

TABULÆ E MANGABA: GEOMETRIA DINÂMICA

Elizabeth Belfort

Instituto de Matemática - UFRJ

<beth@dmm.im.ufrj.br>

INTRODUÇÃO

Relatamos aqui as principais características de dois programas voltados para o processo ensino aprendizagem de matemática, em desenvolvimento no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Inicialmente, devemos esclarecer nossas razões para nos engajarmos nesta empreitada. Considerações de custo e disponibilidade para os professores que se envolvem em nossos cursos de formação e de formação continuada foram determinantes em nossa decisão: apenas o fator custo já faz com que estes professores, e os alunos que eles ensinam, fiquem impossibilitados de utilizar os programas de Geometria Dinâmica disponíveis no mercado como recurso didático.

Por outro lado, nossas experiências com Geometria Dinâmica no treinamento de professores também ofereceram motivação para desenvolvermos este projeto. O entusiasmo dos professores pelas aulas de laboratório utilizando estes “micro mundos” a partir de uma tela em branco ou em telas especialmente preparadas pela equipe não deve ser novidade para ninguém que já tenha tido a oportunidade de utilizá-los em situação semelhante.

No entanto, ainda outras necessidades se juntaram a esse quadro: (1) em primeiro lugar, a falta de uma plataforma computacional que pudesse servir de base para a geometria espacial, uma reclamação constante dos professores que nos procuram para cursos de formação permanente. O desenvolvimento do Mangaba (figura 1), que descreveremos mais adiante neste artigo, é um passo nesta direção; (2) uma segunda consideração foi a necessidade de criar ferramentas adequadas para a educação à distância em matemática. As vantagens e possibilidades dos programas desenvolvidos por nossa equipe para este tipo de comunicação no ensino será descrita também mais adiante.

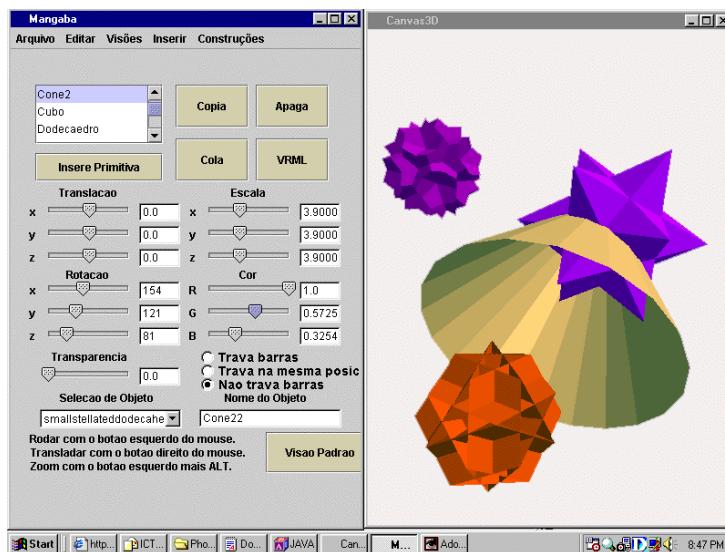


Figura 1: Uma tela criada com o Mangaba.

O projeto PACE – Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino é o responsável pelo desenvolvimento destes materiais, e de outros ainda, voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via Internet, visando especificamente o ensino à distância e a comunicação via Internet em Matemática. Este projeto vem sendo desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, congregando professores de vários departamentos e realizando pesquisas sobre o uso do computador como ferramenta para o ensino de Matemática nos níveis fundamental, médio e universitário. O grupo de pesquisa atua diretamente nas disciplinas de graduação e pós-graduação de diversos cursos da UFRJ, com a preocupação de integrar as ferramentas computacionais às atividades didáticas em sala de aula. Devido à natureza da pesquisa do grupo, são consideradas de particular importância as atuações junto ao curso de licenciatura em Matemática e nas atividades de formação continuada de professores, que incluem um curso de especialização. Através destas atuações, o PACE cria também uma série de parcerias com professores de Matemática atuando diretamente em escolas.

São ainda vantagens importantes de um projeto como este a liberdade permitida pelo uso de plataformas computacionais desenvolvidas “em casa”, podendo ser adaptadas às necessidades de seus usuários. Além disto, participando ativamente das atividades de pesquisa e desenvolvimento do grupo PACE encontramos oito alunos de iniciação científica, oriundos de diferentes

cursos da UFRJ, como, por exemplo, Informática, Matemática, Desenho Industrial e Engenharia Eletrônica, além de alunos de mestrado e de doutorado. A cerca de um ano e meio, este grupo de alunos vem trabalhando no desenvolvimento de um conjunto de softwares com objetivos educacionais. Neste artigo, relatamos resumidamente as principais características deste conjunto de ferramentas, esperando ilustrar o ganho de um tipo de projeto de iniciação científica ainda pouco comum em nossas universidades, pois é desenvolvido em grupo, por uma equipe multidisciplinar, e tendo como objetivo a criação de produtos finais voltados para a sociedade brasileira.

O projeto tem dado oportunidade aos alunos de iniciação científica de trabalhar diretamente com produção científica e tecnológica. Para ilustrar a importância e atualidade do tema, basta constatar que apenas em 1999 foram defendidas 2 teses de doutorado em grandes centros de pesquisa sobre desenvolvimento de *softwares* de geometria dinâmica¹. Assim, nossos alunos participam do desenvolvimento de tecnologia educacional de ponta, com diversos problemas científicos a serem trabalhados. Além disso, eles vêm escrevendo artigos, apresentando trabalhos em jornadas de iniciação científica e em congressos em nível nacional.

O TABULÆ²

Tabulæ é um software de Geometria Dinâmica plana, ilustrado na figura 2, que vem sendo desenvolvido há aproximadamente um ano. Inteiramente escrito na linguagem Java, compatível com diferentes plataformas, sua versão atual apresenta todas as funcionalidades puramente geométricas, semelhantes a de programas de Geometria Dinâmica do mesmo tipo existentes no mercado. Estão ainda em desenvolvimento as facilidades da calculadora e das “macros”. Por outro lado, o Tabulæ já oferece algumas vantagens particulares, em especial se considerarmos comunicação via Internet, que discutiremos a seguir.

¹ Kortenkamp, U., 1999, *The foundations of dynamic geometry*. PhD Thesis, Numerical Analysis Institute, Zurich, e Winroth, H., 1999, *Projective Dynamic Geometry*. PhD Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm.

² O nome Tabulæ era dado ao conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para rabiscar mensagens e diagramas

- Do ponto de vista computacional, a concepção do Tabulæ é inteiramente orientada a objeto. Isso permite que novas ferramentas sejam sempre adicionadas ao programa, sem a necessidade de iniciar o processo de montagem do programa outra vez.
- O Tabulæ permite gerar applets, podendo seu usado como ferramenta de autoria para Internet, e ainda permite que um professor obtenha um relatório completo do trabalho de um aluno, incluindo registro de tempo, o que pode ser usado para pesquisa em educação matemática.

De especial importância no projeto foi o desenvolvimento da interface gráfica. Além de projetar sistemas de forma que os usuários possam desenvolver suas tarefas de maneira segura, eficiente e agradável, deve-se ressaltar também o aspecto da produtividade. O *design* de interface não envolveu apenas aspectos estéticos e tecnológicos, mas todos os elementos que pudessem interferir na comunicação ou apreensão da informação apresentada. Para isso, procuramos manter certas normas e um vocabulário simples, usando conceitos que o usuário já conhece ou pode aprender facilmente. Com uma linguagem eficiente, o usuário pode conduzir comandos do computador de forma efetiva e consciente.

