Oficina 2D74 - VII ENEM – Rio de Janeiro - 22 e 23/07/2001 das 8h30min as 10h

Título:

Rede semântica articulando os conceitos de Semelhança e teorema de Thales utilizando o software Cabri Géomètre.

Autor(es):

Nancy Cury Andraus Haruna (UNITAU - Mestre/PUC-SP)

Dr. Saddo Ag Almouloud (Orientador / PUC-SP)

Essa oficina está embasada nos resultados da pesquisa de dissertação de mestrado, que teve por objetivo analisar como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, levantar os obstáculos didáticos e epistemológicos e as variáveis de situação, verificando até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros. Para fazermos essa análise, recorremos ao trabalho do Psicólogo Raymond Duval sobre os registros de representação semióticos e aprendizagem intelectual que associa a semiótica com os aspectos da cognição e percepção. Os estudos preliminares mostraram que os problemas relativos ao ensino-aprendizagem desse teorema estão relacionados com sua forma de expressão envolvendo os aspectos da percepção, das significações e do contexto. Baseado nesses estudos, definimos nossa questão de pesquisa “como produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales, observando os aspectos referentes à percepção visual, às significações e ao contexto?”. Os aspectos da percepção se relacionam com as possíveis configurações; os da significação se baseiam nos pontos de vista abordados por Guy Brousseau (conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação) que se referem a maneira de se enunciar esse teorema comparado a forma de representar a proporcionalidade e os do contexto com os conceitos implícitos e explícitos nessa propriedade e em suas aplicações. Para tentar amenizar o problema do ensino-aprendizagem, elaboramos uma seqüência de ensino partindo da idéia de que através de uma rede semântica pode-se organizar os três pontos de vista relacionados com a significação do teorema de Thales e a articulação dele com os conceitos de semelhança, de homotetia e das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para efetivação dessa rede elaboramos atividades por meio de situações-problema em língua natural tentando evitar a instauração de imagens prototípicas, procurando diversificar os registros de representação e trabalhar com as variabilidades perceptivas que são favorecidas pelo uso do software Cabri. Durante a oficina desenvolvemos algumas atividades dessa seqüência que foram adaptadas para o software Cabri-géomètre II e propusemos discussões com relação aos aspectos acima descritos.

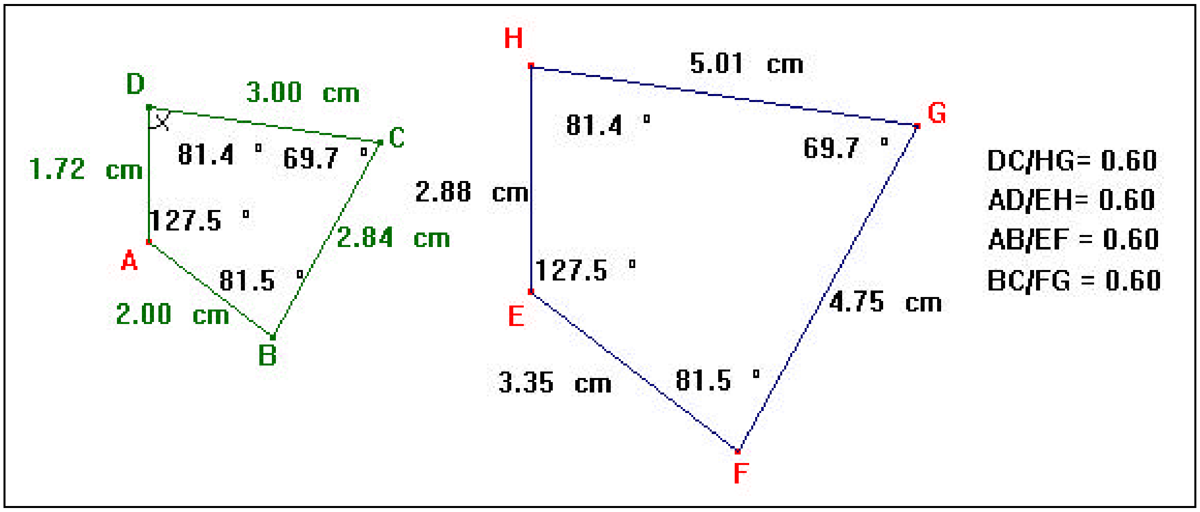
No primeiro encontro procuramos trabalhar os conceitos de semelhança e homotetia e no segundo encontro o teorema de Thales propriamente dito.

