A utilização de representações dinâmicas na obtenção do volume da esfera

Gerson Luis Carassai
gerson.carassai@utp.br

Jorge Bernard
jorge.bernard@utp.br

Universidade Tuiuti do Paraná

Comunicação Científica

1. Introdução

Este trabalho pretende apresentar, com o auxílio do software ***Cabri-Géomètre,*** uma estratégia para compreensão da fórmula do volume da esfera utilizando o princípio de Cavalieri. A construção de cenários utilizando programas de geometria dinâmica tem como finalidade possibilitar que o aluno visualize as construções geométricas e possa movimentá-las de várias formas, observando a manutenção de suas propriedades [Lab99]. O princípio de Cavalieri nos auxilia a calcular o volume de um prisma qualquer a partir do volume do paralelepípedo reto-retângulo, bem como a calcular o volume da esfera a partir do volume de um sólido denominado anticlepsidra [Pai95]. O objetivo deste trabalho é aliar a contribuição do ambiente computacional ***Cabri-Géomètre*** e a compreensão do princípio de Cavalieri, como facilitadores do processo ensino/aprendizagem na obtenção do volume da esfera. Neste trabalho, buscam-se alternativas didáticas para a obtenção intuitiva da validade do princípio de Cavalieri. Além disso, esse princípio é aplicado para a obtenção do volume e da superfície total da Esfera e também do Elipsóide de revolução. As construções geométricas propostas neste trabalho apesar de não constituírem uma demonstração formal, possibilitam que se faça a transposição didática para o aluno deste nível de ensino, possibilitando que ele conclua a veracidade do teorema. Salienta-se que a geometria intuitiva e a geometria dedutiva devem juntas contribuir para o aprimoramento do processo de aprendizagem em Matemática, não meramente pela ilustração geométrica, mas sobretudo pela validação da construção numa dada Teoria Geométrica [Mar99]. Os resultados obtidos permitem concluir que o enfoque através desta estratégia é uma excelente alternativa, pois facilita com vantagens a compreensão da fórmula proposta.

2. A informática aplicada à educação e o ambiente ***Cabri-Géomètre***

As discussões sobre quando e como utilizar o computador em sala de aula são objeto de inúmeras pesquisas em Educação Matemática. Suas publicações têm contribuído significativamente para a expansão de uma nova tendência mundial: a engenharia de softwares aplicada a didática, a chamada Engenharia Didática [Pap86].

Em [Bor96] aborda-se a introdução da informática na formação de professores, analisando problemas que se referem à educação matemática, destacando-se o fato de que "existe uma necessidade de um intenso trabalho com os futuros professores na questão da informática para que, caso haja disponibilidade de computadores, estes possam ser utilizados".

Os computadores estão trazendo mudanças significativas para a matemática, além de afetarem profundamente a dinâmica da sala de aula [Gat92]. Estas mudanças aludem ao enfoque que será dado na sala de aula a um determinado tópico; a própria superação da noção de “tópico” e a uma radical mudança de como o professor passa a relacionar-se com os alunos e com a máquina.

O aparecimento dessa nova mídia, o computador, deve ser trabalhado a partir de uma nova consciência por parte do professor, a de não apenas tratar de velhos tópicos de forma igual, simplesmente uma troca de mídia, e sim a de uma nova perspectiva em relação a abordagem da matemática de forma a enriquecer os conhecimentos já adquiridos em sala.

Segundo [Bor96] a presença da informática nos dias atuais deve ser encarada como uma aliada e não como inimiga. O uso do computador não deve substituir uma sólida formação teórica, mas enriquecê-la e permitir a discussão de novas questões. O computador pode ser utilizado como simulador de conjecturas que devem ser provadas para consolidar o conhecimento adquirido, ou ainda como um instrumento de visualização de conceitos e suporte para uma melhor compreensão e aprofundamento do que está sendo apreendido.

A mudança da função do computador como meio educacional acontece juntamente com um questionamento da função da escola e do papel do professor que deixa de ser o repassador do conhecimento e passa a ser criador de ambientes de aprendizado e facilitador do processo pelo qual o aluno adquire conhecimento.

