Educação Matemática e a construção do pensamento lógico matemático

Nilza Eigenheer Bertoni UnB- DF

A abordagem tradicional no ensino de matemática advoga a aquisição do conhecimento matemático pelo estudo de uma matemática formalizada, a ser explicada e exemplificada. Nos livros didáticos correspondentes, há um esforço por estruturar, definir, e até mesmo, algumas décadas atrás, por desenvolver toda uma geometria lógico-dedutiva. Ainda assim nota-se, na maioria das vezes, que, no conjunto apresentado, a abordagem da matemática não é consistente nem clareadora; havendo muitos erros, lacunas, impropriedades, ocultamentos e falta de justificativa para a maioria dos procedimentos. Como exemplo de erro, citamos o tratamento dado ao número Π, onde se trabalha apenas com o quociente de dois números racionais, obtidos por medidas diretas dos alunos, dando a entender que, da precisão crescente dessas medidas, surgem infinitas casas decimais, de onde, num passe de mágica, emerge um número irracional. Uma lacuna clássica ocorre quando se caracteriza fração, ora por meio de uma relação parte-todo ora por meio da divisão de dois números naturais, sem estabelecer as relações que permitem caracterizar o mesmo conceito por abordagens distintas. Exemplo de impropriedade é a chamada racionalização do denominador, visto que denominador surge no âmbito de números fracionários, sendo sempre um número natural.

Esse sistema de ensino visa a que o aluno adquira categorias variadas de destrezas matemáticas específicas: operações algorítmicas, resolução de equações, solução de tipos de problemas etc. O processo não contribui para o desenvolvimento de uma capacidade de investigação autônoma. Falhas freqüentes desses alunos, na prática matemática, são a particularização de uma situação proposta e sua resolução como se fosse a situação original; ou soluções que dão certo por acaso, sem que o aluno se dê conta disso, apostando na validade da resolução.

As tendências atuais em Educação Matemática advogam o fazer matemática – com uso do raciocínio investigativo, indutivo, inferencial, como básicos para a aquisição do conhecimento matemático. Mendes (1998), em artigo na revista da APM, ressalta a relevância das atividades investigativas por parte dos alunos, nas quais eles devem procurar entender determinada situação proposta, analisá-la, levantar questões, trocar opiniões, podendo descobrir soluções, padrões ou generalizações, usando, entre outros processos, a observação, exploração, comparação, inferência. Entretanto, ocorre freqüentemente o fato de, mesmo alunos que vivenciam esse processo, apresentarem dificuldades na utilização de raciocínio matemático em situações-problema mais complexas, não conseguindo buscar estratégias produtivas de maior recurso, nem controlar, avaliar e redirecionar seus procedimentos.

Estamos frente a dois sistemas insuficientes de ensino. No ensino tradicional, Barbin (1993) comenta que o papel primordial conferido ao sistema lógico-dedutivo na aprendizagem conduz á uma forma expositiva de ensino, a um espetáculo matemático, vinculado à concepção de matemática como produto, em detrimento da atividade matemática, isto é do processo de construção dos saberes.

Por outro lado, o ensino mais atualizado, ainda que desenvolvendo o fazer e a investigação, tem se deparado com perplexidades e bloqueamentos, por parte dos alunos, no decorrer dessas atividades investigativas. Estamos procurando meios de ter alunos que superem esses obstáculos, que saibam inquirir-se e buscar responder questões do tipo: ***Por que não funcionou? Se não isso, então o que? Qual parte de minhas hipóteses e das ações decorrentes geraram contradições*** ? Na prática, esse tipo de pensamento inclui o inquirir, conjeturar, testar; o controlar procedimentos, o argumentar e contra argumentar, o raciocínio mental e visual e registros escritos.

Nossa hipótese é que tem ocorrido um insuficiente acompanhamento e desenvolvimento dos processos evolutivos do raciocínio do aluno. Assumindo que saber matemática é, fundamentalmente, fazer matemática (NCTM, 1991), a idéia central de nossa reflexão é explicitar aspectos da construção do pensamento lógico-matemático ao longo da construção do conhecimento matemático no indivíduo.