Na primeira atividade proposta utilizou-se a régua e o transferidor para se medir os lados e ângulos de figuras ampliadas e reduzidas na máquina copiadora. Veja figura proposta:

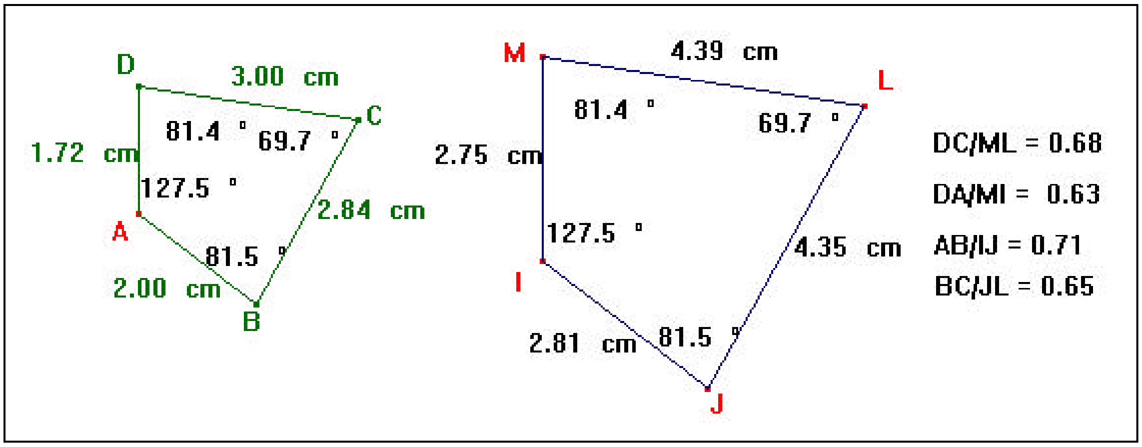
O objetivo foi perceber que ao se ampliar ou se reduzir uma figura na máquina copiadora os ângulos permanecem congruentes e os lados proporcionais.

As atividades seguintes foram desenvolvidas fazendo-se uso do software Cabri-géomètre II. Destas as três primeiras foram atividades caixa preta, em que os arquivos foram elaborados utilizando-se um mesmo quadrilátero ABCD como referência, e, um outro quadrilátero que foi construído em cada arquivo de modo diferente. O objetivo dessas atividades foi analisar essas construções observando o que é variante ou invariante ao se ampliar ou reduzir o quadrilátero construído.

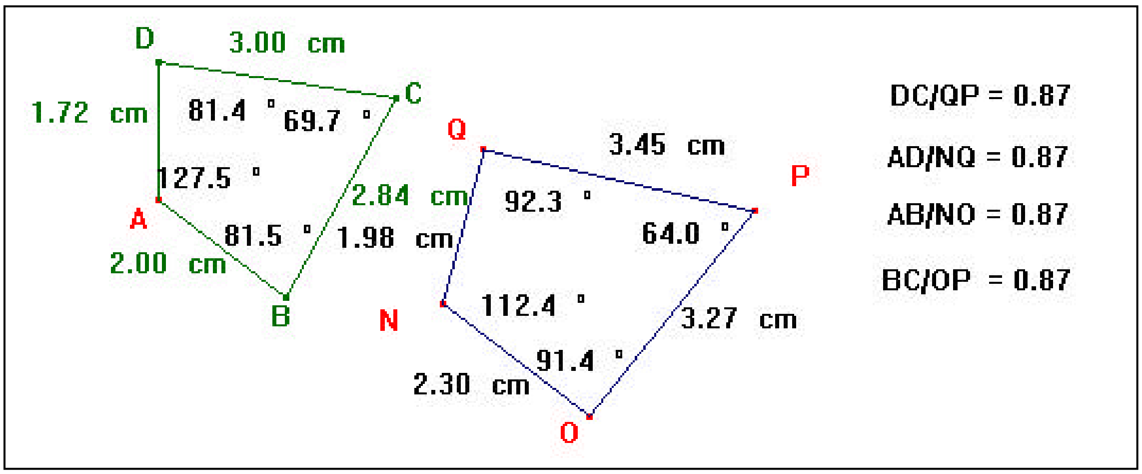
Na atividade 1, puderam perceber que os ângulos permaneceram congruentes e os lados proporcionais, como representado abaixo:



