

# **UMA TIPOLOGIA DE PROVAS ELABORADAS POR ALUNOS DO FINAL DO ENSINO FUNDAMENTAL E INÍCIO DO ENSINO MÉDIO NA PASSAGEM DA ARITMÉTICA PARA A ÁLGEBRA**

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas<sup>1</sup>

E-mail: jluiz@dmt.ufms.br

## **RESUMO**

O trabalho aqui apresentado se refere aos principais resultados de uma tese de doutorado em Didática da Matemática desenvolvida na França junto ao IREM de Montpellier. Ele consiste no estudo da produção de provas matemáticas num campo particular de problemas situado na passagem da Aritmética para a Álgebra. A parte experimental foi desenvolvida com alunos de colégios franceses, com idade variando de 13 a 16 anos. A partir do exame de produções de alunos durante a resolução de um problema, nós nos interrogamos sobre a validade ao domínio da aritmética-álgebra, da tipologia de provas proposta por Balacheff (1988). A generalidade desse modelo foi particularmente testada por nossos resultados experimentais, o que nos conduziu a propor uma tipologia específica.

## **PALAVRAS-CHAVE:**

Prova      Demonstração      Aritmética-Álgebra      Ensino Fundamental e Médio

## **INTRODUÇÃO**

A aprendizagem da demonstração constitui um dos importantes objetivos do ensino de matemática a partir da 7<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental. Ela aparece freqüentemente associada à resolução de problemas de Geometria. No entanto, os problemas de natureza algébrica, como aqueles que são abordados a partir da 7<sup>a</sup> série, podem igualmente servir como suporte. A ruptura epistemológica, que constitui nesse nível escolar a passagem da Aritmética para a Álgebra é fonte de

---

<sup>1</sup> Doutor em Didática da Matemática pela Universidade de Montpellier II (França); Professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, onde atua no Curso de Mestrado em Educação, na linha de pesquisa Educação em Ciências, Matemática e Novas Tecnologias.

dificuldades para um grande número de alunos. Alguns deles, particularmente aqueles ligados à introdução do formalismo algébrico, foram largamente estudados (Chevallard 1985 e 1989, Gallardo 1988, Vergnaud 1988); por outro lado não há estudos específicos sobre processos de prova na resolução de problemas de “Aritmética-Álgebra”. Convém entretanto mencionar que a demonstração, ou mais genericamente o estudo dos processos de prova, foi abordado sob diversos ângulos em numerosos trabalhos (citamos Bell 1976, Duval 1993, Duval & Egret 1993, Lakatos 1976, Arsac 1988). Entre esses trabalhos, os de Balacheff (1988), conduziram o autor a propor um modelo distinguindo diversos tipos de provas entre aquelas produzidas pelos alunos: **empirismo ingênuo**, **experiência crucial**, **exemplo genérico** e **experiência mental**. Esses quatro tipos de provas, assim hierarquisados, foram em seguida redistribuídos por Balacheff segundo duas categorias:

- as **provas pragmáticas**, formas elementares de provas onde o aluno recorre à ação real e à ostensão, nas quais se enquadram o empirismo ingênuo e a experiência crucial;
- as **provas intelectuais**, ações interiorizadas onde o aluno deduz as razões da validade de uma proposição.

A experiência mental se enquadra nesta segunda categoria, enquanto que o exemplo genérico, segundo Balacheff (1988, pág. 59) se situa, conforme o caso, do lado das provas pragmáticas ou do lado das intelectuais.

É preciso observar que esse modelo se apoia fundamentalmente sobre experiências desenvolvidas com alunos de 8<sup>a</sup> série, em torno de um problema de “Geometria Combinatória” (na verdade, um problema de Geometria que envolve processos de contagem). Pode-se então perguntar se este modelo pode ser transferido para outros campos da Matemática ou se, ao contrário, certos aspectos não estão ligados ao conteúdo matemático que serviu de base para sua elaboração. Neste trabalho precisamente, examinado as produções de alunos de

8ª série e 1º ano do Ensino Médio<sup>2</sup>, nós questionamos a validade do modelo de Balacheff com relação a um problema situado entre a Aritmética e a Álgebra.

