REPRESENTAÇÃO GRÁFICA: importante recurso na formação de conceitos trigonométricos[1]

Profa. Dra Maria José Lourenção Brighenti
Universidade do Sagrado Coração - Bauru

RESUMO

Este artigo apresenta dados de uma pesquisa qualitativa, realizada com três professoras de Matemática de escolas públicas de nível médio que, objetivando verificar a viabilidade de uma proposta metodológica sugerida para o ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos, encontrou resultados importantes sobre a influência da representação gráfica na formação de conceitos. Traz resumidamente, algumas sugestões de ações para utilizar os recursos gráficos quando se constrói conceitos trigonométricos; dados sobre um dispositivo de transparências o qual oferece, com certa dinâmica, a visualização dos conceitos explorados e, também, os principais resultados encontrados, exemplificados pelos comentários das professoras realizados durante o desenvolvimento das atividades, no que tange à importância da representação gráfica e às construções geométricas para o desenvolvimento dos conceitos trigonométricos.

1. Introdução

Como professora do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru, da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, sempre estive preocupada com as falhas conceituais existentes nos alunos que ingressavam no 3º grau, oriundas das disciplinas estudadas no nível médio, especificamente as que tratavam dos conceitos trigonométricos.

[1] Parte dos resultados encontrados na Tese de Doutorado*: Alterando o ensino da Trigonometria em escolas de nível médio: a representação de algumas professoras*, apresentada junto ao Programa de Pós graduação em Educação na UNESP de Marília, 1998.

Mediante tais preocupações, elaborei uma pesquisa que culminou com a apresentação da Dissertação de Mestrado em Educação Matemática (1994) que sugeria uma nova seqüenciação para a apresentação dos conceitos trigonométricos (hoje bastante utilizada pelos autores de livros) e também propunha atividades para serem desenvolvidas nas salas de aula de modo que os alunos mediam, recortavam, desenhavam, enfim, utilizavam as representações gráficas para a construção do conceito que estava sendo estudado. Tal pesquisa teve resultados favoráveis no que tange aos aspectos relativos à aprendizagem dos conceitos trigonométricos.

As atividades propostas foram, cuidadosamente, elaboradas tendo como fundamento a teoria de David Ausubel (1968 e 1980) que tem como pontos importantes que:

· a aprendizagem dos conceitos deve ser significativa, isto é, a aprendizagem de um novo conceito deve considerar os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno;

· a seqüenciação hierárquica dos conceitos tem papel preponderante na aprendizagem dos mesmos, uma vez que a interiorização de um conceito é fundamental para a aprendizagem de outro subseqüente;

· a motivação dos alunos deve ser intrínseca, ou seja, partir do aluno.

Neste contexto, sugeriu-se atividades que proporcionam aos alunos, momentos de prazer e de descontração durante o processo e também, os possibilitam construir os conceitos, ao refletir e discutir sobre as diferentes situações esboçadas pela representação gráfica. Assim, um dos resultados satisfatórios que emergiram da pesquisa realizada no Mestrado em 1994, no que tange ***à aprendizagem*** dos conceitos trigonométricos, foi influência das representações gráficas na formação dos conceitos desenvolvidos.

Na pesquisa de Doutorado (1998) o problema a ser investigado foi o de verificar se a proposta sugerida poderia ser apropriada, no seu dia-a-dia, por professores de Matemática, em diferentes situações de ensino, bem como em diferentes escolas. Assim, nesta segunda etapa, dentre outros aspectos, pude encontrar dados referentes ao ***ensino.***

Desta forma, nas duas pesquisas realizadas, pode-se concluir que as atividades sugeridas, que modificavam a seqüenciação hierárquica dos conceitos e possibilitavam desenvolver ações metodológicas diferenciadas, facilitavam tanto o ***ensino*** quanto a ***aprendizagem*** dos conceitos trigonométricos.