Na atividade 2, puderam perceber que os ângulos permaneceram congruentes e os lados não são proporcionais.



Na atividade 3, puderam perceber que os ângulos não são congruentes e os lados são proporcionais.



Vivenciado estas atividades procuramos institucionalizar o conceito de figuras semelhantes por meio da discussão da atividade 4 descrita abaixo.

Atividade 4

Observando os quadriláteros das atividades 1, 2 e 3, responda:

- Ao “ampliar” e “reduzir” as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais?____

- Ao “ampliar” e “reduzir” as figuras, quais delas mantiveram a medida dos ângulos correspondentes congruentes?____

- Ao “ampliar” e “reduzir” as figuras, quais delas mantiveram a medida dos lados correspondentes proporcionais e dos ângulos correspondentes congruentes ?

____

- Em qual ou quais figuras, ao “ampliar” e “reduzir”, as características foram as mesmas observadas nas figuras ampliadas e ou reduzidas pela máquina copiadora.? ____

Definição: Chamamos de figuras semelhantes aquelas que possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Diante disso podemos afirmar que os quadriláteros ABCD e ___________ são semelhantes. Quando EF é o dobro de AB, a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ABCD é _____; e quando EF é o triplo de AB, a razão de semelhança entre os quadriláteros ___________e ABCD é ____.

Atividade 5

Abra o arquivo triangretangulo.fig., você vai encontrar alguns triângulos retângulos que podem ser movimentados por translação (ponto verde) ou por rotação (ponto azul). Observe esses triângulos e reflita:

a)Todos esses triângulos são parecidos? ___________________________________

b) Parecido é o mesmo que semelhante? ___________________________________

c) Meça os ângulos e lados desses triângulos e complete a tabela.

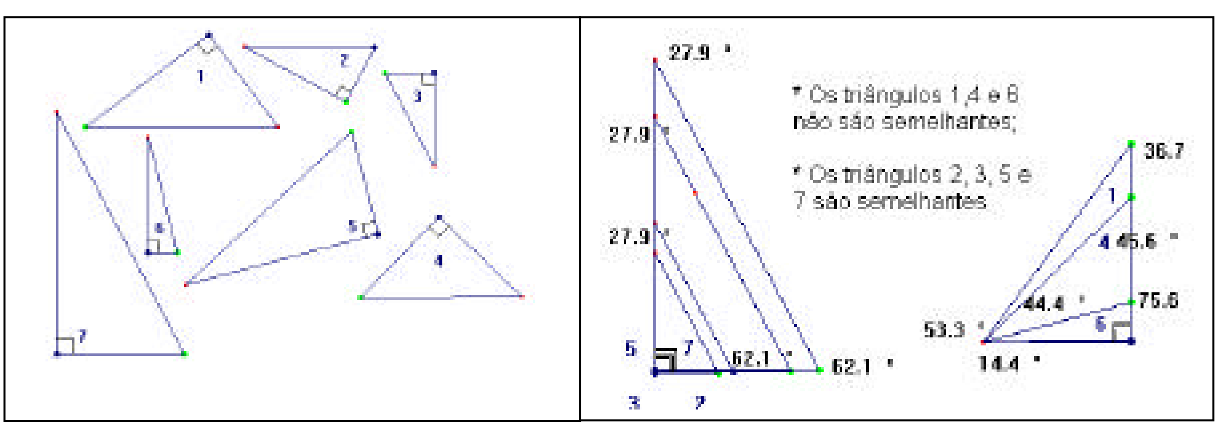
Triângulos	1	2	3	4	5	6	7
Cateto maior							
Cateto menor							
Razão: $\frac{cateto\text{ maior}}{cateto\text{ menor}}$							
Ângulo agudo maior							
Ângulo agudo menor							