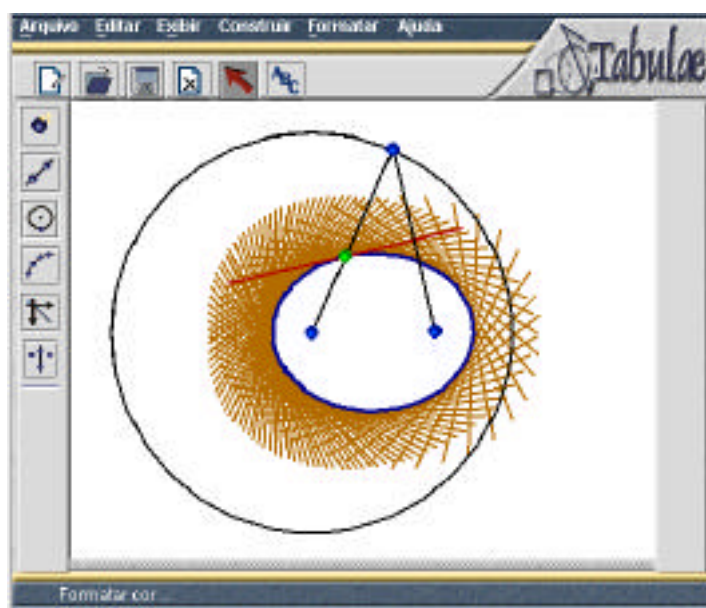


Figura 2: O Tabulæ – um software de Geometria Dinâmica.

Elementos como psicologia de percepção (como nós vemos), psicologia cognitiva (como adquirimos conhecimento), e fatores humanos (como interagimos com o equipamento) são pontos cruciais para o sucesso do *design* de programas interativos para ensino. O desafio básico foi projetar um sistema cujas capacidades possam ser entendidas pelos usuários e que possam ser imediatamente utilizadas. Estes foram critérios importantes para a definição das facilidades de interação a serem disponibilizadas na versão final, sempre com o objetivo de estabelecer uma relação amigável do *software* com o público alvo do projeto: alunos e professores dos ensinos fundamental e médio.

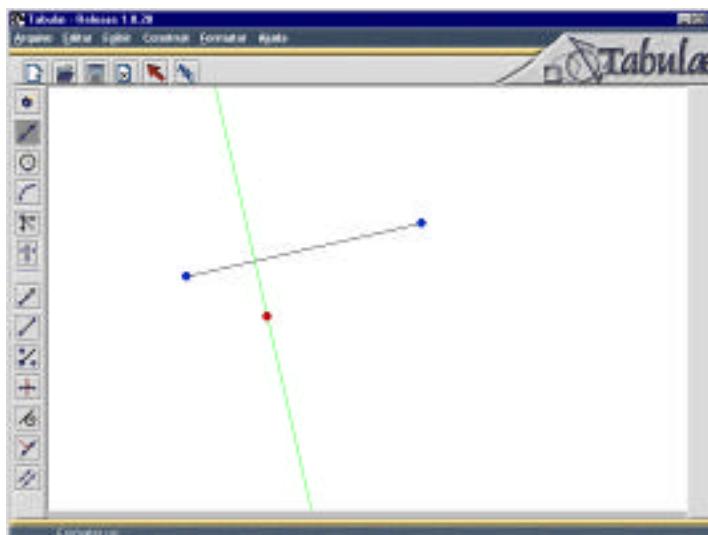


Figura 3: Utilização de Ícones Correlacionados no Tabulæ

Para exemplificar algumas das facilidades que a evolução da interface gráfica proporciona aos usuários do programa, apresentamos a situação ilustrada na figura 3. Neste caso, o aluno deseja construir uma reta perpendicular ao segmento já existente na tela, em um ponto qualquer, que poderá ser modificado posteriormente. Ao selecionar o ícone “reta” à esquerda na área de trabalho, imediatamente uma nova seqüência de ícones correlacionados é acrescentada a lista de possíveis construções (compare a lista estendida de ícones na figura 3 com a lista nas figuras anteriores). Desta forma, sob o mesmo ícone principal (reta) existe, na verdade, uma série de comandos úteis para a realização de construções geométricas envolvendo linhas retas (como semi-retas, segmentos, retas perpendiculares e paralelas, mediatrizes, etc). Nossos estudos mostram

que os usuários, em especial os alunos dos ensinos médio e fundamental, acostumam-se rapidamente a esta forma de trabalhar, e que esta apresenta vantagens quanto ao uso por alunos quando a comparamos com as interfaces de outros *softwares* do mesmo tipo.

OUTRAS CARACTERÍSTICAS DO TABULÆ

O Acompanhamento do Trabalho Desenvolvido por um Grupo de Alunos

O Tabulæ também disponibiliza um recurso adicional para os profissionais em didática da Matemática: uma listagem contendo todas as atividades desenvolvidas pelo aluno durante o processo de investigação do problema. Esta listagem é gerada pelo programa em linguagem HTML e inclui todos as etapas da construção realizadas pelo aluno, acompanhadas da indicação do tempo gasto pelo aluno para realizar cada uma delas. Essa listagem permite que professores e/ou pesquisadores acompanhem cada passo do trabalho dos alunos individualmente ou trabalhando em pequenos grupos, e pode, por exemplo, ser usada para avaliações ou para pesquisas sobre a diversidade de soluções apresentadas pelos alunos quando trabalhando neste micro mundo.

Esta característica especial visa minimizar uma série de dificuldades de acompanhamento pelo professor de um trabalho discente mais individualizado, que pode ocorrer em situações de exploração de resultados matemáticos no ambiente computacional proporcionado pelo Tabulæ. Assim, por exemplo, ao solicitar a listagem das etapas da construção exibida na figura 3 o professor ou pesquisador pode obter a lista exibida na tabela 1. Observe que a listagem nos mostra toda a exploração do problema pelos alunos, incluindo a movimentação dos pontos na tela e as figuras geométricas que foram apagadas.

Em nosso exemplo, bastante simples, a dupla de alunos inicialmente construiu o segmento e, em seguida, a perpendicular e este passando por um ponto pertencente ao segmento. Após moverem este ponto, os alunos concluíram que não era esta a propriedade desejada, e apagaram sua construção. Na segunda tentativa de construção, os alunos traçaram a perpendicular ao segmento por um ponto livre na tela, como pretendiam. A rapidez com que o processo foi realizado mostra também que se trata de uma dupla de alunos com

conhecimento das características do software, e que sabe o que deseja construir, já que não houve tempo para discussões entre eles durante o processo de construção.

