PREPARANDO O RACIOCÍNIO DEDUTIVO

Dra.Lilian Nasser[1]

Lucia A. de A. Tinoco[2]

Um dos objetivos incluídos nos planejamentos de quase todos os professores de matemática é "***desenvolver o raciocínio lógico***" . Apesar disto, os alunos passam pela escola sem vivenciar atividades que desenvolvam esse tipo de raciocínio ou que os preparem para o domínio do processo dedutivo.

Isto vem sendo observado em todos os níveis de escolaridade, inclusive entre alunos universitários de matemática, ou ainda, entre professores de matemática em exercício.

O tipo de ensino ministrado na maioria das escolas, com os alunos recebendo as informações prontas, repetindo afirmações e procedimentos sem significado nem relação com o seu dia-a-dia, sem incentivo ao questionamento ou às explicações é um forte elemento motivador desta situação.

A comunidade internacional de Educação Matemática vem reconhecendo a importância desse fato. Assim, a investigação sobre "***argumentação e provas no ensino da matemática***" recebe atenção cada vez maior dos pesquisadores e constitui atualmente uma linha de pesquisa marcante, sempre presente em congressos e publicações da área.

Grande parte das pesquisas internacionais neste campo foram relatadas por Hanna e Jahnke (1996), no capítulo intitulado 'Proof and proving', do "International Handbook of Mathematics Education", (pp. 877-908). Nele são citadas pesquisas sobre as funções da prova (Hanna, 1990; de Villiers, 1990), os tipos de prova aceitos por matemáticos e por educadores matemáticos (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Davis, 1993), além de investigações sobre os progressos do raciocínio dedutivo (Hersch, 1993; Hoyles, 1997).

Uma prova pode ter várias funções. A mais conhecida é a de **validar** um resultado, isto é, comprovar que é verdadeiro. Essa função é, sem dúvida, fundamental na Matemática, mas nem sempre é motivadora para alunos da escola básica. Essa função adquire significado especial quando há alguma dúvida, ou seja, quando é preciso validar ou refutar uma conjectura. Além disso, de acordo com Hanna and Jahnke (1996),

> ***"Estudos recentes confirmam que é crucial para o professor tomar parte ativa em ajudar os estudantes a compreender porque uma prova é necessária, e quando ela é válida". (p. 887)***

---

[1] IM/UFRJ – Projeto Fundão e CETIQT/SENAI
[2] IM/UFRJ – Projeto Fundão

Outra função da prova é a de **explicar ou elucidar**, isto é, mostrar porque o resultado é verdadeiro. Algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não esclarecem o motivo pelo qual a afirmativa vale. Por exemplo, as provas por absurdo, ou as provas por indução. Segundo de Villiers (1991),

> ***"Em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos". (p.261)***

Alguns pesquisadores, como Bell (1976), enfatizam a função da prova de **sistematizar**, isto é, **preparar para o domínio do processo dedutivo**. O aluno vai se familiarizando com as estruturas da matemática, realizando provas simples ou acompanhando demonstrações feitas pelo professor. Para isso, o professor deve deixar claro para os alunos as dificuldades encontradas, e o motivo de certos passos da demonstração.

Também é preciso ter em mente que vários tipos de raciocínio, além do dedutivo, são importantes para a atividade matemática.

> "***Não se deve esquecer o papel dos argumentos substanciais nas fases de procura e validação de conjecturas na resolução de problemas ... os argumentos analíticos, característicos da prova matemática, não são os únicos usados entre os matemáticos profissionais. Esta forma de raciocínio é freqüentemente estéril, mesmo um obstáculo, na fase de criação e descoberta da resolução de problemas, onde formas de argumentação substancial, particularmente indução empírica e analogia, são permitidas, e mesmo necessárias". (Godino e Recio, 1997, p.318)***

A presente pesquisa mostrou que tais tipos de raciocínio são desenvolvidos por meio de um trabalho contínuo, incentivando o aluno a explicar, argumentar, conjecturar, analisar soluções, enfim, organizar e comunicar suas idéias. Neste sentido, Bell cita ainda as funções da prova de **descoberta** (a descoberta de novos resultados) e **comunicação** (a transmissão do conhecimento matemático).

Godino e Recio (1997), investigaram os sentidos que a prova adquire nos diversos contextos institucionais e individuais e a repercussão disto no processo ensino-aprendizagem.

> "A superposição de diferentes sentidos institucionais e matemáticos da prova é também observada em diferentes níveis de ensino, o que pode explicar algumas dificuldades e conflitos cognitivos dos estudantes". (p. 313)

A análise dos tipos de prova é importante para o seu estudo sob o ponto de vista do ensino de matemática.

