Fundação Universidade Federal do Rio Grande

<u>Título do Pôster</u>: Descoberta de Figuras Equivalentes

<u>Acadêmica</u>: Tífani Teixeira Gonçalez [1]
<u>Orientador</u>: Prof. MSc. José Carlos Pinto Leivas [2]

Introdução:

O trabalho visa utilizar noções de topologia para desenvolver habilidades de formação do pensamento geométrico, em particular articular as correlações entre letras e formas equivalentes. Um caminho empregado é o uso de materiais concretos, como palitos de fósforo e moedas, para a exploração dos conceitos de arcos, grau de vértices, interseção, côncavo, convexo, grafos e tipos de grafos. A maior parte das atividades são construídas no Geoplano 5X5, e então se analisa o número de arcos, e logo após a classificação deste grafo se é Multicursal ou Unicursal.

Porém nas atividades iniciais há uma preocupação na formalização do conceito de letras e formas equivalentes, onde se analisa passo-a-passo os mesmos para que em seguida seja dada ênfase na parte principal deste trabalho que é, em particular, conhecer um pouco da História da Topologia através das Pontes de Konigsberg, e é nesse momento que encontra-se com mais precisão o estudo dos grafos.

O emprego de cores na análise de figuras equivalentes é muito utilizada e preponderante na formação da percepção visual de objetos dentro de campos, permitindo mais uma vez a caracterização dos conceitos acima mencionados.

Desenvolvimento:

As atividades 1 e 2 tem por objetivo a descoberta de letras e figuras planas que são equivalentes, ou seja, que com simples deformações

podemos transformá-los em outros, sem que para isso fosse preciso fazer cortes, colagens ou rasgões.

Atividade 1

As perguntas que irão guiar toda essa atividade são as seguintes: “Existem letras do alfabeto que podem ser modificadas em outras mediante dobras ou outro tipo de transformação? E com figuras isto também pode ocorrer?”

Tente achar letras que são semelhantes a estas no quadro abaixo, e não esqueça de desenhá-las ao lado de cada item da tabela.

Letra	Letras obtidas
U	
E	
T	

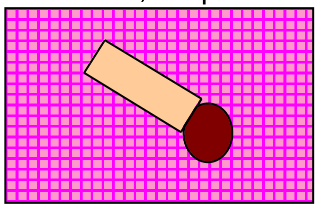
As letras W, U, I, S, G, J, L, Z, C, V, N e M são consideradas topologicamente equivalentes, porque é possível deformar uma para formar a outra. Numa transformação topológica, é proibido cortar e colar a figura, mas é permitido esticar, torcer, ampliar e reduzir. Observe que as letras E, F, T e Y são topologicamente equivalentes, porém as letras S e T são topologicamente distintas.

Atividade 2

Já descobrimos que existem letras que são equivalentes. Será que existem formas no plano que também o são?

Vamos tentar descobrir utilizando apenas palitos de fósforo, onde podemos uni-los por suas extremidades.

utilizando apenas um palito é possível formar figuras planas? Quantas você consegue? Tente construí-la, e após desenhá-las.



utilizando dois palitos, que figuras você consegue formar? Faça a construção com os palitos e desenhe-as.

Repita com 3, 4, 5 e 6 palitos os procedimentos acima, não esqueça de fazer a representação da forma obtida .

Com as representações feitas acima complete o quadro:

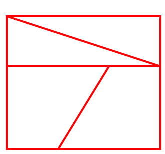
Número de Palitos	***Número de Figuras***
1	1
2	
3	
4	
5	
6	

Nas atividades 3 e 4, o que se pretende é a aplicação do que foi descoberto anteriormente.

Atividade 3

Observe o quadrado abaixo e as formas nele definidas pelas suas linhas. Nesse quadrado existem formas equivalentes?

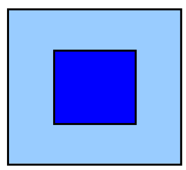
Pinte com a mesma cor as formas que julgares equivalentes.



Considere as mesmas quatro formas do quadrado anterior e com todas elas obtenha uma nova forma geométrica. Represente a forma que você construiu.

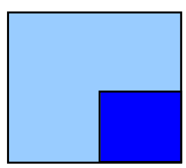
Atividade 4

Se ao invés do quadrado apresentado anteriormente tivéssemos um quadrado contendo no seu interior um outro quadrado pequeno. Construa o quadrado abaixo com palitos de fósforo, como poderíamos dividir a parte do maior que é exterior ao menor, igualmente entre quatro pessoas ?



Faça com os palitos de fósforo uma representação das divisões obtidas.

