INVESTIGANDO RESULTADOS DA GEOMETRIA INVERSIVA ATRAVÉS DO CABRI

Luiz Alberto Duran Salomão
Faculdade de Matemática
Campus Santa Mônica
Universidade Federal de Uberlândia
38408-100 – Uberlândia – M. G.
salomao@ufu.br

"Mathematics is something we do rather something we learn, and, all too often, lectures give the opposite impression" – Richard Burn

Introdução

Este trabalho pode ser dividido em três partes:

(1) a apresentação de um problema motivador, no caso o porisma de Steiner ;

(2) um breve estudo da Geometria Inversiva, cuja aplicação é a resolução do problema acima ;

(3) uma ilustração, através de exemplos, de como a utilização do software Cabri – Géomètre pode tornar mais natural a assimilação de alguns resultados fundamentais da Geometria Inversiva.

A escolha do porisma de Steiner como problema motivador deste trabalho deve-se, principalmente, à sua beleza e à clareza com que ele pode ser enunciado. Todavia, convém salientar que outros problemas de grande importância histórica como, por exemplo, o Teorema de Pappus e o Teorema de Feuerbach, também poderiam ser adotados, cumprindo o mesmo papel.

O método das transformações geométricas é, em essência, a aplicação na geometria de propriedades de funções. Nesta abordagem, os problemas são tratados de forma dinâmica em contraposição à maneira estática usualmente vista nos cursos de geometria com fundamentação axiomática. Além disso, através deste enfoque, as relações entre geometria e álgebra se estreitam, tornando seus estudos mais significativos. Mais explicitamente, o método pode ser descrito como segue: desejamos resolver um problema difícil, relacionado com uma figura dada; transformamos tal figura em outra que se relacione com ela de uma forma concreta e tal que, após a transformação, o problema difícil referente à figura original se converta em um mais simples em relação à nova figura. Resolvemos, então, este problema mais simples relacionado com a nova figura e, em seguida, invertemos a transformação para obter a solução do problema original.

Uma das vantagens que a geometria tem sobre as demais disciplinas matemáticas é a possibilidade de visualização e construção de figuras. Daí a importância do desenho como uma de suas ferramentas. A utilização do software Cabri – Géomètre pode trazer uma série de vantagens para este propósito. Através de seu uso, o estudante pode investigar a validade de diversas propriedades da transformação geométrica em questão, no caso a inversão, bem como utilizá-lo para a descoberta de novos resultados. O Cabri também se revela como uma eficiente ferramenta para a motivação e fixação de conceitos. Neste trabalho, procuramos mostrar, através de algumas atividades experimentais, como o Cabri pode contribuir no estudo da inversão do plano. Contudo, acreditamos que estas atividades devam preceder e motivar o estudo formal, mas não substituí-lo; assim, demonstrações rigorosas devem ser sempre objetivos oportunamente atingidos. Afinal, a qualidade do aprendizado depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos alunos e não apenas da disponibilidade de recursos tecnológicos e computacionais.

1. O Porisma de Steiner

Considere um círculo C_1 inteiramente contido no interior de um outro círculo C_2 . Construa um círculo D_1 que seja, ao mesmo tempo, tangente internamente a C_2 e tangente externamente a C_1. Em seguida, construa um novo círculo D_2 igualmente tangente aos dois círculos originalmente dados, C_1 e C_2 , e também tangente ao novo círculo D_1. Construa, agora, um terceiro círculo D_3 que seja tangente aos dois círculos dados C_1 e C_2 e, também, a D_2. Prossiga estas construções sucessivamente. Uma questão surge naturalmente relativamente a esta figura: pode ocorrer que a seqüência D_1, D_2, D_3, . . . seja finita, no sentido que se chegue finalmente a um círculo D_n da seqüência que seja tangente simultaneamente a D_{n-1} e a D_1 (além, obviamente, de C_1 e C_2) ? Quando esta pergunta tiver resposta afirmativa, diremos que se trata de uma cadeia de Steiner.

