INDÍCIOS DE DIFICULDADE NA COMPREENSÃO DA MATEMÁTICA AVANÇADA: O CONCEITO DE GRUPO

Henrique Rizek Elias
Universidade Estadual de Londrina
henriquerizek@hotmail.com

Línlya Natássia Sachs Camerlengo de Barbosa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
linlyasachs@yahoo.com.br

Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina
angelamarta@uel.br

RESUMO

Em continuidade aos nossos estudos relacionados à transição da matemática elementar da Educação Básica para a avançada do Ensino Superior, o presente artigo busca mostrar como estudantes iniciantes em matemática lidam com conceitos da matemática avançada, uma vez que estes possuem um novo estatuto cognitivo, entendidos como conceitos construídos a partir de definições formais (TALL, 2002). Para tanto, realizamos entrevistas semiestruturadas com dois estudantes de licenciatura em Matemática, buscando destacar a maneira como compreendem conceitos que envolvem o estudo do objeto matemático grupo. Para as análises, utilizamos a concepção do pensamento matemático avançado na perspectiva de David Tall (2002; 1995), que nos permitiu, a partir de respostas incorretas dos estudantes – como equívocos com elementos lógicos da demonstração – perceber indícios de que estes ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções.

Palavras-chave: Educação Matemática, Pensamento Matemático Elementar, Pensamento Matemático Avançado, Grupo.

RÉSUMÉ

Pour porsuivre notre recherche sur le changement des mathématiques élémentaires de l'enseignement secondaire aux mathématiques avancées de l'enseignement supérieur, cet article a l'intention de montrer de quelle manière les étudiants débutants en mathématiques comprennent les concepts des mathématiques avancées, puisqu'ils ont un nouveau statut cognitif, parce qu'ils sont construits à partir des définitions formelles (TALL, 2002). Pour cela, nous avons realisé des interviews semi-structurées avec deux étudiants en licence de mathématiques, pour vérifier la manière qu'ils comprendre le concept de groupe. Pour faire des analyses, nous avons utilisé la conception de la pensée mathématique avancée de David Tall (2002; 1995) et ainsi nous avons pu percevoir que les étudiants imitent encore les solutions.

Mots clés: Didactique des Mathématiques, Pensée Mathématique Élémentaire, Pensée Mathématique Avancée, Groupe.

1 Introdução

Ao ingressar em um curso de licenciatura em Matemática, um estudante pode acreditar que estudará neste curso muito da mesma matemática que aprendeu na Educação Básica. Se pretender ser professor de Matemática da Educação Básica, pode pensar que um curso que forma profissionais para este fim terá foco naquela matemática básica que está acostumado e que ensinará futuramente. Há coerência neste ponto de vista, afinal quem busca um curso de licenciatura em Matemática está, possivelmente, procurando aprofundar seu conhecimento sobre aquilo que envolve sua futura atividade profissional: práticas pedagógicas, estrutura e funcionamento do ensino, conteúdo etc. Pode-se, então, pensar que o conteúdo a ser estudado é o mesmo da Educação Básica, apenas com alguns aprofundamentos – além, é claro, das disciplinas relativas ao ensino, como as que estudam conteúdos didáticos e estruturais da escola.

O que é, muitas vezes, desconhecido por estudantes é que um curso superior de Matemática busca, também, o desenvolvimento de um pensamento matemático avançado, que permite ao aprendiz e futuro professor entender a estrutura da matemática e como se dá o ato criativo que permite a criação nessa área do conhecimento.

Neste aspecto, algumas disciplinas do Ensino Superior têm papel primordial, como a Álgebra e a Análise. Nestas disciplinas, os estudantes têm contato com uma matemática demonstrativa, com símbolos diversos, com um alto grau de abstração e de formalismo. Nesse momento, a matemática se mostra diferente e desconexa daquela esperada pelo estudante e, muitas vezes, difícil de compreender. Difícil, no sentido de que exige do estudante uma nova maneira de encarar a matemática, entendendo-a como um sistema lógico-dedutivo.

Elias, Barbosa e Savioli (2011) apresentam uma ruptura existente entre o tratamento que se dá à matemática da Educação Básica e à matemática do Ensino Superior por meio de livros didáticos de ambos os níveis de ensino. Na ocasião, foi investigado como um conceito matemático, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, é apresentado de maneira diferente em livros didáticos destinados à Educação Básica ou ao Ensino Superior.

Essa distinção entre a matemática elementar e a avançada é observada em Tall (1995), quando afirma que na matemática elementar os objetos são descritos e essa descrição é feita a partir da experiência que se tem com eles, enquanto que na matemática avançada, do Ensino Superior, os objetos são definidos e suas propriedades são construídas a partir da definição.