2.1 A abordagem proposta

Na abordagem proposta é possível obter dinamicamente o volume da Esfera, com isso o estudante pode visualizar, por exemplo, que o volume da esfera é igual ao volume da anticlepsidra. Além disso, pode confrontar as abordagens algébrica e geométrica do problema.

A pesquisa aqui relatada descreve uma atividade em geometria dinâmica, planejada com o objetivo de incentivar o professor de matemática a demonstrar, dentro de uma mesma projeção, vários teoremas e aplicações no estudo de Geometria. A exploração da geometria dinâmica via ***Cabri-Géomètre***, desafia professores e alunos a obter formas alternativas para a obtenção de volumes de diferentes sólidos. Também é possível, por extensão, utilizar desses resultados para introduzir o Cálculo Infinitesimal.

2.2 O ambiente ***Cabri-Géomètre***

Dentre as características do ***Cabri-Géomètre*** que permitiram implementar a abordagem proposta, destaca-se o fato do software permitir construções geométricas dinâmicas, permitir deslocamento das construções, apresentar o histórico das operações, ocultar as construções auxiliares e verificar propriedades geométricas [San95, Lab99].

A ferramenta “revisar construção” do menu edição é um outro ponto forte no processo de aprendizagem do método geométrico. O professor poderá preparar uma aula, onde, cada etapa será monitorada e posteriormente revisada durante todo o processo de construção do método.

3. O Princípio de Cavalieri

Este trabalho pretende apresentar, com o auxílio do software ***Cabri-Géomètre,*** uma estratégia para compreensão da fórmula do volume da esfera utilizando o princípio de Cavalieri. Conforme se observa [Lim99], no ensino de geometria existem alguns resultados que não se pode demonstrar de forma satisfatória e que naturalmente causam incômodo ao professor. Em [Lab99] destaca-se que a construção de cenários utilizando programas de geometria dinâmica tem como finalidade possibilitar que o aluno visualize as construções geométricas e possa movimentá-las de várias formas, observando a manutenção de suas propriedades.

Segundo [Lim91] existem três possibilidades para abordar as fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos geométricos no ensino médio: a primeira consiste em utilizar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes; a segunda tem por escopo a utilização do cálculo infinitesimal; a terceira caracteriza-se pela aplicação do Princípio de Cavalieri. A utilização do Princípio de Cavalieri "permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume", por isso foi utilizada neste trabalho.

O software ***Cabri-Géomètre*** apresenta algumas características que permitem a sua utilização para auxiliar a validação de teoremas, como por exemplo, é um micro-mundo, as construções geométricas são dinâmicas, há o deslocamento das construções, existe a possibilidade de acompanhar o histórico das operações, as construções auxiliares podem ser ocultadas e as propriedades geométricas podem ser verificadas.

Cabe destacar alguns aspectos históricos do Princípio de Cavalieri. Francesco Buonaventura Cavalieri (1598-1647), publicou sua "Géomètrie des Indivisibles" onde ele considera os sólidos como formados de uma infinidade de planos e os planos como uma reunião de uma infinidade de retas. Esta idéia fecunda, malgrado a inexatitude que ela exprime permite novas avaliações de superfícies e de volumes, e a determinação geométrica de centros de gravidade das figuras planas e dos sólidos. Ele obteve de suas considerações um método que foi utilizado durante cinqüenta anos e que foi substituído pelo Cálculo Integral. Além disso, entre as suas diversas realizações destaca-se a primeira demonstração satisfatória do Teorema de Pappus-Guldin.

O Principio de Cavalieri reduz o cálculo de volumes ao cálculo de áreas e diz o seguinte: "Se dois ou mais sólidos de mesma altura estão sobre um plano, e qualquer plano paralelo ao mesmo determina nesses sólidos figuras planas de mesma área, então esses sólidos tem o mesmo volume.