Software de Geometria Dinâmica - Tabulæ Copyright © PACE

Nome do Arquivo: - Histórico da Figura 3
Autores: - Leonardo e Thiago
Criado: 20/5/2001

Histórico

<u>Hora</u>	<u>Ação</u>	<u>Comentários</u>
10h 7min 37seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 1; Objeto do tipo FreePoint Objeto Independente
10h 7min 38seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 2; Objeto do tipo FreePoint Objeto Independente
10h 7min 38seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 3; Objeto do tipo Segment2P Dependente dos objetos 1, 2
10h 7min 51seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 4; Objeto do tipo PointInSegment Dependente dos objetos 3
10h 7min 51seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 5; Objeto do tipo PerpendicularLine Dependente dos objetos 3, 4
10h 7min 57seg :	MOVER	Objeto identificado com o ID 4; Movido para a posição (55.0 , 34.0)
10h 7min 59seg :	APAGAR	Objeto identificado com o ID 5; Objeto do tipo PerpendicularLine Dependente dos objetos 3, 4
10h 7min 59seg :	APAGAR	Objeto identificado com o ID 4; Objeto do tipo PointInSegment Dependente dos objetos 3
10h 8min 11seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 6; Objeto do tipo FreePoint Objeto Independente
10h 8min 11seg :	CRIAR	Objeto identificado com o ID 7; Objeto do tipo PerpendicularLine Dependente dos objetos 3, 6

Tabela 1: Um histórico de construção gerado pelo Tabulæ.

A Construção de Lugares Geométricos, ou Locus.

O conceito de lugar geométrico pode ser explicado de diversas maneiras. Formalmente, o lugar geométrico, ou *locus*, é definido como o conjunto de todos os pontos (e somente eles) que satisfazem uma certa condição dada. Portanto, é correto dizer que um círculo de raio unitário centrado na origem de um certo sistema de coordenadas é o lugar geométrico de todos os pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ no mesmo sistema de coordenadas. Igualmente correto seria dizer que o círculo é o *locus* de todos os pontos equidistantes, de uma distância igual ao raio, do ponto central do círculo.

Porém as construções geométricas nos levam a uma segunda definição para o lugar geométrico, um tanto mais informal, porém mais adequada ao contexto e à implementação computacional. A abordagem aqui utilizada se baseia na trajetória de um objeto em função de um caminho conhecido que outro objeto percorre.

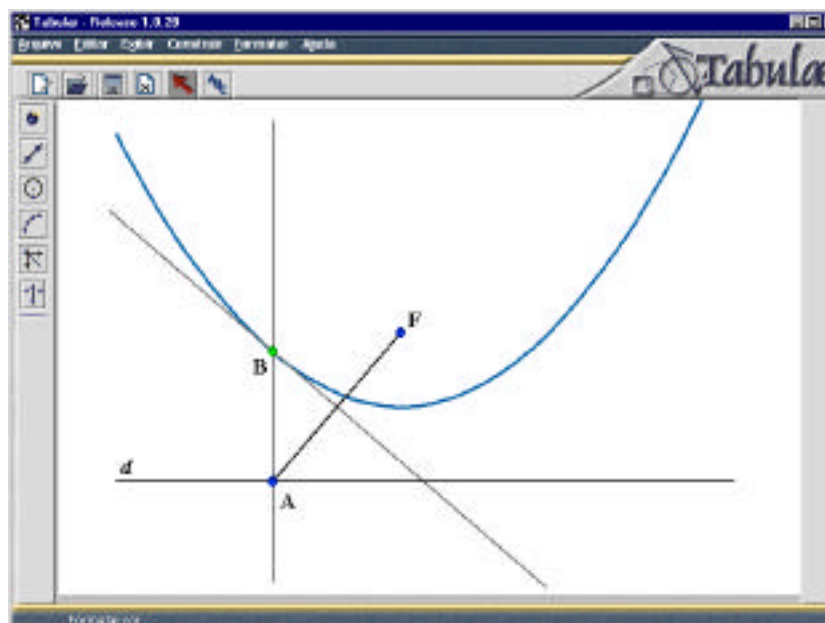


Figura 4: Lugar Geométrico construído no Tabulæ

Se a construção geométrica de um objeto (por exemplo, um ponto B) foi obtida a partir do ponto A, então o movimento do ponto A sobre um caminho conhecido, seja este uma reta ou um círculo, gera uma trajetória para um outro

objeto (o ponto B), e a esta trajetória é dado o nome *locus*. As trajetórias, ou os pontos que percorrem as trajetórias, se relacionam com os pontos originais através de uma construção geométrica. Na figura 4 ilustramos a construção da parábola como o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um ponto F dado e de uma reta **d**, chamada diretriz. Através de construções geométricas, obtemos, a partir de um ponto A, que pode se mover livremente sobre a reta **d**, um ponto B da parábola como a interseção da mediatriz do segmento AF com a reta perpendicular à diretriz pelo ponto A (observe que estas condições correspondem a garantir, geometricamente, que a distância de B até a reta **d** é igual a distância de B a F).

O lugar geométrico é um dos recursos mais notáveis dos *softwares* de Geometria Dinâmica porque, se tentássemos reproduzir o mesmo desenho usando os recursos gráficos tradicionais de desenho geométrico seríamos obrigados a repetir o mesmo procedimento tantas vezes quantas fossem necessárias para obter uma “amostra” de pontos do *Locus* que produzisse, por interpolação, um resultado satisfatório. Por outro lado, quando se pede um lugar geométrico num software como o Tabulæ, ele automaticamente gera uma amostra com um número n de pontos que representam diversas posições possíveis para o ponto o qual se deseja conhecer a trajetória. A interpolação dessas posições forma o lugar geométrico.

Como qualquer outro objeto em um software de Geometria, o *Locus* deve ser atualizado quando qualquer dos objetos do qual ele depende se modifica. Ou seja, no nosso exemplo, cada vez que a posição da reta diretriz e (ou) do ponto foco é modificada na tela, uma nova parábola deve ser desenhada pelo software. Para se computar uma nova posição para o lugar geométrico, também devem ser computadas novas posições para n pontos que compõem o *locus*. Isto deve ser feito com grande velocidade, de tal forma que o resultado final mostrado ao usuário em tempo “real” será sempre a interpolação destas posições.

O software proporciona ao usuário o controle do número n de pontos que vão formar o lugar geométrico, do tipo de interpolação desejada (linear ou cúbica, utilizando B-splines) e do método de amostragem (passo constante, ou

adaptativo, este último especialmente útil para posições quase degeneradas do lugar geométrico considerado).

IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO

Os *softwares* de geometria dinâmica já se consagraram em todo o mundo como uma das ferramentas computacionais de maior importância para o ensino de Matemática. Pesquisas feitas internacionalmente mostram as vantagens do uso destes materiais e diversas sugestões didáticas para todos os níveis de ensino de Matemática têm sido propostas e analisadas criticamente. Publicações sobre o tema são feitas por associações de importância, como por exemplo, a Mathematical American Association (MAA, 1996) e livros didáticos para apoiar a tarefa didática do professor são encontrados associados aos produtos líderes no mercado (para um dentre os muitos exemplos possíveis, ver Key Curriculum Press, 1996).

Se as características próprias e dinâmicas fizeram com que esta classe de softwares se tornasse hoje a ferramenta dominante para o ensino de Matemática na maioria dos países desenvolvidos, elas também determinam, mesmo em nosso país, uma forte tendência para a adoção desta ferramenta em diversas de nossas escolas e Universidades (para exemplos, ver Guimarães et al., 2001). Nestas últimas, militam hoje dezenas de profissionais cuja formação pós-graduada (no Brasil ou no exterior) incluiu o desenvolvimento de teses estudando Geometria Dinâmica. Além disso, como já enfatizamos anteriormente, o desenvolvimento de um software deste tipo é uma tarefa extremamente complexa, envolvendo problemas de pesquisa que ainda hoje são dignos de teses de Doutorado em grandes centros de pesquisa mundiais³.

