TESSELAÇÕES ESPACIAIS COM BASES CALEIDOSCÓPICAS

Claudemir Murari[*]

Renata Aparecida Martins[**]

Rosimeire de Fátima Batistela[***]

INTRODUÇÃO

O objetivo de nosso trabalho é mostrar uma estratégia educacional diferente de estudar o tema "Tesselações" do plano ou do espaço. Ao apresentar uma situação inovadora de ensino-aprendizagem, elegemos como instrumentos mediadores privilegiados do processo de construção das atividades geométricas o caleidoscópio e o software educacional Cabri-Géomètre II, cujas ferramentas proporcionam atividades interativas no laboratório de ensino e de informática.

Faremos uma explanação da forma de colocação de bases caleidoscópicas nas faces de poliedros, planificação e coloração dos mesmos através do software citado, bem como uma orientação para empilhamento dos poliedros para resultarem numa porção de pavimentação (ou tesselação). Entretanto, por problemas de espaço, não será possível fazer uma exposição detalhada de todo o processo, mas uma consulta à bibliografia pode sanar dúvidas que eventualmente surgirem.

TESSELAÇÕES

As tesselações do plano e do espaço se constituem num recobrimento sem deixar lacunas ou sobreposições. Nosso estudo refere-se a tesselações do plano por polígonos regulares, enquanto que as tesselações do espaço são por poliedros regulares.

As possibilidades de tesselações do plano são obtidas através do estudo dos ângulos internos dos polígonos, cuja soma deve ser de 360^o ao redor de um vértice ou nó. Convencionou-se denominar as tesselações por polígonos regulares através de uma configuração que expressasse quais polígonos se repetiam em cada vértice. Para tanto, tomou-se como referência o número de lados dos polígonos para formar a notação da configuração (cada número representando um polígono com seu número de lados).

[*] Professor Assistente Doutor UNESP, Campus Rio Claro
[**] Mestranda em Educação Matemática-UNESP/Rio Claro
[***] Aluna do Departamento de Matemática-IGCE/UNESP/Rio Claro

Dos polígonos regulares, apenas os triângulos, quadrados, hexágonos, octógonos e dodecágonos tesselam o plano. Podem ajustar-se polígonos de mesmo tipo (os três primeiros) ou de tipos diferentes, combinando-se de diversas maneiras para gerar uma pavimentação.

Assim, são onze as tesselações por polígonos regulares onde há repetição do mesmo conjunto de polígonos em cada vértice. Dessas apenas a de configuração (3,3,3,3,6) não pode ser visualizada em caleidoscópio por não possuir eixo de simetria. Duas tesselações só podem ser visualizadas em caleidoscópios com quatro espelhos: (3,3,4,3,4) e (3,3,3,4,4). Abaixo, damos uma tabela na qual constam as outras oito tesselações do plano e respectivos caleidoscópios em que são visualizadas, conforme Ball e Coxeter [2]:

- No caleidoscópio equilátero	***(3,3,3,3,3,3); (3,6,3,6) e (6,6,6)***
- No caleidoscópio isósceles	***(4,4,4,4); (4,8,8);***
- No caleidoscópio escaleno	***(3,12,12); (3,4,6,4) e (4,6,12); além das mesmas obtidas no caleidoscópio equilátero.***

Quanto às tesselações espaciais formadas por poliedros regulares, somente os cubos e os octaedros combinados com os tetraedros tesselam o espaço. Tais poliedros, empilhados, formam as tesselações.

No caso das tesselações do espaço, há necessidade de se considerar nos poliedros[1] os seus ângulos diedros (formado por duas faces do poliedro com aresta comum), cuja soma deve ser igual a 360^o. Assim, um conjunto de poliedros formará uma porção de tesselação do espaço quando recobri-lo sem lacunas. Nosso trabalho envolverá apenas os poliedros regulares[2]: cubos, tetraedros e octaedros, cujos ângulos diedros são, respectivamente, 90^o, 70^o 32’ e 109^o 28’.

Podemos visualizar uma porção da tesselação espacial através do empilhamento de poliedros. Quando são colocados padrões caleidoscópicos nas faces desses poliedros obtemos pavimentações do plano geradas nas superfícies laterais desse empilhamento.

CALEIDOSCÓPIOS

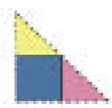
Alspaugh [1], afirma que qualquer conjunto de espelhos pode ser classificado

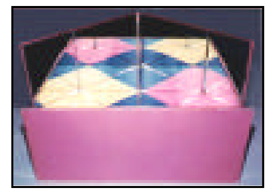
[1] Um **poliedro** é um sólido em que as faces são polígonos que tem, dois a dois, um lado comum. Os vértices e arestas dos polígonos que constituem o poliedro são vértices e arestas do poliedro.
[2] Um poliedro é dito **regular** se suas faces são regiões poligonais regulares, todas com o mesmo número de lados, e se em todo vértice do poliedro converge o mesmo número de arestas.

como caleidoscópio se possibilitar a obtenção repetida de imagens. Os caleidoscópios utilizados neste trabalho são aqueles formados por três espelhos planos e perpendiculares a um plano, sendo dois deles articulados.