Diante dessa problemática, nossa principal indagação, colocada desde o início é sobre a passagem da Aritmética para a Álgebra. Observações correntes com alunos nos indicavam que, para certos problemas colocados no campo Algébrico, eles insistem na utilização de procedimentos aritméticos, os quais são inadequados e conduzem a resultados insatisfatórios. Como mencionamos, em certos aspectos, este tipo de questão já havia sido estudado por outros pesquisadores. Chevallard (1985 e 1989), por exemplo, se interessou pela modelização e também pela “transposição didática” da Álgebra. No entanto, o aspecto que mereceu maior concentração de nossa parte foi o da validação, para o qual tínhamos o modelo de provas de Balacheff, mas que estava num campo matemático diferente daquele da Álgebra. Então a questão principal colocada foi sobre a possibilidade de reprodução de uma tipologia de provas semelhante, para o campo de articulação entre a aritmética e a álgebra. Balacheff evoca a questão da linguagem, mas este não é o objeto de estudo de seu trabalho. Em nosso caso, observamos que a linguagem utilizada era indissociável da atividade de validação. Para a classe de problemas estudados identificamos e analisamos a influência de três tipos de linguagem: natural, algébrica e mista.

## PARTE EXPERIMENTAL

**A população:** 147 alunos entre 14 e 15 anos (74 alunos de 8ª e 73 de 9ª).

**O problema:** Ele foi testado sob quatro modalidades<sup>3</sup>. Aqui está o enunciado de uma das modalidades: *“um aluno diz que encontrou 3 números ímpares cuja soma é 20. É dado a você esse problema. Qual é sua solução? Explique sua resposta conte como a obteve.”*

---

<sup>2</sup> Alunos com idade variando entre 13 e 16 anos.

<sup>3</sup> Nós introduzimos de fato na exploração deste problema duas variáveis de comando. A primeira, denotada por Q, assumindo os dois valores 3 e 5 (3 na modalidade citada) e corresponde à quantidade de números ímpares que adicionamos. A Segunda, denotada por S, corresponde à soma obtida e assume os dois valores 20 e 100 (20 no exemplo). Dessa forma, um dos objetivos era fazer aparecer um leque de tipos de provas o mais

**O desenvolvimento experimental:** As quatro modalidades do problema foram distribuídas de maneira aleatória ao conjunto da população pesquisada. A execução do experimento em classe, ocorreu durante as aulas de matemática. Os alunos dispunham de 50 minutos, sendo convidados a não utilizar rascunho e a explicitar por escrito, em folhas a serem entregues ao pesquisador, as quais deveriam conter os passos utilizados na resolução do problema.

## RESULTADOS

Vamos logo mencionar que nós observamos a produção de provas dos dois níveis encontrados por Balacheff: pragmático e intelectual. Por outro lado, a tipologia mais refinada desses níveis prova, propostos por esse autor (cf. introdução), não é adequada à nossa situação. De maneira mais precisa, ao contrário de Balacheff, nós encontramos um só tipo de prova pragmática, enquanto que as provas de nível intelectual são mais diversificadas que a do modelo proposto pelo autor citado. Com o objetivo de dar conta de nossos dados experimentais nós propusemos uma tipologia segundo três classes: a primeira remetendo ao nível pragmático e as duas outras de nível intelectual.<sup>4</sup>

**AS PROVAS PRAGMÁTICAS:** São aquelas que se apóiam sobre tentativas numéricas que nós associamos, de qualquer modo, à realização de experiências. Todas aquelas que nós observamos se enquadram no “**empirismo ingênuo**” (cf. Balacheff 1988, pág. 56), pois o aluno fundamenta sua convicção após a verificação de alguns casos. A título de exemplo, vejamos o que escreveu o aluno Bernard sobre sua folha:

***“Eu tomei todos os números ímpares a partir do 19 e eu somei dois outros números ímpares para obter 20.***

$$19 + 1 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$9 + 11 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$17 + 3 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$7 + 13 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

---

amplo possível. Nesse breve texto, nós não falaremos do efeito dessas variáveis. Para quem interessar procurar MAGALHÃES (1993).