O grupo de professores da UFRJ envolvidos neste projeto vem realizando diversas experiências usando este tipo de material em formação de professores, relatadas, por exemplo em Belfort et al. (1999 e 2001) e que resultaram na publicação de um livro voltado para formação em geometria do professor de Matemática, integrada com a utilização destes programas (Guimarães & Belfort,

³ O Laboratório Leibnitz, da Universidade de Grenoble e o ETH de Zurique são dois exemplos de grandes centros de pesquisa e desenvolvimento de Geometria Dinâmica.

1999). Além disso, em parceria com professores do ensino fundamental e médio, outras experiências estão sendo desenvolvidas e analisadas (Gani & Belfort, 2000 e 2001). Abaixo, relatamos detalhes de algumas destas experiências.

O Estudo das Simetrias em Projetos Multidisciplinares.

A partir das possibilidades oferecidas por este tipo de software é possível a criação de painéis dinâmicos e interativos. As autoras (Gani & Belfort, 2000) propõem que o estudo de mosaicos pode ser usado como fator de integração entre as disciplinas de artes, desenho geométrico e Matemática, nas séries finais do ensino fundamental explorando as características básicas destes programa.

Do ponto de vista matemático, para que um painel como o ilustrado na figura 5 seja construído, o conceito de “simetria” deve ser empregado de uma forma generalizada: a simetria axial pode ser observada no polígono estrelado que se repete, e a simetria de translação pode ser observada pela repetição longitudinal (horizontal e vertical) do motivo principal. O estudo de polígonos e suas propriedades também se integra a este projeto. Do ponto de vista do desenho geométrico, o traçado de polígonos regulares e de polígonos estrelados pode ser explorado, e o professor de arte tem a chance de apresentar aos seus alunos algumas formas milenares de arte: os mosaicos e as faixas decorativas.

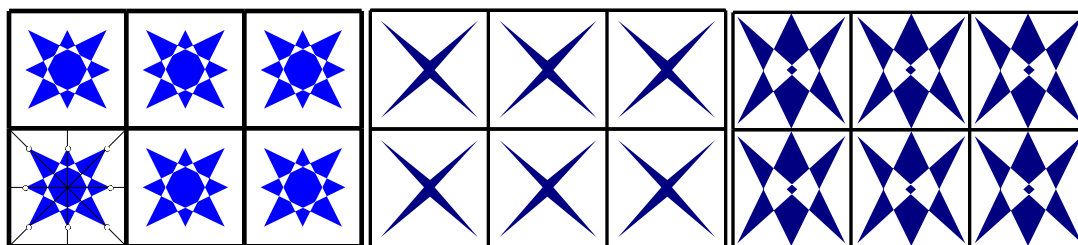


Figura 5: Diferentes imagens obtidas em um mesmo painel, através de movimentação.

A capacidade criativa do aluno pode ser explorada de muitas formas. Na figura 6, ilustramos algumas possíveis generalizações dos princípios matemáticos fundamentais de construção aplicados para malhas paralelogramicas e triangulares (ainda outras seriam passíveis de utilização). É interessante observar que, ao introduzir a malha triangular, mais um tipo de “simetria” generalizada

pode ser trabalhado: a simetria da transformação de rotação, em geral pouco explorada em atividades de sala de aula.

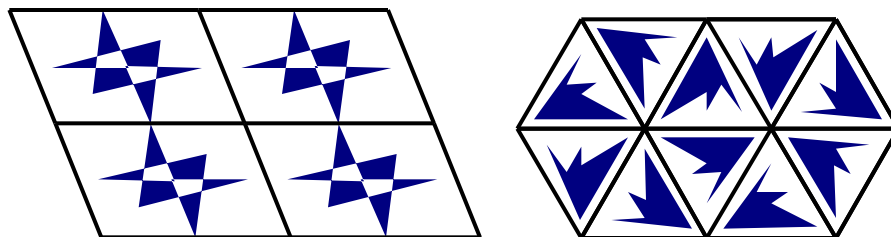


Figura 6: Painéis dinâmicos obtidos a partir de diferentes malhas.

A representação de figuras espaciais através de diferentes projeções.

O estudo da geometria espacial é considerado um dos pontos de maior dificuldade para o aluno por muitos professores de Matemática do ensino médio. Materiais voltados para ajudar os alunos a superar as dificuldades de visualização de representações de figuras espaciais estão sendo desenvolvidos dentro do projeto, explorando a tela do computador para apresentar duas representações diferentes de uma figura no espaço: a representação em perspectiva e a representação em épura, empregando os princípios básicos da Geometria Descritiva. Existem claros ganhos para os alunos, conforme observado pelas autoras (Gani & Belfort, 2000).

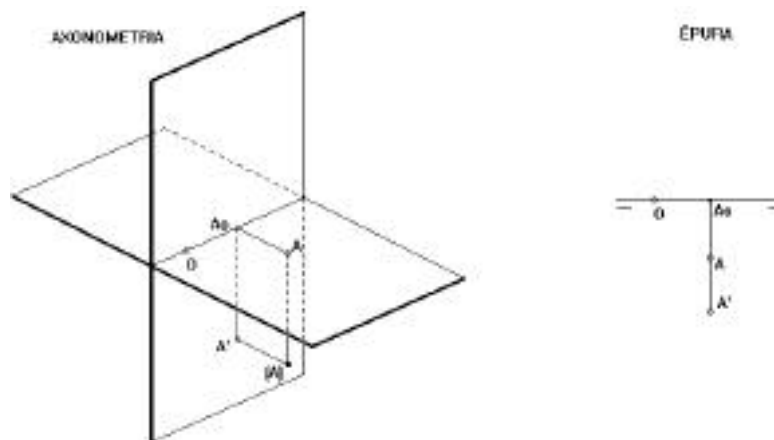


Figura 7: Duas representações planas integradas para o estudo de Geometria Descritiva.

A figura 7 mostra o estudo das projeções de um ponto nos planos horizontal e vertical, o princípio de toda a Geometria Descritiva. A figura é dinâmica e a movimentação da posição de uma das projeções do ponto na épura (à direita) ocasiona uma mudança na posição do ponto na representação em perspectiva (à esquerda), tendo suas propriedades geométricas preservadas.

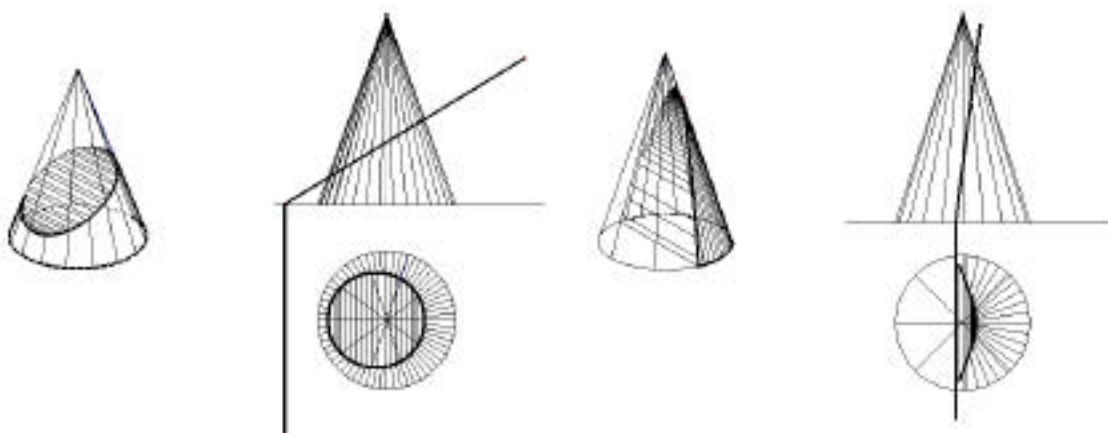


Figura 8: Representações da elipse e de um ramo da hipérbole como seções cônicas.

