Ensino de Simetria: contribuições de uma seqüência didática com o Cabri-Géomètre II

Abraão Juvêncio de Araújo

Considerações teóricas

O conceito de simetria, do ponto de vista matemático, se fundamenta em dois conceitos: o de isometria e o de invariância de uma figura por um grupo de isometrias (Weyl, 1952). No estudo da simetria, três elementos intervêm de forma indissociável: a transformação, a figura geométrica e a invariância da figura, em face da transformação.

Convém explicitar o significado que será atribuído aqui a esses três elementos essenciais.

A transformação é entendida como uma função ***T*** do plano ∏ no plano ∏ $(T : \Pi$ ♦ $\Pi)$ que associa a cada ponto ***A*** do plano (***A*** ∏) um outro ponto ***A′*** = ***T***(A), também pertencente ao plano.

As transformações que preservam distâncias entre pontos são denominadas de ***transformações isométricas***. Assim, dizemos que ***T*** é uma transformação isométrica se, dados dois pontos quaisquer ***A*** e ***B***, então a distância entre A e B é igual à distância entre suas imagens ***T***(***A***) e ***T***(***B***), ou seja, $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(T(A),T(B))$. Pode ser provado, a partir dessa definição, que uma isometria transforma retas, semi-retas e segmentos de retas em retas, semi-retas e segmentos de retas, respectivamente. Assim, triângulos e quadrados são “levados” em triângulos e quadrados, respectivamente. Além disso, uma isometria preserva medida de ângulos.

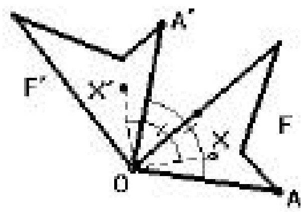
Uma figura geométrica é um conjunto qualquer de pontos do plano.

A invariância de uma figura ***F***, em face de uma transformação, diz respeito ao fato de essa transformação não alterar esse conjunto de pontos.

Assim, diz-se que uma figura ***F*** é simétrica relativamente a uma transformação isométrica ***T*** se a figura ***F*** é invariante por ***T***, isto é, se a transformação aplicada à figura ***F*** tem como imagem a própria figura ***F***, ou seja, ***T***(***F***) = ***F***.

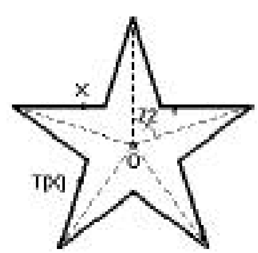
As isometrias são classificadas em quatro tipos: ***reflexão,*** em relação a uma reta; ***rotação***, em torno de um ponto; ***translação***; e ***reflexão*** com deslizamento. Dentre estas, destacam-se, para o estudo das simetrias no ensino fundamental, as de ***reflexão*** e de ***rotação***, tendo em vista que as simetrias de translação e de reflexão com deslizamento, a rigor, só podem ocorrer em figuras ilimitadas.

Uma rotação de um ângulo α em torno de um ponto ***O*** é a transformação, denotada por $T_{0,\alpha}$: ∏ ♦ ∏ , que leva um ***X*** (um ponto qualquer do plano ∏) num ponto $X' = T(X)$, de tal modo que a distância de ***X´*** ao ponto ***O*** é a mesma que a de ***X*** a ***O***, ou seja, $\mathrm{d}(X,O) = \mathrm{d}(T(X),O)$. Além disso, leva o ponto O em O [***T***(***O***) = ***O***] e a medida do ângulo orientado[1] ***X***O***X´*** é igual a α.



Dessa forma, pode-se provar que toda rotação de um ângulo α em torno de O, denotado por $T_{O,\alpha}$: ∏ → ∏, é uma isometria, ou seja, dados X e Y   ∏, $\mathrm{d}(X,Y) = \mathrm{d}(T(X),T(Y))$.

Nesse sentido, dizemos que uma figura F é ***simétrica***, em relação a uma rotação de um ângulo α, se existe uma rotação $T_{O,\alpha}$: ∏→∏, de tal forma que, qualquer que seja o ponto X pertencente à figura F, sua imagem T(X) é também um ponto que pertence à figura F.