Para os matemáticos, toda prova deve ser **formal**, na qual é essencial o rigor lógico dedutivo. No entanto, para os alunos em geral, este tipo de prova é quase inacessível. Alguns pesquisadores como Hanna (1990), e Balacheff (1998), salientam a importância da prova **ingênua**, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta. Rezende e Nasser (1994) também encontraram em sua investigação os seguintes tipos de prova: **justificativa pragmática,** na qual a veracidade de uma afirmativa se dá com base em apenas um ou alguns casos particulares; **recorrência à autoridade**, em que o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro texto; **exemplo crucial**, na qual o aluno desenvolve um raciocínio de caráter bem geral, embora apoiado em um exemplo e **justificativa gráfica**, que tem uma figura como base.

Dependendo da faixa etária e do nível de raciocínio dos alunos, o professor deve aceitar, e até mesmo estimular justificativas desses tipos, como parte do processo de construção do raciocínio dedutivo.

> ***"A prática freqüente pelos alunos da argumentação, da justificação das próprias afirmações e da procura de uma explicação em defesa das conjecturas que formulam, no decorrer das atividades de investigação, constituem modos válidos para melhorar o seu discurso matemático e as formas de exprimir os seus raciocínios" (Veloso, 1998, p. 360).***

O presente trabalho foi desenvolvido por um grupo do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, contando com a participação de professores de ensino fundamental e médio e de licenciandos[3] e tendo como base a pesquisa desenvolvida na Inglaterra pela Dra. Celia Hoyles (1997).

Os primeiros experimentos realizados em turmas cujos professores não tinham uma prática voltada para a argumentação, com questões do teste utilizado por Hoyles, mostraram que os alunos não eram capazes de justificar qualquer afirmação, por mais simples que fosse, tanto no campo geométrico como no algébrico.

A realidade hoje mostra que a maioria dos estudantes não está aprendendo a raciocinar ***e*** comunicar suas idéias quando estuda matemática. Além de não ver uma ligação significativa do conteúdo com sua vida, eles apenas repetem os modelos dados pelo professor ou aplicam fórmulas, e em nenhum momento são levados a questionar uma resposta obtida, ou mesmo verificar se ela é coerente com a pergunta do problema.

---

[3] M. Palmira da C. Silva, Anna Lucia Benevides, Aimoré A. de Oliveira, Fábio Coutinho, J. Alexandre R. Pereira, Marcos Vinícius S. Correia e Mirian Salgado.

Contribui para esse quadro a crença de grande parte dos professores de matemática em que, para trabalhar com esta disciplina, não é importante a língua materna.

Nos estudos desenvolvidos pelo grupo, partimos do pressuposto de que a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries, para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, ou numa questão de matemática.

Neles foram utilizadas algumas estratégias, que se mostraram eficientes no desenvolvimento da habilidade de argumentação, em turmas desde a 5ª série do ensino fundamental até o final do ensino médio.

- **Após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema.**

Exemplo

O quociente de dois números naturais é 1.
Qual é a diferença entre eles? Justifique.

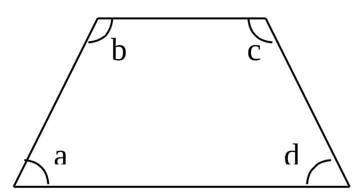
A maioria dos alunos de 5ª série concluiu corretamente, embora raciocinando a partir de casos particulares, ou mesmo supondo que ambos os números são iguais a 1. Após a discussão, o nível de justificativas corretas melhorou em 40%.

- **Avaliar justificativas apresentadas por outros estudantes.**

Esta estratégia foi por vezes prejudicada pela falta de hábito dos alunos com a auto-avaliação, mas em geral produziu resultados surpreendentes.

Exemplo

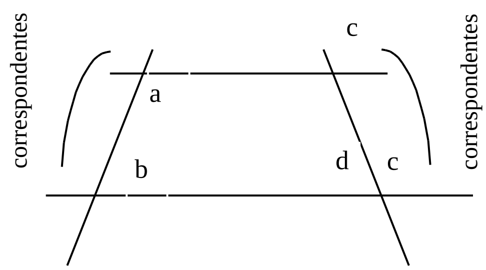
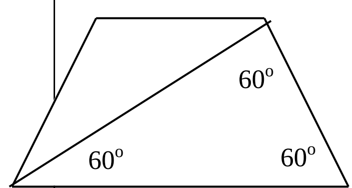
A soma dos ângulos internos de um trapézio é 360º .
Justifique esta afirmação.



