Descobertas por Analogia: O Caso das Funções Hiperbólicas e dos Números Perplexos

José Carlos Cifuentes

Departamento de Matemática e

Programa de Pós-Graduação em Educação

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Este trabalho tem uma dupla finalidade:

a) Mostrar como é possível desenvolver pesquisa original em nível de Iniciação Científica em Matemática, tanto no Bacharelado como na Licenciatura.

A **originalidade** numa pesquisa pode manifestar-se na elaboração de conhecimentos novos ou na apresentação de conhecimentos velhos a partir de novos enfoques, neste último caso com conseqüências pedagógicas relevantes.

b) Desenvolver, através de um exemplo concreto, uma metodologia de ensino da matemática, em nível de terceiro grau, baseado no raciocínio por analogia como técnica de descoberta, visando a educação da intuição matemática.

É bem sabido que a demonstração matemática, baseada no **raciocínio lógico-dedutivo**, não é o único meio de atingir o conhecimento matemático. De fato, ela não é um mecanismo de descobertas.

Por outro lado, a **analogia** não é um meio de prova, mas é um fator de invenção e tem valor de argumento enquanto permite a **formulação de hipóteses**.

A analogia, segundo Perelman, é uma similitude de estruturas do tipo: **A está para B como C está para D**. É uma espécie de proporção, não entre números senão entre conceitos.

A parte conhecida “C está para D” será chamada de **foro**, enquanto que a parte desconhecida “A está para B” de **tema**.

Em situações análogas aparecem **termos homólogos** que permitirão a **formulação de hipóteses** no tema por analogia com o que acontece no foro.

Nesse trabalho foi escolhido, como exemplo ilustrativo, um problema no âmbito da trigonometria plana, mais ainda, no âmbito dos **fundamentos da trigonometria**.

O Problema

O problema consiste em esclarecer a **relação de analogia** que existe entre as **funções trigonométricas**, que chamaremos de circulares, e as **funções hiperbólicas**, e achar para estas últimas o sistema de números, os **números perplexos**, correspondente aos **números complexos** do caso trigonométrico.

Em termos de tema e foro, o nosso problema consiste em:

descobrir o sistema de números que está para as funções hiperbólicas como os números complexos estão para as funções trigonométricas circulares.

Veremos que o novo sistema de números, os **números perplexos**, representam uma nova **estrutura algébrica do plano**, que não será mais euclidiano, onde as funções hiperbólicas constituem a sua “trigonometria”. Portanto, a trigonometria do plano dependerá de sua estrutura algébrica.

Etapas da Pesquisa

O processo da análise e solução do nosso problema tem varias etapas:

1. ***A discussão do foro, no nosso caso, a discussão dos números complexos e sua relação com as funções circulares.***
2. ***A definição do contexto no qual o tema será desenvolvido, através da explicitação das analogias, e a criação de termos homólogos.***
3. ***A descoberta por analogia de novos fenômenos, ou novos enfoques, em ambos os contextos análogos*** (por vezes, devido à ação do tema sobre o foro, certos elementos deste são modificados).
4. ***A generalização e a descoberta de novos casos.***

Podemos **caracterizar duas situações como análogas se elas tiverem uma generalização comum**, a qual explicará a simetria entre tema e foro.

Para Perelman, a **superação da analogia** será feita ao se mostrar que tema e foro dependem de um princípio comum, o qual poderá ser concebido como uma essência da qual tema e foro seriam manifestações. Mais ainda, é sempre possível que esse princípio comum tenha outras manifestações não contempladas originalmente.

5. A procura de aplicações.

Veremos que os números perplexos permitirão uma interpretação interessante das **transformações de Lorentz** da teoria da relatividade em Física.

Discussão do Foro: Os números Complexos e as Funções Circulares

Os Números Complexos

Numa reconstrução racional dos números complexos, podemos pensar que foram criados com o intuito de dar solução a equações como $x^2 + 1 = 0$ ou, em geral, $\boldsymbol{A}x^2 + \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{C} = 0$ com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ números reais e $\boldsymbol{A} \neq 0$, quando não as tinham no campo real **R** (o fato histórico é outro). Eles aparecem, segundo a fórmula de Bháskara, na forma

$$\mathbf{x} = -\boldsymbol{B}/2\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{i}(4\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{B}^2)^{1/2}/2\boldsymbol{A},$$

quando $\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC} < 0$, sendo $\boldsymbol{i}$ um “objeto” tal que $\boldsymbol{i}^2 = -1$, isto é, $\boldsymbol{i}$ é solução de $x^2 + 1 = 0$. Assim, os números complexos são objetos da forma $\mathbf{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais e $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

O Plano de Gauss

Um fato importante, do ponto de vista geométrico, é que os números complexos não podem ser colocados sobre a reta numérica de forma a ampliá-la.

