PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA O ENSINO MÉDIO

Tânia Baier [1]

Viviane Clotilde da Silva [2]

Simone Leal [3]

A Programação Linear é, dentre os métodos da Pesquisa Operacional, um dos que tem encontrado grande aplicabilidade prática. O início da atividade denominada Pesquisa Operacional aconteceu durante a Segunda Guerra Mundial, quando houve necessidade de alocar, do modo mais eficiente possível, os escassos recursos existentes. Encontrou campo de aplicação no planejamento de operações militares e posteriormente passou a ter ampla utilização com a explosão industrial pós-guerra, quando o crescimento nas dimensões e na complexidade das organizações gerou aumento na divisão do trabalho. Instituíram-se diversas especialidades, o que gerou novos problemas, com os vários componentes de uma organização perseguindo, de forma autônoma, seus diferentes objetivos, sem a visão de cada uma das atividades interagindo com as demais. A extrema especialização e segmentação das atividades gera situações de conflito, uma vez que os diversos setores de uma grande organização, crescendo de forma independente, podem apresentar dificuldades operacionais no sentido de interagirem com os demais de modo a funcionar como um todo integrado. A Programação Linear tem contribuído de modo significativo para a tomada de decisões fundamentais, em diversas áreas do conhecimento, efetuando o planejamento de atividades com o objetivo de obter o melhor resultado, seja ele o máximo lucro, o mínimo custo, a maior receita.

Este trabalho apresenta conclusões de pesquisas realizadas na área de Programação Linear, focalizando problemas envolvendo situações da vida real com duas variáveis de decisão, possíveis de serem resolvidos graficamente utilizando conceitos matemáticos estudados no Ensino Médio (funções, inequações e sistemas lineares). São também apresentados problemas que demandam solução computacional para serem utilizados em aulas de Matemática bem como em laboratórios de informática. Deste modo, os alunos

[1] Doutoranda em Educação Matemática UNESP – Prof. Depto de Matemática FURB

[2] Mestre em Educação Matemática UNESP – Prof. Depto. de Matemática FURB

[3] Mestre em Engenharia de Produção UFSC – Prof. Depto. de Matemática FURB

serão contemplados em seus questionamentos acerca da aplicabilidade prática dos conteúdos matemáticos relacionados com resolução de sistemas lineares, além de terem a oportunidade de conhecer os avanços ocorridos na Matemática durante as últimas décadas. A Programação Linear tem encontrado ampla aplicação industrial, especialmente no planejamento da produção, donde o seu nome de "programação" como sinônimo de planejamento. O termo "linear" se refere ao fato de que todo problema de Programação Linear pode ser descrito através de uma função-objetivo a qual exprime a meta que se deseja alcançar, sujeita a um conjunto de restrições, todos lineares. As decisões a serem tomadas por organizações civis ou governamentais podem se tornar complexas, gerando problemas com centenas de milhares de variáveis, sendo que o desenvolvimento da informática nas últimas décadas tem permitido a solução de problemas com grande rapidez.

Apresentamos a seguir alguns modelos de problemas de Programação Linear simplificados:

PROBLEMA (1)

Uma empresa decide introduzir na sua linha de produção dois novos modelos de camisetas: A e B. A camiseta A requer 2 minutos para confecção das mangas e 8 minutos para o corpo. A camiseta B requer 6 minutos para confecção das mangas e 4 minutos para o corpo. As máquinas utilizadas para a confecção das mangas estão disponíveis 60 minutos por dia. As máquinas necessárias para confecção dos corpos das camisetas estão a disposição 80 minutos por dia. O lucro unitário da camiseta A é de R$ 5,00 e da camiseta B, é de R$ 4,00. Quantas camisetas de cada tipo devem ser produzidas por dia para que o lucro seja máximo?

Para a construção do modelo inicialmente devem ser escolhidas as variáveis de decisão, sendo que neste exemplo deve ser decidido quantas unidades de cada tipo de camisetas de cada tipo devem ser produzidas por dia:

x = número de unidades produzidas de camisetas do modelo A

y = número de unidades produzidas de camisetas do modelo B

Em seguida, deve ser estabelecido o objetivo a ser alcançado; neste exemplo, o máximo lucro diário, que é obtido somando as contribuições unitárias de cada camiseta.