O pensamento do aluno e a mediação do professor

Bernard coloca que a Didática da Matemática desenvolveu conceitos pertinentes e operacionais (como o da transposição didática de Chevallard, do contrato didático de Brousseau - integrado à sua teoria de situações didáticas), instrumentos que permitem ao professor organizar e gerar situações de aprendizagem, facilitando o acesso do aluno aos conhecimentos matemáticos. Entretanto, o autor acrescenta que esses desenvolvimentos teóricos praticamente não se interessaram pelo funcionamento do pensamento do aluno.

Citando Marc Legrand, Bernard lembra que ***o pensamento matemático não é o pensamento natural nem mesmo seu prolongamento, ele é outro e é essencialmente este outro modo de pensar que se constitui num saber útil, utilizável, permitindo ao sujeito mudar suas representações do mundo, conceber um outro modo de colocar problemas e de examinar suas capacidades de resolvê-los.*** Bernard afirma que a mediação do professor ocorre nesse espaço situado entre pensamento natural e pensamento matemático, e que se torna necessária, por exemplo, para um aluno que descobre lentamente o cálculo e as equações algébricos, fase na qual a percepção de que é possível efetuar cálculos com dados desconhecidos representa uma revolução no pensamento do aluno.

A demonstração na aprendizagem da matemática

A demonstração desapareceu das nossas práticas escolares há algumas décadas, deixando tristes os saudosistas. Entretanto, salvo raras exceções, essa prática recaía em memorizações a serem apresentadas em provas, ou, no máximo, na apresentação de um texto semi-memorizado e apresentado dentro de certas normas – por exemplo, separando as hipóteses das conclusões, citando os teoremas usados; indicando os objetos a que se referia etc Isso tornava-se um ritual que, para a maioria dos alunos, não tinha sentido algum. A demonstração apresenta algo pronto, eliminando, assim, o significado e a necessidade da mesma. Além do mais, esse caminho é bem diferente do caminho da investigação.

Para Barbin (1993), importa antes de tudo compreender o sentido desse sistema de demonstração, sob pena de reduzi-lo a uma forma, ou a um formalismo. Barbin interroga-se sobre o mito que consiste em considerar como equivalentes demonstração e raciocínio dedutivo. Ela afirma que é importante refletir sobre as etapas de aprendizagem desse sistema de demonstração.

Segundo essa autora, entre os primeiros gregos, os objetos geométricos eram noções esquemáticas (reta, ângulo) inseridas na resolução de problemas (em particular de distâncias inacessíveis), enquanto na obra de Euclides os objetos geométricos são conceitos idealizados. Entre os primeiros, a argumentação tem um objetivo de explicar, no segundo, tem um objetivo de reconhecer o caráter necessário e indubitável de uma proposição – um critério de existência e de verdade. Barbin comenta que essa concepção de demonstração, bem como a de objetos ideais, é bem estranha a um aluno de 14 anos.

A construção do pensamento lógico matemático e a educação matemática

Sabemos, tanto da teoria quanto da prática em Educação Matemática, que há modos de desenvolver a aprendizagem da matemática conduzindo naturalmente ao uso contínuo do raciocínio lógico. Exemplos de processos nesse sentido são o apoio à elaboração de estratégias próprias dos alunos, o desenvolvimento da compreensão da lógica subjacente a processos e definições; o estímulo à validação constante de argumentos e de resultados.

Se queremos que essas práticas se incorporem a um desenvolvimento mais consistente do pensamento lógico matemático, é essencial que a proposta didática inclua procedimentos para o desenvolvimento, nos alunos, do processo investigativo, do processo argumentativo e de incursões iniciais no processo demonstrativo. Uma argumentação é caracterizada pela pertinência, por destacar o plausível. Uma demonstração tem por objetivo provar, dentro de um sistema estabelecido, a verdade de uma afirmação. Como o refinamento do pensamento argumentativo/justificativo é conseguido a par da observação e assimilação dos princípios lógicos de inclusão, implicação, condição, conseqüência, correlação entre duas afirmações, resulta que a prática da argumentação pode ser um caminho para iniciar a construção gradativa de diversos níveis de criação consistente e demonstração em matemática.

