

## Algebrização do Plano e os Sistemas Lineares

Tânia Schmitt  
Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília  
(tania@mat.unb.br)

Esta oficina, voltada para professores de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental, tem sua introdução feita num breve texto, mostrado a seguir:

*“ Numa tarde de um certo dia dois amigos estão brincando ...*

- B5? Vejamos... mas que sorte que você tem... avaria! Agora é a minha vez: D8!*
- Água! E agora? Pró cima, prá baixo, direita ou esquerda? ...*

*Enquanto isso, a milhares de quilômetros dali, no meio do Oceano Atlântico ...*

- Comandante, já recebi a posição para o encontro: 10º Norte, 28º Oeste.*
- Muito bem! Vamos para lá ! Meia velocidade à frente! ...*

*No outro lado do mundo, um casal de turistas está passeando pela cidade ...*

- Aonde nós estamos? Conseguiu achar essa rua no mapa?*
- Nós estamos em A2. O templo que queremos visitar fica em B3. Não é longe. Dá para ir a pé.*
- Então vamos logo. Daqui a pouco escurece e temos que encontrar o resto do grupo ...*

*Nesse mesmo instante numa certa empresa, em alguma cidade de algum país ...*

- Bem, senhores, como podem ver pelo primeiro dos gráficos à página 19, nossos lucros aumentaram significativamente nos últimos 5 anos. No segundo, os senhores podem perceber, pela inclinação das retas, a taxa de crescimentos nos lucros que obtivemos, ano a ano...*

*O que todos esse diálogos têm em comum? Todos estão falando de posições, dentro de um determinado sistema de coordenadas. No primeiro caso os amigos estão brincando de Batalha Naval. Cada um procura encontrar a “frota inimiga” atirando em posições dadas por letras na vertical e números na horizontal. No segundo caso, a posição do encontro é dada em relação aos pontos cardeais, a partir da linha do Equador e do meridiano de Greenwich. No terceiro, o casal está procurando num mapa a melhor forma de chegar ao ponto turístico que desejam ver, uma vez que sabem aonde se encontram. No quarto caso, um empresário está exibindo os resultados de sua empresa nos últimos anos através de gráficos obtidos a partir de dados reais.*

*Você provavelmente está se perguntando “Mas afinal, o que é um sistema de coordenadas? Como ele funciona? Cada pessoa pode inventar o seu e trabalhar com ele?” Bom, não exatamente! Se cada pessoa tivesse o seu particular sistema de coordenadas a comunicação seria bastante difícil. O sistema de coordenadas mais utilizado é o cartesiano. É o primeiro que aprendemos e o mais utilizado por ser muito simples.”*

Esta breve introdução nos remete aos tópicos que serão desenvolvidos na oficina, que tem por objetivo apresentar uma proposta de trabalho para introdução de sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais, obtenção de equações de retas no plano, e resolução de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

Para a introdução do conceito de sistemas de coordenadas trabalhamos com placas de isopor e retângulos de papel coloridos, utilizando a noção de *mapa*. Apresentamos, então, o jogo *Caça- Obstáculo*, descrito a seguir:

*“O professor divide os alunos em grupos, escolhe algum ponto do plano cartesiano, e fornece pistas quanto a sua localização. Após cada pista, os grupos podem tentar “adivinhar” onde está o obstáculo, entregando as coordenadas ao professor por escrito. Se errarem, saem do jogo. Se acertarem, ganham um prêmio e acaba o jogo. As pistas devem ser fornecidas de modo que, após a última pista fornecida, os alunos possam saber, exatamente, onde se encontra o obstáculo. Por exemplo, se colocamos o obstáculo em  $(7, -4)$  as pistas podem ser como a seguir:*

- As coordenadas são números inteiros*
- A ordenada é negativa.*
- A abcissa é positiva.*
- A abcissa é maior que 2.*
- A ordenada é menor que  $-1$ .*
- A abcissa é menor que 8.*
- A abcissa é maior que  $11/2$ .*
- A ordenada é maior que  $-5$ .*
- A ordenada é menor que  $-3$ .*
- A abcissa é maior que 6.”*

