Vendo e Concretizando Somas Geométricas

Elaboração : José Ferreira Marinho Júnior - marinhojrmat@bol.com.br

Sandro Lopes de Souza Sá - souzasa@uninet.com.br

Sidney da Silva Ferreira - evercold@uninet.com.br

Orientação: Profª Ana Maria Kaleff - Laboratório de Ensino de Geometria - UFF - ggmleg@vm.uff.br

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo levar o aluno a justificar, intuitivamente, a validade de fórmulas para somas finitas - soma dos ***n*** primeiros números naturais, soma dos quadrados dos ***n*** primeiros números naturais, etc. - utilizando as propriedades elementares de objetos geométricos. Isto é, utilizaremos a geometria para justificar alguns resultados da álgebra.

A faixa etária a que se destinam estas atividades, é a de alunos com cerca de 13 anos. E os pré-requisitos necessários que estamos admitindo como dominados são o cálculo de áreas e de volumes.

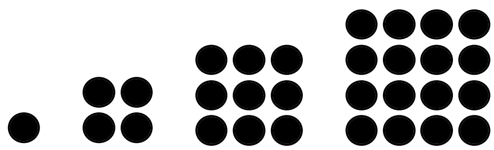
As atividades foram configuradas tendo como alicerce os números figurados. Com isso, no início de cada atividade levamos o aluno a desenvolver a visualização através da observação e da montagem de configurações destes números. E, no decorrer de cada atividade, o aluno é levado a analisar os atributos e as características destes números, para alcançar o objetivo de cada atividade. Desta forma, pode-se afirmar que este trabalho tem como fundamentação teórica o modelo de van Hiele.

A seguir serão apresentas quatro atividades. As três primeiras justificam a soma dos ***n*** primeiros números naturais ímpares, a soma dos ***n*** primeiros números naturais pares, e a soma dos ***n*** primeiros números naturais. Para tanto, será utilizado folha de papel quadriculado e lápis de cor para o desenvolvimento destas atividades. A quarta atividade justifica a soma dos quadrados dos ***n*** primeiros números naturais. Para esta atividade recorreremos à pequenos cubos de isopor - considerando cada um como a representação de uma unidade de volume - para montarmos configurações de alguns números quadrangulares espaciais e para justificarmos, intuitivamente, a fórmula da soma dos quadrados dos ***n*** primeiros números naturais.

Pretende-se que as três primeiras atividades sejam realizadas pelo aluno individualmente, devendo a terceira ser realizada em grupo.

Atividade 1: Calcular a soma dos ***n*** primeiros números naturais ímpares, isto é, 1+3+5+7+...+***n*** = ***n***^{2}, se ***n*** $\varnothing$.

Observe as configurações dos números quadrangulares representados abaixo.



***Q*$_1$** ***Q*$_2$** ***Q*$_3$** ***Q*$_4$**

Nesta atividade, indicaremos por Q_n o ***n*** - ésimo número quadrangular.

Represente estas configurações em papel quadriculado, utilizando lápis de cor. Agora, registre, na Tabela 1 o número de "quadradinhos", utilizados em cada configuração. Este número é o valor do número quadrangular correspondente a cada configuração e, também, o valor da área de cada configuração montada.

Oops!! Tem uma coisa interessante acontecendo? Observe a Tabela 1: a área da configuração do 2° número quadrangular, por exemplo, e o seu valor; o que está ocorrendo? O fato que está ocorrendo, no caso para o 2° número quadrangular, ocorre para todos os demais números quadrangulares que estão preenchidos na tabela?

Matou as charadas? Então, essa tarefa vai ser moleza!. Registre na Tabela 1 a área da configuração e o valor do 5º, 6º e 8º números quadrangulares.

Agora, numa folha de papel quadriculado, pinte um quadradinho. Este quadradinho representará a configuração do 1° número quadrangular. Partindo deste quadradinho, já pintado, quantos quadradinhos precisará pintar (para tanto, utilize uma cor diferente da anterior), para montar a configuração do 2°

número quadrangular? Na coluna Soma da Tabela 1, registre o 2º número quadrangular como a soma do 1º número quadrangular mais o número de quadradinhos que precisa pintar para obter a configuração deste.