Acreditando, assim como Tall (1995), que essa diferença pode causar dificuldades em estudantes iniciantes na matemática avançada, daremos continuidade às pesquisas relacionadas à transição da matemática elementar para a avançada, buscando, neste artigo, mostrar que estudantes iniciantes em matemática apresentam dificuldades em compreender a matemática avançada, uma vez que não estão acostumados ao formalismo e à abstração exigidos na matemática de nível superior. Para tanto, utilizaremos partes das entrevistas semiestruturadas realizadas com estudantes de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense em novembro de 2010. Essas entrevistas foram feitas para um estudo mais amplo: a pesquisa de mestrado de um dos autores.

Assim, no presente artigo, temos como objetivo verificar como estudantes de licenciatura em Matemática lidam com conceitos da matemática avançada, que, segundo Tall (2002), têm um novo estatuto cognitivo como conceitos construídos a partir de definições formais, a saber, conceitos que envolvem o estudo do objeto matemático grupo.

Para as análises das entrevistas, utilizaremos a concepção de pensamento matemático avançado (PMA) na perspectiva de Tall (1995; 2002) para verificar como estes estudantes compreendem o objeto matemático em questão: de maneira elementar, algorítmica, conforme estavam acostumados na Educação Básica, ou de maneira avançada, como objeto abstrato definido por meio de axiomas.

A seguir caracterizamos o PME, o PMA e a transição entre esses, segundo Tall.

2 Pensamento Matemático Elementar e Avançado

Conforme Harel, Selden e Selden (2006, p.147), a expressão "pensamento matemático avançado" foi proposta em oposição à expressão "pensamento matemático elementar", que durante muito tempo caracterizou os trabalhos do Grupo *Psychology of Mathematics Education*, cuja ênfase estava na matemática elementar. A partir de 1987, esse grupo passou a incluir em seus estudos a gama de pensamentos matemáticos que iam desde os últimos anos da escola básica até a matemática axiomática baseada na definição e na prova.

Não há, ainda hoje, uma definição consensual para *pensamento matemático avançado* (PMA). Há, no entanto, algumas diferentes perspectivas sobre o PMA, destacando características que o distingue do pensamento matemático elementar (PME). Concordamos, neste artigo, com a perspectiva de David Tall para o PMA.

Tall (1995, p.161) considera três componentes essenciais da atividade humana para o desenvolvimento do pensamento matemático: a *percepção* de um objeto do mundo externo, o *pensamento* sobre esse objeto e a realização de uma *ação* sobre ele. Para esse autor, a matemática elementar inicia-se com a *percepção de* e com as *ações sobre* os objetos do mundo externo. Os objetos percebidos são estruturas visuais-espaciais que, à medida que vão sendo analisados e suas propriedades testadas, são descritos verbalmente e classificados (primeiro em coleções, depois em hierarquias), dando início a uma dedução verbal relacionada às propriedades e ao desenvolvimento sistemático de uma demonstração verbal, conforme o desenvolvimento de van Hiele[1]

[1] De acordo com Kaleff *et al*. (1994), o modelo de Van Hiele do pensamento geométrico pode ser visto como guia para a aprendizagem e para avaliação de estudantes em geometria. O modelo "consiste de

(TALL, 1995).

No que diz respeito à *ação sobre* os objetos, Tall (1995, p.162) considera que conduz a um tipo diferente de desenvolvimento. Tall considera como exemplo de *ação sobre* objetos o processo de contagem, que se desenvolve utilizando palavras numéricas e símbolos que resultará no *conceito* de número.

Esses diferentes caminhos de desenvolvimento do pensamento matemático – um visual-espacial que se torna verbal e leva à demonstração, dando origem à geometria, e o outro que utiliza símbolos "quer como processos para fazer coisas (tal como contar, adicionar, multiplicar) quer como conceitos para pensar sobre (tal como número, soma, produto)" (DOMINGOS, 2006, p.2), que desenvolve a aritmética e álgebra – podem ocorrer independentemente. Mas, uma ligação conceitual entre os métodos visual-espacial e manipulativo simbólico é, evidentemente, proveitosa, pois favorece o desenvolvimento de uma abordagem que utiliza as vantagens de cada um.

A hipótese de Tall (1995, p.163) é que a transição cognitiva do pensamento matemático elementar para o avançado no indivíduo se dá, inicialmente, com a *percepção de* e a *ação sobre* objetos do mundo exterior e é construído por meio dos dois desenvolvimentos paralelos citados anteriormente, inspirando o pensamento criativo baseado nos objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática.