O Princípio de Cavalieri nos auxilia a calcular o volume de um prisma qualquer a partir do volume do paralelepípedo reto-retângulo ou o volume de uma pirâmide qualquer a partir do volume de outra de área da base equivalente e mesma altura, bem como a calcular o volume da esfera ou do elipsóide de revolução a partir do volume de um sólido denominado anticlepsidra. Na figura 1 observa-se duas pirâmides com mesma área da base e mesma altura, com isso verifica-se facilmente que as seções planas produzidas por planos paralelos à base são sempre iguais e que pode-se concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes das duas pirâmides são iguais.

A partir destes volumes pode-se também obter o cálculo da superfície total destes sólidos.

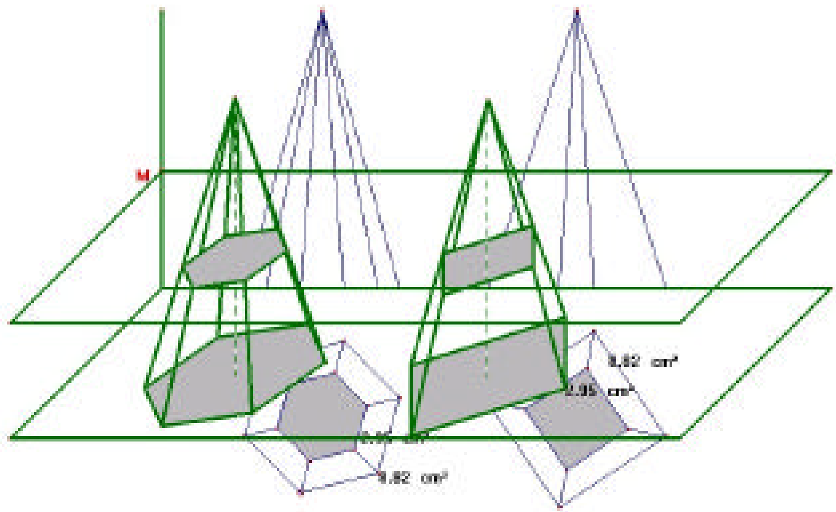

Figura 1. Pirâmides Equivalentes

No que se refere ao aprendizado do princípio de Cavalieri algumas observações devem ser feitas: quando abordado em cursos mais avançados esse principio é um teorema, isto é, ele pode ser demostrado. No ensino médio esse princípio não pode ser provado, pois envolve conceitos avançados da Teoria da Medida [Lim91]. As construções geométricas propostas neste trabalho apesar de não constituírem uma demonstração, possibilitam que se faça a transposição didática para o aluno deste nível de ensino, possibilitando que ele conclua que o teorema é verdadeiro.

4. Obtendo o Volume da Esfera

Considere-se uma esfera de raio R, inscrita num cilindro de raio da base R e altura 2R, apoiado em um plano horizontal. Sobre o mesmo plano considere-se outro cilindro contendo uma clepsidra (ampulheta) com base de raio R e altura 2R, conforme figura 2. O volume compreendido entre o cilindro e a clepsidra, denomina-se anticlepsidra. É fácil verificar pela figura 2 que o volume da anticlepsidra é igual ao volume da esfera. As seções planas por planos paralelos ao plano horizontal, determinam na esfera círculos de mesma área que as seções correspondentes na anticlepsidra que serão coroas circulares. Se o plano estiver a uma distância h do centro da esfera, a seção plana será $\pi(R^2-h^2)$ e a seção plana da anticlepsidra será a área da coroa $(\pi R^2-\pi h^2)$, que é igual a $\pi(R^2-h^2)$, ou seja, para qualquer altura h as áreas das seções serão iguais. Logo pelo Princípio de Cavalieri os volumes serão iguais.

No cálculo do volume da esfera observa-se que o volume da esfera é igual a volume do cilindro menos o volume da clepsidra, ou seja, $2\pi R^3 - 2/3\pi R^3 = 4/3\pi R^3$.