Agora, partindo da configuração do 2º número quadrangular, que obteve, quantos quadradinhos precisará pintar (utilize uma cor diferente das anteriores) para montar a configuração do 3º número quadrangular? Registre na Tabela 1, na coluna Soma, o 3º número quadrangular como a soma do 2º número quadrangular mais o número de quadradinhos que precisa pintar para obter a configuração dele. Você já obteve o 2º número quadrangular como uma soma, então, escreva o 3º número quadrangular como uma soma de três números, registrando-o na Tabela 1, no campo Soma.

Faça o mesmo que foi feito para o 3º número quadrangular com o 4º número quadrangular.

Tem uma coisa interessante nas somas que estamos obtendo. Não percebeu, ainda? Então, me responda: os números naturais que está somando para obter os números quadrangulares são pares ou são ímpares?

Matou a charada? Então, agora, escreva o 5º, 6º e 8º números quadrangulares como uma soma.

E agora? Será que $\boldsymbol{Q}_{11}=121=11^2$ é igual a soma 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21?

Tabela 1

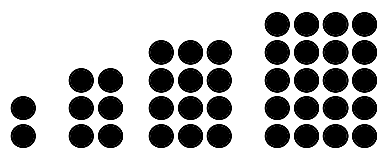
Números Quadrangulares	Valor do número Quadrangular	Área da configuração	Soma
$\boldsymbol{Q}_1$			1
$\boldsymbol{Q}_2$			
$\boldsymbol{Q}_3$			
$\boldsymbol{Q}_4$			
$\boldsymbol{Q}_5$	25		
$\boldsymbol{Q}_6$	36		
$\boldsymbol{Q}_7$	49	7^2	36+13=1+3+5+7+9+11+13
$\boldsymbol{Q}_8$			
$\boldsymbol{Q}_9$	81	9^2	64+17=1+3+5+7+9+11+13+15+17
$\boldsymbol{Q}_{10}$	100	10^2	81+19=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19

Você deve ter observado que cada número quadrangular resulta de se elevar ao quadrado um número natural e que, por isso, representa a área de uma figura plana quadrada. E, que estes podem ser escritos como uma soma de números naturais ímpares.

Então saiba que a soma dos ***n*** primeiros números naturais ímpares é igual ao ***n*** - ésimo número quadrangular, isto é, $1+3+5+7+...+n = n^2$

Atividade 2 : Calcular a soma dos ***n*** primeiros números naturais pares, isto é verificar que, $2+4+6+8+...+n = n(n+1)$, se n $\varnothing$.

Nesta atividade, R_n é o ***n*** - ésimo número retangular e a soma desejada é obtida de modo parecido de como foi obtida a soma da atividade anterior, a diferença é que agora trabalhamos com os números retangulares (configurações mostradas abaixo) ao invés dos números quadrangulares.



Assim, para evitar algo repetitivo, deixamos a cargo do leitor o detalhamento dessa atividade. Apresentamos a tabela que deverá ser considerada.

Tabela 2

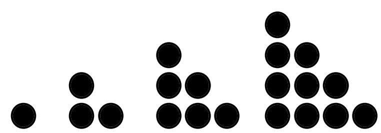
Números Retangulares	Valor do número retangular	Área da configuração	Soma
R_1			2
R_2			
R_3			
R_4			
R_5	30		
R_6	42		
R_7	56	7.8	42+14=2+4+6+8+10+12+14
R_8			
R_9	90	9.10	72+18=2+4+6+8+10+12+14+16+18
R_{10}	110	10.11	90+20=2+4+6+8+...+20

Atividade 3 : <u>Calcular a soma dos ***n*** primeiros números naturais, isto é, 1+2+3+...+***n*** = ***n***(***n***+1)/2, se n $\varnothing$.</u>

Nesta atividade entenda-se por justapor as figuras planas em forma de quadrado como organizá-las contiguamente, de modo que possuam um lado todo em comum.

Nesta atividade, $\boldsymbol{T_n}$ é o ***n*** - ésimo número retangular.

Observe as configurações dos números triangulares representados abaixo.



$\boldsymbol{T_1}$ $\boldsymbol{T_2}$ $\boldsymbol{T_3}$ $\boldsymbol{T_4}$

Represente estas configurações em papel quadriculado, utilizando lápis de cor. Feito isso, registre na Tabela 3 o valor (número de "quadradinhos", utilizados em cada configuração) desses números triangulares.