Os números complexos são **bidimensionais**, isto é, só podem ser colocados no plano, pois eles se comportam como pares ordenados. Vejamos:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{id} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}) \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})^2 = -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d})^2 \;\Leftrightarrow$$

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \text{ e } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}).$$

Denota-se com **C** o plano dos números complexos, o qual é chamado também de **Plano Complexo** ou **Plano de Gauss.**

Surge uma Questão

Será que os números complexos permitem também encontrar as soluções de equações da forma $\boldsymbol{A}x^2 + \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{C} = 0$ com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ **C** e $\boldsymbol{A} \neq 0$?

Para que a fórmula de Bháskara possa ser aplicada nesse caso, é necessário que os números complexos possam ser somados subtraídos, multiplicados e divididos, e também tenham uma raíz quadrada em **C**. A condição de ser $\boldsymbol{A} \neq 0$ é para garantir que se possa dividir por $\boldsymbol{A}$, o que equivale a multiplicar pelo inverso $\boldsymbol{A}^{-1}$ de $\boldsymbol{A}$.

As **operações elementares** em **C** são definidas da seguinte maneira:

$(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) \pm (\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d})$

$(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})$

$(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})/(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d})^{-1}$ onde

$(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d})^{-1} = (\boldsymbol{c} - i\boldsymbol{d})/(\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{d}^2)$.

De fato, a forma de $(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d})^{-1}$ resulta de exigir que $(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c} + i\boldsymbol{d})^{-1} = 1$.

É conveniente, do ponto de vista metodológico, definir os conceitos de **conjugado** e **norma** de um número complexo $z = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ sugeridos pela forma do seu inverso:

$$\mathbf{z^* = \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}} \text{ e } \eta(\mathbf{z}) = |\mathbf{z}|^2 = \mathbf{zz^*} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$$

de modo que $\mathbf{z^{-1} = z^*/\eta(z)}$. Observa-se que z^{-1} existe se e só se $\eta(z) \neq 0$ o qual ocorre se e só se $z \neq 0$. Além disso, $\eta(z) \geq 0$ para todo z.

Existência da Raiz Quadrada

Se $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ é um número complexo, então, uma **raiz quadrada** dele é um outro complexo $x + \boldsymbol{i}y$ tal que $(x + \boldsymbol{i}y)^2 = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$. Donde resulta que $(x^2 - y^2) + 2xy\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, isto é,

$$x^2 - y^2 = \boldsymbol{a}$$

e

$$2xy = \boldsymbol{b}.$$

Por argumentos de geometria analítica prova-se que essas curvas (hipérboles, se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ forem não nulos) sempre têm interseção. Portanto, sempre existe a raiz quadrada em **C**, o que implica que equações de grau 2 com coeficientes complexos sempre têm solução complexa.

Relações com a Trigonometria

Se pretendermos obter a **raiz cúbica** de um número complexo $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, deveremos solucionar a equação $(x + \boldsymbol{i}y)^3 = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, isto é, $(x^3 - 3xy^2) + \boldsymbol{i}(3x^2y - y^3) = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, ou seja:

$$x^3 - 3xy^2 = \boldsymbol{a}$$

$$\text{e}$$
$$3x^2y - y^3 = \boldsymbol{b}.$$

Não é fácil saber se esse sistema de equações tem solução para quaisquer valores ***a*** e ***b***, no entanto, uma **observação** importante pode ser feita: o membro esquerdo dessas equações tem a forma da expressão do cosseno e seno do ângulo triplo. Vejamos:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$$
$$\text{e}$$
$$\text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta.$$

Portanto, a menos de uma “normalização” dos valores de ***a*** e ***b***, existe um ângulo θ tal que $x = \cos\theta$ e $y = \text{sen}\,\theta$.

Observa-se que as equações que permitem obter a raiz quadrada tem a forma do cosseno e seno do ângulo duplo. Em geral, pode-se **intuir** que a obtenção da raiz ***n***-ésima de um número complexo está relacionada com as fórmulas do cosseno e seno do ângulo múltiplo $\boldsymbol{n}\theta$.