Todo um sistema de representação está desenvolvido e este está sendo aplicado para pesquisas de sua influência no estudo de geometria descritiva. Além disso, o sistema permite a elaboração de figuras mais complexas, que podem ser exploradas em diversas situações didáticas tanto em Descritiva como em Geometria Espacial. Uma aplicação deste sistema ao estudo das cônicas, enfatizando-as como “cortes” de um plano em um cone é ilustrado na figura 8. Para o desenvolvimento desta aplicação, os recursos de construção de *lugares geométricos* disponibilizados pelo software foram de fundamental importância para a construção das elipses e dos ramos de uma hipérbole.

Geometria Dinâmica como recurso didático na formação de professores.

Desde 1998 professores do Instituto de Matemática da UFRJ utilizam *softwares* de Geometria Dinâmica para a formação de professores de Matemática, tanto no curso de Licenciatura quanto em atividades de formação continuada. Em Belfort & Guimarães (1999), foi relatado que:

“Do ponto de vista da pesquisa educacional, o ambiente de laboratório computacional é especialmente propício a pesquisas voltadas para dados qualitativos, pois permite a observação do trabalho enquanto sendo desenvolvido. Os professores são incentivados a trabalhar em duplas, o que permite aos pesquisadores presenciar as discussões de trabalho e registrar os tipos de argumentação e/ou prova apresentadas para os resultados verificados experimentalmente na tela. Nossa pesquisa indica que o professor desavisado tende a acreditar nos resultados oferecidos pelo computador como verdadeiros, e não parece propenso a questioná-los. Por outro lado, a dificuldade de muitos professores em justificar dedutivamente seus resultados durante o trabalho em duplas confirma que a argumentação não faz parte de sua prática de sala de aula.” (pg. 9).

As experiências feitas pelos autores indicam que até mesmo professores em exercício apresentavam dificuldades em compreender a diferença entre 'geometria experimental' e 'geometria dedutiva', demonstrando que a Geometria não ocupa um lugar de destaque em suas práticas didáticas. Estas pesquisas também apontam para o fato de que a experimentação e a argumentação têm pouco espaço em sala de aula. Neste sentido, há um esforço especial sendo feito pela equipe do projeto no desenvolvimento de uma seqüência de atividades voltadas para a formação de professores. Ao elaborar estes materiais, a principal preocupação é que neles seja privilegiado o desenvolvimento da capacidade de justificar resultados e valorizado o raciocínio dedutivo em geometria.

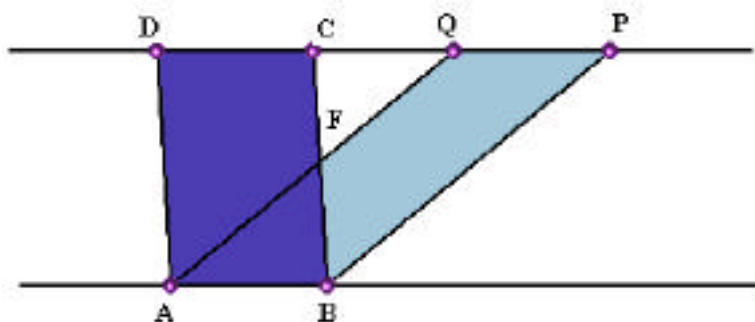


Figura 9: Paralelogramos de mesma área.

Um exemplo de uso de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento da capacidade de argumentação em geometria desenvolvido pela equipe está baseado na utilização da tela apresentada na figura 9, onde o aluno deve justificar porque os paralelogramos ABCD e ABPQ têm a mesma área (Teorema I. 35 d' Os *Elementos* de Euclides (Heath, 1956)). A capacidade dinâmica do software pode ser utilizada para modificar diversos elementos destes paralelogramos (como o tamanho de sua base, o ângulo no vértice A de cada um deles, etc). No entanto, os paralelogramos considerados foram construídos de tal forma que sempre têm a mesma área ($\text{Área DAQ} + \text{Área ABF} - \text{Área CFQ}$) e essa propriedade se mantém qualquer que seja a interação do usuário com a figura, já que a congruência dos triângulos DAQ e CBP é garantida pela construção feita, apoiada na consistência matemática apresentada por este tipo de software.

Como consequência destes trabalhos de pesquisa e desenvolvimento, um programa piloto de treinamento de professores em geometria apoiado pelo software já está sendo realizado dentro das atividades do curso de Especialização para Professores de Matemática ministrado no Instituto de Matemática da UFRJ. A partir desta experiência, planeja-se criar um treinamento específico, em cursos modulares, para a utilização do Tabulæ em diversos níveis de ensino. Nossas pesquisas indicam que esta é uma atividade da maior importância, pois pode influenciar diretamente na qualidade do ensino de Matemática. O estudo cuidadoso de um software de geometria dinâmica pode levar os professores uma completa revisão conceitual em Geometria, a qual poderá se refletir diretamente em sua prática didática. Em nosso trabalho no decorrer do projeto, tivemos diversas oportunidades de observar este processo, e de acompanhar relatos em que os professores que passaram pelo programa piloto descreviam o efeito benéfico em sua prática de sala de aula, mesmo quando não havia computadores sendo utilizados.

Na impossibilidade de treinar todos os professores que irão utilizar o software, a preparação de materiais didáticos que possam ser utilizados em sala de aula é outra atividade de grande relevância a ser cumprida pela equipe do projeto. Uma pesquisa nos materiais de apoio a softwares existentes mostra que, em sua grande maioria, estes não permitem uma real integração das aulas

desenvolvidas em ambiente de laboratório computacional com o currículo. Consequentemente, desta forma, as experiências computacionais não se constituem ainda em uma prática regular no ensino de Matemática. Em nosso ponto de vista, apoiado pelas pesquisas que vimos realizando, é a qualidade do material didático a ser utilizado pelo professor, em concomitância com o software de Geometria Dinâmica, que permitirá a real integração destas novas ferramentas no processo ensino aprendizagem em Matemática, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

Algumas escolas na cidade do Rio de Janeiro estão iniciando, em caráter experimental, o uso do Tabulæ como uma das ferramentas para o ensino de Matemática. Os professores que realizam estas experiências estão ligados ao projeto, e partilham de nossa preocupação em integrar estas atividades desenvolvidas em laboratório com as demais atividades didáticas realizadas em sala de aula. No ensino fundamental, a estratégia principal tem sido a de estimular o aluno a criar hipóteses e generalizações, e os professores relatam que este trabalho vem resultando em um entendimento mais profundo dos resultados matemáticos abordados, que se reflete em uma maior facilidade para transferir estes conhecimentos para a resolução de novos problemas.

