QUANTIFICAÇÃO: ARTICULANDO TEORIA E PRÁTICA [1]

Gilda de La Rocque Palis e Leiliane Coutinho da Silva
Puc-Rio

Neste texto, relatamos o estudo e análise, por nós realizado, de uma proposta de ensino-aprendizagem de quantificadores, em nível universitário, cuja formulação teórica se encontra em Dubinsky (1997) e Dubinsky, Elterman e Gong (1988). A seqüência de ensino correspondente é apresentada no livro-texto ***Introduction to Discrete Mathematics with Isetl*** de W. Fenton e E. Dubinsky (1996) e está fundamentada em uma análise teórica do que significa compreender o conceito de quantificação e de como essa compreensão pode ser construída por um aprendiz. Esta análise fornece uma descrição das construções mentais específicas que um estudante pode fazer a fim de desenvolver a sua compreensão sobre quantificação e a seqüência de ensino tem por objetivo levar um aluno a fazer essas mesmas construções. Uma das estratégias utilizadas consiste em sugerir tarefas que requerem escrever e revisar programas de computador usando uma linguagem de programação matemática, no caso a Isetl (Dubinsky, 1995).

Segundo os próprios autores do livro-texto mencionado, os pressupostos teóricos a seu desenvolvimento não estão explicitados no texto mas implícitos em sua estrutura e conteúdo. Pelas suas características - não tem problemas resolvidos nem respostas de exercícios, é concebido para encorajar exploração, discussões e resolução de problemas e não para ser um livro de referencia - o livro não é popular com alunos ou professores. Esses aspectos, aliados à dificuldade de aprendizagem da linguagem Isetl por falta de material didático adequado, dificultam em muito o prosseguimento de investigações nessa linha metodológica específica por outros pesquisadores.

O estudo e análise que empreendemos procura tratar alguns desses aspectos de forma a facilitar o prosseguimento de pesquisas nessa linha. Nesse sentido, esse trabalho incluiu: a organização de material para aprendizagem da linguagem Iselt; a

[1] Pesquisa realizada com apoio do CNPq, Processo 30.0821/81.6.

resolução de todos os problemas[2] propostos em Fenton e Dubinsky (1996) constantes do capítulo que aborda o cálculo de predicados; e uma análise de relações existentes entre esses problemas e as construções mentais apontadas pela análise teórica que orientou o planejamento desse capítulo. No que se segue discutiremos essa análise e daremos exemplos de exercícios que podem levar, potencialmente, a certa construção mental apontada pela teoria.

Análise teórica

A análise teórica foi realizada no contexto de uma teoria geral de aprendizagem baseada nas idéias de Jean Piaget aplicadas à construção de conceitos matemáticos de nível universitário (Asiala,1996). Como resultado dessa análise obtém-se um conjunto de afirmações sobre as construções mentais (ações, processos, objetos) que um estudante pode fazer para adquirir a compreensão de um conceito. Os mecanismos para realizar estas construções, que Piaget chamou de abstrações reflexivas**,** incluem as interiorizações, coordenações, generalizações e encapsulações.

Para compreender um conceito matemático um sujeito pode começar com a manipulação de “objetos mentais ou físicos previamente construídos para realizar ações; ações são então interiorizadas para formar processos que são encapsulados para formar objetos. Objetos podem ser de-encapsulados e voltar aos processos dos quais eles foram formados. Finalmente, processos e objetos podem ser organizados em esquemas” (Dubinsky, 1995).

Uma transformação executada sobre um objeto é considerada uma ação quando é uma reação a estímulos que o sujeito percebe como externos. Neste caso, ele precisa de instruções completas e compreensíveis que mostram os passos necessários para realizar a ação.

A ação é uma parte importante no início do entendimento de um conceito. O trabalho com estudantes deve começar com atividades planejadas para ajudá-los a construir ações. Em parte, a aprendizagem envolve a aquisição de novas ações com as quais se pode conhecer os objetos.

---

[2] Os enunciados dos problemas e suas resoluções podem ser encontrados em Silva, L.C. (2001).

Quando um estudante faz uma construção interna correspondendo a uma ou mais destas ações dizemos que ele está realizando uma forma de abstração reflexiva chamada de interiorização cujo resultado é o que entendemos por processos**.** Esta interiorização não é apenas uma cópia da ação externa, mas depende dos objetos, processos e esquemas que o aluno já possui. Assim, embora a interiorização “represente” uma ação externa também depende do conhecimento prévio do aprendiz. A interiorização de uma ação leva-o a percebê-la como interna e sob seu controle.

Os objetos são construídos pela encapsulação de processos. “Quando a pessoa reflete acerca de operações aplicadas sobre um processo particular, entende o processo como uma totalidade, percebe que transformações podem agir sobre o processo e pode construir tais transformações, então esta pessoa está pensando no processo como um objeto” (Dubinsky, 1997).