<sup>4</sup> Mencionamos que, em MAGALHÃES (1993), a consistência desta nova tipologia é testada por observações relativas à resolução de vários problemas de Aritmética-Álgebra.

$$15 + 5 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$5 + 15 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$13 + 7 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$3 + 17 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$11 + 9 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

$$1 + 19 + 1 = 21 \quad \text{falso}$$

***Eu penso que não há 3 números ímpares que somados dá 20.***<sup>5</sup>

Enquanto que para certos alunos o empirismo tem valor de prova (e somente neste caso nós falamos de prova pragmática), para outros este tipo de procedimento constitui somente um meio de descoberta da conjectura. É claramente o caso de muitos alunos que, após uma fase de tentativas empíricas (ensaios numéricos sucessivos), elaboram uma prova “**por enunciados**”.

**AS PROVAS POR ENUNCIADOS:** Nós designamos assim as provas de nível intelectual que consistem em organizar diversas proposições em linguagem natural, cada uma dessas proposições elementares sendo consideradas como verdadeiras pelo sujeito. São construções intelectuais fundamentadas em teorias, em geral não formalizadas e não completamente explicitadas. Na operação que consiste em organizar enunciados em linguagem natural, o raciocínio do aluno se apoia em proposições que podem ter status e valores epistêmicos diferentes. A título de ilustração, vejamos o que escreve Stéphanie após uma longa série de tentativas numéricas:

***“... não, não é possível encontrar 3 números cuja soma é 20. Se somamos dois números ímpares, sua soma dá um número par. Como a soma dos dois primeiros números dá um número par, para fazer 20, é necessário acrescentar um outro número par... Se somarmos 3 números ímpares, sua soma mais próxima é 19 ou 21, mas isso não é 20”.***<sup>6</sup>

**AS PROVAS ALGÉBRICAS:** São as provas de nível intelectual que consistem em validar as proposições pela utilização da linguagem algébrica. Para produzir esse tipo de prova, os alunos utilizam o cálculo literal e suas propriedades, atribuindo

---

<sup>5</sup> Aqui foi feita a tradução do Francês pelo autor.

<sup>6</sup> Também aqui foi feita a tradução do Francês pelo autor.

frequentemente à letra seu status o mais geral, aquele de “variável”.<sup>7</sup> A título de ilustração, vejamos a resposta de Corinne<sup>8</sup>.

**Números ímpares:**

|           |                                |
|-----------|--------------------------------|
| $x + 1$   | $(2 + 1 = 3)$                  |
| $(x+2)+1$ | $(2+2) + 1 = 5 \text{ ímpar})$ |
| $(x-2)+1$ | $(2-2) + 1 = 1 \text{ ímpar})$ |

***Eu submeto a equação com minha incógnita  $x$  que eu admiti acima à alguns testes:***

$$x+1+x+2+1+x-2+1 = 100$$

$$3x+3=100$$

$$3x = 100 - 3 = 97$$

$$\mathbf{x} = \frac{97}{3} =$$

$$100 \div 3 \approx 33$$

$$31+33+35 = 99$$

**2 números ímpares somados entre eles dão um número par e 100 menos um número par dá um número par e então não podemos, somando 3 números ímpares cair em 100, número par.**

**Se  $x$  é ímpar**                      **um número par :  $2x$**

**Se  $x$  é par**                      **número ímpar:  $x+1$  ou  $x-1$**

**$2x+1$  ou  $2x-1$  número ímpar**

$$3(2x+1) \rightarrow 6x+3$$

$$(2x+1)+(2y+1)+(2a+1) = 100$$

$$2x+1+2y+1+2a+1 = 100$$

<sup>7</sup> Vários tipos de provas algébricas e de provas por enunciados foram identificadas em Magalhães (1993, págs. 48-66). Nessa ocasião, a presença de diversos status da letra foram examinados.

$$2x+2y+2a = 97$$

$$2(x+y+a) = 97$$

$$x+y+a = \frac{97}{2} \quad \text{então uma das incógnitas } x, y \text{ ou } a \text{ não é inteira.}$$

**Não tem solução.**

Observamos que esta aluna, Corinne, elabora um modelo no campo da Álgebra, mas esta tentativa não corresponde ao grau de generalidade do problema. De fato, Corinne considera três inteiros consecutivos. Ela produz em seguida uma prova por enunciados. Finalmente ela redige uma prova algébrica, com alto nível de generalidade, na qual a letra tem status de variável.