Para a introdução dos conceitos relacionados a equações lineares trabalhamos algumas atividades escritas, através de problemas simples, introduzindo o conceito de reta, seus gráficos, noções de paralelismo e perpendicularismo. Três das atividades apresentadas, as de número 1, 2 e 5, estão a seguir. Nelas introduzimos gráfico de reta, e os conceitos de coeficiente angular e paralelismo:

### **Atividade 1:**

*Um veículo cujo tanque comporta 40 litros de gasolina, roda 8km com um litro de combustível. Complete a tabela abaixo:*

<i>litros</i>	<i>quilômetros rodados</i>
0	
1	
1,5	
6	
38	
x	

- Marque os pares de pontos da tabela num sistema cartesiano.*
- A medida que aumentamos o número de litros de gasolina, o que acontece com o número de quilômetros rodados?*
- Sejam x o número de litros de gasolina e y o número de quilômetros rodados. Escreva uma equação que represente os pares da tabela.*
- Trace no plano cartesiano a curva que representa a equação que você escreveu no item anterior, para o particular problema que estamos resolvendo; que tipo de figura é?*
- Se x pudesse assumir qualquer valor real, que valores poderia y assumir? Nesse caso, o que seria o gráfico que representa a equação que você escreveu no terceiro item?*

- Quantos pontos, na verdade, você precisa para desenhar o gráfico da equação que você tem?

**Atividade 2:** Considere um sistema de eixos coordenados cartesianos ortogonais, e considere um quadradinho do papel milimetrado como uma unidade em cada eixo coordenado.

- Passo 1: Desenhe uma reta passando por  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .
- Passo 2: Marque no gráfico os pontos de abscissa 1, 2, 3, -1 e -2.
- Passo 3: Complete a tabela dada.
- Desenhe, agora, uma reta passando por  $(0, 0)$  e  $(2, 1)$ , e repita os passos 2 e 3.
- Desenhe, também, uma reta passando por  $(0, 0)$  e  $(-2, 4)$ , e repita os passos 2 e 3.
- Agora desenhe uma reta passando por  $(0, 0)$  e  $(-1, 1)$ , e repita os passos 2 e 3.
- Finalmente, desenhe uma reta passando por  $(0, 0)$  e  $(3, 9)$ . Repita os passos 2 e 3.

ponto	x	y	$\frac{y}{x}$
P	1		
Q	2		
R	3		
S	-1		
T	-2		

- Que conclusões tiramos?
- Escreva a equação que representa cada uma das retas que você desenhou.

**Atividade 5:** As tabelas abaixo mostram a relação distância ao marco Zero/tempo de percurso para o movimento de dois carros, que partem no mesmo instante, andando na mesma estrada, à mesma velocidade. O carro 1 parte do marco Zero, e o carro 2 parte do marco Um, 30 quilômetros adiante do marco Zero.

.....	Tempo de corrida (h)	Distância (km)
C	1	60
A	2	120
R	3	180
R	4	240
O	5	300
1	6	360
.....	Tempo de corrida (h)	Distância (km)
C	1	90
A	2	150
R	3	210
R	4	270
O	5	330
2	6	390

- Escreva equações que definam essas relações.

- Num mesmo sistema de eixos, trace o gráfico das curvas que representam as equações obtidas.
- Qual a inclinação de cada reta?