A construção de novos processos pode se dar através da coordenação de dois ou mais processos existentes ou por generalização.

O ensino-aprendizagem da quantificação pode se iniciar com a determinação da verdade ou falsidade de proposições simples. Estas proposições simples podem ser usadas para formar proposições mais complexas. Um meio de fazer isto é reunir várias proposições simples em um conjunto e, usando o esquema de função, introduzir variáveis para obter funções a valores proposicionais[3], interpretadas como processos, isto é, o aluno pode imaginar a ação de percorrer o domínio da função, verificando a verdade ou falsidade da proposição para cada valor da variável. Um outro modo de obter proposições mais complexas consiste em coordenar duas ou mais proposições simples, ligando-as através de conectivos lógicos. As ações mentais que são executadas sobre objetos, necessitam ser interiorizadas para formar processos mentais.

A partir do momento que esses processos estão disponíveis, há uma prontidão para a construção de quantificações simples, que são orações com uma única quantificação, existencial ou universal, aplicada a uma função a valores

[3] Adotamos a expressão “função a valores proposicionais” como tradução de “proposition-valued function”. Uma função que aceita um número inteiro x e retorna o valor lógico da proposição “x é par” é uma função proposicional.

proposicionais de uma variável. A transição entre proposições simples e orações quantificadas pode ser alcançada coordenando os dois processos construídos anteriormente (conjunção/disjunção de um conjunto de proposições e construção de funções a valores proposicionais).

A seguir pode-se trabalhar com quantificações duplas, nas quais dois quantificadores são aplicados, em seqüência, a uma função a valores proposicionais de duas variáveis.

É aqui que a encapsulação da quantificação simples se faz importante. Esta transição é muito difícil para o aluno, pois o resultado desta encapsulação é uma proposição que deve ser considerada como um objeto. Para se alcançar isto, pode-se aplicar ações sobre o processo. Mas, segundo Asila (1996), "a ação não pode ser aplicada sobre o processo antes que este tenha sido encapsulado em um objeto. No entanto, as construções mentais não ocorrem numa seqüência lógica simples. De fato, podem estar ocorrendo três coisas ao mesmo tempo, inicialmente em uma combinação não bem conhecida: a necessidade de criar um objeto (de forma a aplicar uma ação no processo), a encapsulação do processo para formar o objeto, e a aplicação de uma ação naquele objeto".

As ações que podem ser aplicadas, nesse contexto, incluem: negar uma proposição quantificada e refletir, raciocinar a respeito dela (por exemplo: imaginando diferentes universos de discurso para mesma proposição).

O processo de quantificação simples, que foi encapsulado, gera uma proposição, que é considerada como objeto mental, logo passível de transformação pelos processos vistos anteriormente. Isto possibilita a eliminação de uma variável ao se trabalhar com quantificações duplas. Ao analisar uma declaração duplamente quantificada, o estudante pode começar fazendo uma análise sintática da declaração de forma a identificar as duas quantificações envolvidas: uma quantificação interna sobre uma das variáveis e uma quantificação externa sobre a outra variável. O resultado da coordenação destas duas quantificações simples é o processo de quantificação dupla que deve novamente ser encapsulado para se obter um novo objeto.

Resumindo, as construções mentais mais importantes para a compreensão da quantificação são as seguintes (Dubinsky, 1997):

- Coordenar duas ou mais proposições ligando-as através de conectivos lógicos.

- Generalizar o esquema de função para abranger funções a valores proposicionais.

- Interiorizar a ação de “percorrer” o domínio de uma função a valores proposicionais, verificando a verdade ou falsidade da proposição para cada valor da variável.

- Coordenar a conjunção/disjunção de proposições com iterar uma função a valores proposicionais através de seu domínio e aplicar um quantificador.

- Encapsular o processo de quantificação simples para obter uma proposição quantificada.

- Coordenar duas instanciações de quantificação simples para obter o processo de quantificação dupla.

- Encapsular o processo de quantificação dupla para obter uma proposição duplamente quantificada.

- Coordenar três ou mais instanciações de quantificação simples para obter quantificações múltiplas.

Articulando teoria e prática

A seguir vamos dar alguns exemplos de relação entre algumas atividades propostas na seqüência de ensino do livro de Fenton e Dubinsky (1996) e as construções mentais apontadas pela análise teórica (Dubinsky, 1997).

I. No esquema da quantificação, uma construção requerida é a generalização do esquema de função para abranger funções a valores proposicionais e outra é a interiorização da ação de “percorrer” o domínio de uma função a valores proposicionais, verificando a verdade ou falsidade da proposição para cada valor da variável.