Assim, segundo a caracterização de Tall (1995), o PMA é aquele que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas que permitem ao indivíduo construir novas ideias que continuam a criar e a estender um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados. O PMA seria, então, responsável pelo ato criativo de fazer matemática por meio de um sistema dedutivo lógico-formal.

É possível, porém, que muitas das atividades do PMA possam também ocorrer na matemática elementar por meio da resolução de problemas, segundo Tall (2002). Pois, partindo de um problema no contexto da investigação matemática, há a formulação de conjecturas que levam ao refinamento e à prova. Contudo, o que distingue o PMA deste ciclo criativo que pode ocorrer na matemática elementar é a possibilidade da definição formal e dedução.

Já para Dreyfus (2002, p.26) não há uma distinção nítida entre o PME e o PMA,

---

cinco níveis de compreensão, chamados *visualização*, *análise*, *dedução informal*, *dedução formal* e *rigor* que descrevem as características do processo de pensamento" (p.24).

mesmo considerando que a matemática avançada seja centrada em definições abstratas e na dedução. Para esse autor, muitos dos processos do PMA estão presentes também no PME, como os processos de *representação* e *abstração*[2]. É possível, na perspectiva de Dreyfus (2002, p.26), pensar em tópicos matemáticos avançados de uma forma elementar (por exemplo, pode-se mostrar que um conjunto associado a uma operação é um grupo apenas seguindo os passos corretamente, de forma algorítmica) e pode-se recorrer a processos de pensamento avançado para lidar com tópicos elementares (como em alguns problemas de olimpíadas matemáticas). Assim, para Dreyfus, a característica que distingue o PMA do PME é a complexidade que é exigida e a forma como ela é gerenciada. O gerenciamento desta complexidade é feito, principalmente, pelos processos de *representação* e *abstração*, que permitem a passagem de um nível de detalhe para outro.

Considerando a caracterização do PMA feita por Tall, adotamos, neste artigo, sua perspectiva no que diz respeito à possibilidade do PMA apenas no Ensino Superior, pois é neste nível de ensino que estudantes têm, de fato, que lidar com conceitos matemáticos abstratos, construídos por meio de axiomas e cuja representação não existe, necessariamente, no "mundo real".

Com a introdução do método axiomático, afirma Tall (1995, p.171-172), há a necessidade de uma mudança cognitiva universal, em que objetos matemáticos têm novo estatuto cognitivo como conceitos construídos a partir de definições formais. É neste ponto que reside a difícil transição do PME para o PMA. Tall (2002, p.20) afirma que a passagem do PME para o PMA envolve uma transição significativa: da *descrição* para a *definição*, do *convencer* ao *provar* de uma maneira lógica com base nessas definições. É a transição da *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, que se baseia em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções das definições formais.

A seguir, apresentamos o esboço do desenvolvimento cognitivo desde uma criança até um matemático pesquisador, segundo Tall (1995).

---

[2] Dreyfus (2002) considera três processos envolvidos na *representação*: i) o processo de representar; ii) o processo de representações e as traduções entre elas; iii) o processo de modelagem. Já na abstração, os processos envolvidos são dois: i) generalizar; ii) sintetizar.

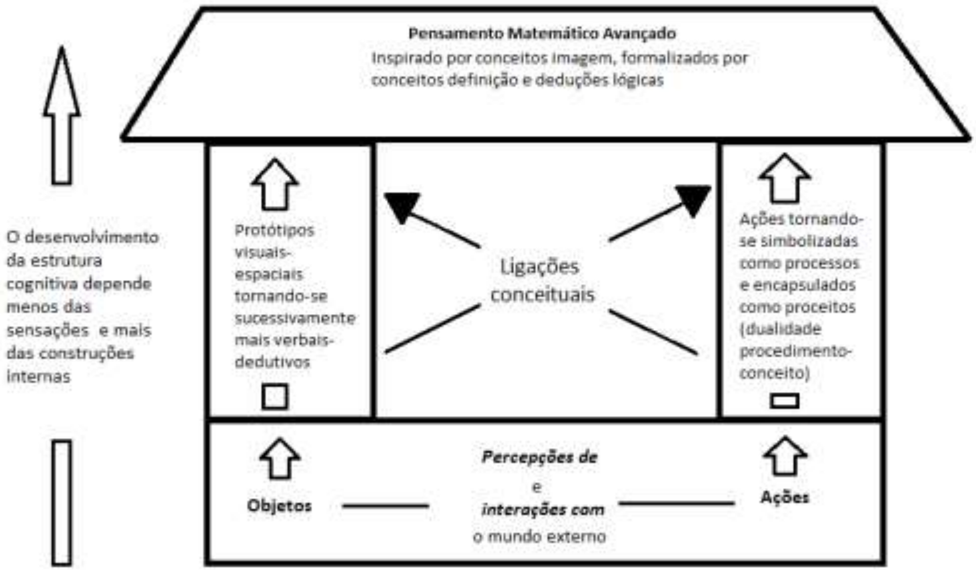


Figura 1: Esboço do desenvolvimento cognitivo desde criança ao matemático pesquisador (adaptado de Tall, 1995, p.164)