Para que haja repetição perfeita das figuras obtidas nas reflexões só existem três tipos de caleidoscópios (com três espelhos): Equilátero, Isósceles e Escaleno, com ângulos formados pelos espelhos, respectivamente, da forma (60^o, 60^o, 60^o), (45^o, 45^o, 90^o) e (30^o, 60^o, 90^o). Um estudo significativo sobre caleidoscópios (tipos, modos de construção e aplicações) pode ser encontrado em Murari[9].

A figura mostra um caleidoscópio isósceles retângulo, no interior do qual foi colocada a ***base substituível***[3] ao lado que gera a tesselação de configuração (4,4,4,4).

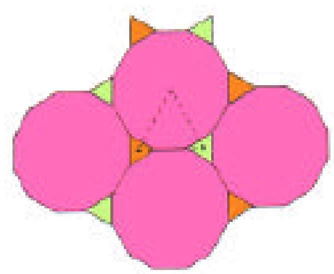


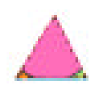


BASES SUBSTITUÍVEIS OU PADRÕES CALEIDOSCÓPICOS

Para visualizar as tesselações em caleidoscópios se faz necessário descobrir quais bases substituíveis a geram. Uma mesma tesselação pode possuir um grande número desses padrões. Estudos neste sentido, bem como métodos de descoberta também são encontrados em Murari [9].

Como estamos trabalhando com caleidoscópios com três espelhos, nossos padrões são triângulos, no interior dos quais são construídos segmentos formando regiões (que podem ser coloridas), as quais vão produzir, nas reflexões dos espelhos, uma determinada tesselação. Vemos na figura ao lado uma base e respectivo visual caleidoscópico de uma tesselação de configuração (3,12,12).





Considerando que cada base requer um procedimento de construção, não serão descritas aqui as construções das bases por nós apresentadas, visto que podemos encontrá-las em Barbosa e Murari [5] e Murari [9].

[3] **base substituível** ou **padrão caleidoscópico** é uma região poligonal (triangular, quadrada ou retangular, dependendo do caleidoscópio para o qual está sendo utilizada) construída com segmentos adequados para que, nas reflexões, possam gerar a tesselação pretendida.

Para a construção das bases substituíveis é necessário conhecer conceitos geométricos importantes como ponto médio, bissetriz, perpendiculares, bem como ângulos, propriedades dos polígonos, etc. Além disso, na obtenção de poliedros é preciso conhecer os tipos existentes, suas propriedades, saber como planificá-los, dobrá-los e, posteriormente, empilhá-los. Com relação aos caleidoscópios, a escolha de qual utilizar (três ou quatro espelhos) compreende um conhecimento prévio desse tipo de instrumento.

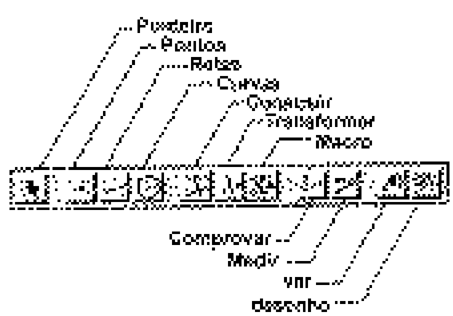
A utilização de sólidos geométricos neste trabalho pode ser justificada por Pohl in [8], p.178: “A melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é construindo objetos que mostrem os conceitos espaciais. Construindo poliedros os alunos têm oportunidade de observar e usar muitas relações espaciais. Recursos visuais interessantes também estimulam o pensamento criativo.”

CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS COM PADRÕES CALEIDOSCÓPICOS EM SUAS FACES

Considerando que podemos utilizar caleidoscópios no estudo de tesselações do plano, construindo bases substituíveis que visualizadas nesses instrumentos geram as diversas pavimentações, sugerimos atividades utilizando conjuntamente caleidoscópios e sólidos geométricos. Estes sólidos conteriam em suas faces bases caleidoscópicas que, quando empilhados, forneceriam porções de tesselações planas laterais.

A construção dos padrões caleidoscópicos, das planificações, montagem e empilhamento dos poliedros se constituem em atividades interativas no laboratório de ensino e informática.

As bases substituíveis e os poliedros podem ser construídos de duas maneiras: com instrumentos de desenho ou por meio do computador, através do software Cabri Géomètre II, utilizando-se das ferramentas apropriadas. Ao lado temos a figura da barra de ferramentas desse software.

