VII ENEM OFICINA 1 D - 32

Título: TEOREMA DE PITÁGORAS - Uma abordagem enfatizando seu caráter necessário e suficiente.

Irma Verri Bastian*

Saddo Ag Almouloud*

A oficina exposta foi embasada nos resultados da pesquisa de dissertação de mestrado que teve por objetivo analisar o processo de ensino-aprendizagem do Teorema de Pitágoras em alunos de 8ª série do Ensino Fundamental. Qual a causa da dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta tanto na resolução de problemas, como na aprendizagem de outros conceitos?

Na França, Berté (1995) efetuou um levantamento identificando os erros mais freqüentes apresentados pelos alunos na utilização do Teorema. Os erros detectados seriam reflexos da ausência de problematização na abordagem do tema. Com base nos estudos preliminares (estudo do objeto matemático, teste diagnóstico, análise de livros didáticos, das propostas curriculares e dos PCNs), foi possível constatar que os livros didáticos analisados se ocupam em trabalhar a forma do Teorema de Pitágoras, mas omitem a importância de seu caráter necessário e suficiente. Dos estudos preliminares surgiu, também, a questão da pesquisa: até que ponto esse tipo de abordagem interfere na compreensão do significado do Teorema pelos alunos e na sua posterior recontextualização como ferramenta? Os tipos de erro observados decorrem da abordagem e/ou se constituem numa dificuldade, de caráter mais geral, relativa à apreensão da figura? Com base nos registros de representação semiótica (R. Duval, 1995), foi colocado, então, como objetivo de trabalho a elaboração de uma seqüência didática em duas fases: realização de atividades que permitissem ao aluno conjeturar a existência da relação pitagórica, seu caráter necessário/suficiente e a forma dessa relação; atividades de complexidade crescente com o intuito de desenvolver condições para o emprego

* Rua José Marti,70 CEP 04291-010 São Paulo Tel. (11) 276-5946

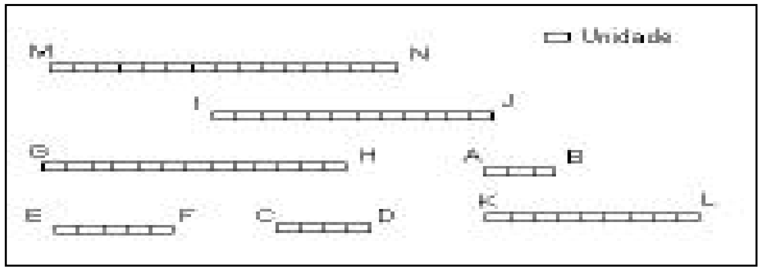
* Rua Marquês de Paranaguá, 111 CEP 01303-050 São Paulo Tel. (11) 256-1622
e- mail:saddoag@pucsp.br

adequado do Teorema. Ao todo, somaram-se vinte atividades. Durante a oficina 1D-32 foram desenvolvidas e discutidas algumas dessas atividades, enfatizando o caráter necessário e suficiente do Teorema de Pitágoras.

Atividade 1 (composta de três etapas)

Objetivo: estabelecer a condição de existência de triângulo.

(I) São dadas as varetas:



a) Usando três delas de cada vez, tente construir triângulos.

b) Descreva, por meio de uma terna, as medidas dos lados dos triângulos que você conseguiu formar. Assim: (..., ..., ...)

c) Sempre que você pegou 3 varetas foi possível construir um triângulo? Explique o que aconteceu.

Objetivo neste item: fazer com que o aluno perceba que, dadas três medidas, nem sempre é possível construir um triângulo cujos lados tenham essas medidas.

Com sete varetas existem 35 combinações possíveis (de 7 objetos 3 a 3), de que resultarão 3 triângulos retângulos, 10 obtusângulos e 3 acutângulos; 19 não formarão triângulo.

Material didático empregado

- Conjuntos de varetas confeccionadas a partir de palitos de madeira (usados para algodão-doce), graduados com unidade de aproximadamente 2 cm.
- Conjunto de varetas com dimensões ampliadas para uso eventual na aplicação da seqüência, se necessário, a fim de esclarecer possíveis dúvidas.