Uma atividade que pode contribuir para estas construções é proposta no seguinte exercício:

"Expresse, na linguagem Isetl, a função que aceita um conjunto de inteiros, determina se o conjunto tem algum elemento divisível simultaneamente por 11 e por 19, retorna o valor lógico verdade se o conjunto contém tal elemento e retorna o valor falso caso contrário. Teste seu código para alguns conjuntos".

Uma resolução deste exercício é apresentada abaixo:

```
f:=func(X);
BV:=false;
for n in X do
if((n mod 11=0)and(n mod 19=0)) then
BV:=true;
end if;
end for;
return BV;
end func;
K:={209,210,305,187,323};
f(K);
true;
K:={10,210,305,13,21};
f(K);
false;
```

Nesta atividade, o aluno lida com uma função que aceita um conjunto X como input (entrada) e retorna como output o valor verdade da proposição "X contem um elemento divisível por 11 e 19". Este tipo de atividade pode ajudar o estudante a generalizar o seu esquema de função. Por outro lado, o trecho do código que se refere à avaliação de ((n mod 11 = 0) e (n mod 19 = 0)) para cada n em X consiste em "percorrer" o domínio X da função proposicional que associa a cada n o valor lógico de ((n mod 11 = 0) e (n mod 19 = 0)). Esta atividade pode contribuir para a interiorização desta ação.

II. Um exercício que pode levar a coordenar a conjunção/disjunção de proposições com percorrer o domínio de uma função a valores proposicionais e aplicar um quantificador é apresentado abaixo:

“Considere três propriedades que um número natural pode ter:

n é um palíndromo (um número que coincide com o número obtido invertendo os seus dígitos, por exemplo 2552),

n é divisível pela soma de seus dígitos,

n div 100 = n mod 100.

E os três conjuntos de números naturais:

o conjunto de números de quatro dígitos que são quadrados perfeitos

o conjunto de números de quatro dígitos que são primos e pares

o conjunto de números de quatro dígitos que são múltiplos de 90

(a) Expresse, na linguagem Isetl, funções proposicionais P1, P2 e P3 correspondentes às três propriedades acima.

(b) Expresse, na linguagem Isetl, os três conjuntos D1, D2 e D3 dados acima.

(c) Para cada dupla possível formada por uma função e um conjunto, use Isetl para verificar (n   D) P(n).

(d) Idem para verificar (n   D) P(n)”.

Parte da resolução desse exercício é apresentada abaixo [4]

(a)

```
D:={1000..9999};
P1:= func(n);
return (n div 1000=n mod 10) and((n div 100)-((n div 1000)*10)=(n div 10-((n div 100)*10);
end func;
P2:=func(n);
if n in D then
y:= (n div 1000)+((n div 100)-((n div 1000)*10))+((n div 10)-((n div 100)*10)+(n mod 10);
return n mod y=0;
end if;
end func;
P3:=func(n);
```

[4] O comando “a div b” fornece a parte inteira do quociente de a por b.

```
return n div 100=n mod 100;
end func;
(b)
N:={1..100};
D1:={x: x in D | sqrt(x) in N};
D2:= {  };
D3:= { x : x in D | x mod 90 =0};
(c)
exists n in D1 | P1(n);
(d)
for all n in D1 | P1(n);
```

Nesta atividade o aluno pode, por exemplo, coordenar a disjunção de todas as proposições “n é um palíndromo”, onde n pertence a D1, com iterar a função P1 através de D1 e aplicar o quantificador existencial. Este exercício também pode ser visto como facilitador da construção do processo correspondente a uma quantificação simples, a partir o momento em que ele propicia a interiorização da ação de percorrer o conjunto de proposições “n é um palíndromo”, n em D1, e aplicar a quantificação existencial.

III. Problemas nos quais é preciso negar expressões quantificadas podem ajudar a encapsulação de quantificações, como por exemplo os seguintes exercícios:

“Traduza cada uma das seguintes orações para a linguagem matemática ou Isetl, depois formule sua negação e a traduza para a linguagem natural”.

A equação x_ – x – 6 = 0 tem uma solução inteira.

Toda solução da equação x_ – x – 6 = 0 é um inteiro”

“Uma função f tem limite L em c, se para todo número positivo ε existe um número positivo δ tal que se x está no domínio de f e $0<|x–c|< \delta$ então $| f(x) – L |< \varepsilon$. (a) Rescreva esta definição para a função $f(x) = 3x – 5$ e $c = 4$; (b) Negue o enunciado dado como resposta ao item anterior.”

Como já foi mencionado, a encapsulação do processo de quantificação (simples ou dupla) é uma construção que se reveste de muita dificuldade. O objetivo é fazer com que o aluno entenda a quantificação (simples ou dupla) como um objeto e, para alcançar este objetivo, pode-se propor que o estudante realize ações sobre o processo de quantificação. Nos exercícios acima pede-se ao aluno que realize a ação de negar enunciados quantificados.

