

A Geometria Dinâmica no Geometricks

Rúbia Barcelos Amaral

UNESP – Universidade Estadual Paulista

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

1- Introdução

O uso de tecnologia informática é uma realidade no cotidiano de muitas pessoas e existe uma necessidade crescente de familiarização com esta tecnologia, que também é sentida nas escolas. São vários os educadores matemáticos preocupados que a escola proporcione aos alunos o acesso à informática, desfrutando do potencial desta tecnologia para ampliar as possibilidades educacionais (Machado, 1993; Neves, 1993; Penteado & Borba, 2000; Ponte, Nunes & Veloso, 1991; Valente, 1993).

Ultimamente, como resultado do PROINFO, programa desenvolvido pelo governo federal para incentivar a informática educativa, e de outras iniciativas estaduais e particulares, já é possível encontrar várias escolas de níveis fundamental e médio que possuem uma sala ambiente de informática. Este fato, aliado a outras iniciativas das próprias escolas, tem mudado o cenário da educação, oferecendo novas possibilidades de trabalhar as diferentes disciplinas do currículo. Na Matemática, o uso de tecnologia informática tem sido fortemente recomendado, e é considerável a quantidade de trabalhos realizados nesta direção (Machado, 1993; Magina, 1997; Penteado, Borba & Gracias, 1998; Ponte, 1988 e 1995; Ponte, Nunes & Veloso, 1994; Valente, 1993).

Grande parte destes trabalhos ressalta que os softwares de geometria dinâmica podem ser um forte aliado para enfrentarmos os vários problemas presentes no ensino de Geometria (Almouloud & Hanura, 2000; Belfort, 2000; Sangiacomo, 1998; Silva, 1997). Com eles é possível investigar, descobrir e redescobrir, formular conjecturas, confirmar resultados, realizar simulações, e sobretudo levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática (Minga, 1996; Ponte, 1996; Resende & Stolfi, 1994; Saraiva, 1992; Valente, 1996 e Veloso, 1994). Balacheff & Sutherland (1995) acrescentam ainda que o Cabri-

Géomètre, um exemplo desse tipo de software, é um “*meio onde o conhecimento geométrico pode emergir a partir do desenvolvimento de atividades, de modo natural*” (p. 154), podendo ser utilizado desde o ensino fundamental, complementa Sant (1995). Além disso, eles são considerados uma ferramenta motivadora para o estudo da Geometria, tanto quando pensamos em ensino quanto em aprendizagem, podendo motivar tanto alunos quanto o professor.

Neste trabalho apresentarei um estudo de literatura sobre geometria dinâmica e sua relação com a Educação Matemática, com o objetivo de discutir suas potencialidades e as novas possibilidades que os softwares dessa natureza vêm trazer para o ensino da Geometria.

2 - Geometria Dinâmica

Este termo foi originalmente usado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen, de forma genérica, apenas com a intenção de ressaltar a diferença entre softwares de geometria dinâmica e outros softwares de geometria. Os softwares de geometria dinâmica possuem um recurso que possibilita a transformação contínua em tempo real ocasionada pelo “arrastar” (in Goldenberg e Cuoco, 1998). Para alguns autores como Laborde (1998), Goldenberg e Cuoco (1998) e Villiers (1998), este termo se refere à Geometria dos softwares que proporcionam ambientes onde podemos criar e construir figuras que podem ser arrastadas pela tela mantendo os vínculos estabelecidos nas construções, ou seja, um objeto ao ser movimentado, tem as medidas dos lados e ângulos da figura atualizados simultaneamente (Penteado, Amaral e Borba, 2000). Uma ilustração desse fato pode ser vista na figura 1, onde os vértices **A**, **B** e **C** do triângulo equilátero foram movimentados, mantendo-se as medidas dos lados e ângulos iguais e atualizadas simultaneamente.