É interessante lembrar que os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática, 5ª a 8ª série, propõem um trabalho nesse sentido:

“No 3º ciclo é importante que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los. Ao desenvolver a capacidade de buscar soluções, favorece-se a que o aluno passe a reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis.

A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificà-la.

Assim, um argumento será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos réplicas que lhe forem impostos.

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada pôr sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem pôr objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, pôr sua vez, sustenta a demonstração.

Se pôr um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, pôr outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.

Assim, é desejável que no 3º ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo pôr base esse trabalho, pode-se avançar no 4º ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em matemática, compreendendo provas de alguns teoremas".

Uma proposta

Assumimos o desenvolvimento da capacidade de investigação, de argumentação e de dedução como essenciais à formação do pensamento lógico matemático, e mencionamos dois processos importantes na constituição de uma base de sustentação para essa formação:

- a construção de procedimentos elementares de cálculo, espontâneos ou formais, apoiando-se na lógica subjacente aos mesmos tornando claro, para o aluno, que esses procedimentos matemáticos não são obscuros nem gratuitos;

- a prática do ensino pela resolução de problemas, que leva o aluno a investigar, argumentar, validar.

Colocamos nesse ponto as questões: ***o que mais é necessário e possível ? Se é necessário, como conseguir?***

Nossas leituras e investigações iniciais estão nos levando ao desenvolvimento de alguns processos adicionais:

- Organização do raciocínio
- Introdução ao pensamento dedutivo
- Iniciação às provas matemáticas

Em nossa proposta didática, as atividades utilizadas nos dois primeiros processos diferem entre si mais no grau de dificuldade apresentado, tanto na organização do pensamento requerida para a situação total quanto no raciocínio que é mobilizado para a inferência das conclusões parciais. Teoricamente, não há diferença na substância de ambas. Apenas escolhemos as primeiras pelo tipo de soluções que comportam, com estruturas de raciocínio relativamente simples, embora não trivial. Os obstáculos também são dosados: bifurcações, situações sem solução, necessidade de averiguar todas as possibilidades possíveis. De modo geral, elas são destinadas a alunos da 1ª à 4ª série, e as demais para alunos das séries seguintes.

Além da investigação e da argumentação, que constituem o núcleo dos três processos mencionados, há várias competências imbricadas no desenvolvimento dos mesmos. Como exemplos, citamos: a correspondência entre a organização mental do raciocínio e sua expressão articulada na língua materna; a questão da particularização de uma situação, usada como um recurso para a solução do caso geral; o esgotamento de possibilidades.

Nessa fala, procuraremos exemplificar, por meio de atividades destinadas a diferentes séries, como os processos acima mencionados podem ser desenvolvidos.

Atividade visando à organização do raciocínio

Esta atividade foi adaptada de Le Gall e Houssin (1976).

Num jogo organizado entre alunos da 5ª à 8ª série, os alunos foram identificados por vestirem algo da mesma cor (azul, branco, amarelo ou verde).

Os alunos da 5ª vestiram bonés da mesma cor.

Os alunos da 6ª vestiram braçadeiras da mesma cor.

Os alunos da 7ª vestiram distintivos da mesma cor.

Os alunos da 8ª vestiram meias da mesma cor.

Sabemos ainda que:

Os alunos em ano de formatura escolheram sua cor por ser a cor da esperança.

Os alunos com a cor azul não vestem bonés.

Os alunos com distintivos não gostam de amarelo nem de azul, e se recusam a aceitar essas cores.

Os alunos da classe menos avançada hesitaram longamente entre o amarelo e o vermelho.

Decida qual foi a cor da peça de vestuário usada pelos alunos de cada série.