Muitos alunos ainda mostraram dificuldade, ou particularizaram. Para provocar a discussão sobre os erros cometidos e desenvolver a capacidade de análise dos alunos, após a resolução individual, a atividade foi desdobrada como se segue.

A seguir estão algumas das justificativas apresentadas pelos estudantes. Considerando estas justificativas, responda:

1. Qual justificativa é mais parecida com a que você daria?
2. Qual justificativa é melhor para explicar a um colega?
3. Para qual justificativa seu professor daria melhor nota?

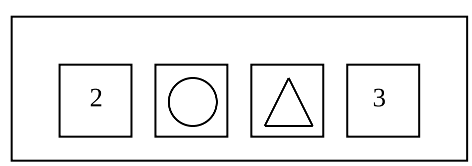
A)  $a + b = 180^o$ $d + c = 180^o$ *Então* $a + b + c + d = 360^o$. *Obs: ângulos correspondentes são congruentes.*	*B)*  *Cada triângulo tem:* $60^o + 60^o + 60^o = 180^o$ *Como são dois triângulos:* $180^o \times 2 = 360^o$.
C) *Nós já vimos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é* 360^o. *O trapézio é um quadrilátero. Então, a soma dos ângulos internos de um trapézio é* 360^o.	*D)* *Cada triângulo tem* 180^o . *Dividindo essa figura em dois triângulos, obtemos* 360^o.

- **Propor problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico, não importando o tópico que esteja sendo abordado.**

Este tipo de atividade, mais adequada a alunos do final do ensino fundamental e do ensino médio, propicia a organização de hipóteses e o hábito de analisar possibilidades e suas implicações.

Exemplo

Sobre a mesa há 4 cartões. Cada um deles tem uma figura geométrica em uma das faces e um número natural na outra.



Carlos disse a Artur:
"Estes cartões seguem uma regra: <u>sempre que, numa face, houver um número par, na outra, há um triângulo</u>".

Artur quer ter certeza de que Carlos disse a verdade.
Que cartão ou cartões Artur <u>terá que virar</u> para verificar isto? Justifique.

- **O mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de observar a variação de formas de argumentação.**

Exemplo

Observe a seqüência:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

a) Se você quiser continuar a seqüência, que número você escreverá depois do 26?

b) A partir de um termo qualquer da seqüência, que operação aritmética você deve fazer par obter o termo seguinte da seqüência?

c) Escolha um termo dessa seqüência (com exceção do 1º e do último). Determine o termo anterior e o sucessor desse número na seqüência.
Que operação aritmética você fez para determinar cada um?
Determine a média aritmética entre os termos encontrados.
O que você observou?
Isso vai acontecer se você escolher outro termo?
Explique por que isso ocorre.

d) Considere o número 14 da seqüência e escreva dois pares de números que distem igualmente dele e que também sejam da seqüência (por exemplo: o 2º termo antes e o 2º termo depois do 14, o 3º termo antes e o 3º termo depois do 14):

___________ e __________; ___________ e ___________.

A seguir, determine a média aritmética dos números de cada par.

e) Faça o mesmo que você fez no item (d), considerando agora o número 17.
f) O que você observou nos itens (e) e (f)? Explique.

Este problema foi aplicado em uma turma da 8ª série, que não tinham estudado progressões, e em turmas do 1º e do 3º ano do ensino médio.

.

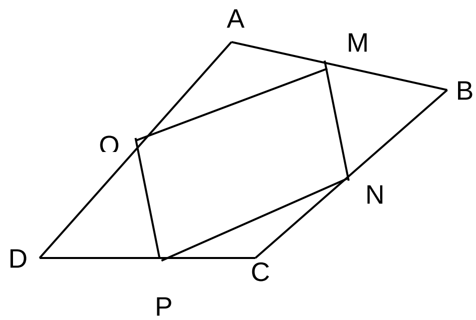
Nas respostas dadas pelos três grupos de alunos, constou-se que nenhum usou explicitamente a propriedade das progressões. A justificativa algébrica só foi apresentada por alunos do 3º ano do ensino médio.

- **Uso do computador (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la, ou a procurar um contra-exemplo.**

A observação de componentes da figura que se mantêm invariantes mediante deslocamentos efetuados com ajuda de softwares propicia ao aluno perceber passos importantes da demonstração.

Exemplo clássico, experimentado com professores (teorema de Varignon)

"Que tipo de quadrilátero fica formado quando se ligam os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer?"



Variando-se o vértice B, e mantendo-se os demais fixos, é possível observar o paralelismo entre MN, AC e PQ. O mesmo acontece, variando o vértice D.

Tais observações facilitam em muito a conclusão do teorema de que PQMN é um paralelogramo.