Forma Polar de um Número Complexo

A discussão anterior pode ser fundamentada teoricamente a partir da discussão da parametrização da circunferência:

Dado $z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib} \neq 0$, isto é, com $\eta(z) \neq 0$, existe uma única circunferência centrada na origem e de raio $\boldsymbol{r} = \eta(z)^{1/2}$ passando por z. Os pontos w dessa circunferência podem ser parametrizados mediante:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{r}\,(\mathbf{cos}\,\theta + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sen}\,\theta),$$

sendo $\boldsymbol{r}^2 = \eta(w) = \eta(z)$ e θ o ângulo de w a respeito do eixo x positivo.

Chamando de $\boldsymbol{E}(\theta) = \mathbf{cos}\,\theta + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sen}\,\theta$, temos as seguintes **fórmulas de De Moivre**:

$$\boldsymbol{E}(\theta)^* = \boldsymbol{E}(-\theta) \text{ e } \boldsymbol{E}(\theta)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}\theta) \text{ para todo } \boldsymbol{n} \geq 0.$$

Observa-se, também, que $\eta(\boldsymbol{E}(\theta)) = 1$ para qualquer θ.

Forma Exponencial e Fórmulas de Euler

Usando noções de cálculo diferencial e integral pode-se deduzir que $d\boldsymbol{E}(\theta)/d\theta = \boldsymbol{iE}(\theta)$, donde $d\boldsymbol{E}(\theta)/\boldsymbol{E}(\theta) = \boldsymbol{i}d\theta$, portanto, $\int d\boldsymbol{E}(\theta)/\boldsymbol{E}(\theta) = \boldsymbol{i}\int d\theta$, isto é, $\boldsymbol{ln}\ \boldsymbol{E}(\theta) = \boldsymbol{i}\theta + \boldsymbol{k}$, dai, $\boldsymbol{E}(\theta) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta + \boldsymbol{k}}$. Finalmente, como $\boldsymbol{E}(0) = 1$, temos que $\boldsymbol{k} = 0$, donde $\boldsymbol{E}(\theta) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}$.

Podemos expressar, então, qualquer número complexo w em forma exponencial da seguinte maneira:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta}$$

sendo $\boldsymbol{r}^2 = \eta(w)$ e θ o ângulo de w a respeito do eixo x positivo.

Resumindo, temos $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\text{sen}\,\theta$ e $\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta} = \cos\theta - \boldsymbol{i}\,\text{sen}\,\theta$, donde resultam as chamadas **fórmulas de Euler**:

$$\mathbf{cos}\,\theta = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta})\ /\ 2 \ \text{ e } \ \mathbf{sen}\,\theta = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\theta} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{i}\theta})\ /\ 2\boldsymbol{i}.$$

Essas fórmulas permitem expressar as funções circulares reais cosseno e seno em termos de números complexos permitindo uma grande **síntese**.

As Funções Hiperbólicas e Explicitação das Analogias

As funções cosseno e seno hiperbólicas são definidas classicamente a partir da função exponencial real da seguinte maneira:

$$\mathbf{cosh\ x = (\mathit{e}^x + \mathit{e}^{-x}) / 2}\ (> 0) \text{ e } \mathbf{senh\ x = (\mathit{e}^x - \mathit{e}^{-x}) / 2}.$$

Observa-se imediatamente a analogia com as fórmulas de Euler para o cosseno e seno circulares. De fato, as fórmulas de Euler permitem estender as funções circulares reais para valores complexos da variável independente: $\boldsymbol{e}^z = \boldsymbol{e}^x(\cos y + \boldsymbol{i} \text{ sen } y)$.

Assim, da comparação entre os casos circular e hiperbólico resultam as seguintes identidades:

$$\mathbf{cosh\ x = cos\ \mathit{i}x} \text{ e } \mathbf{senh\ x = -\mathit{i}sen\ \mathit{i}x}.$$

A partir daí podem ser demonstradas muitas propriedades dessas funções, e a seguir mostraremos algumas dessas propriedades em comparação com o caso das funções circulares, explicitando algumas analogias, as quais manifestam-se apenas numa diferença de sinal, como veremos.