Percebemos, deste esboço, que o desenvolvimento cognitivo pode ser comparado à construção de uma casa, cuja fundação, isto é, o alicerce do desenvolvimento, está nas *ações sobre* e *percepções de* objetos, que permitirão o alteamento dos pilares sustentadores à medida que essas *ações* e *percepções* vão sendo pensadas, analisadas, conceituadas e suas propriedades testadas. As paredes desta casa são compostas por ligações conceituais entre os dois pilares – o visual-espacial e o manipulativo simbólico –, possibilitando, assim, a construção do telhado que, nesta comparação, seria o pensamento matemático avançado. Portanto, o PMA seria o ápice do desenvolvimento cognitivo do matemático e só seria possível, nesse contexto que descrevemos, após grande quantidade de atividades matemáticas praticadas por um indivíduo.

Neste sentido, as disciplinas Análise, Álgebra e Geometria Euclidiana (Geometria Demonstrativa) são responsáveis por introduzirem o estudante iniciante ao método lógico-axiomático, permitindo que ele compreenda aspectos estruturais da matemática e sua forma de criação, iniciando, desta forma, a construção do telhado, isto é, a transição do PME para o PMA.

Destacamos que se trata da transição e não do PMA propriamente dito, pois nessas disciplinas, considera Tall, estudantes se ocupam ainda com a complexidade proceitual[3] da manipulação de símbolos, que se desenvolve no sentido de construir a matemática axiomática. O PMA envolveria, portanto, um grande repertório de conhecimentos matemáticos, inclusive os do Ensino Superior, que permite ao indivíduo ter criatividade de gerar novas ideias e a noção matemática de provar formalmente a veracidade das afirmações.

Deve ficar claro que a possibilidade de o PMA ocorrer somente no Ensino Superior não se deve à idade do indivíduo. Quer dizer, a linha separadora entre o PME e o PMA na perspectiva de Tall, não está na impossibilidade de um estudante da Educação Básica conseguir desenvolver um PMA por ser jovem demais. Esta impossibilidade estaria na forma como a matemática é trabalhada na Educação Básica. Assim, caso um estudante da Educação Básica tenha contato com a matemática axiomática, baseada na definição e na prova, ele pode sim desenvolver um PMA.

Da mesma forma, devemos notar que não há garantias de que estudantes desenvolverão o PMA somente por cursarem disciplinas de Ensino Superior que introduzem o estudante ao método lógico-axiomático. Pois, a fase de transição do PME para o PMA exige, afirma Tall (2002), um processo de reconstrução cognitiva, que demanda um esforço individual na compreensão de novos objetos da matemática avançada.

Assim, o presente artigo visa, justamente, verificar problemas apresentados por estudantes de Ensino Superior nessa transição que pede nova percepção da matemática como um sistema axiomático, investigando como esses estudantes lidam com essa reconstrução cognitiva, no caso particular do conceito de grupo.

3 Procedimentos metodológicos

Como já ressaltamos, este artigo é consequência da pesquisa de mestrado de um dos autores. Naquele momento, para coleta dos dados, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com oito estudantes de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense que já haviam cursado ou estavam cursando a disciplina de Álgebra, mas que já haviam estudado o conceito de grupo. A escolha pela

[3] Gray e Tall (1994) consideram *proceito* a dualidade entre processo e conceito em matemática. Para eles, um mesmo símbolo pode representar um processo, como a adição de dois números $3 + 2$, e o produto desse processo, que seria o conceito soma entre $3 + 2$. Dessa forma, consideram que o sucesso no pensamento matemático utiliza uma estrutura mental que mistura processo e conceito, chamada proceito.

entrevista semiestruturada deu-se por sua maior maleabilidade, pois, apesar de possuir questões predeterminadas, a entrevista semiestruturada permite trocar a ordem ou inserir questões de acordo com as respostas dadas pelos estudantes.

Desta forma, a entrevista semiestruturada permitiu-nos fazer novas perguntas ou pedir uma explicação mais detalhada conforme identificávamos indícios de pensamento matemático elementar ou avançado.

Para tanto, para a dissertação, foi elaborado um roteiro com treze perguntas, que serviram de questões norteadoras, isto é, serviram de indagações iniciais, desencadeadoras de novos questionamentos, "frutos de novas hipóteses que vão surgindo à medida que se recebem as respostas do informante" (TRIVIÑOS, 1987, p.146). Com isso, além de o entrevistado expor suas opiniões acerca dos conteúdos que pretendemos, ele passa a participar na elaboração do conteúdo da entrevista.