Este é o enunciado do porisma de Steiner: se dois círculos dados C_1 e C_2, estando o primeiro contido no interior do segundo, admitem uma cadeia de Steiner, admitem um número infinito delas, todas possuindo o mesmo número de círculos (isto é, o número de círculos é invariante quando a seqüência se fecha) ; além disso, qualquer círculo que seja, ao mesmo tempo, tangente aos dois dados pode ser considerado como o primeiro círculo de uma das cadeias. Em outras palavras, o “fechamento” da seqüência depende tão somente dos tamanhos e posição relativas dos dois círculos originalmente dados.

Obviamente, o problema se torna mais instigante se os dois círculos originalmente dados não forem concêntricos.

Quem primeiramente se interessou por este problema foi Jacob Steiner, por volta de 1830. A seguir, veremos como este problema pode ser abordado através da Geometria Inversiva.

2. A Inversão

Dado um círculo W, com centro O e raio k, o inverso relativamente a W de um ponto P do plano, com P diferente de O, é o ponto Q da semi-reta de origem O contendo P que satisfaz a condição $OP \cdot OQ = k^2$. O centro O de W é chamado o centro de inversão.

Da definição decorrem algumas propriedades óbvias:

- Inversões são transformações injetivas;
- Toda inversão é de período 2 (isto é, a transformação inversa de uma inversão qualquer é ela mesma);
- Se P é interior a W então seu inverso Q é exterior a W (e vice-versa);
- Os únicos pontos que são seus próprios inversos são os pontos de W;
- O inverso de um círculo com centro O e raio r é um círculo de raio k^2/r, de mesmo centro O;
- Qualquer reta contendo O, omitindo-se o próprio ponto O, é seu próprio inverso.

Duas observações relevantes relativas a esta “quase-transformação” (o motivo de ser assim chamada é o fato de seu domínio não incluir o centro de inversão) são as seguintes:

- Intuitivamente, o que a inversão “faz” geometricamente é “virar o círculo de inversão do avesso” ;
- Por definição, o centro de inversão não pertence ao domínio da inversão; a tentativa de incluí-lo no seu domínio associando ele a si mesmo é, do ponto de vista funcional infrutífera. O motivo é que a referida inclusão faria com que a transformação perdesse a continuidade, isto é, pontos “muito próximos” de O teriam imagens “muito distantes” da imagem de O .

Uma nota histórica interessante é a construção de um instrumento, chamado inversor de Peaucellier, utilizado para desenhar o inverso de um dado lugar geométrico (na verdade, este instrumento já havia sido descoberto antes por L. Lipkin, em 1781) – vide referência (2) .

Os resultados que se seguem não são tão evidentes (por isto mesmo serão utilizados na próxima parte como exemplos de investigação através do Cabri).

Proposição 1: O inverso de uma reta que não passa pelo centro de inversão é um círculo que passa pelo centro de inversão (exceto o próprio

centro de inversão) cujo diâmetro contendo o centro de inversão é perpendicular à própria reta dada.
Nesta proposição, deve-se considerar três situações: quando a reta está contida no exterior do círculo de inversão (nesse caso, sua imagem será um círculo contido no interior do círculo de inversão), quando a reta tangencia o círculo de inversão e, por fim, quando a reta é secante ao círculo de inversão (nesse caso, sua imagem será um círculo constituído de dois arcos, um exterior e outro interior ao círculo de inversão). A demonstração desta proposição utiliza apenas técnicas da geometria plana elementar (particularmente semelhança de triângulos).

Proposição 2: O inverso de um círculo que passa pelo centro de inversão é uma reta que não passa pelo centro de inversão e é perpendicular ao diâmetro do tal círculo que contém o centro de inversão.
Os comentários pertinentes à Proposição 2 são análogos aos feitos com relação à Proposição 1.