A COMUNICAÇÃO À DISTÂNCIA COM O TABULÆ E COM O MANGABA

A necessidade de uma linguagem sofisticada e especial para a comunicação matemática é bastante antiga (ver, por exemplo, a descrição feita por Netz (1999) sobre os textos escritos por Euclides e por Apolônio). Quando se considera o uso da Internet como um instrumento para ensino e comunicação, estas necessidades de adaptação de linguagem são ainda mais claras. Esforços coletivos, como o desenvolvido pelo Open Math Consortium (1998) ou individuais, como a transposição feita por D. Joyce (1997) d'Os *Elementos* de Euclides para páginas da Internet, ilustrados com applets com capacidades dinâmicas e interativas, são exemplos de realizações positivas neste campo emergente.

Se desejamos criar um ambiente via rede WWW para o processo ensino aprendizagem em matemática, devemos nos preocupar com diversos aspectos

técnicos, tais como a necessidade de geração e envio rápido de complexas simulações e construções geométricas planas e espaciais. Os programas Tabulæ e Mangaba foram pensados desde o início para responder a este tipo de demanda.

A escolha de implementação permite que apenas as instruções para a construção sejam enviadas pela rede, sem a necessidade de enviar a figura, o que geraria uma dificuldade muito maior, acarretando em perda de tempo de comunicação. Esta característica é um passo significativo em otimizar o sistema de comunicação, que pode então ser resumido em uma figura (ver figura 10). O professor (ou qualquer outro usuário autorizado pelo administrador do curso) envia informações pela rede. Um servidor central trata a informação enviada, e a distribui pelos diversos participantes do curso, estejam eles no mesmo local ou utilizando a rede WWW para estabelecer as conexões.

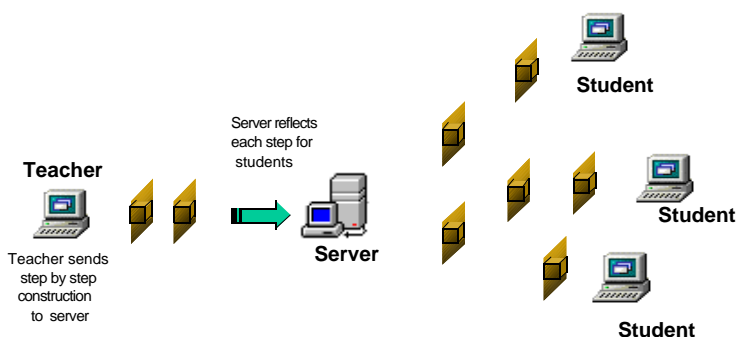


Figura 10: O mecanismo de Comunicação.

O MANGABA

O estudo da Geometria Espacial é uma forma eficiente para desenvolver nos nossos alunos a intuição geométrica, que Penrose (1996) considera como uma das maiores vantagens do raciocínio humano sobre o poder de calcular das máquinas. Pesquisas feitas em diversos países sugerem que a atitude dos alunos para a Matemática Avançada é fortemente influenciada pelas suas experiências

prévias, e a visualização espacial desempenha um papel importante nestas atitudes (ver, por exemplo, Tall, 1991, Dreyfus, 1991(a), 1991(b)).

No início do século XX, Poincaré (1952) fazia a distinção entre o espaço geométrico e espaço representativo. Segundo ele, interagimos com os objetos no espaço representativo, mas pensamos sobre eles como se eles existissem no espaço geométrico. Desta forma, devemos considerar que a representação influencia diretamente nossa capacidade de compreender estes objetos, e suas propriedades. Ferramentas de modelagem podem ser especialmente úteis para permitir que os alunos vençam dificuldades de visualização, e o interesse dos professores por modelagem tridimensional computacional em nossos cursos de capacitação demonstra isso.

Nossas pesquisas em materiais didáticos para o desenvolvimento deste tema passaram pelo uso de JAVA e VRML (Guimarães et al, 2000) e o uso de programas de Geometria Dinâmica para representações em perspectiva (Gani & Belfort, 2000), como já discutimos neste artigo. Embora bastante ricas, ambas as experiências mostraram ter limitações: a linguagem VRML permite a movimentação irrestrita da cena, mas não permite que novas construções sejam feitas pelo usuário, enquanto o uso da Geometria Descritiva na outra experiência fica limitada por problemas gráficos necessários para a visualização (tais como linhas tracejadas, espessura das linhas mais próximas, etc.). fazendo que seja necessário estabelecer limites para a movimentação da cena criada.

Baseados nestas pesquisas, ficou claro que um instrumento que permitisse a construção de objetos tridimensionais que pudessem ser vistos em ambiente similar ao VRML se mostrava necessário. O programa Mangaba foi desenhado para ter as mesmas facilidades de comunicação do Tabulæ, mas está voltado para o estudo das formas no espaço. O software Mangaba permite ao usuário formar uma cena 3D a partir de escolhas feitas dentre um grande número de primitivas disponibilizadas (estas incluem um conjunto extenso de poliedros, sejam estes convexos ou não). Um estudo (Guimarães et al., 2000) mostrou as vantagens deste formato quando comparado com figuras geradas por ferramentas CAS, como o Maple, por exemplo, onde o usuário, em geral, deve recorrer às equações dos sólidos.

Assim sendo, o Mangaba é uma ferramenta computacional sem similar no mercado internacional, e que visa contribuir para amenizar o problema da dificuldade de visualização geométrica no espaço, reconhecido como um dos mais fundamentais no ensino de Geometria. Para atender a carência de ferramentas adequadas para este fim, materiais concretos, embora ajudem num primeiro momento, não são suficientes, pois persiste o difícil problema de levar o aluno a ser capaz de entender as representações dos sólidos através de suas projeções planas, em geral realizadas sobre uma folha de papel. Desta forma, argumentamos que o Mangaba pode ser usado como uma “ponte” para preencher o espaço didático existente entre a manipulação de materiais concretos e a correta compreensão visual de representações de objetos 3D em superfícies planas, que estão baseadas nas técnicas projetivas clássicas.

Diversas características fazem do Mangaba um programa computacional de grande utilidade em diversos níveis de aprendizagem de Matemática. Por exemplo, dadas duas primitivas, uma terceira figura pode ser especificada na tela do computador como a união destes objetos. As primitivas podem também ser editadas, e transformadas geometricamente, incluindo as transformações afins usuais. Atributos não geométricos, como cor, transparência e textura também podem ser usados na edição de figuras.

Algumas construções simples, mas que são características de programas de Geometria Dinâmica, já podem ser feitas no Mangaba. Para o futuro, planejamos integrar as duas ferramentas aqui discutidas de tal forma que, uma vez que um plano seja selecionado numa cena do Mangaba, o conjunto completo de ferramentas de construção do Tabulæ seja disponibilizado para trabalhar nesta superfície. Atualmente, o programa já permite ainda a elaboração de construções geométricas espaciais básicas, tais como a reta perpendicular a um plano, ou planos paralelos. Estas propriedades geométricas são preservadas pelo movimento e/ou transformação dos elementos associados a ela na tela do computador, de forma similar ao que acontece em um software de Geometria Dinâmica bidimensional.