2. Comentários sobre algumas ações sugeridas

Com o objetivo de determinar os valores do seno e do cosseno de arcos do segundo quadrante e de encontrar a relação entre o seno (ou cosseno) de um arco do primeiro quadrante e outro do segundo quadrante, trabalhando com a igualdade entre arcos suplementares, sugere-se que os alunos desenvolvam ações concretas, utilizando representações gráficas.

Nesta etapa, os alunos já desenvolveram, em atividades anteriores, ações concretas, utilizando compasso, régua e transferidor. As representações gráficas realizadas os possibilitaram:

- construir os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo (ou seja, arcos do primeiro quadrante) (cf: Briguenti, 1995);
- iniciar o estudo do comportamento das funções trigonométricas no primeiro quadrante (embora, tais conceitos sejam estudados integralmente no final de todo o processo), verificando, na prática, a variação do seno e do cosseno de arcos do primeiro quadrante, bem como, os valores das suas tendências para os arcos próximos de 0º e de 90º ;
- elaborar o conceito de ciclo trigonométrico, ao refletir sobre a variação das razões já estudadas e a necessidade de se utilizar um sistema cartesiano ortogonal que tem como unidade a medida do raio.

É preciso comentar que a construção dos conceitos descritos acima, não aconteceu repentinamente, mas durante e após muitas reflexões realizadas nas ações vivenciadas em atividades anteriores, dentre elas, a representação gráfica teve um papel preponderante.

Um material de extrema relevância na formação dos conceitos acima descrito é o dispositivo de transparências (descrito a seguir), o qual permite que o aluno visualize, geométrica e dinamicamente, a situação estudada por meio da representação gráfica. Assim, o comportamento das razões para os arcos do primeiro quadrante e para arcos na situação limite deste quadrante (tendendo 0° ou tendendo a 90°), poderão ser visualizada.

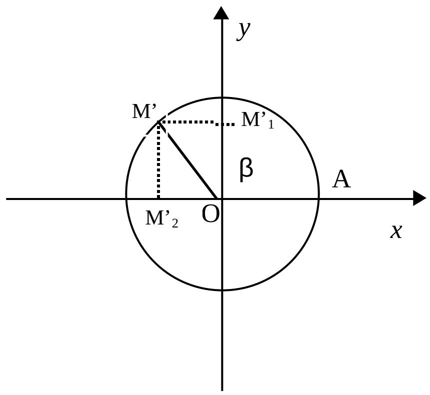
Tal dispositivo, além de propiciar a construção dos conceitos até aqui estudados, também permitirá que o aluno determine os valores do seno e do cosseno de arcos do segundo quadrante e, ainda, determine a relação existente entre os senos (ou cossenos) dos arcos do primeiro e do segundo quadrante, desenvolvendo o conceito de arcos suplementares.

Os conceitos trigonométricos existentes nestas ações têm como conceitos subsunçores[2] S***imetria e Congruência entre triângulo,*** pois objetiva ampliar os conceitos estudados até aqui – razões trigonométricas de arcos contidos no primeiro quadrante-, por meio de ações que permitam descobrir os valores das razões trigonométricas dos arcos contidos no segundo quadrante.

Para que isso aconteça, utilizando o dispositivo de transparências, o professor deverá recordar: que todo ponto M = (x , y) do ciclo trigonométrico, tem coordenadas $x = \overline{OM}_2 = \cos\alpha$ e $y = \overline{OM}_1 = \text{sen}\,\alpha$ (para $\alpha = \overset{\frown}{AM}$); os valores de sen 0°, cos 0°, sen 90°, cos 90°; e a variação destes números trigonométricos no 1º quadrante, pois tais conceitos servirão de ponte cognitiva, interligando o que os alunos já sabem com o novo conhecimento.

Para introduzir o novo assunto, o professor deverá desenhar no quadro negro, um ciclo trigonométrico e um arco $\overset{\frown}{AM'}$, de medida β , com M' no 2º quadrante e relembrar que as coordenadas do ponto M' são:

[2] Segundo Ausubel (1968; 1980) conceitos subsunçores são conceitos relevantes, claros e com estabilidade na estrutura cognitiva de quem aprende. Os subsunçores servem de ponte cognitiva entre o novo e o antigo conhecimento.