A seguinte proposição diz respeito a uma propriedade métrica da inversão.
Proposição 3: Para um círculo de inversão adequado, um triângulo dado de vértices A, B e C pode ser invertido em um triângulo de vértices A', B' e C' congruente ao triângulo dado.

Proposição 4: O inverso de qualquer círculo que não contém o centro de inversão é um círculo que também não contém o centro de inversão.
Na verdade, o que se pode provar na proposição acima é que o círculo e o seu inverso são homotéticos, sendo que o centro de homotetia é o próprio centro de inversão.

No sentido de obter resultados mais gerais, é útil acrescentar um ponto ao plano euclidiano. Este ponto será chamado "ponto no infinito" e será definido como o inverso do centro de qualquer círculo de inversão. O conjunto assim obtido, acrescentando-se ao plano euclidiano o ponto no infinito é chamado o plano inversivo. Com esta extensão, uma inversão é agora uma bijeção do plano inversivo. Neste contexto, é interessante se pensar em uma reta como um círculo de raio infinito. Como dois círculos tangentes um ao outro no centro de inversão são invertidos em duas retas paralelas, passaremos a entender duas retas paralelas como dois círculos que se tangenciam no infinito.

Com esta convenção estabelecida, temos então o seguinte resultado no plano inversivo:

Proposição 5: O inverso de qualquer círculo é também um círculo.

Vê-se que esta proposição é apenas uma síntese dos resultados anteriores acrescentada desta convenção estabelecida acima.

Os resultados seguintes tratam de propriedades relativas a tangência e ortogonalidade.

Proposição 6: Se dois círculos se intersectam segundo um certo ângulo, seus inversos irão se intersectar segundo o mesmo ângulo.

Proposição 7: Um círculo ortogonal ao círculo de inversão é seu próprio inverso.

Proposição 8: Se dois círculos do plano inversivo são tangentes então seus inversos também o serão.

Proposição 9: Se dois círculos do plano inversivo são ortogonais então seus inversos também o serão.

Por fim, temos o resultado fundamental para a abordagem do porisma de Steiner.

Teorema: Dois círculos C_1 e C_2 que não se intersectam podem ser sempre invertidos em um par de círculos concêntricos.

De fato, escolha um círculo D ortogonal a C_1 e C_2. Chame P um dos pontos onde D intersecta a reta t que liga os centros de C_1 e C_2. Considere, agora, a inversão I_C, em relação a um círculo qualquer C cujo centro é P. Assim, $I_C(t)$ é a própria reta t. Além disso, $D' = I_C(D)$ é uma reta ortogonal aos círculos $I_C(C_1) = C_1'$ e $I_C(C_2) = C_2'$. Portanto, C_1' e C_2' são concêntricos, o centro comum sendo o ponto de interseção de D' e t.

Com este último teorema, podemos retomar o porisma de Steiner. Se os dois círculos dados são concêntricos, o resultado é claro uma vez que duas cadeias de Steiner diferem por uma rotação. Caso contrário, pelo teorema acima, existe uma inversão que transforma os círculos dados em círculos concêntricos. Este é o ponto crucial, quando o problema é reduzido a uma situação mais simples. Uma cadeia de Steiner para os círculos dados transforma-se então em uma cadeia de Steiner para os seus inversos e o resultado segue facilmente.

Para concluir esta parte, resta responder à seguinte questão: quando dois círculos concêntricos admitem uma cadeia de Steiner ?
Digamos que R e r sejam os raios dos dois círculos, com $R > r$. Se O representa o centro comum dos dois círculos dados, A o centro de um dos círculos da cadeia e M o ponto onde este círculo tangencia um círculo que o segue na cadeia então no triângulo retângulo OAM a hipotenusa AO mede $(R + r)/2$ e o cateto AM mede $(R – r)/2$ e é oposto a um ângulo de $180^o/n$. Assim, $(R – r)/2 = [(R + r)/2]\text{sen}(180^o/n)$. Daí, a condição para que os dois círculos admitam uma cadeia de Steiner é que seus raios satisfaçam a relação $(R – r) / (R + r) = \text{sen}(180^o/n)$, ou ainda,
$R / r = (1 + \text{sen}(180^o/n)) / (1 - \text{sen}(180^o/n))$.