ALGUMAS APLICAÇÕES DIDÁTICAS

Como se trata de uma ferramenta inédita no mercado internacional, está sendo necessário desenvolver uma série de atividades básicas para motivar a utilização deste programa em diversos níveis de ensino. Por outro lado, estamos convencidos de que as características específicas do programa podem ser bastante exploradas no ensino de matemática e de desenho. Por exemplo: o fato de que o programa permite o acesso às diferentes vistas laterais dos sólidos criados, contribuindo assim para o desenvolvimento das habilidades de representação plana de figuras 3D.

Para exemplificar, na figura 11 apresentamos um empilhamento de cubos, construído no Mangaba, e que pode ser explorado em atividades de visualização espacial e na conceituação de projeções e de vistas planas de um sólido. Atividades como esta podem ser encontradas propostas em livros didáticos de qualidade para as séries finais do ensino fundamental, e foram até mesmo foco de pesquisas sobre aprendizagem de matemática em uma amostra de alunos do ensino fundamental. O Mangaba permite a movimentação livre da figura, ou seja, o aluno pode explorar esta composição espacial por diversos ângulos de visão.

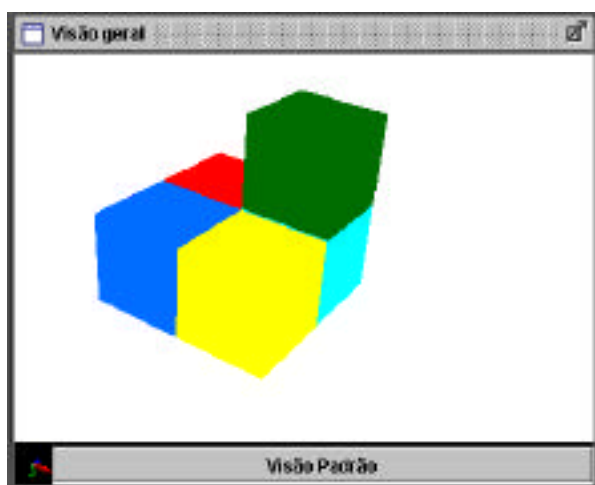


Figura 11: Empilhamento de cubos feito no Mangaba.

A partir desta exploração inicial, o aluno é levado ao reconhecimento de diferentes vistas laterais deste empilhamento. A figura 12 mostra duas destas

vistas: a frontal e a superior (poderíamos ainda obter mais uma vista lateral para os cubos nesta mesma posição, ou ainda outras, caso modificássemos o ponto de vista considerado na representação em perspectiva).



Figura 12: Vistas superior e frontal de uma pilha de cubos.

A exploração desta atividade nas duas direções (ou seja, tanto se pode pedir aos alunos que obtenham as vistas laterais a partir da representação da figura espacial quanto requerer a obtenção da figura espacial a partir do conjunto de vistas laterais) ajuda a desenvolver no adolescente a capacidade de visualização espacial, além de colaborar para a percepção e na construção do conceito de projeções ortogonais, pois são estas transformações que constituem a ferramenta fundamental para a obtenção correta das vistas laterais.

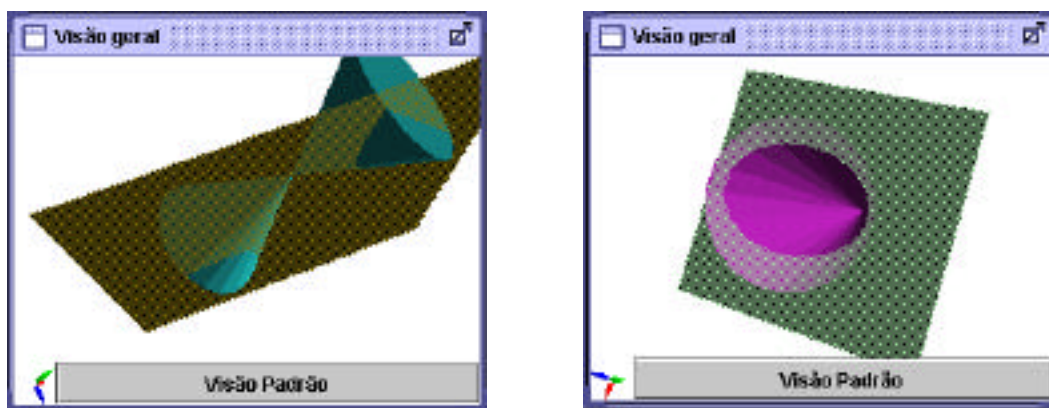


Figura 13: Seções planas de cones.

Outras aplicações didáticas são possíveis, e neste momento vimos experimentando, em conjunto com professores do ensino médio, algumas utilizações do Mangaba para auxiliar o processo ensino aprendizagem de

conceitos geométricos. Na figura 13, ilustramos a interseção de um cone por um plano, uma etapa importante no desenvolvimento do estudo das cônicas.

De uma forma mais geral, o Mangaba pode contribuir para a visualização de interseção de superfícies, um problema difícil para alunos iniciantes no estudo das figuras espaciais e suas representações no plano. Na figura 14 ilustramos uma situação simples, mas de difícil visualização: o corte de um cubo por um plano gerando uma figura plana pentagonal. Observe que nenhuma das projeções usuais, exibidas ao lado da vista “espacial” do cubo seccionado por um plano, permite visualizar o corte como um pentágono. Esta compreensão, no entanto, pode ser bastante favorecida pela movimentação irrestrita da figura “espacial”.

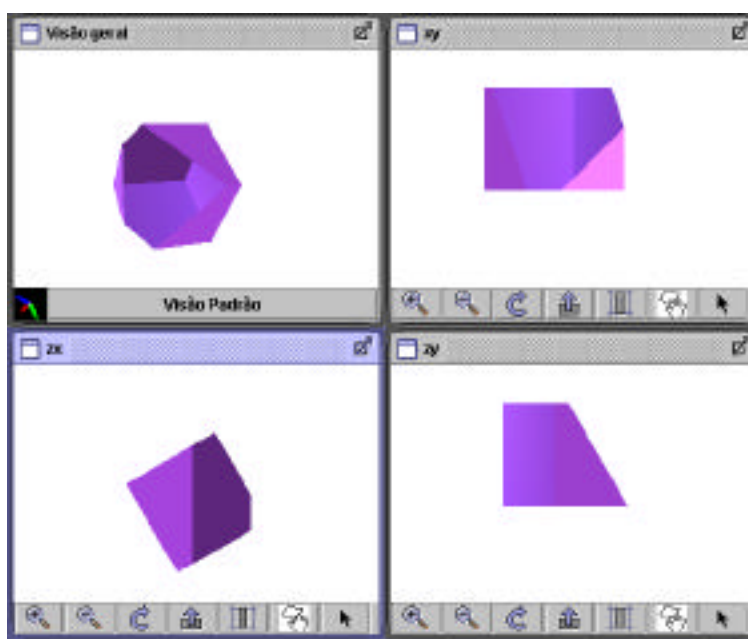


Figura 14: Corte plano em um cubo.

Embora extremamente atraente para todos os professores do ensino médio que já tiveram a possibilidade de ver uma demonstração deste software de Geometria Espacial, o desenvolvimento do Mangaba ainda exige atenção da equipe do projeto. Mais testes estão previstos, assim como a melhoria na ergonomia da interface, visando tornar o programa em um aplicativo de fácil utilização, mesmo para usuários pouco familiarizados com a utilização de computadores.