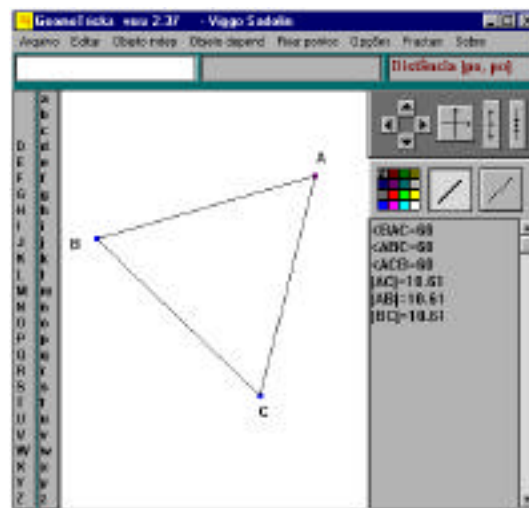
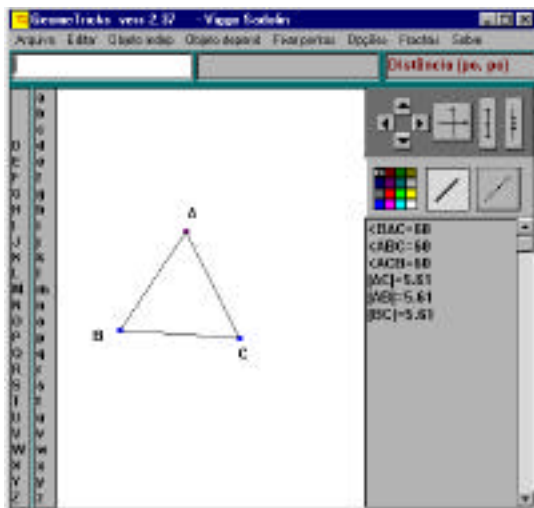


figura 1

2.1 - Sobre os softwares

Os softwares de geometria dinâmica mais conhecidos são o *Cabri-Géomètre*¹, o *Geometricks*, o *Geometer's Sketchpad*, o *Geometry Inventor*, o *Suposer* e o *Cinderela*.

Esses softwares permitem desenvolver trabalhos com diferentes conteúdos da Matemática. Frequentemente são usados no ensino da Geometria, onde é possível trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria Não Euclidiana e Geometria Analítica. Silva (1997) complementa que é possível trabalhar com conteúdos que não são do “campo geométrico”, como funções, onde há a possibilidade de construir gráficos de funções afim, e ressalta que para construir outros tipos de gráficos é indicado fazer por lugar geométrico.

Esta discussão sobre as possibilidades de utilização do software destaca a importância de pré determinar o enfoque que se deseja trabalhar. No campo da Geometria, é possível encontrar diferentes enfoques para o desenvolvimento de atividades, como ‘régua e compasso’, simulação, investigação, entre outros, dependendo dos objetivos pretendidos pelo professor e das suas perspectivas. Tratarei destes enfoques mais adiante.

¹ Existem duas versões do Cabri-Géomètre. Usarei a palavra “Cabri” para me referir ao “Cabri Géomètre” e “Cabri II” para me referir ao “Cabri-Géomètre II”, com a intenção de evitar repetições.

Ainda em relação aos softwares de geometria dinâmica, é possível discutir as diferentes abordagens de sua utilização. Segundo Gravina (1996), são duas as principais abordagens. Em uma, os próprios alunos realizam a construção das figuras e, neste caso, o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção. Numa segunda abordagem, os alunos recebem as figuras prontas, também conhecidas como “caixa preta”, construídas pelos professores, e então o objetivo passa a ser a descoberta de invariantes através da experimentação. Dependendo do nível de escolaridade dos alunos é possível, num segundo momento, demonstrar os resultados obtidos experimentalmente.