Ferramenta computacional

O Cabri-géomètre[2] é um software que apresenta características que permitem utilizar o computador como uma ferramenta auxiliar para promover a aprendizagem de conceitos geométricos. O Cabri-géomètre, segundo Laborde

---

[2] O Cabri-géomètre vem sendo desenvolvido desde meados dos anos oitenta por J.M. Laborde, no LSD2-IMAG, laboratório do CNRS (Centro Nacional da Pesquisa Científica) e da Universidade Joseph Fourier, em Grenoble – França.

& Capponi (1994), apresenta características importantes, a exemplo das ***primitivas de desenhos puros***, definidas como um conjunto de objetos elementares (ponto, reta, etc.), e das ***primitivas geométricas***, definidas por ações elementares (traçar uma reta paralela a uma reta dada, determinar o ponto médio de um segmento etc.). Outra característica importante apresentada por este ambiente computacional consiste na ***manipulação direta do desenho***. Essas características permitem construções que se fazem no ambiente com papel e lápis e obter, por deslocamento contínuo de seus objetos de base, uma multiplicidade de desenhos ligados aos mesmos objetos.

Com relação à utilização da ferramenta Cabri-géomètre, nessa seqüência didática, há momentos em que será necessário o aluno validar suas construções. Para tanto, o aluno poderá "pegar e arrastar" um elemento de base a fim de verificar se a figura construída preserva as características esperadas na construção. Uma outra maneira de fazer tal verificação exige que o aluno construa uma outra figura, congruente à primeira, cujo centro de rotação seja o mesmo. Uma terceira forma de validação ocorre quando o aluno escolhe uma das n-partes correspondentes da figura e obtém sucessivas rotações, fazendo uso do comando "rotação". Nesse caso, ele terá que verificar se a imagem da parte correspondente obtida na enésima rotação se sobrepõe àquela inicialmente escolhida para obter a primeira imagem.

Objetivo geral

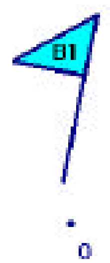
Este trabalho tem como objetivo provocar uma reflexão sobre os efeitos de uma seqüência didática para aprendizagem do conceito de simetria de rotação desenvolvida em um ambiente computacional com o Cabri-géomètre II.

ATIVIDADE 1: Construção de imagens de figuras rotacionadas em torno de um ponto

Essa sessão, denominada "as bandeiras", tem como objetivo proporcionar ao aluno identificar características da rotação. A idéia subjacente é a de levar o aluno a perceber que, numa figura obtida por isometria de rotação, a distância de um ponto qualquer ao centro de rotação é igual à distância entre a sua imagem e o centro de rotação, bem como que o ângulo formado entre os lados (visualizados mentalmente) que ligam o centro de rotação a dois pontos correspondentes tem a mesma medida do ângulo de rotação.

Ficha de trabalho

O desenho que aparece na tela do computador representa a figura de uma bandeira que gira em tono do ponto º



Tarefa:

1) Obtenha na tela do computador uma bandeira B2 aplicando uma rotação, de um ângulo qualquer à bandeira B1, em torno do ponto O (centro de rotação).

Observação: Para determinar a medida do ângulo de giro (rotação), utilize o comando "Edição Numérica"; Para aplicar a rotação, ative o comando "ROTAÇÃO", depois clique na figura a ser rotacionada (bandeira B1), em seguida, no ponto O (centro de rotação) e, por último, na medida do ângulo criada.

2. Crie um ponto P sobre a bandeira B1 e obtenha um ponto P', imagem de P, na bandeira B2. Movimente P e responda, justificando:

a) O que você pode afirmar com relação à distância desses pontos (P e P') ao ponto O (centro de rotação)?

b) O que você pode afirmar com relação ao ângulo PÔP' (com vértice no ponto O e lados que passam pelos pontos P e P')?

Racionalização

Acreditamos que o aluno não terá dificuldades para desenhar a imagem da bandeira B1 devido ao fato de que o procedimento está descrito na ficha de trabalho. Por outro lado, como o próprio programa se encarrega de desenhar a figura esperada, quando os comandos forem utilizados corretamente, não ocorrerão erros do tipo: deixar de preservar distâncias de pontos (ou partes) correspondentes em relação ao centro de rotação, bem como em deixar de posicionar adequadamente a inclinação da imagem em relação à figura geradora.