## CONCLUSÃO

A distinção entre prova pragmática/prova intelectual é perfeitamente adequada às nossas observações; entretanto, nós pudemos constatar que no campo da Aritmética/Álgebra, introduzido no interior dessas categorias, surgiram algumas variações com relação à tipologia de provas proposta por Balacheff (1988). Assim:

- enquanto que esse autor identificou vários tipos de provas na categoria “pragmática”, as provas pragmáticas que nós observamos são todas de um só tipo, que podemos aliás, classificá-las como do tipo empirismo ingênuo, encontrado por Balacheff.
- a experiência mental, prova intelectual identificada por Balacheff, não aparece nas nossas observações. De fato, na análise, isso não nos surpreendeu pois a experiência mental evoca a ação, interiorizando-a, se desligando de sua realização sobre um caso particular. No domínio da Aritmética-Álgebra, esta evocação nos parece difícil. Nós nos juntamos a Arsac et al (1991, pág. 149) onde ele coloca em dúvida a possibilidade de produzir provas do tipo experiência mental para problemas que não se referem à uma construção geométrica.

---

<sup>8</sup> Visando facilitar a leitura desta resposta, nós separamos por traços horizontais e pontilhados, diferentes

- Por outro lado, nós fomos levados a distinguir dois tipos de provas intelectuais relativamente ao campo da Aritmética-Álgebra: a prova por enunciados e a prova algébrica. Esta distinção foi feita levando em conta de um lado a linguagem empregada (linguagem natural versus linguagem algébrica) e de outra parte o funcionamento mental empregado: num primeiro momento, na prova por enunciados, visando além do mais organizar a forma dedutiva das proposições, no outro, na prova algébrica, procurando por meio do emprego de códigos simbólicos atingir relações gerais.
- Nossa experimentação mostrou que a produção de prova algébrica é, em geral, precedida de provas por enunciados. Nossas observações mostraram que esse tipo de prova não apresenta as “qualidades” de prova suficientes para serem aceitas como tais pelos alunos, pois os mesmos continuavam procurando “provar” mesmo após o terem produzido.



## BIBLIOGRAFIA

ARSAC G. ***Les recherches sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France***. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 8, n° 3, pp. 267-312, 1988.

ARSAC G., Germain G., Mante M. ***Problème ouvert et situation-problème***, IREM de Lyon, 1991.

ARSAC G. et al. ***Initiation au raisonnement déductif*** – Presses Universitaires de Lyon, 1992.

ARTIGUE, M. ***Ingénierie didactique***. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, n° 3, pp. 281-307, 1990.

BACHELARD, G. ***Le rationalisme appliqué***. Presses Universitaires de France, Paris, 1986.

BALACHEFF, N. – ***Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège***. Thèse, Université J. Fourier Grenoble, 1988.

BELL A. W. ***A study of pupil's proof explanation in mathematical situations***. Education studies in mathematics. Vol. 7, n° 1-2, pp. 23-40, 1976.

BROUSSEAU, G. ***Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*** – Recherches en Didactiques des Mathématiques. v.7, n° 2, pp.33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. ***Le contrat Didactique: Le Milieu***. Recherches en Didactiques des Mathématiques. v.9, n° 3, pp 309-336, 1988.

CHEVALLARD Y. ***Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*** - première partie: l'évolution de la transposition didactique. Petit x, n° 5, pp. 51-94, Ed. IREM de Grenoble, 1985.

CHEVALLARD Y. ***Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*** (2e partie). Petit x, n° 19, pp. 43-72, Ed. IREM de Grenoble, 1989.

DOUADY, R. ***Jeux de cadres et dialectique outil-objet***, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7, n° 2, pp. 5-31, 1986.

DUVAL R. ***Ecart sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence***. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1, pp. 25-49, IREM de Strasbourg, 1988.

DUVAL R., EGRET M. A. ***L'organisation déductive du discours, Annales de didactique et de Sciences Cognitives***, 2, pp. 25-49, IREM de Strasbourg, 1989.

GALLARDO A., ROJANO T. – ***Areas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico*** – Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 9, n° 2, pp. 155-188, 1988.

LAKATOS I. ***Preuve et réfutation. Essai sur la logique et la découverte mathématique***. Edition française Hermann, Paris, 1984.

MAGALHÃES DE FREITAS, J.L. ***L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée***. Thesis. Université Montpellier II, France, 1993.

VERGNAUD G. – ***Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre*** – Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, pp. 189-199, 1988.