Identidade Fundamental

$$\cos^2 x - [-1]\text{sen}^2 x = 1 \quad \text{e} \quad \cosh^2 x - [1]\text{senh}^2 x = 1.$$

Paridade

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{e} \quad \cosh(-x) = \cosh x,$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x \quad \text{e} \quad \text{senh}(-x) = -\text{senh } x.$$

Fórmulas da Adição

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y + [-1]\text{sen } x \text{ sen } y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + [1]\text{senh } x \text{ senh } y;$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y,$$

$$\text{senh}(x + y) = \text{senh } x \cosh y + \cosh x \text{ senh } y.$$

Fórmulas do “Ângulo” Duplo

$$\cos 2x = \cos^2 x + [-1]\text{sen}^2 x \quad \text{e} \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + [1]\text{senh}^2 x,$$

$$\text{sen } 2x = 2\text{sen } x \cos x \quad \text{e} \quad \text{senh } 2x = 2\text{senh } x \cosh x.$$

Derivadas

$$D\cos x = [-1]\text{sen } x \quad \text{e} \quad D\cosh x = [1]\text{senh } x,$$

$$D\text{sen } x = \cos x \quad \text{e} \quad D\text{senh } x = \cosh x.$$

Outras Funções

$$\tan x = \text{sen } x / \cos x \quad \text{e} \quad \tanh x = \text{senh } x / \cosh x;$$

$$\tan(x + y) = (\tan x + \tan y) / (1 + [-1]\tan x \tan y)$$

$$\tanh(x + y) = (\tanh x + \tanh y) / (1 + [1]\tanh x \tanh y).$$

Rumo aos Números Perplexos

A analogia dada pelas fórmulas $\cosh x = \cos \boldsymbol{i}x$ e $\operatorname{senh} x = -\boldsymbol{i}\operatorname{sen} \boldsymbol{i}x$ parece explicar a diferença de sinal nas expressões dadas acima. No entanto, as fórmulas de Euler e as definições das funções hiperbólicas sugerem uma **analogia mais profunda**: ***a existência de uma "trigonometria" diferente da circular euclidiana relacionada com um sistema de números análogo aos complexos***.

Como definir esse novo sistema de números?

Sabe-se que ***i*** é a unidade imaginária dos números complexos cujo quadrado é $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Essa observação e o aparecimento de 1, ao invés de –1, nas fórmulas hiperbólicas anteriores sugere "redefinir" o plano complexo **C** tomando como unidade imaginária um elemento ***j*** cujo quadrado seja $\boldsymbol{j}^2 = 1$. O novo plano, que chamaremos de **plano perplexo** ou **hiperbólico H**, tem elementos da forma $z = x + \boldsymbol{j}y$ com $\boldsymbol{j}^2 = 1$ e, portanto, a seguinte multiplicação:

$$(x_1 + \boldsymbol{j}y_1)(x_2 + \boldsymbol{j}y_2) = (x_1x_2 + [1]y_1y_2) + \boldsymbol{j}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Tais elementos serão chamados de **números perplexos.** Observa-se que a multiplicação do plano complexo pode ser expressa como:

$$(x_1+\boldsymbol{i}y_1)(x_2+\boldsymbol{i}y_2) = (x_1x_2 + [-1]y_1y_2) + \boldsymbol{i}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Plano Complexo × Plano Perplexo

A partir dai se faz um estudo do plano hiperbólico **H** por analogia com o plano complexo **C** traduzindo diversos conceitos ou definindo os respectivos homólogos, como **conjugado**, $(x + \boldsymbol{j}y)^* = x - \boldsymbol{j}y$, e **norma**, $\eta(x + \boldsymbol{j}y) = zz^* = x^2 - y^2$.

Nesse estudo comparativo obtemos os seguintes resultados, dentre outros:

1. O novo produto, em analogia com o produto complexo, é associativo, comutativo e distributivo a respeito da soma de $\mathbf{R}^2$. No entanto, o produto de **H** admite **divisores de zero**, isto é, elementos não nulos tais que o produto com algum outro elemento não nulo é nulo. Por exemplo, $(1 + \boldsymbol{j})(1 - \boldsymbol{j}) = 0$. Isso

implica que nem todo elemento não-nulo tem inverso, ou seja, nem sempre é possível dividir por um elemento não nulo. Portanto, **H** não é um corpo, nem mesmo um domínio de integridade.