2.1.1 – Geometricks

O software de geometria dinâmica que destaco nesse trabalho é o Geometricks². Ele é um software de desenho, cálculo e construção, que permite formular e testar conjecturas no estudo da geometria, possibilitando que diversos conteúdos e conceitos possam ser desenvolvidos e trabalhados pelos próprios alunos, com o auxílio e incentivo dos professores, que, com a chegada de novas tecnologias, passam a ter como função organizar e coordenar as atividades desenvolvidas pelos estudantes (Borba, 1996).

Além disso, Penteado, Amaral & Borba (2000) acrescentam que o *Geometricks* traz um recurso para a introdução ao estudo da Geometria Fractal que permite definir elementos sobre os quais são aplicadas determinadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram os fractais (p. 5).

2.2 - Geometria dinâmica e Educação Matemática

O uso de softwares de geometria dinâmica levanta discussões relacionadas a várias questões da Educação Matemática. Há uma preocupação com o professor, com relação às condições necessárias para que ele utilize os softwares, dando atenção especial ao seu papel e do aluno, que mudam com a inserção desta tecnologia (Ponte, 1995; Borba, 1996). O aluno passa a ser mais ativo e

² Seu autor é Viggo Sadolin, de origem dinamarquesa. Os professores responsáveis pela tradução do software são a Prof. Dra. Miriam G. Penteado e o Prof. Dr. Marcelo C. Borba, ambos do Departamento de Matemática-UNESP-Rio Claro.

autônomo, construindo seus próprios conhecimentos, enquanto o professor passa a ser um mediador nesse processo, sendo responsável pela criação de um ambiente propício à aprendizagem (Ponte, 1995; Saraiva, 1992; Borba, 1996). Isto acontece porque esta tecnologia permite o desenvolvimento de atividades de livre exploração e construção geométrica, onde o aluno interage com o computador, num universo próximo ao que ele já conhece e está acostumado, que é o do “lápiz e papel” (Silva, 1997).

2.3 – Diferentes enfoques para a utilização dos softwares de geometria dinâmica

Os softwares de geometria dinâmica apresentam recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas que são feitas usualmente com régua e compasso, mas que com estes recursos levariam mais tempo (Saraiva, 1992). Além disso, com os softwares é possível realizar construções que com esta mídia tradicional seria difícil, e essa possibilidade é ampliada pela utilização de recursos como macros³, por exemplo.

Outro aspecto importante é a exploração. Com esses softwares o aluno realiza construções geométricas e explora suas propriedades. Nesse processo, o professor tem o papel de auxiliar o aluno a construir seus conhecimentos. Não é necessário que o professor informe quais as propriedades de um quadrado, por exemplo, ele pode dar a figura pronta para seus alunos e pedir que eles a explorem e verifiquem quais as propriedades desta figura geométrica. Com isso, os alunos é que irão concluir quais são as propriedades de um quadrado.

Nesse momento é possível que o aluno formule suas próprias conjecturas e tente verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso é possível devido aos recursos do software, como o arrastar, que será discutido no próximo item, que possibilita a simulação de diferentes “formas” da figura, como se o aluno estivesse verificando todos os casos possíveis. Entre as diferentes atividades que possibilitam este tipo

³ A Macro “serve para criar atalhos nas construções, refazendo de maneira imediata algumas figuras já criadas, arquivando os procedimentos que são repetidos e ficam ocultos, a partir da especificação de objetos criados, chamados objetos iniciais” (Lourenço, 2000, p. 57)

de exploração gostaria de destacar as que são chamadas de “cenários para investigação”, discutidos por Skovsmose (2000), caracterizado *por um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação* (p.69), onde os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada (p.66) procurando formular questões e dar explicações. O convite é simbolizado pelo ‘O que a acontece se...?’ do professor (p.73), e ele somente se torna um cenário para investigação se os alunos aceitarem o convite.

