LOGICISMO, FORMALISMO E INTUICIONISMO: análise de seus pressupostos[1]

Renata Cristina Geromel Meneghetti[2]

RESUMO

Historicamente temos que o logicismo, o formalismo e o intuicionismo, correntes filosóficas dominantes no século XIX, buscaram fornecer à matemática uma sólida fundamentação, porém não conseguiram atingir os seus propósitos. Tendo em vista uma compreensão do saber matemático, neste trabalho pretendemos discutir não somente os pressupostos dessas correntes, como também os motivos de seus fracassos.

O Logicismo se caracteriza pelo propósito de reduzir toda a matemática à lógica. O primeiro trabalho, de caráter determinado nesta direção, foi o do matemático alemão Frege (1848-1925), que pretendeu reduzir a aritmética à lógica, visto que, com a aritmetização da análise, caso conseguisse seu intento, toda a matemática clássica seria reduzida à lógica.

Esse matemático considerou a aritmética um corpo de verdades analíticas e a priori, ou seja, os únicos princípios exigidos para as afirmações aritméticas são aqueles da lógica (Cf. Frege, 1959 e 1983, § 3).

Iniciou seu projeto em 1879, com sua obra Begriffsschrift [3], na qual desenvolveu uma linguagem própria para a aritmética, conectando lógica e matemática. Com tal obra, a lógica presente no cálculo de proposições, que antes era traduzida dentro de fórmulas e estudada por meio de argumentos apoiados na lógica intuitiva, passa a ser constituída como uma linguagem que não necessita ser suplementada por qualquer razão intuitiva. O avanço em lógica permitiu a emersão de dois novos campos: a Teoria dos Conjuntos e os Fundamentos da Matemática.

Assentadas as bases da nova lógica, Frege dedicou-se à tarefa de mostrar que as leis aritméticas fundamentam-se nas leis da lógica. O núcleo

---

[1] O trabalho aqui apresentado representa parte dos estudos efetuados em minha tese de doutorado, sob a orientação do Prof. Irineu Bicudo, junto ao programa de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

[2] Depto. de Mat. USP- São Carlos- rcgm@icmc.sc.usp.br.

[3] O nome completo dessa obra no original é: ***Begriffsschrift, eine der arithmetischen***

desse trabalho encontra-se em sua teoria de número, exposta em Os Fundamentos da Aritmética(1884)[4], na qual estabelece como princípios: separar o psicológico do lógico, o subjetivo do objetivo; perguntar pelo significado da palavra no contexto da proposição, nunca isoladamente; e não perder de vista a distinção entre conceito e objeto (Cf. Frege, 1959 e 1983, introdução).

Concebendo o número como um objeto lógico, ideal, não tendo existência espaço-temporal, cujo acesso se dá unicamente por meio da razão estabelece como primeiro passo, rumo ao seu alvo, apresentar uma definição lógica para o número cardinal (Cf. Frege, 1959 e 1983, §45).

Na lógica de Frege, a todo conceito está associado um objeto lógico, sua extensão (que é o conjunto de todos os objetos que caem sob o conceito em questão). Por exemplo, na expressão “2 é um número”, “x é um número” é o conceito”, e 2 é o objeto. Nesse caso posso dizer que “2 cai” sob o conceito “x é um número” (pq quanto substituo x por 2 obtenho uma proposição verdadeira), e portanto, 2 pertence a extensão do conceito “x é um número”. Os números são definidos como extensão de conceito. Dizer que algo é um número significa dizer que existe pelo menos um conceito F tal que este algo seja extensão do conceito “equinumérico a F”.

Após ter definido número, Frege tem por objetivo examinar se as propriedades conhecidas dos números podem ser derivadas dessa definição. Inicia tal investigação ainda nessa obra, continuando-a em sua seguinte: As Leis Fundamentais da Aritmética (1903).[5]

Destacamos que a característica mais marcante no logicismo de Frege é a busca pelo predomínio total, na Aritmética, do aspecto lógico do conhecimento; e, em conseqüência, há a exclusão do aspecto intuitivo.

Frege não conseguiu atingir seus propósitos, seu sistema mostrou-se inconsistente como apontou Russell, em 1902, com o então famoso ‘paradoxo de Russell’, sobre o qual falaremos a seguir.

Na teoria de Frege conceito admite extensão. Essa extensão do conceito é um objeto. A extensão do conceito é um objeto do qual posso

---

nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.