Em **H**, em completa analogia com o caso de **C** (substituindo conjugado e norma correspondentes), temos

2. z tem inverso $\Leftrightarrow$ $\eta(z) \neq 0$, nesse caso, $z^{-1} = z^* / \eta(z)$.

z é divisor de zero $\Leftrightarrow$ $\eta(z) = 0$.

Observe que $\eta(x + \boldsymbol{j}y) = 0$ representa, no plano **H**, as duas retas diagonais $y = x$ e $y = -x$.

3. Lei do Paralelogramo:

$$\eta(z_1 + z_2) + \eta(z_1 - z_2) = 2(\eta(z_1) + \eta(z_2)).$$

4. Como no caso complexo, $\boldsymbol{\eta(zw) = \eta(z)\,\eta(w)}$. Portanto, se z é divisor de zero, então, zw também o será para qualquer w em **H**.

5. Do ponto de vista algébrico, como já vimos, o plano **H** não é um corpo, portanto, o **anel de polinômios com coeficientes em H** não tem de ser de **fatoração única** nem tem de satisfazer o **teorema fundamental da Álgebra**.

Por outro lado, como o corpo dos números reais **R** pode ser considerado comum tanto a **C** como a **H**, podem ser estudados em ambos os planos o comportamento dos polinômios com coeficientes reais. De fato, observam-se os seguintes fenômenos: por exemplo, o polinômio $x^2 - 1$ tem, em **H**, as raízes 1, –1, ***j*** e –***j***, no entanto, ele não se fatora, como seria de esperar, da seguinte maneira $(x - 1)(x + 1)(x - \boldsymbol{j})(x + \boldsymbol{j})$; ele admite duas fatorações diferentes: $(x - 1)(x + 1)$ e $(x - \boldsymbol{j})(x + \boldsymbol{j})$.

6. Equações de 1° grau já apresentam diferenças na sua solução. Assim, por exemplo, se $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{B}$, com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ **H**, e $\boldsymbol{A}$ tem inverso, isto é $\eta(\boldsymbol{A}) \neq 0$, então, a equação tem solução única dada por $x = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$. No entanto, se $\boldsymbol{A}$ é divisor de zero, isto é, $\eta(\boldsymbol{A}) = 0$, então, a equação só terá solução se $\boldsymbol{B}$ for divisor de zero e, nesse caso, terá infinitas.

Em geral, uma equação de 2º grau da forma $\boldsymbol{A}x^2 + \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{C} = 0$ com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ reais e $\boldsymbol{A} \neq 0$, admite as seguintes raízes: definindo o discriminante $D = \boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC}$,

i) se $D < 0$, então, a equação tem, em **C**, as duas raízes complexas conjugadas usuais, dadas pela fórmula de Bháskara,

ii) se $D = 0$, então, a equação tem uma única raiz real dupla, como usual,

iii) se $D > 0$, então, a equação tem as duas raízes reais distintas usuais, dadas pela fórmula de Bháskara, mais duas raízes perplexas dadas por

$$\mathbf{x = [-\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{j}\, (\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC})^{1/2}] / 2\boldsymbol{A}},$$

a que chamaremos de **fórmula modificada de Bháskara!**

Por exemplo, a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ tem como soluções em **H**: $x = (4 \pm 2) / 2 = 2 \pm 1$ e $x = (4 \pm 2\boldsymbol{j}) / 2 = 2 \pm \boldsymbol{j}$, isto é, $x = 1$, 3, $2 + \boldsymbol{j}$ e $2 - \boldsymbol{j}$.

No caso de termos uma equação de 2º grau cujos coeficientes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, e $\boldsymbol{C}$ são números perplexos, podemos proceder da seguinte maneira: multiplicando por $\boldsymbol{A}$ expressamos a equação na forma

$$(\boldsymbol{A}x)^2 + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}x) + \boldsymbol{AC} = 0.$$

As propriedades algébricas de **H** nos permitem, como no caso complexo, obter $\boldsymbol{A}x = [-\boldsymbol{B} \pm (\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC})^{1/2}] / 2$.

Se o segundo membro é um número perplexo, então, a equação fica reduzida a uma de 1º grau, onde a solução definitiva dependerá de $\boldsymbol{A}$ ser ou não um divisor de zero. Porém, para garantir que o segundo membro é um número perplexo falta analisar a possibilidade de o termo $\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{AC}$ ter raiz quadrada em **H**.