2.4 – As possibilidades do arrastar

O arrastar é uma das principais características dos softwares de geometria dinâmica. Alguns autores apresentam diferentes denominações como *drag-mode* (modo arrastar), por Cowper (1994), *clicar e arrastar*, por Goldenberg e Cuoco (1998), *agarrar-arrastar*, por Henriques (1999) e simplesmente *arrastar*, por Olivero et al (1994) e Laborde (1998). Com o mouse é possível *agarrar* um objeto e *arrastá-lo* pela tela, movimentando-o. Isto possibilita *a abertura de uma nova grande gama de aplicações e investigações educacionais em geometria* (Henriques, 1999, p.13), o que permite a descoberta e redescoberta de conceitos e propriedades relativos à Geometria Euclidiana Plana (Barbosa e Lourenço, 1998).

Além disso, há uma discussão de que o uso da informática propicia outros aspectos relacionados com a Matemática (Borba, 1996), e o arrastar é um exemplo, pois possibilita que a geometria dinâmica tenha seus próprios “postulados”, diferentes da Euclidiana (Goldenberg e Cuoco, 1998). Por exemplo, o alongamento e contração de um segmento é um novo objeto neste ambiente, e presume-se que haja a preservação da proporcionalidade. Se um ponto P é fixado em um segmento AB arbitrariamente e se AB é ‘esticado’ ou ‘contraído’ pelo mouse através do ponto B, a proporcionalidade PA/PB é preservada. Isto é um “postulado” da geometria dinâmica, mas não da Euclidiana. Se esta é realmente uma descoberta, esta “hipotética nova” geometria merece atenção, e devem ser examinadas e descritas as relações existentes entre seus novos teoremas e os da Geometria Euclidiana (Goldenberg e Cuoco, 1998).

Cowper (1994) afirma que o arrastar abre novas possibilidades para o ensino e aprendizagem de Geometria, baseado na exploração, possibilitando que conceitos básicos desta tornem-se mais interessantes e acessíveis. Ao arrastar um objeto pode-se *observar todos os “casos da figura” possíveis para um mesmo conjunto de figuras com a mesma propriedade* (Henriques, 1999, p.53). O objeto inicial da construção parece deformar-se continuamente até o instante final, dando a impressão de que é possível checar um número infinito de casos (Goldenberg e Cuoco, 1998), o que possibilita o trabalho de verificação e validação.

Esse *arrastar* levanta uma questão importante: como caracterizar uma construção geométrica? Para Laborde (1998), um quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos retos só é considerado um quadrado num software de geometria dinâmica se passar pela “prova do arrastar” (Olivero et al, 1998), ou seja, quando ao ser arrastado um de seus lados ou vértices ele continuar com quatro lados e ângulos iguais, isto é, quando mantiver suas propriedades. As figuras abaixo dão uma ilustração desta situação: na figura 2, o quadrilátero é um quadrado, o que não acontece na figura 3.

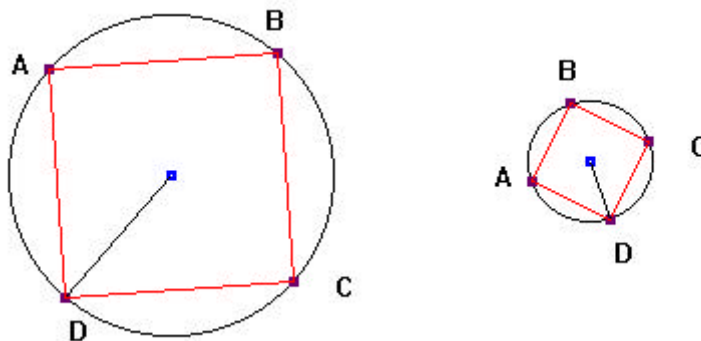


figura 2

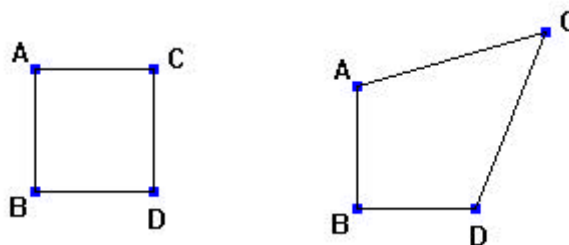


figura 3

Isso é possível devido às propriedades invariáveis, tratadas por Cowper (1994), que ocorrem nas transformações ocasionadas pelo arrastar. Ele afirma que as relações existentes nas construções são geralmente invariáveis durante as transformações ocasionadas pelo arrastar, relações estas que são: paralelismo; ortogonalidade; proporcionalidade (proporção de comprimentos); simetria pontual (rotacional); simetria axial (reflexivo); incidência (em alguns casos).