[4] Título no original: ***Die Grundlagen der Arithmetik.***

[5] Título original: ***Grundgesetze der Arithmetik.***

perguntar se ele cai sob o conceito. Pode-se também perguntar se ele cai sob o conceito que lhe deu origem. Foi isso que originou o paradoxo de Russell, visto que, se admitirmos o conceito x x, a extensão deste conceito é a classe y= {x; (x x)}, i.e., a classe de tudo aquilo que não é membro de si próprio. Desde que y é um objeto, podemos perguntar se ele cai ou não sob o conceito x x, i.e., y y ou y y. Mas, se y y chegamos à conclusão de que y y e se y y chegamos a y y. Todavia, ambos os casos são contraditórios. Tal paradoxo põe em risco todo o trabalho de Frege, que, então, passa a buscar uma solução para o problema e, no entanto, não obtém sucesso.

A continuidade do logicismo se dá com o próprio Russell (1872-1970) que apresentou uma postura mais radical, a de reduzir toda a matemática à lógica (Cf. Russell, 1919, p.194).

O projeto de Russell foi esboçado em sua obra ***Principles of Mathematics*** (1903), porém o empreendimento maior desse projeto se deu em colaboração com Whitehead, tornando-se o terceiro volume do Principia Mathematica (1910-1913).

Esse matemático adotou a posição de que o mundo existe independente de nossa percepção (Cf. Russell 1919, p.59).

Enquanto Frege concebeu a aritmética como consistindo em conhecimentos puramente lógicos, que excluiu todo apelo à intuição, Russell estendeu tal concepção para toda a matemática. Para ele, as verdades matemáticas são verdades lógicas e, portanto, não dizem respeito ao conhecimento empírico e também não podem expressar conhecimento subjetivo.

Entendeu por investigação matemática de estrutura uma investigação das conseqüências lógicas do conjunto de axiomas. Assumiu que existem indivíduos básicos e, por conseqüência, proposições logicamente primitivas básicas, que afirmam que uma dada relação vale entre indivíduos atômicos.

As verdades matemáticas devem assim ser uma espécie de verdades lógicas ou analíticas e essas, por sua vez, devem ser produtos de convenções lingüísticas. A introdução da terminologia matemática e seu uso em ciências empíricas devem, portanto, a princípio, serem eliminadas.

Em Russell, o significado de todas as expressões que aparentemente refere-se a objetos abstratos, deve ser mostrado, pelo fornecimento de definições apropriadas, como construtos lógicos (ficções); organizadas a partir de constituintes do mundo empírico.

A atribuição de significados para nomes toma uma das duas seguintes formas: ou o nome é simplesmente um rótulo para um objeto empiricamente dado (e aí ele pode até ter uma referência, mas não tem um sentido), ou o nome é uma expressão descritiva (uma descrição determinada), que identifica um objeto, seja por meio de relações com outros objetos dados, seja através de seu modo de construção a partir de objetos dados.[6] Uma expressão verbal não pode ser definida em termos de si própria, mas somente a partir de expressões que são dadas como primitivas ou previamente definidas.

Para evitar a inconsistência presente na teoria de Frege, Russell apresentou como saída a geração de uma hierarquia de objetos. No entanto, ele teve que introduzir o chamado "Princípio do Círculo Vicioso" (PCV) como um princípio lógico adicional, tendo por propósito restringir as definições e evitar o paradoxo presente no sistema de Frege.

O PCV estabelece que: "Nenhuma entidade pode ser definida em termos de uma totalidade da qual ela é, por si mesma, um possível membro". É este princípio que permite o surgimento de uma hierarquia de tipos de objetos: "a teoria dos tipos simples".

Ademais, Russell ainda teve que postular um princípio não lógico, o "axioma da redução", que afirma que toda função proposicional é formalmente equivalente a uma "função predicativa".[7]

O axioma da redução foi o meio empregado por Russell para que o conhecimento fosse totalmente desligado do mundo empírico ou intuitivo, pois tal axioma parece manifestar a crença de que todas as descobertas, envolvendo expressões de objetos abstratos exibindo algum conteúdo empírico ou exprimindo algum conteúdo ingênuo, possam ser expressas

[6] A esse respeito, Russell desconsiderou a injunção de Frege em tratar um nome como tendo significado somente no contexto de uma sentença, pois os nomes logicamente próprios podem ter função isoladamente.

[7] Funções são chamadas "formalmente equivalentes" se forem verdadeiras ou falsas para os mesmos valores de suas variáveis.

novamente, reduzindo-se a linguagens que não contenham essas manifestações (Cf. Tiles (1991)).