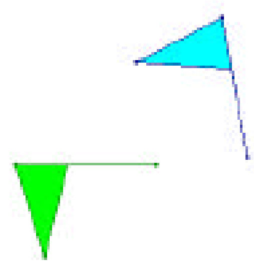
Espera-se, ainda, que o aluno ao perceba que distâncias dos pontos correspondentes ao centro de rotação sejam iguais, bem como que a medida do ângulo que se forma entre os lados (imaginários) que ligam o centro de rotação (ponto O) aos pontos correspondentes obtidos (P e P').

ATIVIDADE 2: Localizando o centro de rotação

Essa atividade tem como objetivo verificar se o aluno percebe que (na rotação) o centro de rotação fica eqüidistante dos pontos correspondentes, bem como que o ângulo que se forma entre os lados (imaginários) que ligam o centro de rotação a um par de pontos correspondentes tem a mesma medida do ângulo de rotação.

Ficha de trabalho

Na figura desenhada na tela do computador a bandeira verde foi obtida a partir de uma rotação aplicada à bandeira azul.



Tarefa:

1) Determine o ponto do centro de rotação.

2) Diga qual é a medida do ângulo utilizado nessa rotação?

Racionalização

A maneira adequada de localizar o centro de rotação consiste em encontrar a interseção das mediatrizes de dois pares de pontos correspondentes quaisquer. Espera-se que o aluno perceba que se faz necessário controlar as distâncias (relativas) das partes correspondentes ao ponto criado para ser o centro de rotação. Assim, por exemplo, o aluno poderá criar um ponto livre, utilizar uma medida de ângulo qualquer, aplicar uma rotação à bandeira azul e, após encontra uma terceira bandeira mexer na medida do e no ponto criado para ser o centro de rotação até que essa terceira bandeira superponha a bandeira verde.

ATIVIDADE 3: Construindo uma figura com simetria rotacional, conhecendo-se o número de partes correspondentes

Essa atividade tem como objetivo proporcionar ao aluno desenhar uma figura com simetria rotacional, conhecendo-se o número de partes correspondentes. A idéia era verificar se o aluno percebia que, para desenhar a figura, poderia encontrar a medida de ângulo dividindo 360^{o} pelo número de lados.

Ficha de trabalho

A figura 1, na tela do computador, há um desenho representando um catavento com quatro pás. A figura 2 representa uma das pás de um novo catavento com cinco pás, a ser desenhado.

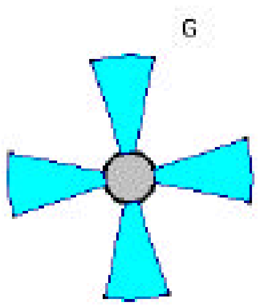


fig. 1

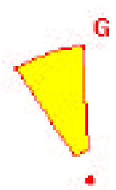


fig. 2

Tarefa:

1) Na figura 2, use o comando "Rotação" e complete o desenho do catavento com 5 (cinco) pás
2) Descreva (passo a passo) o procedimento utilizado para desenhá-lo.

Racionalização

Nossa expectativa é de que, com base nas observações realizadas na figura 1, o aluno perceba algumas características dessa figura – como, por exemplo, reconhecendo que os ângulos entre as partes correspondentes têm a mesma medida ou, ainda, que as pás foram obtidas por rotações de 90^o – as utilize na construção do catavento na figura 2.

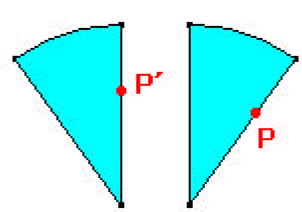
Espera-se que o aluno reconheça que a medida dos ângulos que se formam entre as pás do catavento é constante e coincide com a medida do ângulo de rotação. Nesse sentido, acreditamos que o aluno estabeleça a relação entre o ângulo de rotação e o número de pás desse novo catavento (dividindo 360^o por 5), para descobrir a medida do ângulo de rotação, (no caso, 72^o) e desenhe o novo catavento.