Essas invariantes permitem que a partir da exploração de conjecturas se chegue às demonstrações, que divide o arrastar em três modalidades: *arrastar para percorrer*, onde é possível encontrar ao acaso regularidades e configurações interessantes; *arrastar para testar*, onde procura-se checar alguma hipótese; e *lugar geométrico pelo arrastar*, que significa que um certo lugar geométrico C é construído empiricamente ao arrastar um ponto P, em uma forma que preserva algumas regularidades de uma certa figura (Olivero et al, 1998).

3 – Considerações finais

Neste trabalho busquei discutir as potencialidades dos softwares de geometria dinâmica, bem como ressaltar as novas possibilidades que esta tecnologia trás para o estudo da Geometria. Porém, a literatura aponta é preciso estar atento porque a qualidade de sua utilização depende muito da forma como as propostas são interpretadas e colocadas em prática pelos professores. É importante ressaltar que se os professores não estiverem preparados, corre-se o risco de que haja apenas uma ‘troca’ de mídia, deixando de utilizar o lápis e papel para usar o computador, sem qualquer mudança ou reorganização na forma como tradicionalmente vem sendo feito. Ou, em outra hipótese, os computadores nem serão utilizados (Borba, 1996).

Buscando contribuir para a formação docente, estou desenvolvendo minha pesquisa, em nível de mestrado, procurando analisar como os professores estão usando os softwares de geometria dinâmica, e tentando encontrar as principais características dos professores que fazem uso dessa tecnologia em sua prática docente. Desse modo, penso que a contribuição desta pesquisa será no sentido

de apresentar subsídios para preencher as lacunas de cursos de formação nessa área.

4 – Bibliografia

- ALMOULOU, S.A.; HANURA, N.C.A. Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 52, 2000, Brasília. *Anais...* Brasília, SBPC, 2000. 1 CD-ROM.
- BALACHEFF, N.; SUTHERLAND, R. Domínio epistemológico de validade dos micromundos: Tradução MAGINA, S.P.; MACHADO, S.D.A. O caso do Logo e do Cabri-Geometre. *Cadernos de Educação Matemática*, v.2, p.150-68, 1995.
- BARBOSA, R. M.; LOURENÇO, M.L. Nova investigação de aplicabilidade do Cabri-Géomètre I: Geometria Analítica. In: VI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais...* São Leopoldo, vol. II, p. 725-727, 1998.
- BELFORT, E. Geometria Dinâmica; aplicando a Informática ao Ensino. In: SEMANA DA MATEMÁTICA, 12, 2000. *Anais...* U.M.E., v.1, n.1, p.54-62, 2000.
- BELFORT, E.; GANI, D.C. Painéis em Geometria Dinâmica: novas possibilidades. In: ENCONTRO DE PROFESSORES E PESQUISA DO CEC, 1., 2000. *Anais...* CEC, v.1, p.102-10.
- BORBA, M.C. Informática trará mudanças na educação brasileira? *Zetetiké*, Campinas, v.4, n.6, p.123-4, jul/dez. 1996.
- COWPER, W. *Exploring drag-mode geometry*. In *Discovering Geometry with a computer – Using Cagri Géomètre*. Heinz Schumann and David Green. Ed. Chartwell-Bratt, 1994.
- GOLDENBERG, E.P.; CUOCO, A.A. *What is dynmic geometry?* In: LEHER, R.; CHAZAN, D. *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum, 1998.
- GRAVINA, M.A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado de geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte, 1996.