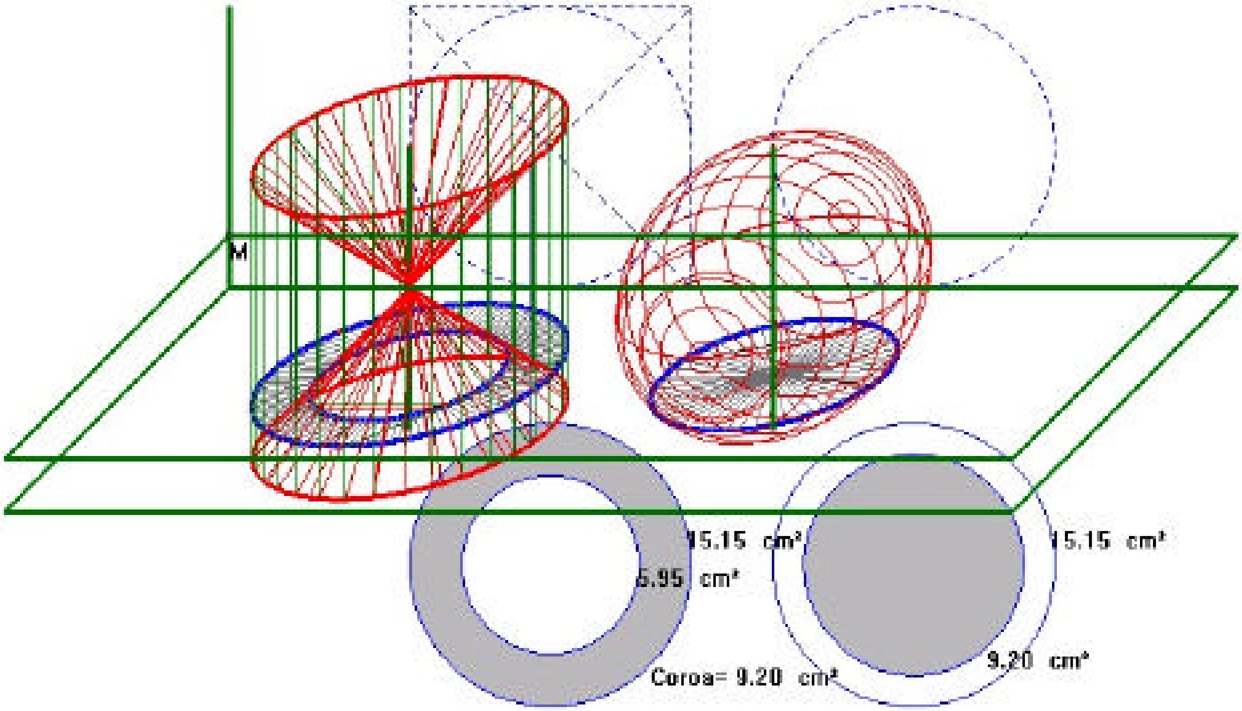

Figura 2. Volume da Esfera pelo Princípio de Cavalieri

5. Obtendo o Volume do Elipsóide de Revolução

De forma análoga, pode-se obter o volume do Elipsóide de Revolução. Na figura 3 mostra-se um corte vertical, passando pelo centro do elipsóide e pelo centro da clepsidra. Observa-se que a seção plana do elipsóide inscrito no cilindro corresponde à seção plana da anti-clepsidra para qualquer altura h da seção.