3. O Cabri – Géomètre e a Geometria Inversiva

Nesta parte, procuraremos, através de algumas atividades, ilustrar o emprego do Cabri – Géomètre no sentido de tornar mais natural a assimilação de certas propriedades básicas da Geometria Inversiva. Através de experimentações, o aprendiz poderá descobrir resultados que certamente lhe pareceriam pouco intuitivos se abordados através do puro formalismo. Na nossa concepção, estas atividades devem preceder o estudo formal o que, acreditamos, tornará a aprendizagem mais natural e os resultados mais significativos para o aluno.

Exemplo 1: Construção do inverso de um ponto P

Observação: esta atividade deve ser desenvolvida antes que o aluno conheça a opção “inversão”, disponível no Cabri.

Considere inicialmente o ponto P no interior do círculo de inversão W. Construa a corda TU, perpendicular a OP. O ponto P’, onde as tangentes ao círculo de inversão em T e U se intersectam, é o inverso de P. A justificativa reside no fato dos triângulos OPT e OTP’ serem semelhantes. Daí, OP / OT = OT / OP’. Portanto, OP . OP’ = $OT^2 = k^2$, isto é, P’ é o inverso de P.

No caso de P estar no exterior do círculo de inversão, o problema se reduz a determinar as tangentes a W por P. Para isto, trace o círculo de centro P contendo o centro de inversão O. Os pontos onde este último círculo intersectar W serão os pontos de tangência. Construa o segmento ligando estes dois pontos; onde ele intersectar OP teremos o inverso de P.

Exemplo 2: Investigar o inverso de uma reta que não contém o centro de inversão (esta atividade deve ser feita antes que o aluno conheça o resultado expresso na Proposição 1)

Tome uma reta que não contém o centro de inversão. Construa os inversos de vários pontos sobre a reta dada. O próprio aluno deverá se convencer de que estes inversos pertencem a um círculo. Para constatar este fato, ele poderá tomar três destes inversos, construir duas mediatrizes determinadas por dois pares destes pontos e encontrar o centro do suposto círculo. Agora, já dispondo do círculo, ele poderá examinar as imagens de outros pontos da reta dada e ver que elas irão pertencer ao círculo construído. Nesta atividade, o aluno deverá distinguir três possibilidades: quando a reta está no exterior do círculo de inversão, quando ela tangencia o círculo de inversão e quando ela é secante ao círculo de inversão. Por fim, ele deverá verificar o perpendicularismo entre a reta dada e o diâmetro do círculo imagem contendo o centro de inversão.

Exemplo 3: Investigar a imagem de um círculo que não contém o centro de inversão (esta atividade deve preceder a Proposição 4)
O roteiro desta atividade é semelhante ao do exemplo anterior.

Muitos outros exemplos podem ser criados no sentido de tornar os resultados da segunda parte deste trabalho naturais. O Cabri mostra-se muito adequado a este fim.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) Carvalho, Paulo Cezar - O logotipo da Olimpíada Brasileira de Matemática – Eureka! – número 4 – Sociedade Brasileira de Matemática – 1999
(2) Coxeter, H. S. M. , Greitzer, S. L. – Geometry Revisited – The Mathematical Association of América – 1967
(3) Eves, Howard – A Survey of Geometry – Allyn and Bacon – 1965
(4) Palis, Gilda de La Rocque – Tecnologia, gráficos e equações – Revista do Professor de Matemática – número 26 - Sociedade Brasileira de Matemática – 1994
(5) Pedoe, Dan – GEOMETRY – a comprehensive course – Dover - 1988
(6) Sant, Jean – Marc – O Cabri – Géomètre - Revista do Professor de Matemática – número 29 - Sociedade Brasileira de Matemática – 1995