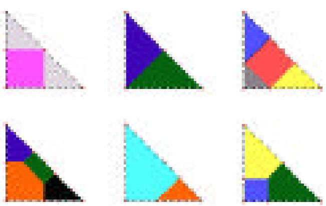


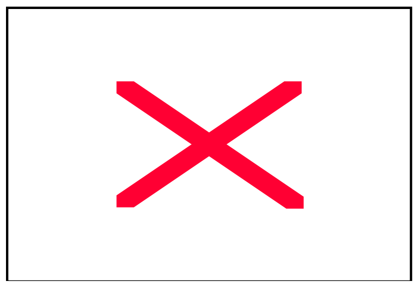
O software Cabri-Géomètre II permite-nos construir as planificações, além de construir e colorir os padrões caleidoscópicos. Entretanto, a coloração desses padrões pelo Cabri na prática escolar pode ser inviável pelo seu alto custo, cujo problema pode ser resolvido pela pintura através de giz de cera ou lápis de cor.

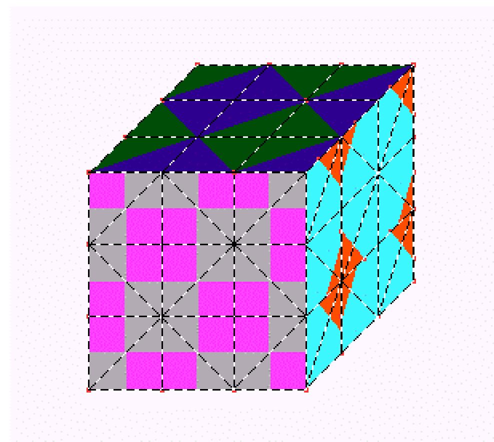
Se todos os padrões forem construídos no Cabri-Géomètre II, poderemos também obter as planificações através da opção “editar”, na barra de menus, escolhendo "recortar/pegar (colar)" e fazendo as transformações necessárias (rotação, translação e reflexão). As vistas frontal, lateral e superior do empilhamento ou de um poliedro podem também ser construídas pelo Cabri II.

Abaixo apresentamos os padrões caleidoscópicos construídos individualmente, depois colocados nas planificações dos poliedros, que após dobradas fornecerão os poliedros para o empilhamento:

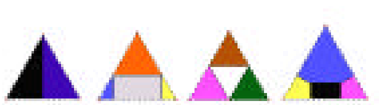
(1) (2) (3)

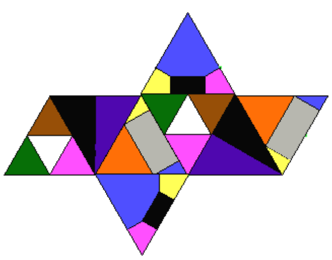


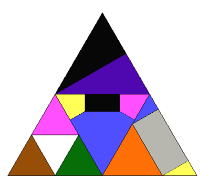


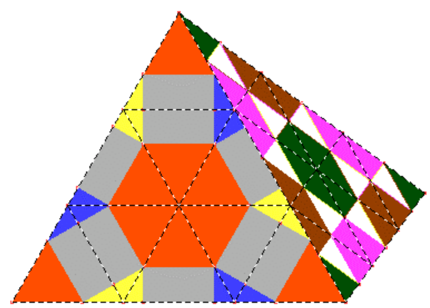


(1) (2)









(2) (3)

Legenda: (1) – bases caleidoscópicas construídas e coloridas no Cabri-Géomètre II.

(2) – Planificações dos poliedros

(3) – Poliedros empilhados

Observe que após empilhados os poliedros fornecem porções de tesselações laterais planas. Entretanto, para que isso aconteça, no empilhamento, há necessidade de se observar qual face do poliedro será combinada para formar a tesselação. Para a formação da pirâmide temos combinados os tetraedros e octaedros, razão pela qual são fornecidas duas planificações.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

Este trabalho faz parte de um estudo maior em desenvolvimento pelos autores, que envolve Espelhos, Simetria, Caleidoscópios e softwares como estratégias educacionais.

Ainda não foram efetuadas experiências com alunos aplicando a proposta aqui apresentada. Somente pequena porção do trabalho foi apresentado em eventos de iniciação científica e têm despertado bastante interesse dos participantes.

Nossa intenção é estruturar as atividades no método de Resolução de Problemas já que o tema Tesselações, bem como a utilização conjunta de caleidoscópios e sólidos geométricos, proporcionam isso. Propondo situações desafiadoras contribuiremos para o desenvolvimento autônomo do aluno.