LUCRO TOTAL	=	LUCRO UNITÁRIO (obtido com a venda do modelo A)	•	Número de unidades vendidas modelo A	+	LUCRO UNITÁRIO (obtido com a venda do modelo B)	•	Número de unidades vendidas modelo B

Em linguagem matemática podemos escrever:

$$\text{Max } Z = 5x + 4y$$

Para alcançar o máximo lucro, diversas limitações acontecem. No presente exemplo, existem restrições de tempo nas máquinas que confeccionam as mangas e os corpos das camisetas. Podemos escrever as restrições do problema na forma de um sistema de equações lineares:

* A camiseta de modelo A requer 2 minutos para a confecção das mangas enquanto a camiseta do modelo B requer 6 minutos. As máquinas utilizadas para a confecção das mangas estão disponíveis 60 minutos por dia:

$$2x + 6y \leq 60$$

* A camiseta de modelo A requer 8 minutos para a confecção do corpo enquanto a camiseta do modelo B requer 4 minutos. A máquinas utilizadas para a confecção dos corpos estão disponíveis 80 minutos por dia:

$$8x + 4y \leq 80$$

Sintetizando o Modelo Matemático deste problema:

$$\text{Max } Z = 5x + 4y$$

sujeita às seguintes restrições:

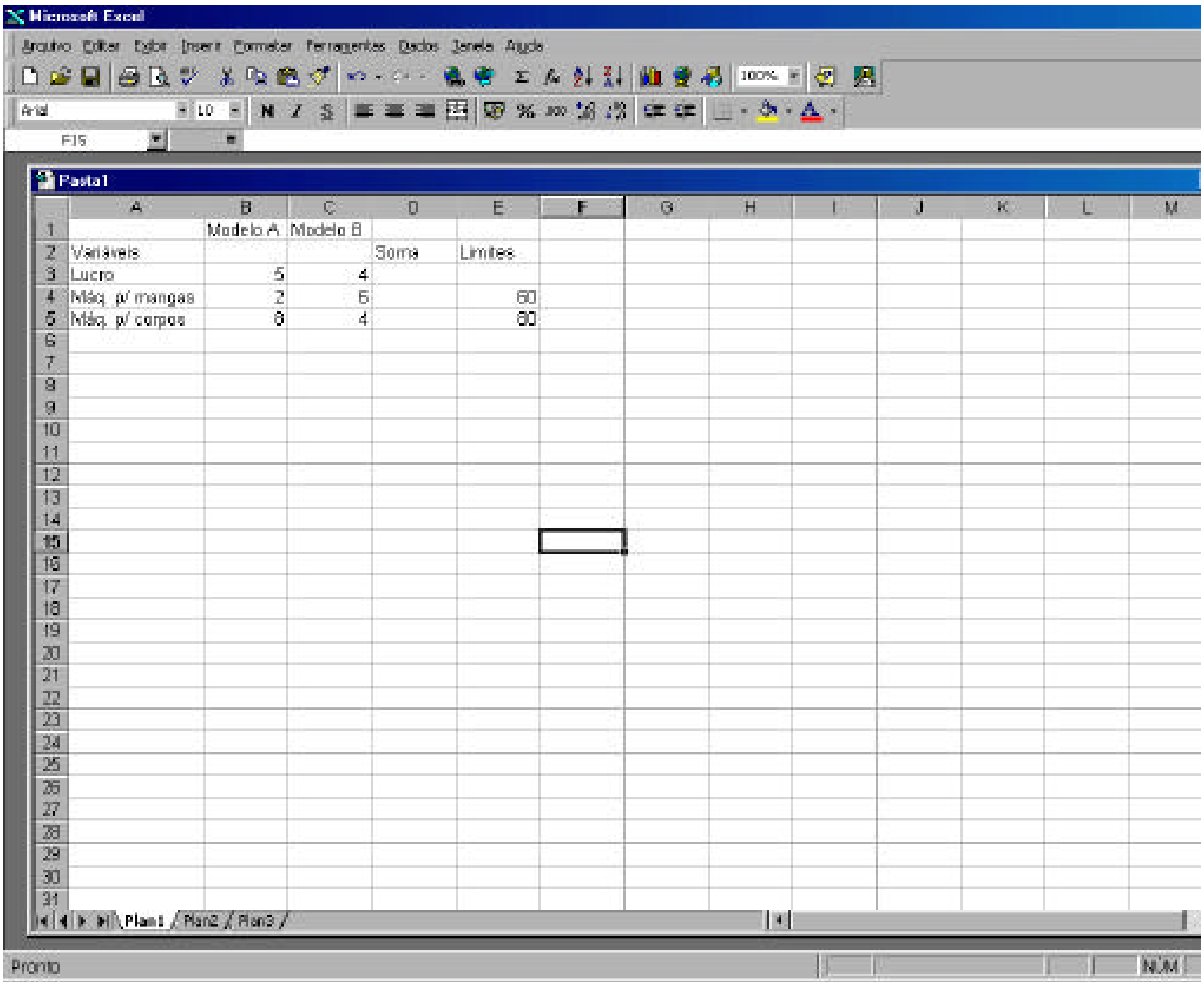
$$2x + 6y \leq 60$$

$$8x + 4y \leq 80$$

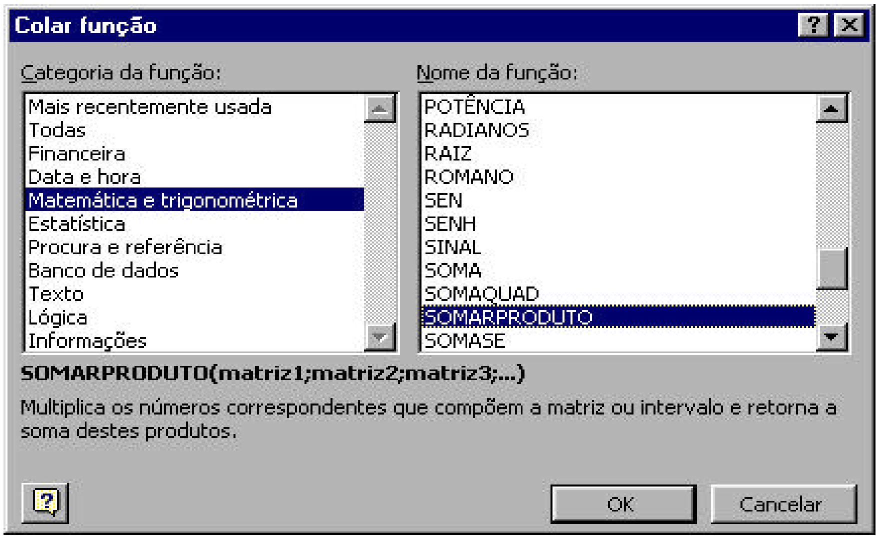
$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Ou seja, para obter o máximo lucro de R$ 62, devem ser produzidas 6 camisetas do tipo A e 8 camisetas do tipo B.

No mercado estão disponíveis diversos softwares que possibilitam a solução de problemas de programação linear. Optamos pelo EXCEL por ser o mais conhecido. A seguir apresentamos a solução computacional do PROBLEMA (1) cujos dados são digitados na planilha:



Em seguida informamos as operações matemáticas envolvidas, clicando o botão f_x e selecionando:



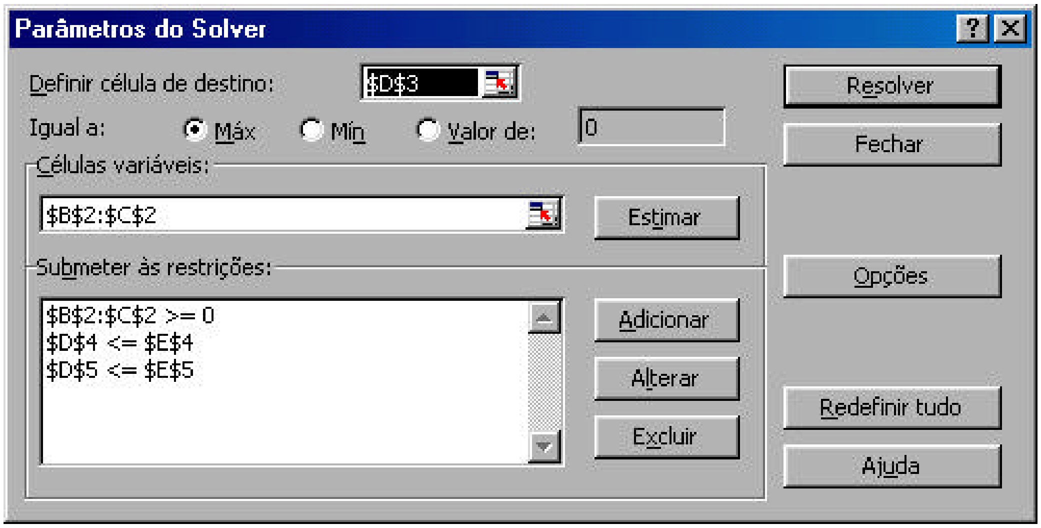
Esta planilha corresponde, em linguagem matemática:

$$\begin{pmatrix}5 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 5.x + 4.y$$

$$\begin{pmatrix}2 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 2.x + 6.y$$

$$\begin{pmatrix}8 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 8.x + 4.y$$