Como no caso complexo, vejamos se a equação $(x + \boldsymbol{j}y)^2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$ tem solução. Isso equivale a $(x^2 + y^2) + 2xy\boldsymbol{j} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$, ou seja,

$$x^2 + y^2 = \boldsymbol{a}$$

e

$$2xy = \boldsymbol{b}.$$

Do ponto de vista da geometria analítica, dependendo dos valores de ***a*** e ***b***, o problema consiste em encontrar a interseção de uma circunferência com uma hipérbole, a qual nem sempre existe.

Se ***a*** < 0 ou ***a*** = 0 e ***b*** ≠ 0, não há solução. Se ***a*** ≥ 0 e ***b*** = 0, então, as soluções são $\pm\sqrt{\boldsymbol{a}}$ e $\pm j\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Finalmente, se ***a*** > 0 e ***b*** ≠ 0, então, haverá quatro, duas ou nenhuma raiz quadrada dependendo das interseções possíveis.

Por exemplo, para a equação $z^2 - (2 + 2\boldsymbol{j})z + (3 + 2\boldsymbol{j}) = 0$, o discriminante é $D = -4$, logo, a equação não tem solução (nem em **C**!!). Para a equação $z^2 + (2 + 3j)z + (3 + 2\boldsymbol{j}) = 0$, $D = 1 + 4\boldsymbol{j}$, logo, como não há interseção entre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e a hipérbole $2xy = 4$, D não tem raiz quadrada e a equação dada não tem solução.

Forma Hiperbólica de um Número Perplexo

Em analogia com o caso complexo, podemos obter uma representação hiperbólica dos números perplexos a partir da discussão da parametrização da hipérbole:

Dado $z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{b}$ com $\eta(z) \neq 0$, existe uma única hipérbole equilátera, isto é, cujas assíntotas são as retas diagonais, centrada na origem, de raio (vértice) $\boldsymbol{r}$ = ô η(z)ô $^{1/2}$ e passando por z.

A diferença do caso complexo, a parametrização dessa hipérbole deve ser analisada em quatro casos, determinando quatro regiões.

Caso I: $\eta(z) > 0$ e $x > 0$.

Nesse caso, os pontos w desse ramo de hipérbole podem ser parametrizados mediante:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{r}\ (\cosh\theta + \boldsymbol{j}\ \mathrm{senh}\ \theta),$$

sendo $\boldsymbol{r}$ = ô η(w)ô $^{1/2}$ = ô η(z)ô $^{1/2}$ e θ um “ângulo” hiperbólico cuja interpretação veremos depois.

Chamando de $\boldsymbol{H}(\theta) = \cosh\theta + \boldsymbol{j}\ \mathrm{senh}\ \theta$, temos que, no caso I, $\mathbf{w} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(\theta)$.

Por outro lado, as seguintes **fórmulas de De Moivre**, em analogia com o caso complexo, são também válidas:

$$\boldsymbol{H}(\theta)^* = \boldsymbol{H}(-\theta) \text{ e } \boldsymbol{H}(\theta)^n = \boldsymbol{H}(n\theta) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Observa-se, também, que $\eta(\boldsymbol{H}(\theta)) = 1$ para qualquer θ.

Caso II: $\eta(z) > 0$ e $x < 0$.

Nesse caso, $w = \boldsymbol{r}(-\cosh\theta + \boldsymbol{j}\ \mathrm{senh}\ \theta) = -\boldsymbol{r}(\cosh\theta - \boldsymbol{j}\ \mathrm{senh}\ \theta) = -\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(\theta)^* = -\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(-\theta)$, isto é, $\mathbf{w} = -\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(-\theta)$.

Caso III: $\eta(z) < 0$ e $y > 0$.

Nesse caso, $w = \boldsymbol{r}(\text{senh}\ \theta + \boldsymbol{j}\cosh\theta) = \boldsymbol{jr}(\cosh\theta + \boldsymbol{j}\ \text{senh}\ \theta) = \boldsymbol{jrH}(\theta)$, isto é, $\mathbf{w = \boldsymbol{jrH}(\theta)}$.

Caso IV: $\eta(z) < 0$ e $y < 0$.

Nesse caso, $w = \boldsymbol{r}(\text{senh}\ \theta - \boldsymbol{j}\cosh\theta) = -\boldsymbol{jr}(\cosh\theta - \boldsymbol{j}\ \text{senh}\ \theta) = -\boldsymbol{jrH}(\theta)^* = -\boldsymbol{jrH}(-\theta)$, isto é, $\mathbf{w = -\boldsymbol{jrH}(-\theta)}$.