Para o presente artigo, selecionamos trechos de dois dos estudantes entrevistados e analisamos as repostas desses dois estudantes referentes a quatro das treze questões desencadeadoras. São elas:

1) O que você gostou durante o curso de Álgebra? Gostou mais ou menos do que outros cursos, por quê?

2) Durante o curso de Álgebra, você se lembra de ter feito (visto) algo particularmente difícil? O quê?

3) $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo?

4)
a) O elemento neutro de um grupo é único?
b) O que significa o elemento neutro de um grupo ser único?
c) Prove que o elemento neutro de um grupo é único.

Estas quatro questões nos forneceram dados relevantes sobre como os estudantes de licenciatura em Matemática analisados compreendem conceitos que envolvem o estudo de grupo.

Os dois estudantes, chamados neste artigo de E1 e E2, estavam, no momento da realização das entrevistas, no final do terceiro ano do curso de licenciatura em Matemática. O estudante E1 estava terminando a disciplina de Estruturas Algébricas, enquanto que o estudante E2 já havia cursado a disciplina no ano anterior.

A preferência por apresentar e analisar respostas destes dois estudantes dentre os oito entrevistados, se deu porque suas respostas nos forneceram indícios mais claros de dificuldades na compreensão da matemática avançada.

A seguir, apresentamos as análises das respostas destes estudantes decorrentes destas questões norteadoras.

4 Os dados e suas análises

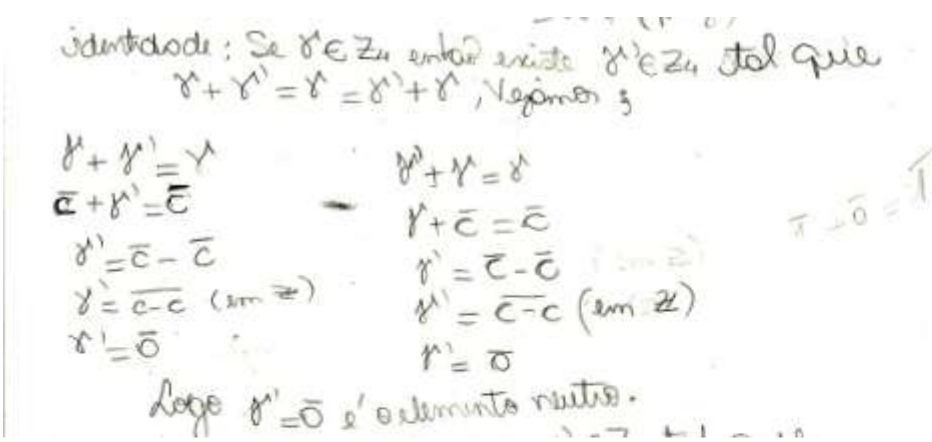
Apresentamos, nesta seção, alguns trechos das entrevistas realizadas com os estudantes E1 e E2, seguidos de suas análises à luz do PMA de Tall (1995; 2002). Dividimos em três casos, cada qual referente a uma pergunta e a um estudante, sendo que no segundo e no terceiro casos trata-se do mesmo estudante.

Os trechos a serem analisados a seguir foram selecionados por evidenciarem um tratamento elementar por parte dos estudantes E1 e E2 dos conceitos envolvidos, sugerindo, desta forma, que estes ainda mantêm características de um pensamento matemático elementar, algorítmico, conforme estavam acostumados na Educação Básica.

Caso 1:

Com a terceira questão, pretendemos verificar se o estudante consegue identificar um grupo, provar suas propriedades, se conhece e se sabe operar com conjuntos diferentes dos convencionais conjuntos numéricos. Além disso, durante as entrevistas, questionamos cada estudante sobre a necessidade de se considerar ou não a ordem das propriedades de um grupo. Ou seja, para mostrar que um conjunto munido de uma operação é um grupo, deve-se levar em conta primeiro a propriedade da existência do elemento neutro, para depois mostrar que todo elemento do conjunto é simetrizável ou tanto faz?