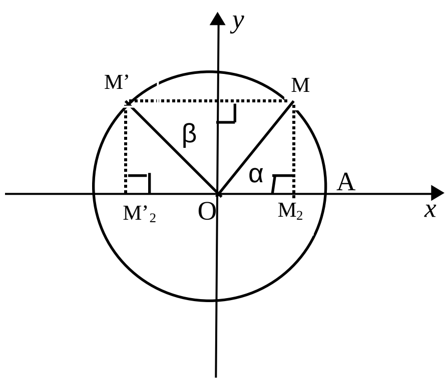


$M' = (x,y) = (\overline{OM'}_2\ ,\ \overline{OM'}_1)$

M'= (cosseno do arco $\overset{\frown}{AM'}$, seno do arco $\overset{\frown}{AM'}$)

M' = (cos β, sen β)

Supondo que um ponto M' da circunferência seja simétrico à M em relação ao eixo O_y, o professor discutir com os alunos a congruência existente entre os triângulos OM_2M e OM'_2M', e concluir que geometricamente os segmentos OM_2 e OM'_2 são congruentes.



Como existe um sistema de eixos cartesianos associados ao ciclo trigonométrico, definindo o ponto O como origem do sistema, os segmentos OM_2 e OM'_2 têm medidas algébricas opostas. Portanto, $\overline{OM}_2 = -\overline{OM'}_2$

Da congruência citada, também ocorre que a medida do ângulo $M'_2\hat{O}M$ é igual a medida do ângulo $M_2\hat{O}M = \alpha$. Desta forma, é fácil visualizar e comprovar que $\alpha + \beta = 180°$.

Este é o momento indicado para se nomear esses ângulos como suplementares, pois a soma das suas medidas é igual à 180°. Então:

arcos suplementares $\rightarrow$ $\alpha + \beta = 180°$

Apesar de se propor uma prática expositiva, segundo Ausubel, é possível acontecer uma aprendizagem significativa, pois os conceitos utilizados não foram apresentados isolados e desconexos de outros. O professor, além de utilizar outros conceitos abrangentes e relevantes (Simetria e Congruências entre triângulos), ancorou o novo conhecimento em conceitos já desenvolvidos, anteriormente, pelos alunos.

Após essas explicações iniciais, o professor deverá propor ações que propiciem os alunos a melhorar compreensão dos fatos. Com o objetivo de determinar os valores do seno e do cosseno dos arcos de 120º, 135º, 150º e 180º e de encontrar a relação existente entre o seno (ou cosseno) de arcos suplementares, os alunos deverão:

- Construir um ciclo trigonométrico de raio 1dm;
- Marcar com um transferidor os ângulos 90º, 120º, 135º, 150º e 180º, a partir do ponto A;
- Medir os valores encontrados para o seno e o cosseno de cada ângulo marcado (não se esqueça de dividir os valores encontrados por 10);
- Anotar a variação do seno e do cosseno para os arcos do 2º quadrante, bem como o sinal que essas razões assumem neste quadrante;
- Comparar e relacionar sen α e sen β; cos α e cos β, sabendo que α 1º Q e β 2º Q e ainda $\alpha + \beta = 180º$;
- Completar com < ; > ou = , as sentenças abaixo sabendo que α 1º Q e β 2º Q e ainda $\alpha + \beta = 180º$;

  a) sen α ..... cos β b) sen β ..... sen α c) cos α ..... cos β
- Responder a questão: Suponha ser ***x*** a medida de um arco do 1º quadrante.Qual é a medida do seu suplemento?

As atividades sugeridas exigem que os alunos utilizem régua, compasso, transferidor para representar situação proposta, realizando ações que os possibilitam entender a situação através da representação gráfica.