A tabela mostra, na coluna 1, as afirmações de que dispomos, no modo como foram feitas, ou já ligeiramente modificadas por conclusões imediatas tiradas pelos alunos. As outras três colunas mostram inferências tiradas dessas afirmações. Um complicador é que, para chegar a várias dessas inferências, eles devem levar em conta também o tipo de peça que cada série usava. Além disso, ao longo da coluna, as novas inferências vão se somando com as anteriores, de modo a serem contruídas três soluções diferentes, uma em cada coluna.

Refletindo	Concluindo – solução 1	Concluindo – Solução 2	Concluindo – Solução 3
Os alunos em ano de formatura decidiram sua cor por ser a cor da esperança.	***Os alunos da 8ª escolheram o verde.*** ***<u>8ª meias verdes</u>***	***Os alunos da 8ª escolheram o verde.*** ***<u>8ª meias verdes</u>***	***Os alunos da 8ª escolheram o verde.*** ***<u>8ª meias verdes</u>***
Os alunos com a cor azul não vestem bonés.	***Azul não é a cor da 5ª série. Também não é da 8ª. Então pode ser da 6ª ou da 7ª. Quer dizer que ou as braçadeiras ou os distintivos são azuis.***	***Bonés não são azuis. Bonés podem ser amarelos ou brancos (já que verde é cor das meias).***	***Azul não é a cor dos bonés (e nem das meias).***
Os alunos com distintivos não usam amarelo nem azul.	***Os distintivos podem ser verdes ou brancos. Mas não são verdes, que é a cor das meias. Então são brancos.*** ***<u>7ª distintivos brancos</u>***	***Os distintivos podem ser verdes ou brancos. Mas não são verdes, que é a cor das meias. Então são brancos.*** ***<u>7ª distintivos brancos</u>*** ***Sobra a cor amarela para os bonés.***	***Azul não é a cor dos bonés, nem das meias, nem dos distintivos. Então azul tem que ser a cor das braçadeiras, logo da 6ª série.*** ***<u>6ª braçadeiras azuis</u>***

Os alunos da classe menos avançadaª escolheram amarelo, porque hesitaram entre amarelo e vermelho, mas vermelho não foi cor de nenhuma classe.	***Os alunos da 5ª escolheram amarelo, porque queriam amarelo ou vermelho, mas vermelho não foi cor de nenhuma classe*** ***5ª bonés amarelos.*** ***6ª braçadeiras azuis***	***5ª bonés amarelos.*** ***5ª bonés amarelos.*** ***(Mas eu já sabia isso).*** ***6ª braçadeiras azuis***	***5ª bonés amarelos*** ***7ª distintivos brancos***

A primeira conclusão é fácil. Porém, frente à frase ***Os alunos com a cor azul não vestem bonés,*** surgem três caminhos possíveis: pensar a respeito da série, da peça (boné) ou da cor (azul). Num mesmo grupo, os alunos podem divergir a respeito do ponto ao qual se apegam. É tarefa do professor argumentar que pensar nas três coisas ao mesmo tempo pode dar confusão. Ele pode detectar a propensão do grupo por uma delas e encorajar que pensem a partir disso. Mas também pode sugerir que os alunos com outro pensamento tentem a solução sozinhos, ou com algum colega que queira acompanhá-los. Ou ainda dizer que, após trabalharem numa solução, poderão voltar e trabalhar na outra possibilidade.

Observe-se que a segunda solução mostra que a informação sobre a hesitação da 5ª série, entre o amarelo e o vermelho, é supérflua. Mas sem ela, as soluções 1 e 3 não teriam ido até o fim do modo apresentado. Ambas bifurcariam em dois subcaminhos: Na solução 1, por exemplo, os caminhos seriam: a) considerar as braçadeiras amarelas e os bonés azuis; ou 2) considerar as braçadeiras azuis e os bonés amarelos. Investigando cada uma, veriam que uma conduz a impasse e a outra condiz com todas as afirmações feitas (no caso, veriam logo que a primeira hipótese não é possível, pois os bonés não podem ser azuis). O excesso de dados, nessa situação-problema, visa maior facilidade na resolução.