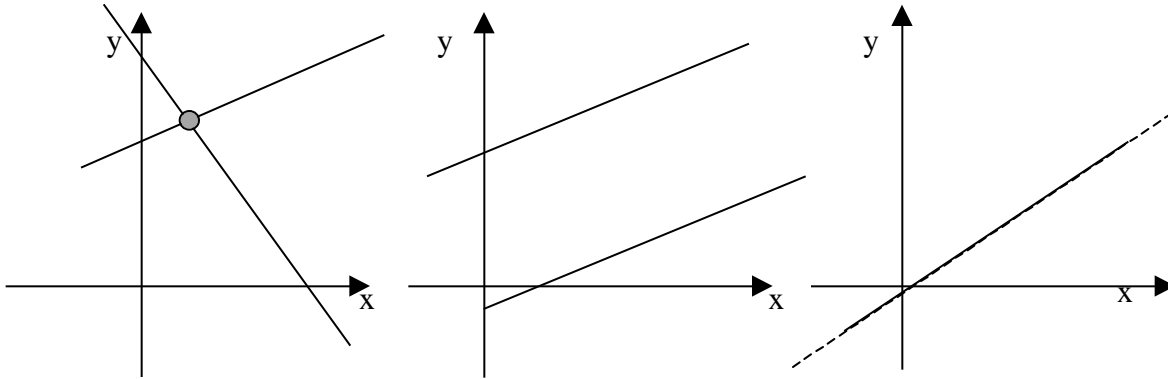
Para encerrar, falamos de sistemas de equações lineares a duas incógnitas. Nesta oficina, trabalhamos com sistemas de duas equações a duas incógnitas. Iniciamos com dois problemas simples e sua formulação matemática:

- Numa caixa temos quadriláteros e triângulos, num total de 20 polígonos. Sabendo que o número total de lados é 72, determine o número de triângulos e o de quadriláteros.
- Numa fazenda há vacas e galinhas. Contando os pés encontramos 522, e contando as cabeças, 141. Quantas são as vacas e quantas são as galinhas?

<i>Enunciado do problema:</i>	<i>Formulação Matemática:</i>
1. Numa caixa temos quadriláteros e triângulos	Sejam $x$ a quantidade de quadriláteros e $y$ a quantidade de triângulos
num total de 20 polígonos.	$x + y = 20$
Sabendo que o número total de lados é 72,	$4x + 3y = 72$ , já que cada quadrilátero tem 4 lados e cada triângulo tem 3
determine o número de triângulos e quadriláteros.	encontrar valores para $x$ e $y$ que, simultaneamente, satisfaçam, as duas equações
2. Numa fazenda há vacas e galinhas.	Sejam $x$ o número de vacas e $y$ o número de galinhas
Contando os pés encontramos 522	$4x + 2y = 522$ , já que vacas têm 4 patas e galinhas têm 2.
e contando as cabeças, 141.	$x + y = 141$
Quantas são as vacas e quantas são as galinhas?	Encontrar valores para $x$ e $y$ que, simultaneamente, satisfaçam, as duas equações

Resolvemos os sistemas através do método de eliminação de Gauss, verificando quando um sistema possui solução única, infinitas soluções ou não apresenta solução, e mostrando o que tais situações significam geometricamente, ou seja, quando os gráficos das retas representadas pelas equações que compõem o sistema de equações lineares se interceptam num ponto, quando as equações que compõem o sistema representam o

mesmo conjunto de pontos no plano ou quando as retas representadas pelas equações do sistema são paralelas:



Para isso, trabalhamos, inicialmente, com o geoplano, usando elásticos para compor os eixos cartesianos ortogonais e, em seguida, as possíveis situações de retas no plano. Para a visualização das retas que compõem os sistemas de equações que surgem dos dois problemas apresentados, trabalhamos com durex colorido pregado ao chão. Mencionamos, também, a Regra de Cramer, apresentada como consequência do método de eliminação utilizado.

No texto entregue aos participantes da oficina, fazemos, ainda, um breve comentário sobre como tratar equações de retas no plano usando o conceito de vetor, além de generalizar a metodologia desenvolvida para sistemas de mais de duas equações e/ou mais de duas incógnitas.

#### Bibliografia:

Tânia Schmitt – *Algebrização do Plano e os Sistemas Lineares* – UNAB – SEDF, 1999.