Estudo do Comportamento de Funções em Ambiente Informático

Benedito Antonio da Silva, Ana Lúcia Manrique, Barbara Lutaif Bianchini,
Maria Thereza G. Dubus, Vera Helena Giusti de Souza - PUC-SP[1]

PÚBLICO ALVO: Professores de Matemática do Ensino Médio e do Ensino Superior

O MINI - CURSO

No início da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, os alunos estudam as funções afins, quadráticas, cúbicas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Para ampliar esse estudo, são necessárias novas ferramentas, por exemplo limites e derivadas. Nos livros didáticos, em geral, parte-se da expressão algébrica para a determinação dos itens necessários ao esboço do gráfico de uma função.

Os proponentes deste mini-curso acreditam que é necessário oferecer situações diversificadas para que o aluno identifique os invariantes de um determinado conceito. Neste sentido, é desejável que o aluno seja capaz de reconhecer e identificar, no gráfico de uma função: domínio, imagem, simetrias, paridade, pontos críticos, valores máximos, valores mínimos, pontos de inflexão, retas tangentes, assíntotas, comportamento nas vizinhanças de pontos em que a função não está definida ou no infinito.

"Como fazer a análise do comportamento de uma função em um ambiente computacional?"

Neste mini-curso pretende-se apresentar uma seqüência de atividades que propiciem essa análise por meio de uma dinâmica "ir e vir", isto é, computador → teoria → computador, promovendo nos alunos um comportamento ativo, crítico, investigativo e mais independente do professor.

Essas atividades contêm questões dirigidas e questões abertas numa tentativa de proporcionar oportunidade para que os alunos trabalhem com autonomia. Além disso, no final de cada uma delas é incluído o resultado teórico envolvendo os conceitos estudados.

O objetivo da primeira atividade é relacionar o sinal da primeira derivada com o crescimento da função. Foram utilizadas duas funções, uma polinomial e uma racional. Para o gráfico da primeira pede-se que os alunos: escolham três pontos para traçar a reta tangente, uma com coeficiente angular positivo, uma com coeficiente angular negativo e

[1] Professores do Departamento de Matemática do CCET – PUC – SP. Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação – 01303 – 050 - São Paulo – SP.
e-mail: benedito@exatas.pucsp.br

outra com coeficiente angular nulo; identifiquem e calculam algebricamente os pontos nos quais f'(x) = 0; indiquem os intervalos nos quais f'(x) > 0 (f'(x) < 0) e os relacionem com o crescimento (decrescimento) da função. Para o gráfico da segunda também é solicitado que o aluno estabeleça essa relação, porém sem o traçado de retas tangentes.

O objetivo da segunda atividade é identificar os pontos de máximo utilizando o crescimento/decrescimento da função. Foram escolhidas três funções, uma racional com domínio IR e máximo absoluto; uma polinomial com máximo relativo e uma modular com máximo relativo em pontos nos quais a derivada não existe. Utilizando a primeira função, pede-se ao aluno que, inicialmente, identifique o seu maior valor para, em seguida, estudar o seu crescimento/decrescimento numa vizinhança deste ponto. Na segunda, o aluno deve percorrer o caminho inverso, ou seja, escolher um intervalo em que a função apresente um crescimento seguido de um decrescimento para, então, localizar o seu ponto de máximo relativo. Para a última, o procedimento é idêntico ao da segunda exceto que no ponto de máximo a derivada não existe. Para as três funções solicita-se o valor da derivada no ponto de máximo. Ao final do estudo destas funções, o aluno deve descrever e testar um método algébrico para determinar (se existirem) os pontos de máximo relativo de uma função. Finalizando a atividade, são propostas quatro afirmações para o aluno decidir se são verdadeiras ou falsas. Na discussão final também foi institucionalizado o objeto ponto de mínimo.