Forma Exponencial e Fórmulas de Euler

Como no caso complexo, podemos deduzir: $d\boldsymbol{H}(\theta)/d\theta = \boldsymbol{jH}(\theta)$, donde $d\boldsymbol{H}(\theta)/\boldsymbol{H}(\theta) = \boldsymbol{j}d\theta$, portanto, $\int d\boldsymbol{H}(\theta)/\boldsymbol{H}(\theta) = \boldsymbol{j}\int d\theta$, isto é, $\boldsymbol{ln}\ \boldsymbol{H}(\theta) = \boldsymbol{j}\theta + \boldsymbol{k}$, dai, $\boldsymbol{H}(\theta) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta + \boldsymbol{k}}$. Finalmente, como $\boldsymbol{H}(0) = 1$, temos que $\boldsymbol{k} = 0$, donde $\boldsymbol{H}(\theta) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta}$.

Podemos expressar, então, qualquer número perplexo w em forma exponencial da seguinte maneira:

Região I: $\mathbf{w} = \boldsymbol{re}^{\boldsymbol{j}\theta}$

Região II: $\mathbf{w} = -\boldsymbol{re}^{-\boldsymbol{j}\theta}$

Região III: $\mathbf{w} = \boldsymbol{jre}^{\boldsymbol{j}\theta}$

Região IV: $\mathbf{w} = -\boldsymbol{jre}^{-\boldsymbol{j}\theta}$

Temos também:

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta} = \cosh\theta + \boldsymbol{j}\ \text{senh}\ \theta \text{ e } \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\theta} = \cosh\theta - \boldsymbol{j}\ \text{senh}\ \theta,$$

donde resultam as que chamaremos de **fórmulas de Euler perplexas**:

$$\mathbf{cosh}\ \theta = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\theta}) / 2 \quad\text{e}\quad \mathbf{senh}\ \theta = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\theta}) / 2\boldsymbol{j}.$$

Interpretação do “Ângulo” θ e “Rotação” Hiperbólica

O ângulo hiperbólico θ que aparece nas fórmulas de representação hiperbólica não é um ângulo no sentido geométrico, mas adquire um significado, concretizando uma verdadeira **ação do tema sobre o foro**, através da reinterpretação de um conceito para adaptá-lo ao novo contexto.

No caso complexo, o ângulo θ pode ser reinterpretado da seguinte maneira: se $z = \boldsymbol{r}(\cos\theta + \boldsymbol{i}\ \text{sen}\ \theta)$ com $\boldsymbol{r} \neq 0$, e $\boldsymbol{A}$ é a área que faz z com o eixo x positivo dentro do círculo de raio $\boldsymbol{r}$, então,

$$\theta = 2\boldsymbol{A} / \boldsymbol{r}^2.$$

No caso perplexo temos exatamente a mesma situação: demonstra-se por integração que o termo θ que aparece na representação hiperbólica de z, com $\eta(z) \neq 0$, é igual a $2\boldsymbol{A} / \boldsymbol{r}^2$, sendo $\boldsymbol{A}$ a área que forma z com o eixo x positivo e a hipérbole equilátera de raio $\boldsymbol{r} = ô\,\eta(z)ô^{1/2}$ à qual z pertence.

Uma rotação no plano complexo de ângulo θ no sentido antihorário, pode ser expressa mediante a multiplicação por $\boldsymbol{e}^{i\theta}$. Isto é, se z é não nulo, então, **rotar z** por um tal ângulo θ significa **deslocar z através da circunferência** de raio $\boldsymbol{r} = \eta(z)^{1/2}$ nesse ângulo.

Isso nos permite definir, por analogia, uma **rotação hiperbólica** como a multiplicação por $\boldsymbol{e}^{j\theta}$. Portanto, se $\eta(z) \neq 0$, então, $\boldsymbol{e}^{j\theta}z$ é um deslocamento de z ao longo da hipérbole de raio $\boldsymbol{r} = ô\,\eta(z)ô^{1/2}$ à qual z pertence.