Depois que os alunos desenvolveram toda a atividade é importante que o professor sistematize que foi estudado, fazendo a conclusão deste item e reforçando a idéia de que "se dois arcos α e β são suplementares, ($\alpha + \beta = 180°$), então":

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos\beta".$$

Assim, mediante a utilização dos conceitos subsunçores - Simetria e Congruência entre triângulos-, os alunos determinarão, com facilidade, os valores dos senos e dos cossenos dos arcos do 2º quadrante, cujas extremidades são simétricas às extremidades daqueles arcos notáveis do 1º quadrante.

3. Dispositivo de transparências

Transparência T1:

Numa folha de papel vegetal, tamanho ofício, desenhar uma circunferência de raio 5 cm. Dividi-la em 36 partes iguais, graduando estas partes de 10° em 10°, a partir do ponto A que será o início de todos os arcos. Usar, de preferência, letras e números adesivos e tinta nanquim. Desenhar sobre esta circunferência eixos cartesianos ortogonais com unidade igual ao raio da circunferência e o ponto (0,0) coincidindo com o centro O da mesma. Em seguida, tirar xerox do desenho, reproduzindo-o numa folha de acetato especial, o que pode ser feito em copiadoras.

Transparência T2:

Numa folha de acetato comum, tamanho ofício, desenhar uma circunferência com raio de 10 cm. Traçar um segmento de reta de 5cm, de forma que uma das suas extremidades coincida com o centro O da circunferência. Não colocar letras na figura. Se quiser, recorte o círculo.

Transparência T3:

Numa folha de acetato, de preferência bem rígida, fazer o furo conforme mostra a fig.1. Os números indicam a posição do furo P (não colocar os números nem as setas na transparência). Traçar um segmento de medida 5 cm com origem no furo.

Posição do furo na T3

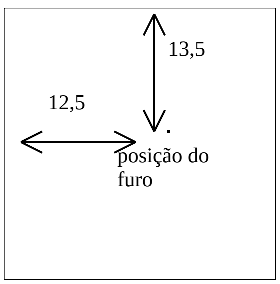


Figura 1: Transparência T3, mostrando a distância do furo até as bordas (em cm)

Moldura de cartão

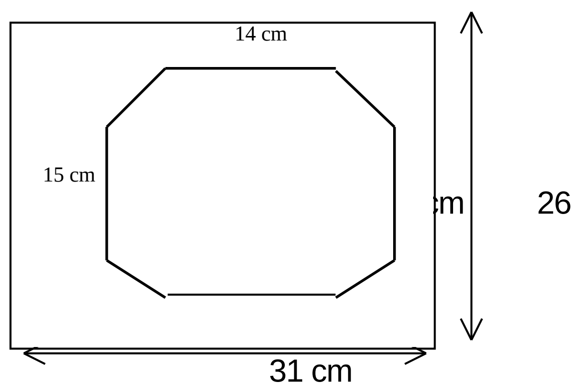


Figura 2: Moldura de papel cartão.

Depois de confeccionar a moldura de cartão, seguindo as especificações acima, a parte interna deverá ser recortada, ficando como uma moldura para o conjunto de transparências.

Pregar com fita adesiva no verso da moldura de cartão, a transparência T1, centralizando o círculo. Colocar a transparência T2 sobre a moldura já com a transparência T1 e, com um alfinete (ou rebite), fixar os centros das circunferências de modo que elas possam girar em torno desse alfinete (ou rebite). Em seguida, colocar T3 sobre o conjunto T1, T2 e com outro alfinete (ou rebite), fixar T3 sobre a T2 na outra extremidade do segmento desenhado na T2 (não aquela que já está presa ao centro), de modo que as transparências possam girar facilmente. Cortar e rebitar os alfinetes rentes às transparências.

Verifica-se que ao deslocar a transparência T2, mantendo-se fixa a moldura, um ponto qualquer da circunferência se deslocará sobre a mesma, "levando consigo" a sua projeção sobre os eixos (T3), onde aparecerão os valores dos senos e dos cossenos.