c) quais dentre esses triângulos são semelhantes? ________________________

d) Agrupe os triângulos semelhantes que você encontrou sobrepondo-os fazendo coincidir o ângulo reto.

Escreva o que você observa: ______________________________________

A Atividade 5 teve por objetivo que o aluno percebesse que ser parecido não implica em ser semelhante, que todos os triângulos cujos ângulos são congruentes são semelhantes, e, sobrepondo-os de modo a coincidir um de seus vértices, seus lados correspondentes possivelmente são paralelos. Essa atividade propiciou institucionalizar o conceito de figuras homotéticas. Veja figuras abaixo:



No segundo encontro propusemos as atividades referentes ao teorema de Thales. As atividades 6, 7 e 8 tinham como objetivo perceber por meio da construção e análise das situações propostas as propriedades do teorema de Thales sob os pontos de vista da dilatação, da conservação das abscissas e da conservação da relação de projeção, nesta ordem. A seguir institucionalizamos o conceito do teorema de Thales e discutimos a rede semântica adotada. Ficando por fim como enriquecimento uma parte histórica e algumas atividades de aplicação.

Atividade 6

Construir um triângulo qualquer ***ABC***, em seguida construir o ponto **D** sobre o segmento ***AC***. A paralela à ***BC*,** passando por **D**, corta a reta ***AB*** em **E**. Crie e meça os segmentos: ***AD, AC, AE, AB, DE e BC.***

Desloque os pontos e verifique se a figura que você construiu permanece com as características dadas no enunciado. Em caso afirmativo, chame o professor; em caso negativo, refaça.

Anote as medidas: ***AB*** = ______, ***BC*** = ______, ***AC* =** ________

Não desloque mais **A**, **B** e **C**.

Escolhendo várias posições de **D** sobre ***AC*,** preencha a tabela.

Posição de D	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
medida de ***AE***						***AE/AB***					
medida de ***DE***						***DE/BC***					
medida de AD						***AD)AC***					

Exploração:

Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos você formou? _____________

Se o ponto **D** estiver no meio de ***AC*,** qual é o valor do quociente ***AD/AC*** ?

____

Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?

____

Esses triângulos são semelhantes? Justifique. ________________________

____

____

Analisando a tabela que você construiu, pesquise quais proporções podemos obter com as diferentes medidas. _____________________________________

____

Após observar esta atividade, tente enunciar alguma relação entre a paralela a um dos lados do triângulo e os outros lados ______________________________

____

Atividade 7 -

Traçar 2 retas ***AC*** e ***AB*** concorrentes em **A**. Criar o segmento ***BC*** . Construir um ponto **D** sobre ***AB*** e a paralela a ***BC*** por **D**. Nomear o ponto de intersecção desta reta com ***AC*** de **E**. Deslocando o ponto **D,** representar as possíveis configurações na folha de papel sulfite anexa. A seguir, chamar o professor.

Criar os segmentos ***AD*, *AE, DE, AB, AC, BC*** e, para cada configuração, marcar suas medidas.