Um desdobramento da atividade

Essa atividade não oferece grande dificuldade aos alunos (a partir da 2ª série). Articulações entre o raciocínio desenvolvido e sua expressão (oral ou escrita) na língua materna podem ser melhor desenvolvidas de vários modos, sendo gradativamente mais difíceis. Uma delas é pedir que os alunos expressem suas inferências usando as palavras ***portanto*** ou ***porque*** (a palavra ***portanto*** vai substituir a palavra ***então,*** muito usada pelos alunos).

Por exemplo, com relação à inferência***: Os alunos da 8ª série escolheram a cor verde*** vemos que, questionando-se a razão da mesma, pode-se obter ***Os alunos da 8ª série escolheram a cor verde, porque eles escolheram a cor da esperança, e (porque) verde é a cor da esperança.*** Ou, solicitando-se uma explicação maior da inferência – "como foi essa história da 8ª série ter escolhido verde" - podem aparecer frases como: ***A 8ª série escolheu a cor da esperança, <u>então</u> ela escolheu a cor verde, porque verde é a cor da esperança.*** Nesse ponto a palavra ***então*** será substituída por ***portanto,*** mostrando-se inclusive que o modo de falar fica feio, quando se usa repetidamente a palavra ***então***.

Uma outra atividade consiste em procurar o caminho que levou à descoberta da cor de cada objeto.

"Eu descobri que as meias são verdes porque quem usa meias é a 8ª série, que escolheu a cor da esperança, que é o verde." Ou: "As meias são verdes porque são usadas pela 8ª série, que escolheu a cor da esperança. Portanto as meias são verdes".

Ou então:

"***Eu sei que azul é a cor das braçadeiras, porque azul não é a cor de bonés nem de distintivos (isso porque os alunos com a cor azul não vestem bonés e os alunos com distintivos não usam amarelo nem azul) e também não é de meias, porque elas são usadas pela 8ª série, que escolheu verde. Portanto elas são azuis, usadas pela 6ª série".***

Há inúmeras atividades como essa. Embora elas propiciem um início de inferências ou deduções, são escolhidas de modo que esses processos apareçam com certa facilidade. O importante, nessas atividades, é a organização do pensamento que leva às soluções.

Dificuldades são acrescentadas gradualmente. É o caso de soluções que exigem bifurcação de raciocínio. Também nota-se que, se os alunos enveredam por um dos caminhos possíveis, e esse conduz a impasse, eles tendem a assumir imediatamente a outra hipótese, como solução do problema. É com surpresa que se deparam, às vezes, com inconsistências também no outro caminho (situação-problema sem solução). Aqui fica clara a aprendizagem de outro procedimento que mencionamos: esgotar as possibilidades.

Introdução ao raciocínio dedutivo

Como dissemos, as atividades deste processo diferem das anteriores mais no grau de dificuldade apresentado, tanto na organização do pensamento requerida para a situação total quanto no raciocínio que é mobilizado para a inferência das conclusões parciais. O seguinte exemplo foi adaptado de Attar e Plazanet (1976).

Ao retornar de uma longa viagem, Artur fez as seguintes observações sobre os hotéis que freqüentou:

1 – Quando a cozinha é boa, os garçons são gentis

2 – Nenhum hotel aberto o ano todo deixa de ter vista sobre o mar

3 – A cozinha não é deplorável a não ser em alguns hotéis populares

4 – Os hotéis que possuem uma piscina têm o cuidado de cobrir as paredes próximas com plantas aromáticas.

5 – Os hotéis onde os garçons são desagradáveis são aqueles que abrem apenas uma parte do ano.

6 – Nenhum hotel popular admite cachorros

7 – Os hotéis sem piscina não têm vista para o mar

Quando se hospedam em hotéis dessa lista, os proprietários de cachorros podem usufruir das plantas aromáticas?

Os alunos reconhecem que trata-se de um desafio (para alguns um problema). Percebem que são fornecidas informações e é feita uma pergunta, portanto deve ser dada uma resposta. Começam a identificar informações fornecidas e dados de um problema (que serão usados no caminho de busca da resposta).