(II) a) Escreva as ternas com as quais você não conseguiu formar triângulo.

b) Você é capaz de escrever, com suas palavras, o que precisa acontecer para que exista triângulo? Que relação deve haver entre essas três medidas?

Objetivo neste item: chegar à forma da condição de existência de triângulo.

(III) Agora, são dadas as ternas, sem as varetas:

(8, 10, 8), (5, 5,5), (0,8; 1,5; 2,3), (2,5; 4,5; 3,5) e (4,3; 5,2; 9,8)

a) Com quais dessas ternas é possível construir triângulos?

b) Agora é sua vez! Invente três ternas com as quais você pode construir triângulos e três ternas "que não vão dar certo".

Objetivo neste item: descontextualizarão da condição de existência de triângulo.

Algumas das ternas dadas apresentam números decimais, para permitir ao aluno entender que a condição de existência de triângulo vale também para medidas expressas por esse tipo de número. Neste estágio foi feita a institucionalização da condição de existência de triângulo.

Atividade 2: condição para o triângulo retângulo

Parte I ***Considerando as varetas da Atividade 1:***

a) Você construiu que tipo de triângulo? Acutângulos, retângulos, obtusângulos?

b) Quais as ternas correspondentes aos triângulos retângulos que você construiu?

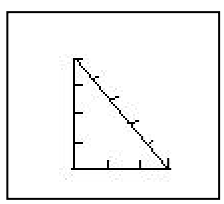
c) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo com um cateto IJ?

d) Com quais varetas se pode fazer um triângulo retângulo de catetos AB e CD?

e) E, se for: hipotenusa MN e um cateto IJ?

f) Usando a "Condição de Existência de Triângulo", você consegue "prever" se o triângulo será retângulo ou não?

Parte II Os antigos egípcios, para construir ângulos retos, utilizavam cordas com nós, da seguinte maneira:



É o chamado "esquadro egípcio". Eles já sabiam que o triângulo de lados medindo (3,4,5) é retângulo.

a) Será que o ângulo reto surge do fato desta "terna" ser formada por números naturais consecutivos? Para verificar isso, desenhe, utilizando régua e compasso, triângulos cujos lados tenham como medidas números consecutivos. Por exemplo: (2, 3, 4) (4, 5, 6) (6, 7, 8) (1, 2, 3).

b) A que conclusão você chegou?

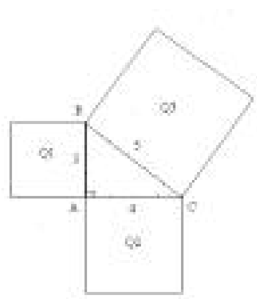
c) ***Desenhe, agora, triângulos a partir das ternas: (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15). Esses triângulos são retângulos?***

d) ***Resuma as conclusões a que você chegou em b) e c).***

Atividade 3: conjeturando uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

Não sendo a "Condição de Existência de Triângulo" suficiente para garantir que o triângulo seja retângulo, então qual relação deve existir entre as medidas dos lados para que isso aconteça?

Voltando à terna egípcia (3, 4, 5), construa quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo, como mostra a figura:



a) ***Calcule a área de cada quadrado.***

b) ***Faça o mesmo para as ternas do item c) da Atividade 2, isto é, (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15).***

c) ***Preencha a tabela seguinte:***

			Área dos quadrados		
Cateto b	**Cateto c**	**Hipot. a**	**Q1**	**Q2**	**Q3**
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

c) ***Compare as áreas de Q1 e Q2 com a de Q3. O que você observou? Tente escrever uma relação entre elas. Deduza uma relação entre os lados do triângulo.***

d) ***Será que essa relação vale para qualquer triângulo? Experimente usá-la para ternas correspondentes a triângulos acutângulos ou obtusângulos.***

