Oficina 1h54– Sistemas lineares: uma abordagem computacional

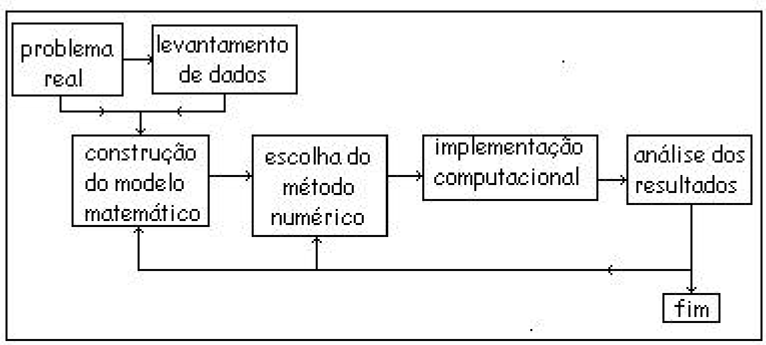
Lisete Godinho Lustosa

Marisa Ortegoza da Cunha

Programa de Extensão ***Dá-Licença***–Matemática/UFF

Universidade Federal Fluminense

Fases da resolução numérica de um problema



1. Erros no cálculo computacional/Condicionamento de problemas

A análise de erro de um resultado numérico não é considerada pela maioria das pessoas que utilizam o computador nos seus cálculos numéricos, mas estes métodos podem produzir resultados distantes da resposta certa.

Erro absoluto: diferença entre o valor verdadeiro (a) e o valor aproximado (a’):

$$E_a = a - a'$$

Freqüentemente sabemos algo sobre o valor exato, sem conhecê-lo precisamente, podemos obter um limite superior ε do erro absoluto: $|E_a| \leq \varepsilon$.

Erro relativo: quociente do erro absoluto pelo valor verdadeiro a:

$$E_r = \frac{E_a}{a}$$

O limite superior ε estabelecido para o erro absoluto determina um limite para o erro relativo: $|E_r| \le |E_a|/|a| \le |\varepsilon| / |a|$.

- **Erros inerentes:** embutidos nos valores dos
- **Erros de truncamento:** introduzidos pelos próprios procedimentos numéricos. Quando utilizamos o número **e** expresso por:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

não podemos usar todos os termos da série; a omissão dos termos não considerados provoca um erro.

- **Erros de arredondamento**: O computador utiliza um número finito de dígitos para armazenamento dos dados. Isso limita a precisão antes mesmo do início da computação.

Problemas chamados mal-condicionados

O sistema linear AX=B, onde $A = \begin{matrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{matrix}$ e $B = \begin{matrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{matrix}$ é compatível e determinado, pois det A=1. Sua solução é $U = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$. Trocando o vetor B por $B' = \begin{matrix} 32{,}1 \\ 22{,}9 \\ 33{,}1 \\ 30{,}9 \end{matrix}$, o sistema AX=B’ tem como solução o vetor $\begin{matrix} 9{,}2 \\ -12{,}6 \\ 4{,}5 \\ -1{,}1 \end{matrix}$. Perturbando a matriz, A e

escrevendo A’= $\begin{matrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{matrix}$, o sistema A’X=B tem solução $\begin{matrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{matrix}$. [1]

2. Fundamentação matemática para os métodos diretos

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Sejam A $M_{(m,n)}$(IR), r,s   N tais que $1 \leq r, s \leq m$ e r ? s.

1) Multiplicação da linha r de A por um escalar λ não nulo (λL_r);

2) Substituição da linha r de A por sua soma com um múltiplo escalar da linha s de A ($L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$);

3) Permutação das linhas r e s de A ($L_r \leftrightarrow L_s$).

Sejam A,B $M_{(m,n)}$(IR). Dizemos que **B é linha-equivalente a A** se B pode ser obtida de A pela aplicação de uma seqüência finita de operações elementares sobre linhas.

Teorema A linha–equivalência é uma relação de equivalência.

---

[1] Chama-se *número de condicionamento* de uma matriz quadrada inversível A ao número $c(A) = ||A^{-1}||.||A||$, onde ||.|| denota uma norma matricial consistente (V. item 4). Pode-se provar que $c(A) \geq 1$ e dizemos que uma sistema linear AX = B é *bem-condicionado* se c(A)   1. No exemplo, considerando a norma $||A|| = (\sum |a_{ij}|^2)^{1/2}$, temos c(A) = 2984.