Entretanto, tal axioma além de se tratar de uma suposição não lógica também se apresentou incompatível com o PCV. Pois, como coloca Tiles (1991), esse axioma por se tratar de um axioma existencial e não lógico, sugere um retorno a alguma forma de platonismo. Isto enfraqueceria o PCV, uma vez que a posição platônica de que números, classes, conceitos e funções com uma existência independente de nós e de nossas atividades matemáticas, viola o PCV. Ora, essa temática forma a base da teoria de tipos de Russell, teoria que, por sua vez, representava uma solução aos paradoxos. Esse foi, essencialmente, o argumento apresentado por Gödel (1944), acarretando na impossibilidade do projeto logicista.

Com isso, foi possível mostrar que o logicismo de Russell também não pode ser realizado.

Quanto ao formalismo, o propósito de Hilbert (1862-1943) foi o de unir o método logicista ao método axiomático, pois entendeu o formalismo não somente como um meio de defender tal método, como também uma forma de garantir a consistência nas investigações em matemática. Acreditou que, analisando processos e conceitos matemáticos, lógicos ou não, e representando-os por um simbolismo apropriado, como uma lógica simbólica, poderíamos ser capazes de demonstrar, que a partir de fórmulas fundamentais e regras apoiadas pela manipulação de símbolos, nunca obteríamos uma fórmula que levasse a uma contradição. Assim, concebeu que as coisas existem desde que novos conceitos e novas entidades possam ser definidos sem contradição (Cf. Hilbert, 1927, In: Heijenoort, 1971, p. 479).

Propriamente, podemos dizer que a formalização torna a matemática uma coleção de fórmulas. Estas são distintas das fórmulas comuns somente pelo fato de que, junto com símbolos e sinais comuns, estão também símbolos da lógica, especialmente a implicação ($\rightarrow$) e a negação ($\neg$). Determinadas fórmulas, que servem como pedra para o edifício formal da matemática, são chamadas axiomas. Uma prova é uma seqüência de fórmulas F1, F2, . . . , Fn, em que cada fórmula ou é um axioma ou provém de fórmulas que a precedam na seqüência, por meio das regras de inferência. Uma prova é uma prova de sua última fórmula (Fn). Uma fórmula diz-se provável ou um teorema se existir uma prova dela.

Percebemos que, no formalismo, a matemática, de fato, está preocupada com formas, porém não com as de Platão e sim com formas de representação de objetos (Cf. Tiles, 1991).

A filosofia que mais se aproxima do formalismo é o “nominalismo” Cf.Snapper (1979).

No nominalismo, as entidades abstratas não têm existência de qualquer tipo, nem fora da mente humana, como mantido pelo realismo, nem como construções mentais dentro da mente humana, sustentadas pelo conceptualismo. Para o nominalismo, as entidades abstratas são meras articulações vocais ou linhas escritas, meros nomes. Semelhantemente, quando os formalistas tentam provar que uma certa teoria axiomatizada T é livre de contradição, eles não estudam as entidades abstratas que ocorrem em T, mas, em vez disso, estudam aquela linguagem de 1ª ordem (L), que é usada para formalizar T. O ponto importante é que este estudo todo de L é estritamente um estudo sintático, desde que nenhum significado ou entidades abstratas são associados com as sentenças de L. Essa linguagem é investigada considerando as sentenças de L como expressões sem significados, que são manipuladas de acordo com regras sintáticas explícitas, exatamente como peças de um jogo de xadrez constituem figuras sem significado que são movidas de acordo com as regras do jogo. A esse respeito torna-se importante observar aqui a advertência de Tiles (1991) de que Hilbert nunca expôs este tipo extremo de formalismo, por exemplo, ele não foi formalista quando chegou à aritmética dos números finitos, pois, entendeu as verdades da aritmética finitária como baseadas em uma apreensão intuitiva das noções de unidade e de sucessão discreta.

O programa de Hilbert justificou a matemática clássica, incluindo a Teoria Transfinita de Cantor, da seguinte forma: (i) expressando aquela matemática em linguagem formal que poderia, então, por si própria, ser relacionada como um objeto de estudo matemático; (ii) usando somente métodos finitários para provar que o sistema formal de matemática infinitária é consistente, provando que nenhuma fórmula da forma ‘0=1’é provável nele.[8] Tais critérios permitiram o desenvolvimento de trabalhos em lógica matemática, geraram a teoria de modelos, a teoria de sistemas formais e a teoria de função recursiva.

No entanto, a conceituação da atividade matemática, que é incentivada, teve efeitos negativos em toda ciência, pois se a matemática for pensada como um jogo de fórmulas, então não há por que buscar significado no trabalho do matemático. Este último, simplesmente inventa e joga com um sistema formal, o que abre a possibilidade de se criar um formalismo vazio. Ademais, a razão compelida a regras formais permanece em oposição à liberdade e criatividade, uma vez que é privada de interferir em outros assuntos, como, por exemplo, os que se referem à vida diária (Cf. Tiles, 1991).