Atividade 4: Construindo uma figura com simetria rotacional em que o ângulo de rotação não aparece explícito

Essa atividade tem como objetivo proporcionar ao aluno desenhar uma figura com simetria rotacional, conhecendo-se duas de suas partes correspondentes e consecutivas. A idéia consiste em verificar se o aluno consegue determinar a medida do ângulo de rotação, que não aparece explicitamente na figura, a partir do reconhecimento de que o ângulo que se forma entre os lados (imaginários) que ligam o centro de rotação aos pontos correspondentes tem a mesma medida do ângulo de rotação.

Ficha de trabalho

Figuras que são construídas com o mesmo procedimento utilizado para desenhar os cataventos, na atividade anterior, são denominadas ***Figuras com Simetria de Rotação.*** O desenho que aparece na tela do computador é parte de uma figura que tem simetria de rotação



Tarefa:

1) Localize o centro de rotação e complete o desenho dessa figura, sabendo-se que a parte que contém o ponto P’ foi obtida a partir de uma rotação aplicada à parte que contém o ponto P, em torno do ponto O (centro de rotação).

2) Descreva (passo a passo) o processo utilizado para completar esse desenho.

Racionalização

A expectativa é de que o aluno reconheça que o ângulo POP’ tem a mesma medida do ângulo de rotação e use essa informação para terminar a construção da figura com simetria rotacional. É possível que o aluno utilize outros pontos correspondentes, como, por exemplo, os vértices correspondentes da figura, para encontrar a medida do ângulo de rotação. Entretanto, mesmo sem perceber tal relação, o aluno poderá desenhá-la, por tentativa, usando uma medida de ângulo qualquer, e, por aproximação, ajustar a medida do ângulo utilizado na rotação de modo que obtenha a configuração desejada.

Atividade 5: Reconhecendo polígonos regulares como figuras com simetria de rotação

Essa atividade tem como objetivo levar o aluno a desenhar um triângulo eqüilátero, um quadrado e um pentágono regular, usando rotações. A idéia era levar o aluno a perceber que os polígonos regulares são figuras com simetria rotacional. Ficou convencionado que os pentágonos regulares são formados por lados que têm a mesma medida e ângulos que também têm a mesma medida.

Ficha de trabalho

Na tela do computador há três segmentos.

Tarefa:

1) Construa um triângulo eqüilátero de forma que o segmento AB seja um de seus lados.

2) Construa um quadrado de forma que o segmento MN seja um de seus lados.

3) Construa um pentágono regular de forma que o segmento PQ seja um de seus lados.

Racionalização

A expectativa é de que o aluno perceba que os polígonos regulares são figuras com simetria de rotação, cuja medida do ângulo de rotação se obtém dividindo 360^o pelo número de lados, e utilize os conhecimentos apreendidos na sessão anterior para desenhar os polígonos solicitados. Mais precisamente, crie um ponto para servir de centro de rotação, aplique as rotações necessárias para obter o número de lados do polígono, utilizando a medida de ângulo encontrada, e, finalmente, movimente o ponto criado para ser o centro de rotação de modo que obtenha a configuração desejada.

Referências bibliográficas.

ARAUJO, A. J. Simetria de Rotação: Uma sequência didáctica com o Cabri-géomètre. Dissertação de Mestrado – UFPE, 2000.

ARTIGUE, M. Didactic engineering. In Research in Didactique of Mathematics: Selected papers. La pensée Sauvage, éditions, Grenoble, 1992.

BROUSSEAU,G. Teory of didactical situations in mathematics. (Didactique des Mathématiques, 1970-1990). Mathematics Education Librery, vol.19. Editado e traduzido por Balacheff, Nicolas et al. Kluwer Academic Publishers, DORECHT / Boston / London, 1997.

CHARNEY, R. Aprendendo com resolução de problemas. In Parra. C. & Saiz. I. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

DANTAS, M.M.S. Ensino da Matemática: um processo entre a exposição e a descoberta. Salvador - BA, CED-UFBA, 1987.

HART, K. Reflections and rotations. In HART, K. Children's Understing of Mathematics, 1982.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-géomètre. In Em Aberto, ano 14, Brasília, INEP, nº 62, 1994.

LIMA, E. L. Isometrias. Coleção do Professor de Matemática – SBM, 1996.