E se o quadrado menor estivesse num dos cantos do maior, como poderíamos dividi-lo em quatro partes equivalentes? (utilize os palitos de fósforo)

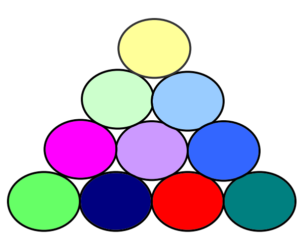


Faça uma representação das divisões obtidas.

Neste momento do trabalho se propõe um desafio para que os participantes possam visualizar atividades mais práticas sobre o trabalho.

Desafio I

Imagine que você tem dez moedas dispostas formando um triângulo, como na figura abaixo. Movimentando apenas três moedas, obtenha uma forma semelhante desta figura.



A atividade 5, tem por objetivo a análise do problema clássico da Topologia, onde de uma maneira diferente e divertida apresenta-se o caso das pontes de Konigsberg.

Atividade 5

Leia essa história:

Um Problema Clássico da Topologia

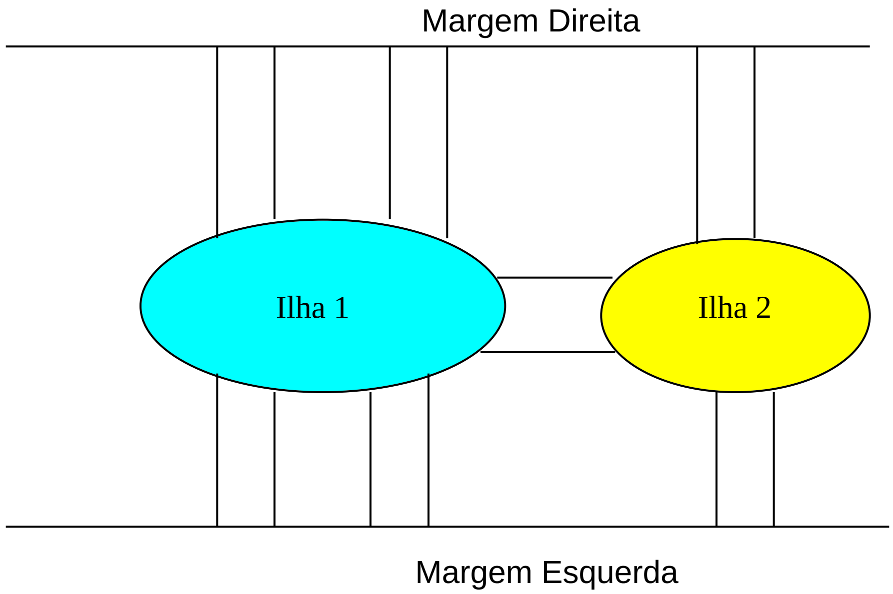
A Topologia, quem diria, começou com um passeio pelas pontes da capital da Prússia.

Konigsberg é uma daquelas cidades do leste da Europa que já pertenceu a vários países, sem nunca ter saído do lugar. No século XVIII, era capital da Prússia Oriental. Após a unificação alemã, passou para a Alemanha. Com o fim da Segunda Guerra, foi anexada à antiga União Soviética, sendo batizada como Kaliningrado. Atualmente, pertence à Rússia.

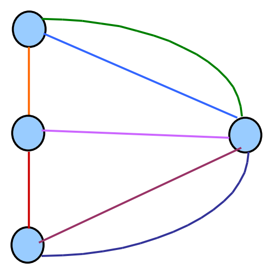
Em Konigsberg nasceram personalidades ilustres como o filósofo Immanuel Kant e o matemático David Hilbert. Entretanto, para os matemáticos o nome da cidade está associado ao nascimento de um dos principais ramos da matemática, a Topologia. E tudo começou com um passeio.

Uma das atrações da população de Konigsberg, no século XVIII, era passear pelas sete pontes que ligam as margens do rio Pregel, que atravessa a cidade, e suas ilhas fluviais. O passeio tornava-se um desafio quando se tentava fazê-la sem passar mais do que uma única vez pela mesma ponte. Em 1736, o problema chegou aos ouvidos do matemático Leonhard Euler, que o resolveu de modo bastante original. Euler simplificou o problema atribuindo pontos às ilhas e às duas margens, e linhas, ligando estes pontos, representando as pontes. Ele criou, o que chamamos hoje, de representação topológica da situação. (veja o desenho)

Cidade de Konigsberg



Essa mesma cidade pode ser representada também por um diagrama, denominado de '**GRAFO**', que é a união de pontos e linhas, tendo um conjunto dos mesmos. Vejo o exemplo:



É possível obter um caminho, percorrendo toda a cidade, passando uma única vez por cada ponte? Elabore uma estratégia para resolver o problema. Vá fazendo uma representação dos caminhos percorridos. A que conclusão você chega?