Utilizando-se de um retro-projetor, será possível fazer uma projeção nítida deste dispositivo acompanhado de um certo dinamismo, pois o mesmo permite ao professor mostrar a variação do cosseno e do seno de um ângulo (ou um arco) continuamente.

4. Considerações Finais

Desenvolvendo ações como esta descrita acima, ficou comprovado, nas pesquisas realizadas, que os alunos compreendem melhor os fatos ao utilizarem a representação gráfica, pois além de observarem e discutirem com seus colegas os procedimentos realizados, visualizam o que acontece.

Olhando para os depoimentos das professoras de Matemática que se propuseram a verificar a viabilidade da proposta sugerida em suas salas de aulas, foi possível diagnosticar, através de uma análise qualitativa dos dados, conforme propõem Bogdan.e Biklen (1994), que a influência da representação gráfica, está presente em pelo menos quatro das nove categorias encontradas na pesquisa toda, a saber: reação dos alunos; aprendizagens; procedimentos e condições materiais e facilidades e dificuldades instrucionais.

Para as professoras, os alunos trabalhavam bastante motivados e nem viam a hora passar. O envolvimento dos alunos com o assunto estudado era maior quando utilizavam construções gráficas e/ou manipulavam algum material que permitissem refletir sobre os conceitos envolvidos. Para uma delas: ***"...eles nunca tinham para do para pensar na situação geométrica. Aqui eles analisam geometricamente, medindo os valores"*** (Prof.2)

Quanto à categoria ***aprendizagens*** foi possível perceber que, para as professoras, um fator que influenciou decisivamente a aprendizagem dos conceitos trigonométricos estudados foi o uso da representação gráfica no ciclo trigonométrico. Uma das professoras afirmou:

> ***"Basta fazer o ciclo e visualizar (...) ele [o aluno] consegue visualizar o que está acontecendo. Então, na circunferência, ele não tem mais como errar e não precisa decorar"*** (Prof.2)

Para a outra professora, ***"... as fórmulas não são jogadas, leva o aluno ao raciocínio que chega a deduzir fórmulas..."*** (Prof.1).

Os ***procedimentos*** realizados e as ***condições materiais*** utilizadas trouxeram a certeza de que o "prazer em aprender" estava relacionado tanto às ações concretas, quanto às construções geométricas realizadas. Ainda em relação aos procedimentos realizados, as professoras comentaram que, os esquemas feitos nos ciclos, bem como a utilização das transparências, auxiliaram muito na compreensão dos conceitos, uma vez que eles possibilitaram a visualização da situação no ciclo trigonométrico.

A possibilidade de poder visualizar a situação, mediante o uso das transparências ou da representação gráfica no ciclo também, foi um aspecto citado pelas professoras como facilitador da aprendizagem, embora, em alguns momentos a representação gráfica também tenha sido apontada, como elemento dificultador, pois os alunos não tinham habilidades para realizarem operações com os instrumentos de desenho geométrico.

5. Referências Bibliográficas

AUSUBEL, D.P. ***Educational psycology*:** a cognitive view. 13.ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D., HANESIAN, H. ***Psicologia educacional***. 2.ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 625 p.

BOGDAN, R., BIKLEN, S. ***Investigação qualitativa em educação***: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994. p. 48-62; 292-301.

BRIGUENTI, M.J.L. ***Ensino e aprendizagem da trigonometria*****:** novas perspectivas da educação matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências Exatas de Rio Claro, 1994. 174 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.

BRIGUENTI, M.J.L.; CREPALDI, C.V. Hierarquia Conceitual: uma proposta de Ausubel. ***Mimesis,*** Bauru: Universidade Sagrado Coração (USC), v. 16, n.1, 1995, p. 133-42.

BRIGUENTI, M.J.L. ***Alterando o ensino de Trigonometria em escolas de nível médio:*** a representação de algumas professoras. Marília: Universidade Estadual Paulista, 1998. 339p. Tese de Doutorado em Educação..