Percebemos que estes estudantes sabem que deve ser considerada a ordem das propriedades, mas, em alguns casos, mesmo sabendo disso, não a respeitam. É o caso do estudante E1. Quando tentava encontrar o elemento neutro do conjunto $\mathbb{Z}_4$, E1 escreveu no papel:



identidade: Se $\gamma \in \mathbb{Z}_4$ então existe $\gamma' \in \mathbb{Z}_4$ tal que $\gamma + \gamma' = \gamma = \gamma' + \gamma$, Vejamos:

$\gamma + \gamma' = \gamma$
$\bar{c} + \gamma' = \bar{c}$
$\gamma' = \bar{c} - \bar{c}$
$\gamma' = \overline{c - c}$ (em $\mathbb{Z}$)
$\gamma' = \bar{0}$

$\gamma' + \gamma = \gamma$
$\gamma' + \bar{c} = \bar{c}$
$\gamma' = \bar{c} - \bar{c}$
$\gamma' = \overline{c - c}$ (em $\mathbb{Z}$)
$\gamma' = \bar{0}$

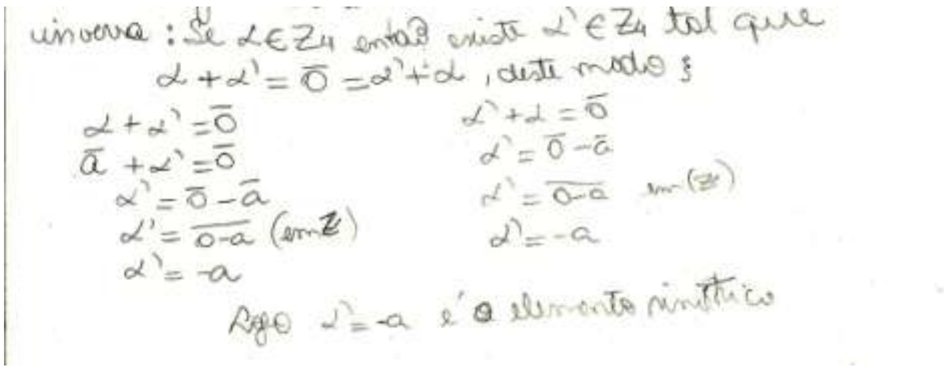
Logo $\gamma' = \bar{0}$ é o elemento neutro.

Figura 2: Protocolo 1 do estudante E1

Vemos que o estudante usa a propriedade do elemento simétrico para encontrar o elemento neutro $\bar{0}$ do conjunto $\mathbb{Z}_4$. Apesar disso, durante a conversa, diz:

> **E1:** [...] *é que antes de achar a inversa, tem que achar o elemento neutro.*
>
> **Pesquisador:** *Por quê?*
>
> **E1:** *Porque se não tiver elemento neutro, não vai ter inverso.*

Quando tenta encontrar o elemento simétrico de um elemento $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}_4$, comete o mesmo erro. Vejamos:



inversa: Se $\alpha \in \mathbb{Z}_4$ então existe $\alpha' \in \mathbb{Z}_4$ tal que $\alpha + \alpha' = \bar{0} = \alpha' + \alpha$, deste modo:

$\alpha + \alpha' = \bar{0}$
$\bar{a} + \alpha' = \bar{0}$
$\alpha' = \bar{0} - \bar{a}$
$\alpha' = \overline{0 - a}$ (em $\mathbb{Z}$)
$\alpha' = -a$

$\alpha' + \alpha = \bar{0}$
$\alpha' = \bar{0} - \bar{a}$
$\alpha' = \overline{0 - a}$ em ($\mathbb{Z}$)
$\alpha' = -a$

Logo $\alpha' = -a$ é o elemento simétrico

Figura 3: Protocolo 2 do estudante E1

Percebemos aqui equívocos com elementos lógicos da demonstração, pois, nos dois casos acima o estudante utiliza fatos a serem demonstrados para demonstrar as propriedades. No primeiro caso, E1 utiliza o fato de que $\bar{c} - \bar{c} = \bar{0}$ enquanto provava a existência do elemento neutro $\bar{0}$. No segundo caso, utiliza o elemento simétrico $-\bar{a}$ de $\bar{a}$ para encontrar o simétrico do próprio $\bar{a}$. Trata-se da falácia do raciocínio circular que, de acordo com Nolt e Rohatyn (1991), é um erro que ocorre quando no argumento demonstrativo utiliza-se a própria conclusão, comprometendo, assim, sua irrefutabilidade.

Ainda com relação à terceira questão, percebemos que este estudante desconhece a natureza dos elementos $\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ que compõem o conjunto $\mathbb{Z}_m$. Entendemos que compreender a natureza desses elementos que compõem o conjunto $\mathbb{Z}_m$ significa saber que cada elemento é uma classe de equivalência determinada pela relação R de congruência módulo m sobre $\mathbb{Z}$. Assim, seja $a \in \mathbb{Z}$, o subconjunto $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}$ é constituído pelos elementos x tais que xRa, representado por $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} |\ xRa\}$.