Atividade 4: relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

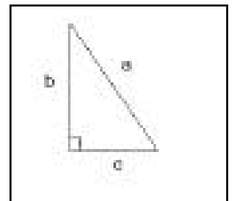
Verificamos para alguns triângulos, cujos lados tinham como medidas números inteiros, que, para dar origem a um triângulo retângulo, uma relação

deveria ocorrer entre essas medidas. Mas, no caso de medidas quaisquer dadas por números não inteiros, será que ela vai continuar valendo?

a) Desenhe e recorte um triângulo retângulo <u>qualquer</u>. A seguir, recorte mais 7 triângulos "idênticos" a esse. Não se preocupe em medir os lados.

b) Desenhe e recorte agora:

- ***um quadrado de lado a (pinte de amarelo)***
- ***um quadrado de lado b (pinte de verde)***
- ***um quadrado de lado c (pinte de azul)***



c) Como se fosse um "quebra-cabeças" monte:

▪ ***um "quadradão" (configuração 1) usando 4 triângulos e o quadrado amarelo, isto é, o quadrado de lado a.***

▪ ***outro "quadradão" (configuração 2) usando 4 triângulos e os quadrados verde e azul, respectivamente de lados b e c.***

d) O que se pode dizer das áreas dos dois quadradões?

e) Se retirarmos de cada "quadradão" os 4 triângulos, qual a área da figura que sobra?

f) Que se pode dizer, então, das áreas das figuras restantes em cada "quadradão"? Isto é, que relação existe entre elas? Que relação existe entre os lados do triângulo?

Atividade 5: determinando uma relação algébrica entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo

a) Escreva a área do "quadradão" da config.1, em função das áreas do quadrado nele contido e dos 4 triângulos.

b) Faça o mesmo para a config.2.

c) Que relação matemática existe entre as áreas dos "quadradões" das configurações 1 e 2? Deduza uma relação entre a, b e c.

Atividade 6: sobre a relação pitagórica

Agora você já sabe que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse teorema já era conhecido pelos babilônios e egípcios, mas foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo rigorosamente. Daí o nome Teorema de Pitágoras.

a) Explique, com suas palavras, qual a vantagem de se saber o Teorema de Pitágoras, no que se refere à resolução de problemas envolvendo triângulos

retângulos. Em outras palavras, o que ele permite calcular e o que deve ser dado, para isso, no problema.

b) ***Invente quatro exemplos de problemas, em cujas resoluções você utiliza o teorema de Pitágoras.***

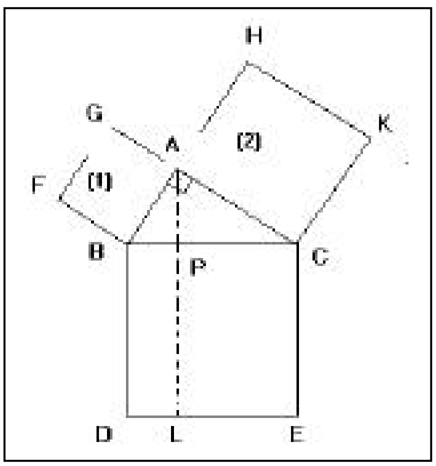
Atividade 7: uma outra relação métrica no triângulo retângulo

Em sua obra "Elementos", considerada por muitos historiadores a mais importante da Geometria de toda a História da Matemática, Euclides, que viveu no ano 300 a.C, demonstrou o Teorema de Pitágoras de um modo muito diferente. Ele provou que:

I. ***O quadrado (1), ABFG, tem a mesma área do retângulo BPLD.***

II. ***O quadrado (2), AHKC, tem a mesma área do retângulo PCEL.***

Como a área do quadrado BCED é a soma das áreas desses retângulos, ele concluiu que a área do BCED é a soma das áreas dos quadrados (1) e (2).