Ainda na folha de papel quadriculado, pinte um quadradinho. Este quadradinho representará a configuração do 1^o número triangular. Partindo deste quadradinho, já pintado, quantos quadradinhos você precisará pintar (para tanto, utilize uma cor diferente da anterior), para montar a configuração do 2^o número triangular? Na coluna Soma da Tabela 3, registre o 2^o número triangular como a soma do 1^o número triangular mais o número de quadradinhos que você precisa pintar para obter a configuração deste.

Agora, partindo da configuração do 2^o número triangular, que obteve, quantos quadradinhos você precisará pintar (utilize uma cor diferente das anteriores) para montar a configuração do 3^o número triangular? Vamos registrar na Tabela 3, na coluna Soma, o 3^o número triangular como a soma do 2^o número triangular mais o número de quadradinhos que você precisa pintar para obter a configuração dele. Escreva o 3^o número triangular como uma soma de três números, registrando-o na Tabela 3, no campo Soma, O.K.?

Agora, escreva o 4^o número triangular, também, como uma soma. Atenção!!! Não esqueça de fazer o registro na Tabela 3.

Agora, escreva o 5°, 6° e 8° números triangulares como uma soma.

Acabo-se o 1° estágio.

Agora, monte as 4 primeiras configurações dos números retangulares e triangulares com as figuras planas em forma de quadrado. Oops!!! O que os números retangulares estão fazendo aqui? Eles têm alguma relação com os números triangulares?

Sobreponha a configuração do 1° número triangular na configuração do 1° número retangular, a configuração do 2° número triangular na configuração do 2° número retangular e assim sucessivamente. Para facilitar use figuras planas em forma de quadrado para montar as configurações dos números triangulares de cor diferente das utilizadas para montar as configurações dos números retangulares. Há uma relação entre as áreas das configurações dos números retangulares e as dos números triangulares. Que relação é essa?

Você descobriu a relação entre número triangular e retangular, certo? Então, agora, registre na Tabela 3 a área da configuração dos 4 primeiros números triangulares. Feito isso, registre na Tabela 3 a área da configuração do 5°, 6° e 8° números triangulares assim como, o valor de cada um deles.

Agora, observe a nossa Tabela 3. Observe a área da configuração do 2° número triangular, por exemplo, e o seu valor o que você observa? O fato que você observa para o 2° número triangular ocorre para todos os demais números triangulares?

E agora? Será que $\boldsymbol{T}_{11}$=66=11.12/2 é igual a soma 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11?

Tabela 3

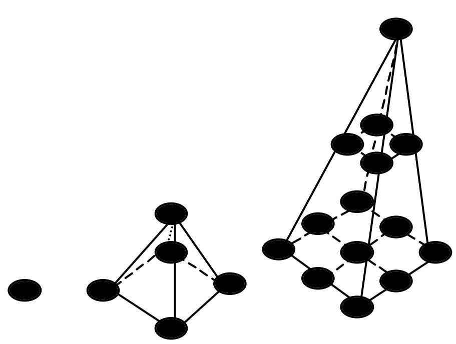
Números Triangulares	Valor do número triangular	Área da configuração	Soma
T_1			1
T_2			
T_3			
T_4			
T_5	15		
T_6	21		
T_7	28	$7.8/2$	21+7=1+2+3+4+5+6+7
T_8			
T_9	45	$9.10/2$	36+9=1+2+3+4+5+6+7+8+9
T_{10}	55	$10.11/2$	45+10=1+2+3+...+10

Você já deve ter concluído a atividade, né? Então saiba que a soma dos n primeiros números naturais é igual ao n - ésimo número triangular, isto é, $1+2+3+4+...+n = n(n+1)/2$.

Atividade 4: Mostrar que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

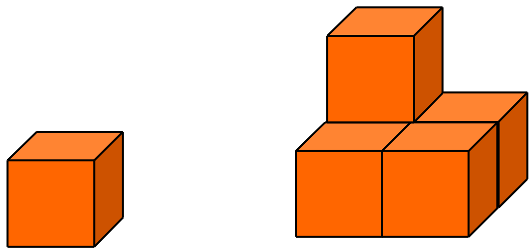
Nesta atividade, QE_n é o n - ésimo número retangular.