Isso tudo nos permite dizer que a concepção formalista do conhecimento matemático também exclui os aspectos intuitivos e empíricos.

No entanto, o programa formalista não pode ser efetuado, visto que a matemática não foi capaz de provar sua própria consistência, mostrando, portanto, que é inviável tentar reduzir o conhecimento às cadeias formais.

Já no cerne do intuicionismo moderno, fundado por Brouwer (1881-1966)[9], a matemática em sua formação abstrata é considerada puramente intuitiva, e independente da lógica. Toda matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais meio de métodos construtivos "intuitivamente claros", ou seja, as idéias básicas encontram-se na intuição.[10] A linguagem e outros aparatos simbólicos, inclusive a lógica, não são instrumentos matemáticos, mas meios de comunicação das idéias matemáticas e, portanto, deixam de ser básicos à matemática.

Assim, o intuicionismo reduz o conhecimento matemático ao conhecimento subjetivo. Talvez devido ao contraste com que essa corrente se coloca perante a matemática clássica tal filosofia foi, quase universalmente, rejeitada pela comunidade matemática. Snapper (1979) argumenta que isso se deu, principalmente por três motivos: (i) os matemáticos clássicos recusam-se a jogar fora muitos teoremas "vistosos"

---

[8] Isto foi o que Gödel mostrou ser impossível.

[9] Embora ainda possamos destacar nessa linha o matemático francês H. Poincaré (1854-1912) e o matemático alemão Kronecker (1823-1891).

[10] A intuição aqui tem um significado similar à intuição temporal de Kant.

que são combinações sem significado para os intuicionistas; (ii) nos teoremas, que podem ser provados tanto pelos intuicionistas como pela matemática clássica, a prova clássica é bem mais curta; (iii) existem teoremas que valem no intuicionismo e que, no entanto, são falsos na matemática clássica.

Resulta, portanto, que o intuicionismo, o logicismo e o formalismo falharam em seus propósitos e não conseguiram fornecer à matemática uma fundamentação sólida.

Tais fatos ocasionam um novo questionamento sobre a natureza do saber matemático. Para nós essa crise se origina devido ao reducionismos dessas linhas filosóficas ao considerarem os aspectos intuitivo11 e lógico sempre como excludentes.

BIBLIOGRAFIA

AURI, R. (ed.) ***The Cambridge Dictionary of Philosophy***. Cambridge University Press, 1996.

BOYER, C.B. ***História da Matemática***. Trad. E. F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (SP), 1974.

DUMMETT, M. FREGE ***Philosophy of Mathematics***. Havard University Press. Cambridge, Massachusetts, 1991.

DEMOPOULOS, W. ***Frege's Philosophy of Mathematics***. Havard University Press - Cambridge, Massachusetts- London, England, 1995.

FREGE,G. ***The Foundations of Arithmetic***. English Translation by J. L. Austin. M.A- Basil Blackwell- Oxford, 1959.

________. ***Os Fundamentos da Aritmética***. Trad. L.H. Santos, Coleção 'Os Pensadores', v.6, São Paulo, Abril, 1983.

________. ***Begrissffchrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*** , 1879. In: Heijenoort, V. From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971, pp. 1-82.

[11] Adotamos por intuitivo a concepção kantiana desse termo, a saber, a intuição é um conhecimento imediato que pode ser tanto empírica como ***a priori***.

GRATTAN-GUINNESS. ***From the Calculus to Set Theory***, 1630-1910. Duckworth, 1980.

HEIJENOORT, V.(ed.) ***From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879- 1931***. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, pp.1-82, 1971.

HILBERT (1927). ***The foundations of mathematics***. In: Heijenoort, V. From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971, pp. 464-479.

KENEALE, K., KENEALE, M. ***O desenvolvimento da Lógica***. Trad. M.S. Lourenço. 2a ed., Lisboa: Fund. Calouste Gulbenkian, 1991.

RESNIK, M. D. ***Frege and the Philosophy of Mathematics***. Cornell University Press, Ithaca and London, 1980.

RUSSELL, B. ***Principles of Mathematics***. Cambrid University Press, Cambridge, 1903.

SNAPPER, E. ***The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism***. Math. Mag. vol. 52, n.4, september 1979, pp.207-216.

TILES, M. ***Mathemetics and the Image of Reason***. Routledge, London and New York, 1991.

WHITEHEAD,A.N. and RUSELL,B. ***Principia Mathematica***. In: HEIJENOORT, V.: From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931. Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971.

WILDER, R.L. ***Introdution to The Foudations of Mathematics***. Second edition, Wiley International Edition- John Wiley & Sons. Inc. New York- London- Sydney, 1965.