um número racional, portanto não é construtível.

O exemplo das grandezas incomensuráveis representou de fato o primeiro passo da humanidade para um pensamento cientifico, a primeira prova de impossibilidade. O saber comum ou o misticismo nunca se preocupa em pensar em termos do possível e impossível, ou seja, tudo parece possível até o mais improvável. Mas para a Matemática enquanto conhecimento teórico, demonstrar a impossibilidade de um problema tem um papel fundamental, como ressaltam os dois matemáticos contemporâneos Kac e Ulam: ***"The exactness of mathematics is well illustrated by proofs of impossibility"***, ou: ***"Much of mathematics has always centered around proofs of impossibility of certain constructions and of finding the limits of theories and methods"***, ou então: ***"The unique and peculiar character of mathematical reasoning is best exhibited in proofs of impossibility"***.

BIBLIOGRAFIA

BEKKEN, O. Equações de Ahmes até Abel. RJ: Universidade Santa Úrsula, 1994. 113 p.

BOYER, C. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. 488 p.

EVES, H. Introdução à história da matemática. 2. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp. 1997.843 p.

HERZ-FISCHLER, R. A Mathematical history of the golden number. New York: Dover Publications, 1998. 195 p.

KAC, M. & ULAM, S. M., Mathematics and Logic. New York: Dover Publications. 1992. p. 14-19.

KNORR, W. R. The evolution of the Euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early greek geometry. England: D. Reidel Publishing Company, v. 15, 379 p.

O'CONNOR, J.J. & ROBERTSON, E.F. "Doubling the Cube". Disponível na Internet: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Doubling_the_cube.html. Capturado em 08/03/2001

OTTE, Michael. La prueba matemática y la percepción. http://www.cabri.imag.fr/Preuve/Newsletter/980102ThemeES.html. Preuve - International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Janvier/Février 1998.13/04/1999.

STRUIK, D. J. História Concisa das Matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1992. 395 p. (Coleção Ciência Aberta).