Para cada configuração, os triângulos formados ***ADE*** e ***ABC*** são semelhantes?____

____

Verificar em cada configuração quais são os lados correspondentes e completar a tabela de forma que os lados correspondentes fiquem associados nas colunas. A seguir, calcular a razão entre a medida dos segmentos correspondentes.

lados do triâng. ***ABC***	***AB*=**	***AC*=**	***BC*=**
lados do triâng. ***ADE***			
razão			

lados do triâng. ***ABC***	***AB*=**	***AC*=**	***BC*=**
lados do triâng. ***ADE***			
razão			

lados do triâng. ***ABC***	***AB*=**	***AC*=**	***BC*=**
lados do triâng. ***ADE***			
razão			

lados do triâng. ***ABC***	***AB*=**	***AC*=**	***BC*=**
lados do triâng. ***ADE***			
razão			

Tentar representar para cada uma das configurações todas as proporções possíveis com esses segmentos. Verificar se as proporções são válidas para qualquer uma das configurações.

Conclusão: ____

____

____

Trocar idéia com seu parceiro e tentar escrever uma relação ou conclusão desta atividade. ____

____

____

____

____

Atividade 8-

Traçar duas retas concorrentes **r** e **s** e um segmento de reta ***XY*** não paralela a **r** e **s** . Construir sobre **r** os pontos **A** e **B** e criar o segmento ***AB***. Em seguida, determinar os pontos **C** e **D** projeção dos pontos **A** e **B** sobre a reta **s**, segundo a direção ***XY***. O segmento ***CD*** é a projeção do segmento ***AB*** sobre a reta **s**. Construir o ponto **M** médio de ***AB*** e determinar sua projeção **M´.**

Responda: Em que posição; com relação ao segmento ***CD*** vocês acham que está a projeção do ponto médio de ***AB*** sobre **s**? ___________________________________

Verificar sua hipótese medindo o segmento ***CM´*** e ***M´D***, a seguir deslocar as retas e verificar se esta hipótese ainda é válida.

Conclusão: ____

____

____

Marque um ponto qualquer **P** sobre **r** e determine a projeção **P´** de **P** sobre **s** segundo a direção ***XY***. Verifique, em várias posições, se a razão entre os segmentos ***AP*** e sua projeção ***CP`*** se mantém constante. Fixe uma posição, meça e anote as medidas dos segmentos : ***AB=*** ____***, AP=***____***, PB=***____***, CD=***_____***, CP`=***____***, PD=***_____***.*** A seguir, escreva todas as razões e as proporções que você conseguir formar com esses segmentos. ____

____

____

Institucionalização:

Nas atividades **1**, **2** e **3** – Parte **B** – podemos perceber algumas relações entre retas paralelas e segmentos proporcionais. Essas relações, durante muito tempo, foram denominadas Teorema dos Segmentos Proporcionais e hoje as conhecemos por "**Teorema de Thales".**

Selecionamos abaixo alguns enunciados relativos ao teorema de Thales. Leia-os com atenção e tente esboçar uma configuração que represente estes enunciados e suas respectivas proporções.

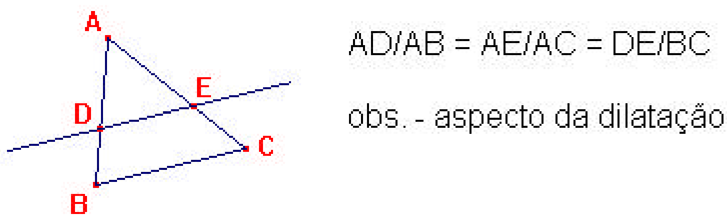
a) Nos elementos de Euclides (proposição **2** do livro ***VI***), temos:

   "***Se traçarmos uma paralela a um dos lados de um triângulo, esta reta cortará proporcionalmente os lados desse triângulo, e, se os lados de um triângulo são cortados proporcionalmente, a reta que une as secções será paralela ao outro lado do triângulo***".