- HENRIQUES, A. Ensino e aprendizagem da geometria métrica:... Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 1999.
- LABORDE, C. Relationships between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. In: INSLEY, D.; JOHNSON, D.C. (Ed). *Information and communications technologies in school mathematics*. Grenoble: Champman and Hall, 1998.
- LOURENÇO, M. L. *Cabri-géomètre II: introdução e atividades*. São José do Rio Preto: FAFICA, 2000.
- MACHADO, N.J. Informática na escola: significado do computador no processo educacional. *Acesso: Revista de Educação e Informática*, ano 4, p.28-35, dez. 1993.
- MAGINA, S. O Computador e o ensino da matemática. In: EEMAT, 10., Rio de Janeiro, 1997. *Anais...* 1997, p.15-6.
- MINGA, V. A minha experiência com o Cabri. *Educação e Matemática*, n.37, p.9-12, jan-mar., 1996.
- NEVES, M.A.F. *O computador na recuperação em Geometria de alunos do 9º ano*. 1993. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1993.
- OLIVERO, F.; ARZARELLO, F.; MICHELETTI, C.; ROBUTTI, O. Dragging in cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. *PME*, Stellenbosh, South Africa: 1998.
- PENTEADO, M.G.; BORBA, M.C. (Org) *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Olho d'Água, 2000.
- PENTEADO, M.G.; AMARAL, R.B.; BORBA, M.C. *Manual do software Geometricks*. São Paulo: UNESP, 2000.
- PENTEADO, M.G.; BORA, M.C.; GRACIAS, T.S. Informática como veículo de mudança. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.6, n.10, p. 77-86, jul/dez. 1998.
- PONTE, J.P. *O computador um instrumento da educação*. 3.ed. Lisboa: Texto, 1998.

- _____. Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática*, n.34, p.2-7, abr/jun., 1995.
- _____. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: PONTE, J.P. et al. *Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática – que formação?* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1996.
- PONTE, J.P.; NUNES, F.; VELOSO, E. *Computadores no Ensino da Matemática: uma coleção de estudos de caso*. Lisboa: Edição da Associação dos Professores de Matemática e do Pólo do Projeto Minerva do DEFCUL, 1991.
- RESENDE, P.J.; STOLFI, J. *Fundamentos de geometria computacional*. Recife: Departamento de Informática, 1994.
- SANGIACOMO, L. *O processo de mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica*. Uma engenharia didática com o auxílio do Cabri-Géomètre. 1996. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1996.
- _____. O processo de mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica. Uma didática com o auxílio do Cabri-Géomètre. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 1998, São José do Rio Preto. *Anais... SBEM-SP, FIRP/UNESP*, v.1, p.218-22, 1998.
- SANT, J.M. O 'Cabri-Géomètre'. *Revista do Professor de Matemática*, 1995. SBM, n.29, p.36-9, 1995.
- SARAIVA, M.J.F.S. *O computador na aprendizagem da geometria: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade*. 1992. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1992.
- SILVA, M.C.L. *Teorema de Tales: uma engenharia didática utilizando o Cabri-Géomètre*. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997.
- SILVA, M.C.L.; CAMPOS, T.M.M. Teorema de Tales: uma engenharia didática utilizando o Cabri-Géomètre. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 1998, São José do Rio Preto. *Anais... SBEM – SP, FIRP/UNESP*, p.206-7, 1998.

- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, ano 13, n. 14, p.66-91, 2000.
- VALENTE, J.A. (Org). Computadores e conhecimento: repensando a educação. Campinas: Gráfica UNICAMP, 1993.
- _____. *O professor no Ambiente Logo: formação e atuação*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1996.
- VELOSO, E. Geometria no 10º ano: o fracasso que era previsível. *Educação e Matemática*, n.30, p.29-30, abr/jun. 1994.
- VILLIERS, M. An alternative approach to proof in dynamic geometry. In: LEHER, R.; CHAZAN, D. *Designing learning environments for developing understanding of Geometry and Space*. Local: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.