Um exemplo de discussão, reflexão e solução é descrito a seguir.

Após algum tempo de discussão, um aluno tem idéia de numerar as informações, de 1 a 7.

Os alunos continuam a discussão e procuram esclarecer algumas informações:

2 – Nenhum hotel aberto o ano todo deixa de ter vista sobre o mar. O que significa? A dupla negação parece causar dificuldade. Substituem por uma versão afirmativa: ***Os hotéis que abrem o ano todo têm vista para o mar.***

3 – A cozinha não é deplorável a não ser em alguns hotéis populares.

Aventam hipóteses para simplificação, sem chegar a um acordo: 1) ***"em alguns hotéis populares a cozinha é ruim";*** 2) ***"em certos hotéis populares – mas não em todos – a cozinha é ruim";*** 3) ***"se a cozinha é ruim, já se sabe que é um hotel popular".***

Os alunos agrupam algumas frases e opõem outras, sem chegar a nada.

O professor propõe terem bem claras as conclusões parciais que já tinham ou a que chegaram (os "pedaços" de conclusão – ou de dedução). As flechas apontam para uma conclusão que se pode tirar, a partir do que vem antes dela.

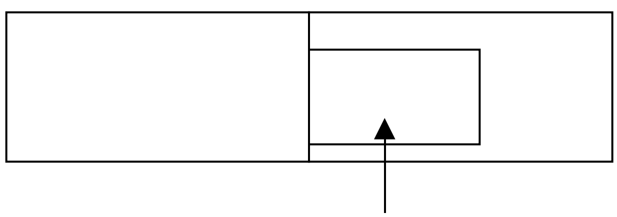
6) Proprietários de cachorro → hotéis de categoria (não populares)

1) Cozinha boa → garçons gentis

4) Hotéis com piscina → plantas aromáticas

Voltam na 3): "A cozinha não é deplorável a não ser em alguns hotéis populares". E pode-se dizer que todos hotéis de bom padrão (não populares) têm boa cozinha? Há dificuldades e o professor sugere um esquema:

Hotéis de bom padrão Hotéis populares



Hotéis com cozinha ruim

Concluem que todos hotéis de bom padrão (não populares) possuem boa cozinha (mas não são só eles que possuem). Ou seja:

3) Hotéis de bom padrão → cozinha boa

Procuram emendar tudo numa só cadeia:

Fazem uma parte da mesma:

Proprietários de cachorros

↓ 6

hotéis de bom padrão

↓ 3

cozinha boa

↓ 1

garçons gentis

Param para ver o que podem concluir com certeza quando os garçons são gentis.

Verificam que os garçons aparecem na 1), que já foi levada em conta, e na 5): “Os hotéis onde os garçons são desagradáveis são aqueles que abrem apenas uma parte do ano”. Os alunos discutem entre si se a frase quer dizer que os hotéis onde os garçons são desagradáveis “estão entre aqueles” ou “são exatamente aqueles” que abrem uma parte do ano. Concluem que o ***são*** da frase quer dizer “são exatamente aqueles”. Logo os garçons gentis estão em hotéis que abrem o ano todo. Fazem mais um passo nas conclusões, que acaba gerando mais um:

Garçons gentis

↓ 5

Hotéis abertos o ano todo

↓ 2

Têm vista para o mar

A 7) afirma que “hotéis sem piscina não têm vista para o mar”. Concluem que: se tem vista para o mar, têm piscina.

↓ 7

Piscina

↓ 4

Plantas aromáticas.

Ainda manifestam dúvidas. Parecem acreditar que acabaram mais pelo fato de já terem usado todas as afirmações (neste caso, se houvesse afirmações supérfluas, continuariam a trabalhar). Sentem necessidade de rever o que fizeram, repetindo a cadeia toda: os proprietários de cachorros só podem se hospedar em hotéis de certa categoria, os quais têm cozinha boa e garçons gentis, que trabalham em hotéis abertos o ano todo, os quais têm vista para o mar, piscina e paredes cobertas de plantas aromáticas. Percebem que desvendaram o desafio e podem responder à pergunta: sim, quando se hospedam, os proprietários de cachorro estarão em hotéis que, seguramente, têm plantas aromáticas.