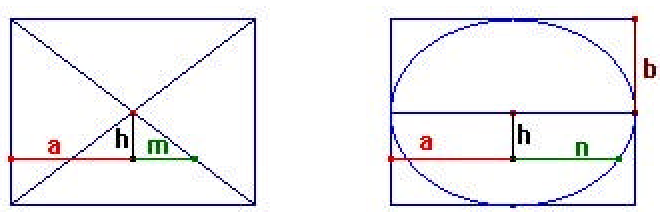

Figura 3. Área da coroa e área da seção do elipsóide

Na figura 4 apresenta-se um elipsóide de revolução (com eixo maior a e eixo menor b) e uma clepsidra (de raio da base a e altura 2b). Ambos sólidos estão apoiados em plano horizontal e inscritos em cilindros de raio da base a e altura 2b. Observa-se que as seções planas produzidas nesses sólidos por um plano paralelo à base e distanciados de uma altura h do centro desses sólidos, no elipóside produzem círculos e na anti-clepsidra coroas circulares. Os círculos e as coroas durante o deslocamento do plano conservam sempre a mesma área, o que pode ser visualizado nas projeções horizontais. Disso conclui-se que os volumes do elipsóide de revolução e da anti-clepsidra são equivalentes. Algebricamente pode-se constatar que existe a seguinte proporção para o cálculo da área da coroa: $h/m = b/a$, ou seja, $m=ah/b$. Disso conclui-se que $S_{co} = \pi a^2(1 - h^2/b^2)$. Por sua vez, na área da seção do elipsóide, utiliza-se a relação $n^2/a^2 + h^2/b^2 = 1$, donde conclui-se que $S_{el} = \pi a^2(1 - h^2/b^2)$. Disso deriva a conclusão de que as seções tem mesma área, logo os volumes são iguais. No cálculo do volume do elipsóide constata-se que o volume é igual ao volume do cilindro menos o volume da clepsidra, ou seja, $2\pi a^2b - 2/3\pi a^2b = 4/3\pi a^2b$.

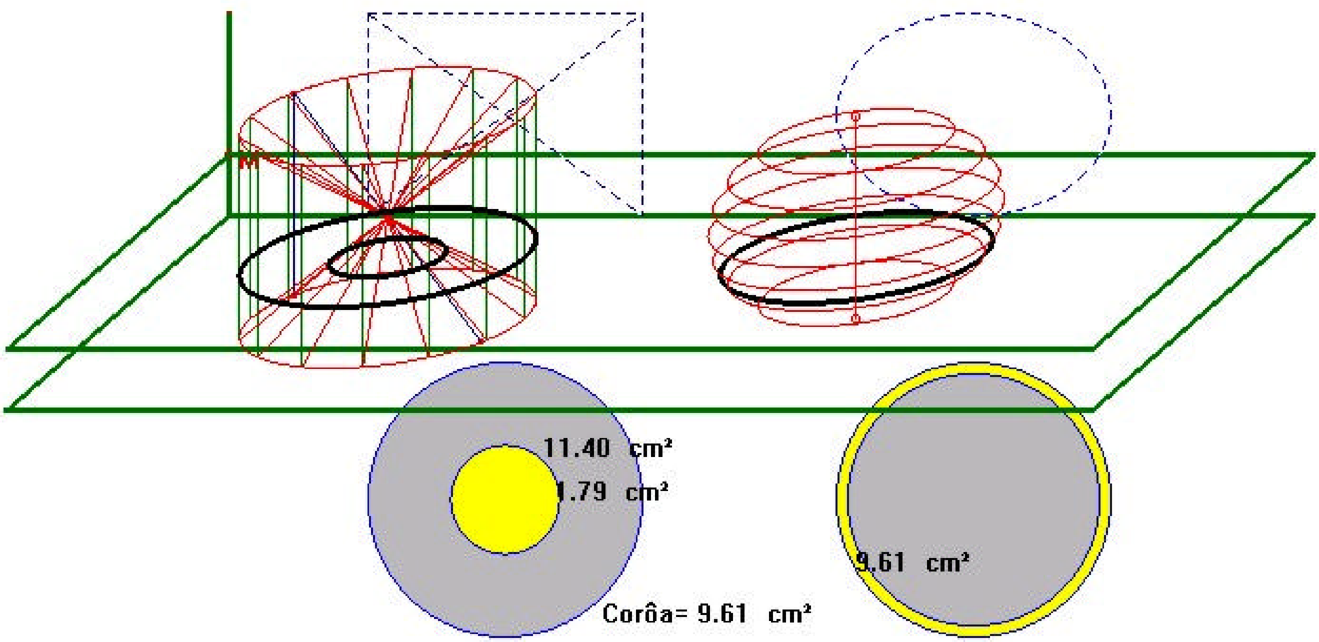

Figura 4. Volume do Elipsóide pelo Princípio de Cavalieri

6. O Processo de construção das figuras

A princípio, o mais importante na apresentação das figuras dinâmicas do ***Cabri-Géomètre***, é que o aluno visualizando o que ocorre nas seções dos dois ou mais sólidos, percebe a igualdade das áreas e conclui pela veracidade da proposição. Entretanto, seria desejável que o professor, ou mesmo o aluno, tivesse a possibilidade de construir as figuras. Para isto, apresenta-se o processo de construção utilizado. Existe também a possibilidade do acompanhamento de cada passo do desenvolvimento das construções com comentários, utilizando no ***Cabri-Géomètre*** o comando mostrar, que permite visualizar os objetos ocultos juntamente com a tecla revisar construção do menu editar.