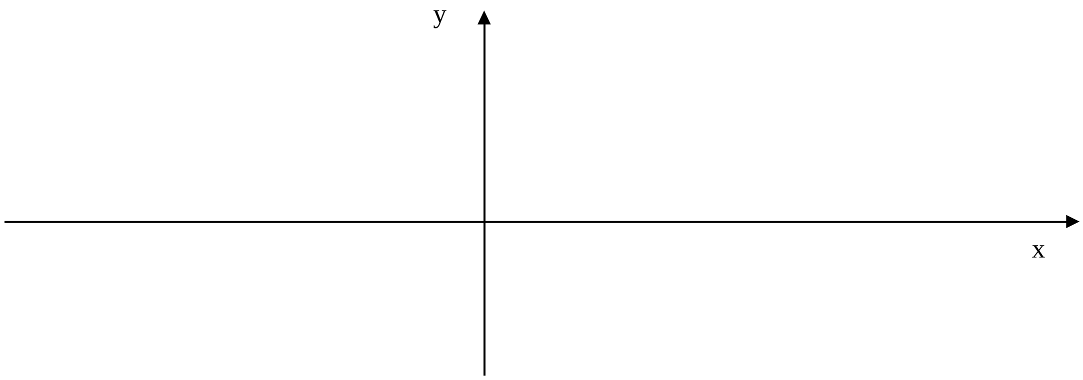
A principal ferramenta desta metodologia é o computador, que deve ser usado criteriosamente: o professor deve conhecer o conteúdo, bem como o software utilizado. Esta opinião está de acordo com Trouche (1994, p. 39), quando este diz: "... a manipulação de uma calculadora gráfica não tem nada de natural, sua utilização sem domínio pode pesar grandemente na construção do conhecimento matemático... "

Atividades utilizadas

Atividade 1.

I.

1. Obtenha o gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^2$.



2. Trace uma reta tangente ao gráfico de f que tenha coeficiente angular positivo. Dê as coordenadas do ponto de tangência. Qual é o coeficiente angular dessa reta?

3. Trace uma reta tangente ao gráfico de f que tenha coeficiente angular negativo. Dê as coordenadas do ponto de tangência. Qual é o coeficiente angular dessa reta?

4. Trace uma reta tangente ao gráfico de f que tenha coeficiente angular nulo. Dê as coordenadas do ponto de tangência. Quanto vale a derivada da função f na abscissa deste ponto?

5. No ponto de abscissa $x = 1/2$, o coeficiente angular da reta tangente é positivo, negativo ou nulo?

6. Olhando o gráfico, identifique todos os valores de x para os quais $f'(x) = 0$.

7. Calcule agora algebricamente todos os valores de x para os quais $f'(x) = 0$.

8. Olhando o gráfico, identifique os intervalos para os quais $f'(x) > 0$.

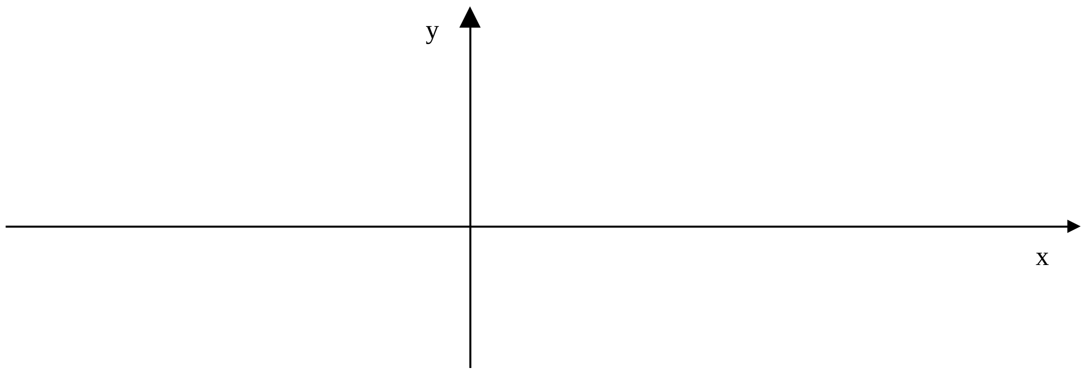
9. Nesses intervalos, a função f é crescente ou decrescente?

10. Olhando o gráfico, identifique os intervalos para os quais $f'(x) < 0$.

11. Nesses intervalos, a função f é crescente ou decrescente?

II.

1. Obtenha o gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2}$.



2. Olhando o gráfico, identifique os intervalos nos quais a derivada tem sinal positivo.

3. Nesses intervalos, a função f é crescente ou decrescente?

4. Olhando o gráfico, identifique os intervalos nos quais a derivada tem sinal negativo.

5. Nesses intervalos, a função f é crescente ou decrescente?

6. Identifique os pontos de abscissa x nos quais ocorre $f'(x) = 0$.

7. Calcule algebricamente os valores de x nos quais a derivada é zero.

Nestes dois exemplos, que relação você vê entre o crescimento de uma função e o sinal de sua derivada?