Há vários aspectos que serão trabalhados em atividades como a que apresentamos: a construção do encadeamento, a mobilização de informações em ordem não linear (uso dos dados do problema no momento em que isso é oportuno e necessário) a percepção do fim que se quer alcançar. São competências que o aluno gradualmente irá adquirindo. Situações que dão sustentação a aspectos ligados à lógica simbólica também aparecem, como a percepção de que, a partir da afirmação ***"hotéis sem piscina não têm vista para o mar",*** poderão concluir que : ***se têm vista para o mar, têm piscina.***

Iniciando as provas matemáticas

Em primeiro lugar, consideramos que é bom gerar certa necessidade de provas.

Por exemplo: para validar hipóteses feitas a partir de medições, ou para elucidar dúvidas existentes.

Um caso que pode gerar essa necessidade é quando os alunos medem ângulos internos de vários triângulos e generalizam o resultado como "a soma dos ângulos internos de um triângulo é aproximadamente 180°". Cabe aí, naturalmente, um questionamento sobre a variação de resultados: não poderia ser atribuída à imprecisão dos instrumentos e da habilidade humana de medir?

Bastos(1999) relata uma experiência em sala de aula, onde a questão era: ***Como ter certeza de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus? A*** seguir, apresentamos um resumo da narrativa da autora, sobre como as coisas transcorreram.

A professora estimula os alunos a pensarem como ppoderiam verificar que o fato é sempre verdade. Há um certo sentimento sobre não recorrer mais a medidas, já que elas criaram o impasse, mas sim ao que sabem de matemática, ao raciocínio.

Uma solução, dada por um aluno, foi:

Tomar um quadrado, dividir ao meio. Aparecem dois triângulos (retângulos isósceles) com um ângulo reto e dois de 45 graus. Como 90 + 45 + 45 = 180, a soma dos ângulos internos do triângulo é 180.

Pergunta do professor: isso mostra que em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é 180?

Os alunos dão-se que conta que a resposta é não , porque é um triângulo particular.

A idéia de outro aluno é que " se pegar um retângulo já dá".

A professora continua a instigar: mas servia para qualquer triângulo? Concluem que servia para mais triângulos que a anterior, mas só servia para triângulo retângulo.

A professora reafirma que a propriedade deve valer para qualquer triângulo, e desenha um triângulo escaleno, sem outra propriedade específica.

Um aluno tem uma idéia: mas se já sabemos que vale para triângulos retângulos, dividimos esse em dois triângulos retângulos!

A professora relata que, com um pouco de dificuldade e de ajuda, a prova saiu.

No desenvolvimento dessa atividade, é interessante observar o uso que se faz de coisas já conhecidas em matemática. Para uma evolução do pensamento lógico matemático, é necessário também o registro do raciocínio feito, seja na língua materna, seja usando simbologia matemática, o que vai ser um caminho para as demonstrações mais sistemátizadas.

Outra situação interessante a ser explorada, com referência às provas matemáticas, consiste em gerar a necessidade da prova por indução.

Uma das atividades consiste em despertar a curiosidade a respeito de $2^{2^n} + 1$ ser um número primo para todo n natural, fato que Fermat afirmou estar convencido ser verdadeiro, o qual Euler mostrou, em 1783, ser falso para n maior ou igual a 5. Significa que, se Fermat verificou antes alguns casos, só foi para n= 1, 2, 3 e 4.

Isso gera certa estranheza – por que Fermat teria verificado tão poucos casos? Uma tarefa de casa revela aos alunos a grandeza dos números que se obtém para n=4 e n=5 , sobre os quais deveria ser verificado ainda, se eram primos ou não, e explica porque Fermat não teria chegado ao caso n=5, o qual lhe teria advertido da falsidade da validade do fato para todo n natural.