Generalização

É possível fazer uma análise de todas as **estruturas algébricas do plano** tomando como unidade imaginária um elemento ε tal que $\varepsilon^2 = \alpha + \varepsilon\beta$ com α e β números reais fixos. Nesse caso, a partir de uma análise da existência de inversos, consegue-se definir, para $z = x + \varepsilon y$:

$$z^* = (x + \beta y) - \varepsilon y \quad \text{e}$$

$$\eta(z) = zz^* = (x + (\beta/2)y)^2 - Dy^2$$

onde $D = (\beta/2)^2 + \alpha$, de modo que o inverso de z, no caso de existir, tenha a forma $z^{-1} = z^*/\eta(z)$.

Encontra-se que, a menos de isomorfismo, só existem três estruturas possíveis do plano: o **plano complexo**, correspondendo ao caso $D < 0$, o **plano perplexo** ou hiperbólico, correspondendo ao caso $D > 0$, e um terceiro plano, que chamaremos de **plano parabólico** (ou paraplexo?), que resulta de $D = 0$, e para o qual pode-se tomar como unidade imaginária um elemento $\boldsymbol{k}$ com quadrado $\boldsymbol{k}^2 = 0$.

No plano parabólico, a analogia força construir uma nova trigonometria definindo as funções **cosseno parabólico** e **seno parabólico** da seguinte maneira:

$$\mathbf{cosp\ x = 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{senp\ x = x}.$$

Elas resultam da seguinte argumentação analógica: se no plano parabólico devemos ter uma exponencial análoga às dos planos **C** e **H**, então, ela deve satisfazer:

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}x} = \mathbf{cosp\ x} + \boldsymbol{k}\ \mathbf{senp\ x},$$

portanto, chamando de $\boldsymbol{f}(x) = \text{cosp } x$ e $\boldsymbol{g}(x) = \text{senp } x$ e derivando obtemos: $\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}x} = \boldsymbol{f}'(x) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}'(x)$, isto é, $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}(x)) = \boldsymbol{f}'(x) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{g}'(x)$, donde $\boldsymbol{f}'(x) = 0$ e $\boldsymbol{g}'(x) = \boldsymbol{f}(x)$, daí $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{c}_1 x + \boldsymbol{c}_2$. Finalmente, como para $x = 0$ devemos ter $\boldsymbol{e}^0 = 1$, resulta que $\text{cosp } x = \boldsymbol{f}(x) = 1$ e $\text{senp } x = \boldsymbol{g}(x) = x$.

Para as funções parabólicas obtemos, dentre outras as seguintes identidades, revelando-se uma **completa analogia!**:

$$\text{cosp}^2 x - [0]\text{senp}^2 x = 1,$$

$$\text{cosp } (x + y) = \text{cosp } x \text{ cosp } y - [0]\text{senp } x \text{ senp } y,$$

$$\text{senp } (x + y) = \text{senp } x \text{ cosp } y + \text{cosp } x \text{ senp } y,$$

$$\text{Dcosp } x = [0]\text{senp } x \quad \text{e} \quad \text{Dsenp } x = \text{cosp } x.$$

Aplicações à Física

Se estendemos o plano hiperbólico a $\mathbf{R}^4$ como os **quatérnios de Hamilton** estendem o plano complexo, obtemos uma nova versão do **espaço de Minkowski**, suporte matemático da teoria da relatividade. De fato, já em **H** podemos obter uma interpretação das **transformações de Lorentz** que fundamentam a teoria da relatividade de Einstein:

Se re-escrevemos o plano **H** como {$z = \boldsymbol{c}t + \boldsymbol{j}x$ / t é a variável tempo, x é a variável espaço e $\boldsymbol{c}$ é uma constante positiva que tem as dimensões de uma velocidade}, então, se uma partícula se move ao longo do eixo x com uma velocidade $\boldsymbol{v}$ qualquer, as transformações de Lorentz seguintes, a respeito dos sistemas de coordenadas do observador e da partícula,

$$t' = \gamma\,(t + (\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2)x) \text{ e } x' = \gamma\,(\boldsymbol{v}t + x),$$

onde $\gamma = (1 - \boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{c}^2)^{-1/2}$, adotam a forma de uma **rotação hiperbólica** $z' = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\theta}z$, no plano hiperbólico **H**, sendo $\theta = \operatorname{arctanh}(\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c})$.

Já no plano parabólico, uma **rotação parabólica** pelo número $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}\theta}$, onde $\theta = \boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}$, produz as **transformações de Galileu** da mecânica clássica.

É um maravilhoso ponto de contato entre Matemática e Física!

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal 19081
81531-990 Curitiba, Pr – Brasil
E-mail: jccifa@gauss.mat.ufpr.br