Vejamos o trecho da entrevista que ilustra a maneira como o estudante E1 lida com os elementos de $\mathbb{Z}_m$:

Pesquisador: [...] *Aqui você colocou barrinha (sobre o número). Você sabe o que significa essa barrinha?*

E1: *Porque quando a gente está falando de $\mathbb{Z}$ "alguma coisa", a gente coloca barra.*

Pesquisador: *Mas, o que significa essa barra?*

E1: *Ah, eu não sei, mas eu sei que precisa colocar.*

Esse trecho evidencia que o estudante está reproduzindo o que aprendeu, mas sem se questionar sobre o motivo de os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_m$ serem representados por $\bar{a}$. Por isso, entendemos que o estudante está lidando com esta noção matemática de maneira elementar, reproduzindo o que lhe foi apresentado, mas sem entender tal noção como conceito definido e com características próprias.

Destacamos, a partir dos dois momentos discutidos anteriormente, características da difícil fase de transição do PME para o PMA: no primeiro momento, o estudante apresentou equívocos com elementos lógicos da demonstração, isto é, o estudante ainda está se adaptando à *consequência* da matemática avançada; enquanto que no segundo momento, o mesmo estudante ocupa-se ainda com a manipulação de símbolos, no caso, o símbolo $\bar{a}$.

Caso 2:

Com relação à quarta questão, que buscava verificar a compreensão do estudante quanto ao elemento neutro – não apenas a capacidade de encontrar o elemento neutro de um grupo, mas também que os estudantes expusessem suas noções sobre esta propriedade, inclusive a demonstração de sua unicidade – percebemos indícios de um tratamento elementar. Vejamos como o estudante E2 lidou com essa questão:

Pesquisador: [...] *prove que ele* (elemento neutro) *é único*.

E2: *Provar? Se eu for fazer um grupo... pela adição.*

Pesquisador: *Para você provar, você precisa determinar uma operação?*

E2: *Ah, ou usar a mesma operação, não sei. Vou fazer para uma operação qualquer, então. Se eu dissesse que o x de A, operado com esse elemento neutro, teria que dar o x.*

O estudante escreve na folha: $x * 1' = x$. Em seguida definiu outro elemento neutro que chamou de 1, tendo então que: $x * 1 = x$.

E2: [...] *Eu sei que eu tinha que usar, eu acho, que a associatividade. Isso tem a ver com a lei que eu associei lá em cima, certo! Bom, se eu fosse igualar as duas equações, seria isso.*

Ele escreve na folha: $x * 1' = x * 1$.

E2: *Paro aqui, com essa lei. Por exemplo, se fosse adição, eu poderia cortar. Por isso que eu comecei por ela. Se fosse adição aqui, concluiria que* 1' *é igual a* 1.

Pesquisador: *Você cancelava o x de cada lado?*

E2: *Aham. Agora, com a multiplicação, nem sempre eu posso fazer isso! Só vai ser grupo se ela tiver...não sei, cara!*

Vamos analisar alguns pontos deste trecho da conversa com E2. Primeiro, o estudante sente a necessidade de determinar uma operação que lhe seja familiar para conseguir provar. Neste sentido, podemos dizer que o estudante ainda não se desprendeu de casos particulares, ainda não generalizou. Notemos que, mesmo após dizer que vai provar a unicidade do elemento neutro para uma operação qualquer, o estudante dá indícios de que esta operação qualquer está entre adição e multiplicação apenas.

Além disso, o estudante afirma que "com a multiplicação, nem sempre eu posso fazer isso" (E2). Neste momento, fica explícita a dificuldade do estudante de compreender que as propriedades dos objetos são construídas a partir de suas definições (Tall, 1995). Como estávamos falando sobre o elemento neutro de um grupo, já temos validadas as propriedades, logo, todo elemento do grupo é regular e, portanto, vale a lei do cancelamento, independente da operação. Assim, a unicidade do elemento neutro pode ser provada utilizando a definição de grupo.

Ressaltamos também que estudantes devem se preocupar em expressar seu raciocínio de maneira clara, utilizando uma linguagem adequada. Ainda no trecho anterior, E2 diz: "Paro aqui, com essa lei. Por exemplo, se fosse adição, eu poderia cortar" (E2). *Cortar* o quê? O que significa *cortar*? Para entender a fala do estudante, tivemos que perguntar se *cortar* significaria cancelar o termo x de cada lado.

Por último, podemos observar a confusão do estudante com relação ao que estava querendo provar, pois ele diz "só vai ser grupo se...", porém não queríamos que provasse se era grupo ou não, mas sim a unicidade do elemento neutro.

Caso 3:

No começo de cada entrevista, fizemos perguntas que chamamos de questões pessoais. Entre elas, perguntamos: Durante o curso de Álgebra, você se lembra de ter feito (visto) algo particularmente difícil? O quê?