Nesta atividade foram feitas duas aplicações do seguinte resultado:

“Seja f uma função derivável em]a, b[; então:

a) **se $f'(x) > 0$ para todo x em]a, b[, então f é crescente em]a, b[;**

b) **se $f'(x) < 0$ para todo x em]a, b[, então f é decrescente em]a, b[.**

Objetivo: Reconhecer no gráfico de uma função os pontos nos quais a derivada é nula, positiva e negativa, observando a inclinação das retas tangentes. Relacionar o sinal da derivada com o crescimento da função.

Comentários: Foram escolhidas duas funções. Na primeira, procura-se direcionar o estudo partindo dos coeficientes angulares das retas tangentes para relacioná-los com o sinal da derivada e, posteriormente, este com o crescimento da função.

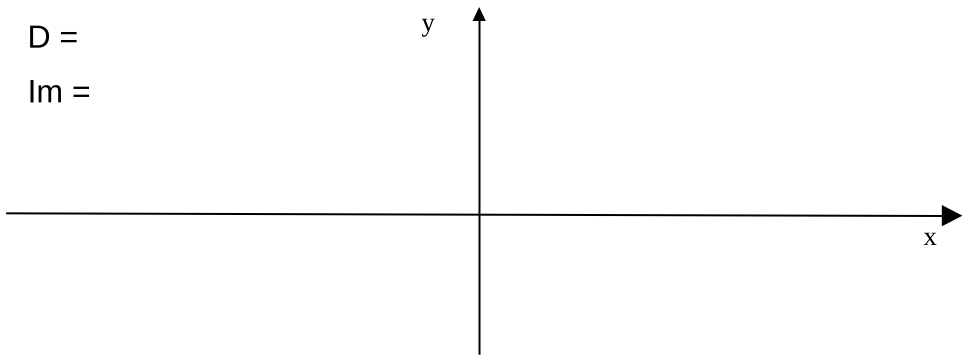
Na segunda, parte-se diretamente do sinal da derivada para relacioná-lo com o crescimento, admitindo que o aluno, por atividades já trabalhadas, tenha percebido a relação entre coeficiente angular da reta tangente e o sinal da derivada.

Atividade 2

Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

D =

Im =



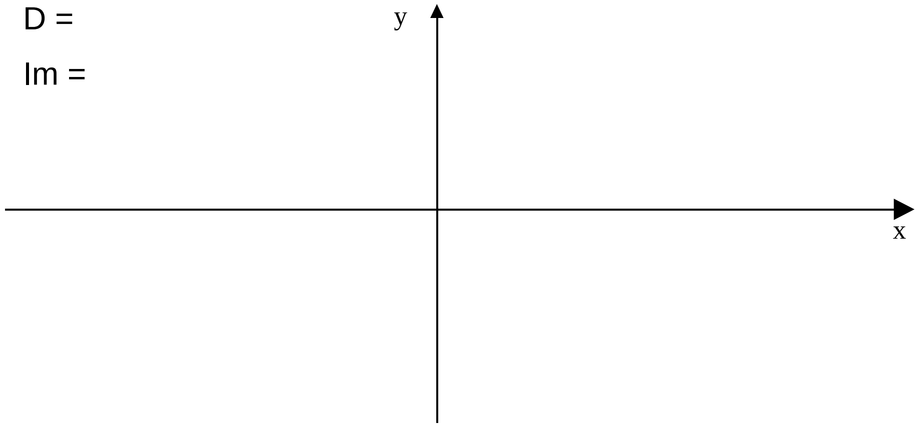
1. Qual é o maior valor de f?
2. Para que valor de x isto ocorre?
3. Qual o valor de f´ neste x?
4. Estude o crescimento/decrescimento de f numa vizinhança deste valor x.
5. Qual é o sinal de f´ nesta vizinhança?

II.