A proposição pode tornar-se interessante se considerarmos que outros objetivos podem ser alcançados (em qualquer nível de escolaridade), com a utilização de caleidoscópios e sólidos geométricos em atividades educacionais de Geometria: desenvolvimento da percepção espacial; motivação para estudo e exploração de propriedades dos polígonos (especialmente relações angulares) e de transformações geométricas (particularmente as relacionadas à simetria reflexional); desenvolvimento de habilidades gráficas e do senso estético e, por último, temos uma integração multidisciplinar com Ciências, Desenho Geométrico e Educação Artística, quando tratamos, respectivamente, de reflexão (contagem do número de imagens), construções geométricas e coloração dos padrões obtidos.

A possibilidade de coloração das bases obtidas e, por vezes, algumas modificações nessas bases (com supressão ou acréscimo de segmentos) transformando-as em bases que geram mosaicos ornamentais também colaboram para tornar as atividades interessantes. Murari & Barbosa [4], no IV EPEM (1996) apresentaram bases substituíveis cujos padrões geram mosaicos famosos (Flatfish, de Escher, e o Mosaico Chinês-I).

Além disso, o fato de algumas bases substituíveis serem de construção bastante elaborada levou-nos a buscar uma ferramenta que facilitasse tais construções. Assim encontramos no software Cabri-Géomètre II um assistente excelente para obtenção e coloração, de maneira rápida e precisa, de todo material necessário para execução de nosso trabalho. Considerando que a tendência atual é de o ensino-aprendizagem de Matemática realizar-se em ambientes computacionais, conseguimos coadunar atividades nos laboratórios de ensino e informática, resultando para o aluno numa incorporação de novos conhecimentos e recursos para resolução de problemas.

Dessa forma, as potencialidades do aluno são exploradas, ampliando seus horizontes de visão em relação ao mundo e à amplitude da matemática que não se restringe apenas a "números", mas está presente também em coisas belas, pois coloridos os padrões caleidoscópicos geram visuais muito interessantes.

BIBLIOGRAFIA

1. ALSPAUGH, C.A., **Kaleidoscope Geometry ,** Aritmetic Teacher 17 (1976), 116-117, reprinted in: Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher, NCTM (3rd.ed.)/1982

2. BALL, R. & COXETER, M.C.H., **Mathematical Recreations and Essays,** Univ. Toronto, 1974, republication by Dover, N.Y., 1987

3. BARBOSA, R.M., **Descobrindo padrões em mosaicos,** Atual, São Paulo, 1993.

4. BARBOSA, R. M., e MURARI, C., **Mosaicos ornamentais em Caleidoscópios equiláteros e isósceles,** Comunicação ao IV EPEM/SBEM, São Paulo, janeiro/1996, Anais, p.187/193.

5. BARBOSA, R.M., e MURARI, C. **Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos,** Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, n º 4, jul/98, p.57-66

6. DAFFER, E. R. and CLEMENS, R. S., **Geometry: an investigative approach,** Addison-Wesley, Menlo Park, 1977.

7. JACOBS, H.J., **Geometry,** W. H. Freeman and Company, New York, San Francisco, 1974.

8. LINDQUIST, M.M. e SHULTE, A.P., org., **Aprendendo e Ensinando Geometria**, tradução de Hygino H.Domingues, São Paulo, Atual, 1994

9. MURARI, C., **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**, Tese Doutorado, Vol. I e II, UNESP/IGCE, Rio Claro, 1999.

10. MURARI, C., MARTINS, R.A., e ALMEIDA, S.T., **Obtenção de Bases Substituíveis para Caleidoscópio no Cabri-Géomètre II**, Com. Ao Workshop de Informática Aplicada à Educação, Centro Universitário de Araraquara - UNIARA / SBEM-SP, período de 10 a 12/08/2000, resumos, p.41.

11. ALMEIDA, S. T. e MARTINS, R. A., Pavimentação do plano de configuração (3, 3, 4,3,4; 3,4,6,4) no caleidoscópio equilátero, Boletim de Iniciação Científica em

Matemática – BicMat – Departamento de Matemática-IGCE-UNESP/Rio Claro, vol.II, set.2000.

Endereço dos autores:

Prof. Dr. Claudemir Murari

Endereço: UNESP – Campus de Rio Claro Departamento de Matemática

C.P. 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro –SP

Fone/Fax: (019) 534-0123

E-mail: murari@linkway.com.br.

Renata Aparecida Martins

Endereço: UNESP – Campus de Rio Claro Departamento de Matemática

C.P. 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro –SP

Fone/Fax: (019) 534-0123

Rosimeire de Fátima Batistela

Endereço: UNESP – Campus de Rio Claro Departamento de Matemática

C.P. 178 – CEP 13500-230 – Rio Claro –SP

Fone/Fax: (019) 534-0123