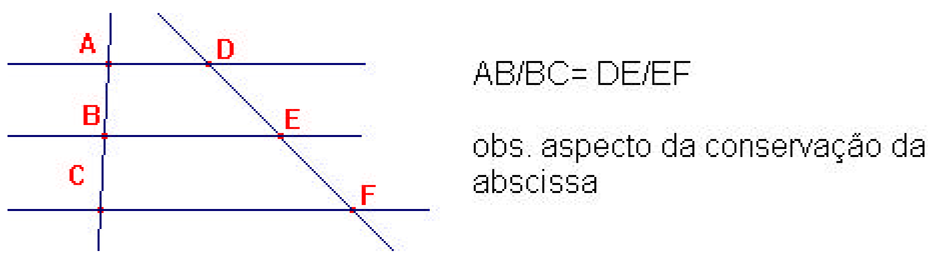
b) " ***Se duas retas são transversais a um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra***".

c) "***Se retas paralelas determinam sobre duas transversais segmentos correspondentes, então as razões entre esses segmentos correspondentes formam uma proporção***".

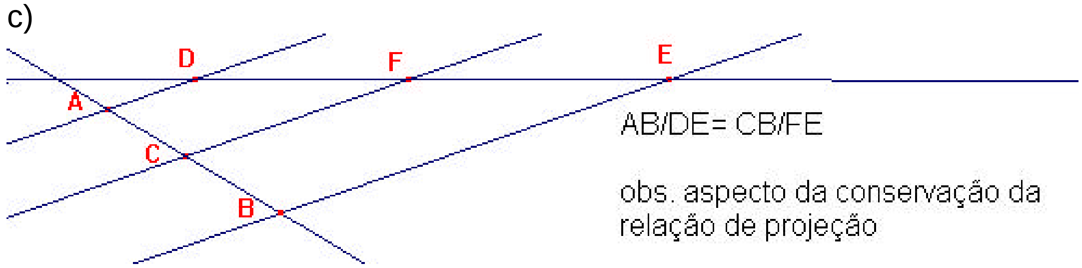
Possíveis soluções:
a)



b)



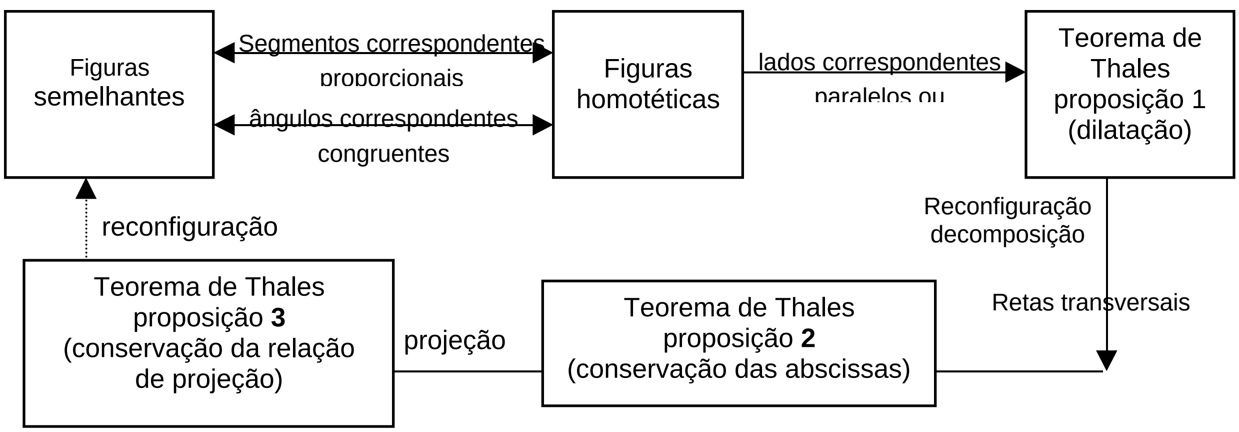
c)