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

D =

Im =



2. Escolha um intervalo em que a função apresente um crescimento seguido de um decrescimento.

3. Qual é o maior valor de f neste intervalo?

4. Para que valor de x isto ocorre?

5. Qual o valor de f´ neste x?

6. Qual é o sinal de f´ no intervalo escolhido?

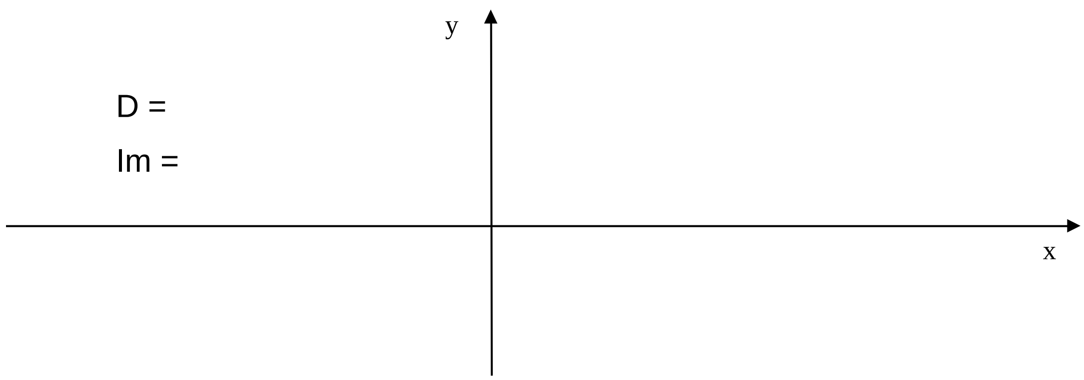
7. O número encontrado na questão 3. é o maior valor da função?

III.

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \left| |x - 2| - 3 \right|$.

D =

Im =



2. Escolha um intervalo em que a função apresente um crescimento seguido de um decrescimento.

3. Qual é o maior valor de f neste intervalo?

4. Para que valor de x isto ocorre?

5. Qual o valor de f´ neste x?

6. Qual é o sinal de f´ no intervalo escolhido?

7. O número encontrado na questão 3. é o maior valor da função?

IV. Em cada um dos exemplos estudados, você identificou um número f(x) que era o maior valor de f numa vizinhança de x.

Este f(x) é chamado *máximo local (ou relativo) de f*; e o correspondente x, *ponto de máximo local (ou relativo) de f.*

V. Decida se são falsas ou verdadeiras as afirmações seguintes e justifique suas respostas.

1. Se c é um ponto de máximo local, então f´(c) = 0.
2. Se f´(c) = 0, então c é um ponto de máximo local.
3. Se f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita de c, então f(c) é um máximo local de f.
4. Se f´(c) não existe, então c pode ser um ponto de máximo local de f.

Objetivo: Reconhecer no gráfico de uma função os pontos críticos (f´(c) = 0 ou f´(c) não existe) e o sinal da derivada em vizinhanças destes. Caracterizar os pontos de máximo relativo como sendo aqueles em que a função apresenta localmente um crescimento seguido de um decrescimento.

Comentários: A primeira função foi escolhida por apresentar máximo local que é também máximo absoluto; a segunda, máximo local que não é absoluto e a terceira, por apresentar ponto de máximo local no qual a derivada não existe.

Embora não tenham sido explorados os mínimos locais, as questões "verdadeiro ou falso" da atividade suscitam a oportunidade do professor estender a eles este estudo.

No final da atividade é proposto que o aluno descreva um procedimento algébrico para a determinação de máximos locais e o aplique a uma função.

BIBLIOGRARIA

BROUSSEAU, G. Le contrat didatique: le milieu. R***echerches en Didactique des Mathématiques.*** Grenoble***,*** v.9, n.3, p.309-336, 1988***.***

CREEM ***Activités Mathématiques avec Imagiciels***. France: Ministère de L' Education Nationale et de la Culture, 1992.

MANRIQUE, A. L. et all Ensino de Cálculo: uma Análise de Resultados Obtidos com o Uso do Software Imagiciel ***Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática,*** v. 2, p. 578-580, 1998.

MANRIQUE, A. L. et all Funções Associadas: uma Abordagem Gráfica em Ambiente Computacional ***Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática,*** v. 1, p. 141-142, 1998.

MANRIQUE, A. L. et all Teaching function in a computational environment. In: ***Proceedings of the 22nd Conference of The International Group For The Psychology of Mathematics Education***, Stellenbosch, South Africa. v.4, p. 273, jul. 1998.

PONTE, J.P., MATOS, J.M., ABRANTES, P. Investigação em educação matemática: implicações curriculares. ***Ciências da Educação.*** Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, v. 22, 1998.

TROUCHE, L. Calculatrices graphiques: la grande illusion. ***Repères.*** Villeurbanne***,*** n. 14, p. 39-55, jan. 1994.

VERGNAUD, G. La Théorie des champs conceptuals. ***Recherches en Didactique des Mathématiques***. Grenoble, v. 10 , n.2.3, p.133-169, 1990.