Observe as configurações dos números quadrangulares espaciais.



QE_1 QE_2 QE_3

Com os cubinhos de isopor, monte as configurações dos 5 primeiros números quadrangulares espaciais, organizando os cubinhos conforme esquema abaixo. Registre na Tabela 4 seus valores.



Partindo da configuração do 1º número quadrangular espacial, quantos cubinhos você necessita para montar a configuração do 2º número quadrangular espacial? Registre na Tabela 4 o 2º número quadrangular espacial como a soma do 1º número quadrangular espacial mais o número que obtivemos na resposta da pergunta anterior. E, partindo da configuração do 2º número quadrangular espacial, quantos cubinhos você necessita para montar a configuração do 3º número quadrangular espacial? Não esqueça de registrar na Tabela 4 o 3º número quadrangular espacial como a soma do 2º número quadrangular espacial mais o número de cubinhos que você utilizou para obter o 3º número quadrangular espacial. Escreva o 3º número quadrangular espacial como uma soma de três números.

Agora, escreva os 4º e 5º números quadrangulares espaciais como uma soma. Não esqueça de fazer o registro na Tabela 4.

Partindo da configuração do 5º número quadrangular espacial, quantos cubinhos você necessita para montar a configuração do 6º número quadrangular espacial? Registre na Tabela 4 o 6º número quadrangular espacial como a soma do 5º número quadrangular espacial mais o número de cubinhos utilizados para obtê-lo. Lembre-se que você pode obter o 6º número quadrangular espacial como uma soma de seis números.

Espera!! Espera!! Veja se você obteve os seguintes resultados. Vamos lá.

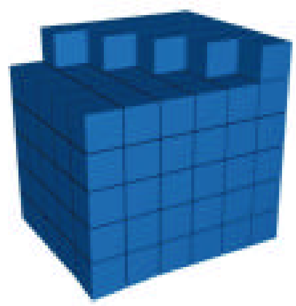
$\boldsymbol{QE_1}=1 = 1^2$
$\boldsymbol{QE_2}=5 = 1+\underline{4} = 1^2+2^2$
$\boldsymbol{QE_3}=14 = 5+\underline{9} = 1^2+2^2+3^2$

$\boldsymbol{QE_4}=30 = 14+\underline{16} = 1^2+2^2+3^2+4^2$
$\boldsymbol{QE_5}=55 = 30+\underline{25} = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$
$\boldsymbol{QE_6}=91 = 25+\underline{36} = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$

E agora, será que você é capaz de escrever o 7º número quadrangular espacial como uma soma? E o 9º ? Não esqueça de fazer o registro na tabela 4.

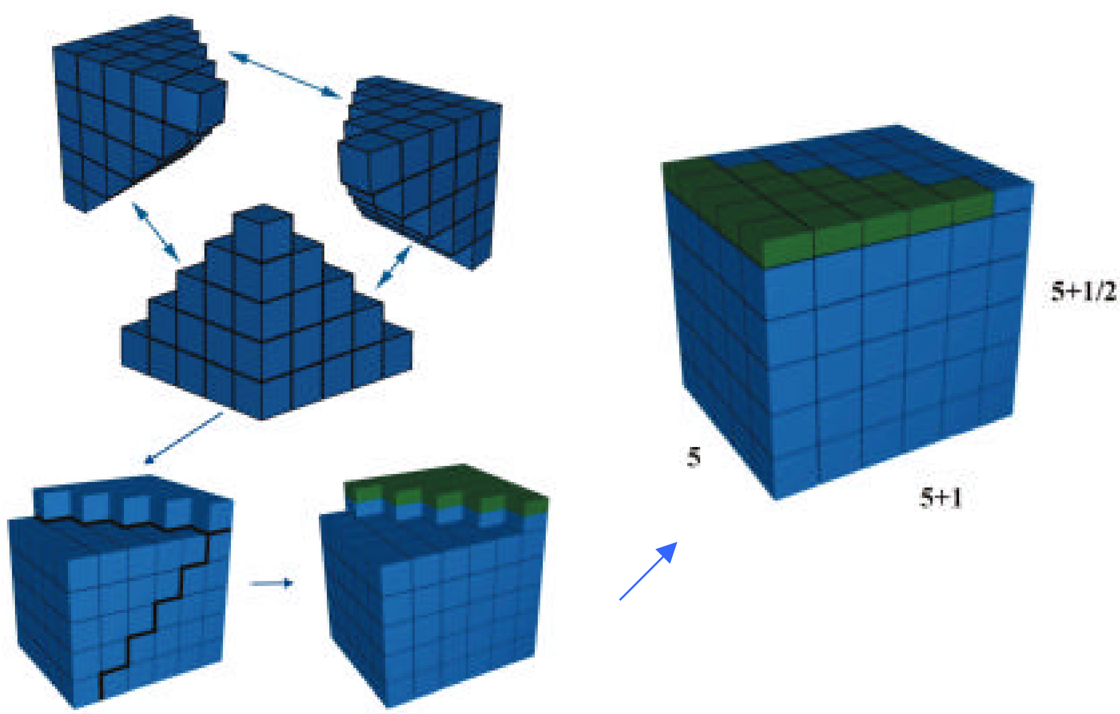
Preparado? Vamos para a próxima etapa?