Normalmente, inicia-se a construção por uma reta horizontal que será nossa linha de referência ou linha de terra (eixo x), e em seguida situam-se as figuras desejadas pôr suas projeções horizontal e vertical, liberando os movimentos que se pretendam imprimir. Utiliza-se inicialmente o método da Dupla Projeção Ortogonal (Método de Monge). Pode-se colocar os sólidos assentados no plano horizontal de referência e representa-se um plano horizontal por seu traço de forma que o mesmo possa se deslocar paralelamente à base até a altura total dos sólidos cortando os mesmos. Este movimento define-se por um ponto M sobre um segmento vertical. Para possibilitar a visualização em perspectiva paralela, utiliza-se a perspectiva cavaleira que no caso é a mais simples de se representar. Para isto acrescenta-se os eixos axonométricos y e z , e define-se uma direção de transformação D.T. que permite por meio de paralelas, rebater o plano xy de Monge para Cavaleira. As alturas permanecem as mesmas por serem paralelas ao plano xz. As seções deve ser recobertas por um polígono para possibilitar o cálculo das áreas. Estas áreas, para evitar deformações, deverão ser medidas em verdadeira grandeza na projeção horizontal do Método de Monge. No caso de superfícies curvas, deve-se utilizar com freqüência os lugares geométricos.

7. Conclusões

A utilização de softwares dinâmicos no ensino da matemática permite modelar fenômenos da Geometria, refutar conjecturas de plano, auxiliar na validação de teoremas e sem dúvida atuar como agente de motivação e desenvolvimento do raciocínio lógico-espacial. No presente trabalho utilizou-se a geometria dinâmica em aplicações do principio de Cavalieri, com isso adotou-se uma abordagem pedagógica que relaciona a geometria intuitiva e a geometria dedutiva. Salienta-se que a geometria intuitiva e a geometria dedutiva devem juntas contribuir para o aprimoramento do processo de aprendizagem em Matemática, não meramente pela ilustração geométrica, mas sobretudo pela validação da construção numa dada Teoria Geométrica. [Mar99)

8. Referências Bibliograficas

[Bor96] BORBA, M. C. **Informática trará mudanças na educação brasileira?** Zetetikè, Campinas, v. 4, n. 6, Jul/Dez, 1996, p.123-134.

[Gat92] GATTI, Bernadete. **O computador no desenvolvimento cognitivo**. Revista Brasileira de Educação e Informática. n. 7, São Paulo, Setembro, 1992, p.21-24.

[Lab99] LABORDE, J. M. ***Quinze ans de Cabri-Géomètre: un bilan*****.** Cabri-World`99, São Paulo: PUC-SP, 1999.

[Lim99] Lima L, E. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 2, Rio de Janeiro: Solgraf, 1999.

[Lim91] Lima L, E. **Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança.** Rio de Janeiro: Solgraf, 1991.

[Mar99] MARIOTTI, M. A. ***Introducing Pupils to Proof: The Mediation of Cabri*****.** Cabri-World`99, São Paulo: PUC-SP, 1999.

[Pap86] PAPERT, S. M. **Beyond the Cognitive: the other face of mathematics.** Procedings of the Psychology of Mathematics Education Conference. London University, 1986.

[Pai95] Paiva, M. **Matemática.** v. 2, São Paulo: Editora Moderna, 1995.

[San95] SANT, Marc. **O Cabri-Géomètre.** Revista do Professor de Matemática. n. 29, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1995, p. 36-40.