Discussão Geral

Pensando em termos de plano de conteúdo e plano de expressão, observa-se que subjacentes a todos esses enunciados do teorema de Thales e o seu recíproco estão os conceitos de paralelismo e proporcionalidade que poderão ser representados e indicados de forma bem diversa articulando-se os registros figurais (configurações), discursivos (enunciados), simbólico (montagem da proporção) e numérico (expressar grandezas). Analisando estes enunciados observamos, em nível sintático, implica os significantes serem articulados mantendo uma relação de proporcionalidade e em nível semântico implica as significações (processo de compreensão) que estão implícitas em cada proposição com relação aos pontos de vista conservação das abscissas, conservação da relação de projeção e dilatação. Quando se privilegia um destes pontos de vista, por exemplo, conservação das abscissas, deixa-se de articular que no mesmo plano de expressão há outros sentidos como a conservação da relação de projeção e a dilatação. Se quisermos que o aluno apreenda o teorema na sua significação global, devemos abordá-lo sob estes três pontos de vista. Pensando nesta direção é que resolvemos elaborar e analisar uma rede semântica relacionando os conceitos tais como: homotetia (H); semelhança (S); razões trigonométricas(T); e o teorema de Thales(TT), que tratam da proporcionalidade entre segmentos e implícita ou explicitamente de paralelas. Sendo assim, podemos combinar esses conteúdos em diversas seqüências de ensino formando uma rede sintagmática, na qual cada conceito pode ser formado a partir do conceito apreendido anteriormente.

Olhando sob este prisma, elaboramos uma rede semântica linear associando aos nós os conceitos de: figuras semelhantes, figuras homotéticas, teorema de Thales (dilatação), teorema de Thales (conservação das abscissas), teorema de Thales (conservação da relação de projeção); e aos arcos as propriedades comuns a dois destes conceitos (nós), como mostra o esquema abaixo.



Analisando essa rede, podemos dizer que duas figuras são semelhantes quando possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. As figuras homotéticas são figuras semelhantes que possuem os lados correspondentes paralelos ou coincidentes (contidos na mesma reta suporte).

O teorema de Thales – proposição **1**- refere-se à paralela a um dos lados de um triângulo que seria um caso particular das figuras homotéticas (com centro de homotetia num dos vértices do triângulo) e poderá ser melhor percebido por meio de uma reconfiguração devido aos triângulos estarem sobrepostos. Se fizermos uma decomposição em unidades figurais elementares de dimensão **1** e uma translação, com relação à proposição **1**, observaremos retas paralelas e transversais que conservam a proporcionalidade entre os segmentos formados nas transversais sugerindo o teorema de Thales – proposição **2** (conservação das abscissas).

Ao pesquisarmos todas as proporções possíveis com estas unidades de figuras elementares, poderemos perceber que a razão entre um segmento de uma das transversais e sua projeção na outra transversal segundo a direção das paralelas se mantém constante induzindo ao teorema de Thales – proposição **3**- assim, provavelmente conseguiremos organizar os três pontos de vista. Se quisermos explorar um pouco mais, poderemos, pela reconfiguração das unidades figurais elementares de dimensão **2** (trapézios) sobrepostas, voltar ao estudo das figuras semelhantes. A seguir, podemos particularizar para o triângulo retângulo e tratar as razões trigonométricas definindo os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Obs. Apresentamos também uma comunicação científica, nesse evento, em que tratamos o teorema de Thales fazendo uma análise das variáveis de situação didática e adidática.

Referência bibliográfica:

HARUNA, Nancy Cury Andraus; ***Teorema de Thales: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem***; Dissertação de Mestrado em Educação Matemática; PUC/SP, nov/2000.

Nancy Cury Andraus Haruna (UNITAU / Mestre – PUCSP)

Rua Arthur Vieira n^0 432, Jardim Santa Cruz, Taubaté - SP. CEP: 12080-550

e-mail: nancyharuna@uol.com.br Fone / FAX : (12) 222-2707

Dr. Saddo Ag Almouloud (Orientador –PUCSP)

Rua Marquês de Paranaguá n ^{0} 111, Consolação; São Paulo – SP CEP 01303-050

e-mail: saddo@ig.com.br ou saddoag@exatas.pucsp.br