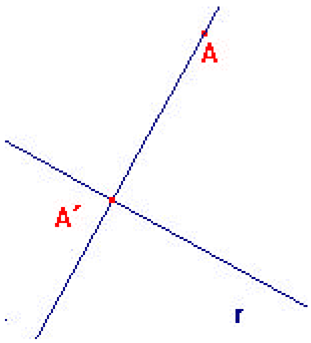


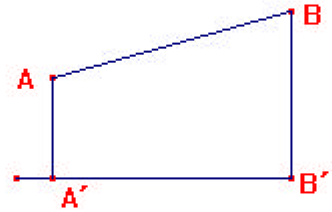
a) ***Chamando: AB = c, BC = a, AC = b, BP = m, CP = n, você consegue "traduzir" matematicamente os resultados (I) e (II) acima?***

b) Quando, de um ponto A, se traça a perpendicular sobre uma reta r, o ponto A', intersecção dessa perpendicular com r, é denominado projeção ortogonal de A sobre r, para ***obter a projeção ortogonal de um segmento, sobre uma reta, basta projetar sobre ela os extremos do segmento.***

c) ***Usando esta nomenclatura, o que se pode dizer dos segmentos BP e CP em relação à reta BC?***

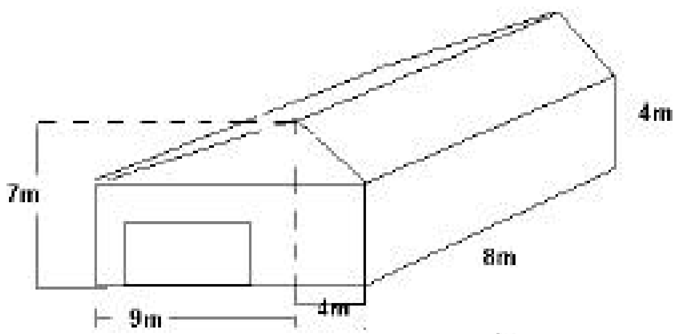
d) Como ficam, levando em conta o item c), os resultados (I) e (II)?





Atividade 8: exercitando a apreensão operatória

Qual a área do telhado desse galpão?

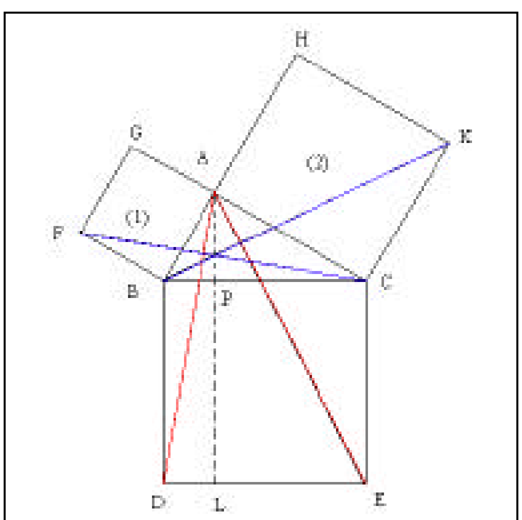


APÊNDICE – algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

I) Demonstração de Euclides, do livro Elementos, 300 a.C., Proposição 47I

A figura utilizada por Euclides é, às vezes, descrita como “moinho de vento”, “cauda de pavão” ou “cadeira de noiva”.

I) Seja ABC um triângulo retângulo em A.



Constrói-se, sobre o lado $\overline{BC}$, o quadrado BDEC, e sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, os quadrados BAGF e CAHK, respectivamente.

Traça-se $\overline{AL} // \overline{BD}$

ΔABD ΔFBC (caso L.A.L), pois AB = FB e BD = BC (lados de um quadrado) e m $(F\hat{B}C)$ = m $(A\hat{B}D)$

II) Chamando de A1 a área do quadrado 1 e de A2 a do quadrado 2, tem-se:

$$A1 = 2.\ \text{área (FBC) pois área (FBC)} = \frac{FB.FG}{2} = \frac{c^2}{2}$$

A1 = 2área (ABD), pois os dois triângulos são congruentes.