A atividade 5 objetiva auxiliar na resolução do Problema das Pontes de Konigsberg, para isso se utiliza o Geoplano quadrado, que é um tabuleiro onde são distribuídos pregos, eqüidistantes na horizontal e na vertical, representando pontos.

Atividades 6

Considerando o problema acima, vamos fazer várias simulações do problema de problemas mais simples de tal forma a chegarmos ao equivalente a Pontes de Konigsberg, sendo que cada prego representa uma ilha e o trajeto entre duas ilhas será representado pelos atilhos que ligam dois pregos.

a) Represente com o seu material as figuras abaixo e complete o quadro:

Figura 1

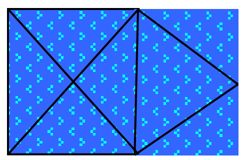


Figura 2

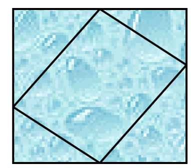


Figura 3

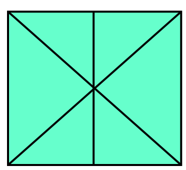
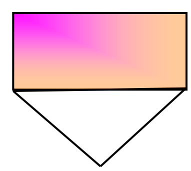


Figura 4



b) É possível reduzir o número de elásticos na construção destas figuras? Substitua os elásticos que você achar possível por um outro, deixando o menor número possíveis de elásticos no Geoplano.

c) E que nome se dá ao ponto de encontro de dois elásticos de cores diferentes?

d) Que nome recebe o elástico que fica entre dois pontos de interseção?

e) Complete o quadro abaixo:

	Número de Segmentos	Número de Segmentos Totais	Número de Segmentos que sai de cada ponto
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			
Figura 4			

e) Observe o quadro preenchido e responda:

É possível percorrer as figuras número .... passando apenas uma vez por todos os caminhos enquanto que as figuras número ....não.

Porque em algumas delas é possível passar por todos os caminhos e em outras não?

O que tem em comum as figuras que se podem percorrer passando uma única vez?

Por que há figuras em que é possível passar por todas os segmentos apenas uma vez, enquanto que em outros isso não acontece? Esse é um problema antigo, que intrigou o matemático Leonhard Euler, há mais de 200 anos. Naquela época Euler substituiu o mapa da cidade por um diagrama chamado de GRAFO, onde cada parte da cidade foi representada por um ponto e a união desses pontos recebeu o nome de arcos, que nada mais são do que os nossos segmentos. Então Euler verificou que a solução deste problema estava relacionado com o número de segmentos que convergia para cada ponto. E provou que em qualquer grafo o problema só teria solução se só existissem dois pontos ligados a um número ímpar de segmentos e qualquer número de pontos pares.

Se voltarmos para a representação do grafo da cidade de Konigsberg podemos comprovar que todos os **pontos** são ímpares. Para resolvê-lo bastaria que destruíssemos uma das pontes ou se construíssemos mais uma ponte ligando qualquer dois pontos. A partir daí, o problema se assemelhou aquelas brincadeiras de criança, de fazer desenho sem tirar o lápis do papel. Ao provar que o passeio tal como proposto não tinha solução, Euler deu início ao desenvolvimento da Topologia, um dos mais importantes ramos da matemática, com aplicações a vários campos do conhecimento científico. Mas os problemas topológicos atraem outros públicos, o dos amantes da matemática recreativa, que, tal como os habitantes de Konigsberg, entretêm-se em vencer desafios e resolver problemas curiosos, como o dos seis palitos.

Os caminhos de Euler tem inúmeras utilizações práticas, por pertencer a um ramo muito fértil da matemática, que é a Topologia um deles seria o planejamento de cruzamento de estradas.

Concluindo, podemos tirar relações entre o número de segmentos que converge de cada vértice, e sendo assim apresentamos as principais relações que envolvem os grafos.

1) O número de vértices ímpares de qualquer grafo é um número par.

2) Se um grafo não possui nenhum vértice ímpar, então ele pode ser percorrido unicursalmente terminado no ponto de partida.

3) Um grafo que possui exatamente dois vértices ímpares pode ser percorrido unicursalmente, começando num dos vértices ímpares e terminando no outro.

4) Todo grafo com mais de dois vértices ímpares é multicursal, ou seja, não pode ser percorrido.

[1] Acadêmica do 3º ano do Curso de Matemática FURG – Rio Grande – RS
e-mail: tifani@mikrus.com.br tel.: (53) 230-2054
[2] Professor do Departamento de Matemática FURG – Rio Grande – RS
e-mail: dmtleiva@super.furg.br tel.: (53) 233-6673