Clicando em **Ferramentas** e selecionando **Solver** acrescentamos os sinais das inequações:



Clicando em Resolver, obtemos a solução do problema:

PROBLEMA (2):

Um agricultor dispõe de dois tipos de adubo. O adubo tipo A contém 3g de fósforo, 2g de nitrogênio e 8g de potássio, e custa $5 por quilograma. O adubo tipo B contém 2g de fósforo, 6g de nitrogênio e 2g de potássio, e custa $4 por quilograma. Um quilograma de qualquer adubo é suficiente para 20 m2 de terra. A terra que o agricultor vai utilizar necessita de pelo menos 3g de fósforo, 3 de nitrogênio e 4g de potássio para cada 20 m2 . Quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, para cada 20 m2 de terra, de modo que seu custo seja mínimo ?

	x_1	x_2	***Necessidades mínimas de adubo***
	Tipo A	***Tipo B***	
Fósforo	3	2	3
Nitrogênio	2	6	3
Potássio	8	2	4
Custo	$5	$4	

CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

* IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

x_1 = quantidade (em kg) do adubo A

Observando o gráfico concluímos:

A(0,2)

B é o ponto de intersecção entre $8x_1 + 2x_2 = 4$ e $3x_1 + 2x_2 = 3$.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 = 4 \ (-1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x_1 - 2x_2 = -4 \\ \underline{3x_1 + 2x_2 = 3} \end{cases}$$
$$-5x_1 \quad / \quad = -1 \qquad x_1 = 1/5$$

Se $x_1 = 1/5$, substituindo obtemos: $3 \,.\, 1/5 + 2x_2 = 3$ $\quad 2x_2 = 3 – 3/5$ $\quad 2x_2 = 12/5$ $\quad x_2 = 12/10$ $\quad$ B(1/5 , 12/10)

C é ponto de intersecção entre $2x_1 + 6x_2 = 3$ e $3x_1 + 2x_2 = 3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \ (-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 3 \\ \underline{-9x_1 - 6x_2 = -9} \end{cases}$$
$$-7x_1 \quad / \quad = -6 \qquad -7x_1 = -6 \qquad x_1 = 6/7$$

Se $x_1 = 6/7$, substituindo obtemos: $3.(6/7) + 2x_2 = 3$ $\quad 18/7 + 2x_2 = 3$ $\quad 2x_2 = 3 – 18/7$ $\quad 2x_2 = 3/7$ $\quad x_2 = 3/14$ $\quad$ C(6/7 , 3/14)

D(3/2 , 0)

* CALCULAR OS VALORES DA FUNÇÃO–OBJETIVO NOS PONTOS ENCONTRADOS

Vértice	Coordenadas	Função-Objetivo
A	(0,2)	5.(0) + 4(2) = 8
B	(1/5 , 12/10)	5.(1/5) + 4(12/10) = 5,8
C	**(6/7 , 3/14)**	**5.(6/7) + 4(3/14) 5,14***
D	(3/2 ,0)	5.(3/2) + 4(0) = 7,5

Solução ótima:
$x_1^* = 6/7 \cong 0,86$
$x_2^* = 3/14 \cong 0,21$
$Z^* \cong 5,14$

* CONCLUSÃO: Para obter o custo mínimo de $ 5,14 o agricultor deverá comprar 0,86 kg do adubo A e 0,21 kg do adubo B, para cada 20 m^2 de área cultivada.

Nas diversas obras que versam sobre o tema Programação Linear, muitos exemplos são apresentados. No Ensino Médio é interessante a resolução daqueles que envolvem duas variáveis de decisão, pois pode ser efetuada a sua solução gráfica, a qual pode ser comparada com a solução computacional. É importante que sejam adaptados à forma de representação de variáveis utilizando as letras **x** e **y**. Em seguida pode ser introduzida a notação $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRADE, Eduardo L. de. *Introdução à Pesquisa Operacional-Métodos e Modelos para a Análise de Decisão*. Rio de Janeiro, LTC, 1998.
2. LANZER, Edigar Augusto. *Programação Linear: Conceito e Aplicações*. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1988.
3. LOESCH, Cláudio, HEIN, Nelson. *Pesquisa Operacional: Fundamentos e Modelos*, Blumenau, Editora da FURB, 1999.
4. PRADO, D. S. do. *Programação Linear*. Belo Horizonte, MG. Editora de Desenvolvimento Gerencial, 1999.
5. PRADO, D. *Administração de Projetos com PERT/CPM*, Rio de Janeiro: LTC; Belo Horizonte: Ed. UFMG, 1988.