- **Atividades que ajudam a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa.**

No trabalho com alunos do 3º e 4º ciclos, após longo período de atividades de argumentação informal, os alunos foram capazes de realizar demonstrações, precedidas sempre pela identificação da hipótese e da tese. Atividades explicitamente voltadas para isto têm sido realizadas em cursos de formação de professores e de especialização.

Exemplo de questão do Exame Nacional de Curso de Matemática de 1998, usada com alunos do primeiro ano da UFRJ e com dois grupos de professores do ensino básico.

> ***O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir desta definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação:***
>
> ***Ter diagonais perpendiculares é uma condição*** *necessária* ***para que um quadrilátero seja um losango.***
>
> ***a) Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo "se ... então".***
> ***b) Demonstre o teorema enunciado no item (a).***
> ***c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item (a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando a sua resposta.***

Erros como: demonstração errada, troca do teorema pela recíproca e justificativa da recíproca com exemplo errado apareceram em todos os grupos.

Além dos aspectos específicos de conteúdo de matemática e de lógica, aspectos metacognitivos como falta de confiança em si mesmo, incapacidade de auto-avaliação e crença na pouca importância da língua materna para o trabalho em matemática são fatores que prejudicam a superação das deficiências. A própria concepção dos professores do que seja um trabalho em geometria é um obstáculo. O mesmo se observa em relação à álgebra. A atividade álgebrica na escola básica, restrita ao treinamento de procedimentos de manipulação de expressões e regras de resolução de equações, sem nenhum significado para os alunos, os impede de recorrer aos recursos algébricos nas atividades de generalização e de argumentação.

Dois exemplos ilustram a afirmação acima.

1) ***"A soma de dois números pares é um número par. Diga se esta afirmação é verdadeira ou falsa, justificando."***

Todos os alunos responderem que a afirmação era verdadeira mas as justificativas, quando existiam, se limitavam a alguns exemplos particulares (justificativa pragmática). Nem entre os alunos do nível médio, apareceu a representação algébrica de um número par (2p, 2m,..).

2) ***"A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3. Justifique."***

Por sugestão do professor, alguns tentaram representar algebricamente a soma dos três números consecutivos. Respostas como: **1x + 2x+ 3x** e **4x + 5x + 6x** mostram a falta de significado atribuído por esses alunos à linguagem algébrica, o que os impede muitas vezes de usar a linguagem algébrica para argumentar ou os levam a errar quando tentam.

Este trabalho levou o grupo a algumas conclusões.

- É necessário um trabalho contínuo durante um longo período para que haja um progresso sensível no nível de argumentação dos alunos.
- A habilidade de argumentar e provar resultados de um certo campo da matemática como, por exemplo, o geométrico, não se transfere para os outros campos, como o numérico e o algébrico.
- O trabalho freqüente com problemas-desafio que envolvem um raciocínio lógico, mas não estão diretamente ligados a conteúdos matemáticos favorece o desenvolvimento da habilidade de argumentar e de demonstrar resultados matemáticos.
- O desenvolvimento das habilidades de argumentação e prova em matemática está estreitamente ligado ao domínio da língua materna e à atribuição de significado aos conteúdos matemáticos pelos alunos.

Bibliografia

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Em D. Pimm (Ed.): Mathematics, Teachers and Children, 216-235. Londres: Hodder & Stoughton;

Bell, A. (1976): A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Educational Studies in Mathematics, 7, 23-40;

De Villiers, M.D. (1991): Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. Atas do PME-15, vol. 1, 255-262, Assissi, Itália;

Godino, J. D. e Recio, A. M. (1997): Meaning of Proof in Mathematics Education. Atas do PME 21, vol. 2, pp. 313-320, Finlândia;

Hanna, G. (1990): Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21 (1), 6-13;

Hanna, G and Jahnke, H. (1996): Proof and proving. In: International Handbook of Mathematics Education, 877-908;

Hersch, R.(1993): Prooving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399;

Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approaches to proof. For the Learning of Mathematics, 17 (1), 7-16;

Nasser, L. & Tinoco, L. (1999): Helping to develop the ability of argumentation in mathematics. Atas do PME-23, vol. 1, p. 303, Israel, 1999;

Nasser, L. e Tinoco, L. (2001): Argumentação e Provas no Ensino de Matemática, IM/UFRJ, Projeto Fundão, Rio de Janeiro;

Rezende, J. e Nasser, L. (1994): Kinds of argumentation used in geometry. Atas do PME-18, vol. 1, p. 66, Lisboa, Portugal;

Veloso, E. (1998): Geometria – Temas Actuais, Instituto de Inovação Educacional, Lisboa.