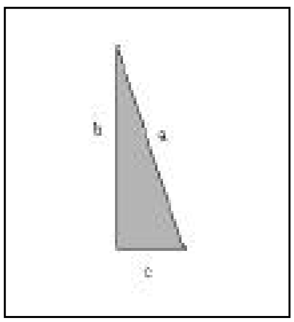
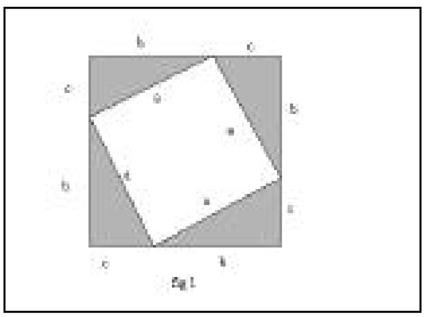
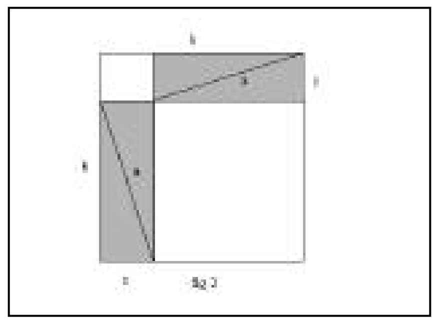
III) Mas: $\text{área (ABD)} = \dfrac{BD.DL}{2} = \dfrac{\text{área(BPLD)}}{2}$

Então: $A1 = c^2 = 2\text{área (FBC)} = \text{área (BPLD)}$

Analogamente: $A2 = b^2 = 2\text{área (BCK)} = \text{área (HCEL)}$

IV) Portanto, a área do quadrado (BCED), formado pelos retângulos (BPLD) e (PCEL), é igual à soma das áreas $b^2 + c^2$, logo, $a^2 = b^2 + c^2$.

II) Demonstração hindu

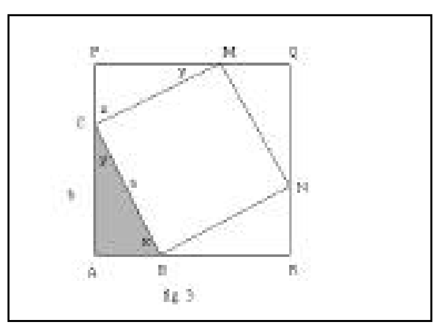




Retirando-se os quatro triângulos hachurados de cada uma das figuras obtêm-se:

na Fig. 1, um quadrado de lado a e na Fig. 2, um quadrado de lado b e um quadrado de lado c.

Em outras palavras, o complementar dos quatros triângulos, na Fig. 1, é o quadrado que tem como lado a hipotenusa do triângulo retângulo. Reconfigurando-se de modo conveniente os quatro triângulos, o complementar deles, em relação ao quadrado maior, é a reunião dos quadrados cujos lados são os catetos.

Logo, a área do quadrado de lado a é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c, ou seja: $a^2 = b^2 + c^2$



Algebricamente:

para a Fig. 1: $(b + c)^2 = a^2 + 4\dfrac{bc}{2}$

para a Fig. 2: $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 4\dfrac{bc}{2}$

$$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Rigorosamente, o que ocorre é o seguinte (Fig. 3):

a partir do triângulo ABC, retângulo em A, traça-se o quadrado APQR, tomando

PC = MQ = NR = AB e

PM = QN = BR = AC.

Quando os quatro triângulos retângulos, que têm respectivamente as mesmas medidas para os catetos, são “recortados”, está sendo admitido implicitamente o fato de que as hipotenusas e os ângulos agudos têm também, respectivamente, as mesmas medidas, pois os triângulos são os mesmos.

É necessário utilizar o caso L.A.L. de congruência de triângulos para justificar que BCMN é um quadrado. Em detalhes:

Δ ABC Δ PCM Δ QMN Δ RNB

Então CM = MN = NB = BC;

Resta mostrar que os ângulos do quadrilátero BCMN são retos.

Das congruências do item anterior, decorrem:

$m(P\hat{C}M) = x$ e $m(P\hat{M}C) = y$

Mas $x + m(M\hat{C}B) + y = 180°$ (formam um ângulo raso)

Como $x + y = 90º$, segue-se que $M\hat{C}B$ é reto (analogamente para os outros triângulos).

Bibliografia

BASTIAN, I. V. 2000. “O Teorema de Pitágoras”. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, PUC- SP.