Monte com os cubinhos 3 configurações do 5º número quadrangular espacial. Com essas 3 configurações, construa o sólido abaixo?



Difícil, não foi? Mas não acabou. A partir do sólido obtido tente obter um paralelepípedo retângulo?

Conseguiu? Eis o esquema de tudo o que aconteceu:



Agora, responda: Qual a relação entre o volume do paralelepípedo e o volume do sólido que representa a configuração do 5º número quadrangular espacial, sabendo que cada cubinho equivale a uma unidade de volume?

Então, quanto vale o volume da configuração do 1º, 2º, 3º , 4º, 5º números quadrangulares espaciais. Registrar na Tabela 4 as nossas respostas. Qual relação que há entre o valor do número quadrangular espacial e o volume de sua configuração?

Agora, registre na Tabela 4 o valor do 7º e 9º números quadrangulares espaciais assim como, o volume de suas configurações.

Será que o 10º número quadrangular espacial é igual a:

$$\frac{1}{3}(10+1)^{3/4}10+\frac{1}{2}\sqrt{10} = \frac{1}{6}\left[(10+1)(2.10+1)10\right]?$$

Tabela 4

Números Quadrangulares Espaciais	Valor do número quadrangular Espacial	Volume da configuração	Soma
QE_1			1^2
QE_2			
QE_3			
QE_4			
QE_5			
QE_6	91	6(6+1)(2.6+1)/6	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$
QE_7			
QE_8	204	8(8+1)(2.8+1)/6	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$
QE_9			

Você já deve ter finalizado essa atividade, certo? Logo, você deve ter percebido que $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+1/2)\right]$ = n(n+1)(2n+1)/ 6.

CONCLUINDO

Esperamos que este trabalho seja uma ferramenta para motivar os alunos a enfrentarem situações algébricas de uma forma mais prazerosa e que possa tornar o ensino de Matemática mais compreensível. Com estas atividades buscamos mostrar que idéias geométricas podem enriquecer o ensino de certos tópicos da álgebra, derrubando, assim, o mito de que geometria e álgebra são áreas da Matemática que devem ser tratadas separadas por não terem nenhum elo de ligação.

BIBLIOGRAFIA

CONWAY, John H. , GUY, Richard K. The Book of Numbers. New York: Copernicus. Springer – Verlag, 1996.

DANTZIG,T. , Number: The Language Of Science. New York: Macmillan, 1954.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora UNICAMP,1997.

KALEFF, A . M. Vendo e entendendo poliedros. Niterói: EdUFF1998. (Série conversando com o professor sobre Geometria, v.2).

KALEFF, A . M. , HENRIQUES, A. , REI, D. M., FIGUEIREDO, L.G. Desenvolvimento do pensamento geométrico : modelo de Van Hiele. Bolema,Rio Claro,v.10, p.21-30, 1994.

LINDQUIST, M. , SHULTE A . P. Aprendendo e ensinando Geometria. Tradução de Higino Domingues. São Paulo: Atual,1994.

VALADARES, E.C., Usando Geometria para somar. Revista do professor de Matemática 39, p. 1-8, 1999.

Página da Web:

www.mat.uc.pt
Link: Páginas Temáticas. As formas e os números de Rosália Rodrigues e Emília Miranda.