Outra atividade, nesse sentido, consiste em dar tarefas sucessivas para os alunos : verificar se n(n – _) < 3000 é verdadeira para n de 1 a 10; de 11 a 20; de 21 a 30; de 31 a 40; de 41 a 50; de 51 a 60 (vai ser falso em n = 56 e todos naturais maiores). Muito mais que o caso de Fermat, esse exemplo mostra que não podemos acreditar que fatos que valem numa boa quantidade de casos, possam ser generalizados.

Essas atividades abrem caminho para a necessidade de uma demonstração que garanta a validade, para todo n natural, de propriedades desse tipo, e, portanto, para a introdução das provas por indução matemática, o que vai requerer, por sua vez, um tratamento especial, de modo a fazerem sentido para o aluno.

Procuramos transmitir algumas idéias do nosso trabalho realizado nos últimos anos, em que temos procurado construir esse pensamento lógico matemático. Muitas coisas ocorreram: a presença (estimulada) de raciocínio visual, tanto em geometria quanto em padrões que sugerem propriedades algébricas; a tendência à generalização indevida; a atribuição de uma propriedade para uma classe muito ampla de objetos, e a busca posterior pela exclusão das ”exceções”, chegando a uma classe menor onde a propriedade é válida; o trabalho com os termos “exceção” e “contra exemplo”; o trabalho envolvendo infinito – que pode chegar a mobilizar toda a energia de uma 7ª série. De certa forma, é um trabalho que nos transmite a impressão de estarmos trabalhando nos limites do pensamento humano. Muito recentemente, nossa atenção voltou-se para a interface desses modos de pensar com a filosofia. Como se lê nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

...as experiências, emoções, anseios e indagações ampliam-se e trazem novas questões para os jovens a respeito de suas próprias vidas e dos rumos da humanidade.

O conhecimento do professor sobre essas questões e sua disponibilidade para compreender que nesse momento os jovens estão numa etapa da vida essencial para constituição de sua identidade e de seu projeto de vida, pode levar à superação de alguns aspectos negativos ligados aos seus comportamentos exteriores e desenvolver participações menos conflituosas no trabalho escolar.

Nesse ponto, o caráter especulativo da Matemática para além de seu aspecto técnico, e que também reside no âmbito dos limites das indagações do intelecto humano, pode despertar o interesse dos alunos, como as considerações e investigações sobre a infinitude dos conjuntos numéricos, a infinitude de racionais entre dois naturais e a infinitude dos irracionais ou o impacto causado por uma representação de Π ***com um bilhão de casas decimais sem o surgimento de um período.***

Referências Bibliográficas

ATTAR e PLAZANET (1976). “Rapport déxperimentation no.1” in ***Groupe Français Mathématiques.*** Paris: Institut de Recherche pour l´Enseignement des Mathématiques de l´Université Paris Vol. 1, pp.17-19..

BARBIN, E. (1993). “Le système logico-deductif dans l´enseignement. Fonctionnement et fonctions d´un mythe” in ***Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathematiques: leur impact sur l´education.*** VII, pp. 45-52

BASTOS, R.(1999).Uma demonstração coletiva. Em ***Educação e Matemática*** (51), pp. 33.

BERNARD, ***A. Entre pensée naturelle e pensée mathématique: nécessité de prendre en compte la rationalité de l´élève en didactique des mathematiques.*** Colóquio: Qu´est-ce que la pensée? Les compétences complexes dans l´éducation et le travail. Suresnes, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental (1988). ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série).***Brasília: MEC/SEF, pp.70, pp. 79-80.

LE GALL e HOUSSIN (1976). “Rapport déxperimentation no. 2” in ***Groupe Français Mathématiques 4.*** Paris: Institut de Recherche pour l´Enseignement des Mathématiques de l´Université Paris Vol. 1, pp.24-28.

MENDES, E. (1998). “Actividades investigativas em matemática escolar” . Em ***Educação e Matemática,*** revista da associação de Professores de Matemática, janeiro/fevereiro 1998, pp. 43-44.