Além disso, está em desenvolvimento um conjunto completo de construções geométricas dinâmicas, isto é: uma vez que duas figuras construídas estejam relacionadas por propriedades geométricas, estas relações são mantidas quando modificamos a posição ou forma dessas figuras. Quando completo, o Mangaba seria, então, uma ferramenta aproximando o que poderia ser considerado como o primeiro software de Geometria Dinâmica Tridimensional⁴, no sentido usado pelos criadores do termo, por permitir realizar e modificar construções geométricas a partir de interações simples com o mouse, e por preservar as propriedades geométricas relativas das figuras quando modificadas.

CONCLUSÕES

Pesquisas e recomendações recentes em diversos países do mundo apontam para a importância do treinamento de professores como fator preponderante na busca por melhores resultados na escola e também para a importância do estudo da Geometria, como formadora do pensamento lógico e dedutivo (para exemplos recentes em Matemática, veja Kilpatrick et al, 2001, nos Estados Unidos e The Royal Society/ Joint Mathematical Council , 2001, na Inglaterra). Na tarefa de melhor capacitar os futuros professores e aqueles em exercício, destacando nestas atividades a importância da Geometria, parece existir um espaço a ser preenchido por experimentos apoiados em recursos de educação a distância e que possam contribuir positivamente para a melhoria da formação matemática dos professores.

Se considerarmos o sistema educacional brasileiro, com seus 50 milhões de alunos, fica clara a impossibilidade do sistema universitário atender à demanda de formação inicial e continuada necessária de professores, a menos que se considere a possibilidade de se criar uma rede eficiente de ensino à distância. Para que uma rede como esta seja estabelecida em Matemática, é fundamental que se desenvolvam as ferramentas necessárias, em especial aquelas que possibilitem a visualização espacial e a comunicação de elementos geométricos. Estamos, nesse momento, iniciando um trabalho de preparação de

⁴ Temos notícia de desenvolvimentos em curso nesta direção pela equipe ligada ao software Cabri Géomètre.

materiais didáticos apoiados no Tabulæ e no Mangaba. Estes materiais estão sendo testados em cursos de formação de professores, com resultados animadores.

Ao desenvolver um software de Geometria Dinâmica plana, com certeza, estamos beneficiando as condições de ensino em Matemática. A utilização desta ferramenta vai permitir uma visão mais focada na resolução de problemas, fazendo com que o ensino da Matemática, e em particular da geometria, se torne mais estimulante e cheio de desafios. Acreditamos que este trabalho possa contribuir para que os alunos passem a perceber a Matemática como um conteúdo onde a compreensão é mais importante que a memorização, respondendo, desta forma, aos anseios de seus professores.

Ao desenvolver um software para auxiliar o processo ensino aprendizagem de geometria espacial, incluindo atender as necessidades de interpretação das representações planas a ela associadas, com certeza, estamos beneficiando as condições de ensino em Matemática, em Desenho e em Geometria Descritiva. Se acompanhada de materiais de ensino adequados, a utilização desta ferramenta pode permitir uma visão mais focada na resolução de problemas, fazendo com que o ensino destas disciplinas possa se tornar mais estimulante e desafiador. A necessidade de desenvolver e disponibilizar nas escolas de softwares com o perfil do Mangaba é um ponto bastante enfatizado nos estudos recentes que destacamos neste artigo desenvolvidos na Inglaterra e nos Estados Unidos.

Agradecimentos: A pesquisa relatada neste artigo foi parcialmente financiada programa PROTEM do CNPq, através do projeto ENIBAM. Agradecemos, em especial, ao “time” que, com esforço, entusiasmo, estudo e dedicação, tornou estes programas uma realidade: Alexandre Tessarollo, Aline S. Ferreira, Bruno Rothgiesser, Celso G. Barreto Júnior, Diego Carvalho, Fábio G. Menezes, João Carlos S. Freitas, Leonardo F. Almeida, Luiz Carlos Guimarães, Rafael G. Barbastefano, Rodrigo S. Moreira, Rodrigo A. Hausen, e Thiago G. Moraes.

REFERÊNCIAS

- Belfort, E., Guimarães, L. C. & Barbastefano, R. (1999) - Geometria Dinâmica e Demonstrações na Formação Continuada de Professores. Em *Anais do Cabri World 99*, volume eletrônico. São Paulo: PUC-SP.
- Belfort, E., Guimarães, L. C. & Barbastefano, R. (2001) - Using Computers in Mathematics Teacher Training Programs: a Reflection upon an Experiment. Em *Annals of The 5th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Klagenfurt: ICTMT-5.
- Bellemain F. (1992): *Conception, réalisation et utilisation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie: Cabri-géomètre*, Tese de Doutorado. Grenoble: Universidade Joseph Fourier.
- Dreyfus, T. (1991a). Advanced Mathematical Thinking Processes. Em D. O. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. London: Kluwer.
- Dreyfus, T. (1991b). On The Status Of Visualisation And Visual Reasoning In Mathematics And Mathematics Education. Em *Proceedings of 15th Psychology of Mathematics Education Congress*, vol 1, pp. 33-48. Assisi: PME.
- Gani, D. C. & Belfort, E. (2000)- Painéis em Geometria Dinâmica: Novas Possibilidades. Em *Livro do Congresso – Primeiro CEC*, pp. 102-110. Rio de Janeiro: CEC, 2000.
- Gani, D. C. & Belfort, E. (2001)- Cabri and Descriptive Geometry: Integrating Different Representations. A aparecer em *Selected Articles from Cabri World 99*. São Paulo: PUC-SP.
- Guimarães, L. C. & Belfort, E. (1999) - *Roteiros de Laboratório de Geometria*. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ.
- Guimarães, L. C.; Barbastefano, R & Belfort, E. (2000). Tools for Teaching Mathematics: a case for Java and VRML. *Journal of Computer Applications in Engineering Education*, v. 8, n. 3-4 , p. 157 -161.
- Guimarães, L. C.; Barbastefano, R. & Belfort, E. (2001) - Tabulæ and Mangaba: Dynamical Geometry with a Distance Twist. Em: *Annals of The 5th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Klagenfurt: ICTMT-5.
- Heath, T. L. (1956) - *Euclid - The Thirteen Books of The Elements*. 2ª edição. New York: Dover.
- Jackiw, N. (1997): *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley: Key Curriculum Press.
- Joyce, D. (1997) *Euclid's Elements*. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.
- Key Curriculum Press (ed.) (1996) - *Shape Makers*. Berkeley: Key Curriculum Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (ed.) (2001): *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academic Press

Konterkamp, U. (1999): *The Dynamical Geometry Software Cinderella*. Tese de Doutorado. Zurich: ETH.

Mathematics American Association (eds.). (1996) - *Geometry Turned On*. New York: MAA.

Netz, Reviel (1999); *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University. Press.

Penrose, R. (1996) – Mathematical Intelligence. Em Khalfa, J. (org.) *What is Intelligence?* Cambridge: Cambridge University Press.

Poincaré, H. (1952) – *Science and Hypothesis*. Londres: Dover

Tall, D. O. (1991): Reflections. Em D. O. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer.

The Royal Society / Joint Mathematical Council (2001) - *Report on the Teaching of Geometry 11-19*. The. Royal Society, London

The OpenMath Consortium. www.openmath.org.