Os estudantes relataram quais foram, sob seus pontos de vista, as principais dificuldades encontradas no estudo da Álgebra. As respostas foram diversas e muito válidas para nossa pesquisa. Vejamos uma delas:

E2: *Difícil é ter aquela sacada* [...] *Mostrar que é grupo ou não. Daí na hora que você vai fazer as operações, tem que ter meio que um* insight, *sabe? Ou você dá um* *contraexemplo ou você consegue dar o passo inicial para fazer a demonstração. Depois que começou fica fácil, mas ter o* insight *eu acho complicado.*

Acreditamos que este *insight* referido pelo estudante E2 esteja diretamente ligado à relação que o indivíduo tem com a matemática, isto é, ter o *insight* ou saber como começar uma demonstração matemática é consequência do desenvolvimento de estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas realizadas pelo indivíduo, o que, para Tall (1995), caracteriza o PMA.

No caso específico do conceito grupo, pensamos que esse *insight* ocorra quando estão bem construídas as noções de conjunto, operação e axiomas, para compreender o objeto grupo, pois serão essas noções que, coordenadas[4], sustentarão o raciocínio ao lidar com este objeto.

5 Conclusão

Neste artigo, buscamos verificar como estudantes de graduação lidam com conceitos que envolvem um objeto da matemática avançada – o objeto *grupo* –, a fim de explicitar que esses estudantes iniciantes em matemática apresentam dificuldades em compreender a matemática avançada, uma vez que não estão acostumados com o sistema lógico-formal exigido no nível superior.

Das análises das entrevistas que realizamos com dois estudantes, percebemos que ambos ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções. Isso revela que eles ainda não construíram estratégias mentais que os aproximariam do novo estatuto cognitivo dos objetos matemáticos da matemática avançada, que se baseia em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções das definições formais, segundo Tall (2002).

Isso ficou ainda mais evidente quando perguntamos aos estudantes o que eles mais gostaram ou o que menos gostaram do curso de Álgebra que fizeram. A resposta do estudante E1 vai ao encontro do que afirmamos anteriormente:

[4] Para maiores detalhes sobre *coordenar* as noções de conjunto, operação e axiomas, para formar o conceito de grupo, ver Brown *et al*. (1997, p.192).

E1: *Eu gostei da parte de grupos, acho que a parte de grupo e subgrupo é a mais legal. É que na realidade tudo segue o mesmo padrão, entendeu?*

Isso significa, em nossa visão, que para esse estudante o estudo de grupos é "legal" porque se resume, para ele, em mostrar as propriedades, isto é, significa reproduzir o passo-a-passo que lhe foi ensinado, seguindo sempre o "mesmo padrão" (E1). Essa é uma maneira elementar de compreender o conceito, pois o estudante tenta, sem realizar reflexões, provar as propriedades para verificar se um conjunto com uma dada operação é um grupo, mas sem entendê-lo como um objeto matemático construído a partir da definição formal, com propriedades próprias. Fornecendo sinais de que esses estudantes permanecem ainda com um pensamento matemático elementar.

Essas análises confirmam a tese de Tall (2002) sobre a difícil transição do PME para o PMA. Um estudante iniciante em matemática pode sentir grandes dificuldades ao entrar em contato com a matemática avançada, podendo até concluir sua graduação sem experienciar (no sentido de Bondía[5]) o pensamento matemático avançado, tratando os objetos matemáticos abstratos de uma maneira elementar.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro via Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e ao programa Observatório da Educação Edital 2010 – Fomento a Estudos e Pesquisas em Educação – EDITAL Nº 38/2010/CAPES/INEP – projeto Educação Matemática de professores que ensinam Matemática – UEL.

Referências

BONDÍA, J. L. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n.19, p.20-28, jan./fev./mar./abr. 2002.

BROWN, A. *et al.* Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups. **Journal of Mathematical Behavior**, Oxford, v.16, n.3, p.187-239, 1997.

---

[5] Jorge Larrosa Bondía apresenta uma concepção particular da palavra *experiência*, sendo aquilo que *nos* passa e não aquilo que *se* passa: "É experiência aquilo que 'nos passa', ou que nos toca, ou que nos acontece, e ao nos passar nos forma e nos transforma" (BONDÍA, p.25-26, 2002).

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2006, Setúbal. **Anais...** Setúbal, 2006.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.25-41.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. D. Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

GRAY, E. M.; TALL D. Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v.26, n.2, p.115–141, 1994.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced mathematical thinking. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.), **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p.147-172.

NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. Tradução de Mineko Yamashita. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19., 1995, Recife. **Anais…** Recife, 1995, v. 1, p. 161-175.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.) **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.3-21.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Editora Atlas, 1987.