Conclusão

Uma descrição detalhada de uma implementação da proposta de ensino que foi objeto de estudo deste trabalho, bem como dos instrumentos de avaliação empregados e dos resultados dessa avaliação se encontram em Dubinsky (1997). Neste artigo, o autor conclui que o aluno que vivência a abordagem de ensino sugerida pode desenvolver alguma compreensão de quantificação e a habilidade para trabalhar com este conceito, mesmo quando os problemas são bem mais difíceis. O nosso estudo, que incluiu a avaliação da proposta através da vivência da mesma por uma de suas autoras (Silva, 2001) nos permite também concluir que ela pode levar o aluno a uma melhor compreensão da quantificação do que a que ocorre através do ensino tradicional, no qual esta noção é apreendida quase que sem nenhuma sistematização, ao longo do trabalho com outros conceitos.

Freqüentemente o professor não destina um tempo necessário para a compreensão do conceito de quantificação; possivelmente, por considerá-lo fácil ou intuitivo para o aluno. Quando o estudante se depara com definições ou teoremas e tem dificuldade em compreendê-los, é possível que esta dificuldade seja devida à pouca compreensão acerca da quantificação. Um trabalho específico com orações quantificadas que definem conceitos matemáticos, como o de limite de função, função contínua, supremo de um conjunto e outros, na forma como é sugerido na seqüência aqui estudada, pode levar o aluno a compreender a idéia de quantificação e de conceitos matemáticos que dependem de quantificação, quase que simultaneamente.

A proposta pode parecer, à primeira vista, bastante difícil de ser implementada, devido ao uso da linguagem Isetl. No entanto, pelo que observamos, a dificuldade inicial com a sintaxe dessa linguagem é logo superada, mesmo em se tratando de um aluno sem nenhuma prática anterior com linguagens de programação. Isto se deve possivelmente ao fato da sintaxe Isetl ser bastante semelhante à notação matemática padrão.

A organização das atividades, em “espiral”, é uma das características importantes da seqüência didática estudada. Esta organização é um reflexo do reconhecimento de que não podemos esperar que os alunos aprendam matemática na ordem lógica segundo a qual ela pode ser apresentada. O desenvolvimento da compreensão é altamente não linear, repleto de idas e vindas; o aluno desenvolve uma compreensão parcial, repetidamente retorna a um mesmo aspecto do conhecimento de um tema, e periodicamente sintetiza e correlaciona idéias (Asiala, 1996). Assim o trabalho com um determinado conceito não se esgota em um exercício, no decorrer da seqüência de atividades retorna-se a ele várias vezes, com enfoques diferentes e novos aprofundamentos. Isto faz com que o conhecimento se aperfeiçoe, pois analisar uma mesma idéia de formas diferentes possibilita ao aluno estabelecer relações entre seus diversos significados.

Dubinsky (1997) aponta a necessidade de mais estudos sistemáticos sobre o efeito da seqüência de ensino proposta e sugere questões para pesquisas futuras nessa área, dentre as quais: Será que o aluno que passa por essa abordagem de ensino e apresenta um bom desempenho posterior também faz as construções previstas na análise teórica da aquisição da quantificação que foi utilizada para fundamentar a proposta? Um estudo sobre implicação, seguindo o mesmo modelo do estudo sobre quantificação, pode apontar estratégias pedagógicas que propiciem a superação de dificuldades que muitos alunos têm com o conceito de implicação?

Finalmente, observamos que a literatura sobre quantificação, em nível universitário é bastante reduzida. Uma revisão bibliográfica dessa literatura, em nível pré-universitário, pode ser bastante custosa pois os artigos sobre esse tema se encontram dispersos em publicações de várias áreas: Educação Matemática, Lógica, Lingüística, Ciência da Computação, etc.

Referencias

Asila, M., Brown, A. Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. e Thomas, K. A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. CBMATH 6, MAS/MMA, 1-32,1996.

Dubinsky, E. ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. Communications on Pure and Applied Mathematics, XLVIII, 1027-1051, 1995.

Dubinsky, E. On Learning Quantification. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16(2-3), 335-362, 1997.

Dubinsky, E., Elterman, F. e Gong, C. The Student's Construction of Quantification. For the Learning of Mathematics, 8(2), 44-51, 1988.

Fenton, W. E. e Dubinsky, E. Introduction to Discrete Mathematics with ISETL. Springer-Verlag New York Inc, 1996.

Silva, L.C. Quantificação: Usando a linguagem de programação Isetl para articular teoria e prática. Dissertação de Mestrado, Puc-Rio, 2001.