Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
28 a 31 de outubro de 2012
Petrópolis, Rio de janeiro, Brasil
Hotel Vale Real - Rodovia BR 040, Km 62 - Itaipava

OS PRINCIPIOS INVARIANTES DA DIVISÃO COMO FOCO DE UM ESTUDO DE INTERVENÇÃO COM CRIANÇAS

Sintria Labres Lautert
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil
sintrialautert@gmail.com

Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil
spin@ufpe.br

RESUMO

Pesquisas na área da Psicologia da Educação Matemática apontam as dificuldades que as crianças experimentam em relação ao conceito de divisão; dentre elas, a dificuldade em compreender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e de formas inapropriadas de lidar com o resto. O presente estudo investigou o efeito de uma intervenção sobre o conceito de divisão voltado para superação de tais dificuldades. Participaram do estudo 100 crianças de baixa renda, de 8 a 12 anos, alunas do 4º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas da cidade do Recife que apresentavam dificuldades com este conceito, conforme avaliação realizada em um pré-teste. Os participantes foram igualmente divididos em dois grupos, um Experimental (GE) e um Controle (GC). Ao GE foi oferecida uma intervenção individual, em três sessões, consistia na resolução de problemas que eram lidos pela examinadora e pela criança, sendo disponibilizado material manipulativo e lápis e papel. A partir de uma entrevista clínica, solicitavam-se explicações a respeito da maneira como cada criança resolvia os problemas. Dentro de um contexto de discussão, a examinadora fornecia *feedback* e comentava a respeito das formas de resolução adotadas, fossem elas corretas ou incorretas, enfatizando os princípios invariantes da divisão; enquanto as crianças do GC participavam apenas das atividades escolares usuais. Os resultados revelam que as crianças do GE apresentaram um avanço expressivo tanto em termos de desempenho quanto em termos de uma compreensão sobre os invariantes operatórios da divisão do que aquelas que não tiveram esta mesma experiência, ainda que todos os participantes apresentassem muita dificuldade com o conceito de divisão, avaliado no pré-teste. Implicações educacionais são discutidas.

Palavras-chave: crianças, dificuldades com a divisão, intervenção

ABSTRACT

Among the obstacles to children’s understanding of the concept of division we find difficulty to understand the inverse relations between the terms of the division when the dividend is kept constant, as well as inappropriate ways of dealing with the remainder. This study investigated the effect of an intervention designed to help children overcome these difficulties in conceptualizing division. The study was done with 100 children in 4th grade at public schools in Recife who presented difficulties with the concept of division, as measured by a pre-test. The subjects were divided into two groups of equal size, an Experimental Group (EG) and a Control Group (CG). The children in the EG were subject to individual interventions, in three sessions consisting of problem solving, in which manipulative material, pencil and paper were provided. During a clinical interview, the children were asked to explain how they solved the problems. The examiner provided feedback and comments on the solutions provided, whether they were right or wrong, emphasizing the invariant principles of division. The children in the GC took part in their regular school activities. The children in the GE presented expressive progress, both in terms of performance and of the operative invariants of division, compared to the children who did not have the same experience (CG). The educational implications are discussed.

keywords: children, difficult to division, intervention

1 Introdução

Ensinar a divisão tem sido um desafio para professores do ensino fundamental que procuram desenvolver em seus alunos uma compreensão efetiva deste conceito mais do que uma compreensão algorítmica que garanta apenas a aplicação de procedimentos de cálculo. Para desenvolver tal compreensão é necessário considerar a natureza deste conceito e as formas de raciocinar do aprendiz.

Tomando por base a perspectiva de Vergnaud (1990, 1991, 1997, 2003), uma compreensão psicológica dos conceitos matemáticos requer considerar os invariantes lógicos, os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação.

Segundo Nunes e Bryant (1997) os invariantes lógicos presentes na organização das ações dos indivíduos ao lidar com o conceito de divisão são: (i) o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); (ii) o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; (iii) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero); (iv) relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e (v) o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

Os esquemas de ação que orientam o modo como os indivíduos lidam com as situações de divisão são a distribuição e a correspondência um-para-muitos (Correa, 2004; 2006; Correa & Spinillo, 2004; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2001). A distribuição está presente desde cedo, como se observa em situações de partilha que decorre de um raciocínio aditivo presente no esquema de correspondência um-para-um. No entanto, a divisão enquanto conceito inserido no campo das estruturas multiplicativas envolve a correspondência um-para-muitos que requer que se opere com dois ou mais fatores simultaneamente (Correa & Spinillo, 2004).

Considerando os invariantes e os esquemas de ação, observa-se, como documentado na literatura na área, que muitas das dificuldades das crianças residem na não compreensão das relações inversas entre os termos da divisão e de formas inapropriadas de lidar com o resto (e.g., Borba, Selva, Spinillo & Sousa, 2004; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Selva, 1998, Silver, 1988; Silver; Shapiro & Deutsch, 1993; Squire & Bryant, 2002). Tais dificuldades decorrem de uma incompreensão acerca dos princípios invariantes relativos ao conceito de divisão. Assim, a presente investigação teve por objetivo examinar a possibilidade de que crianças poderiam superar essas dificuldades se tivessem a oportunidade de refletir acerca dos princípios invariantes da divisão a partir da resolução de situações-problema.

2 Método

2.1 Participantes

Participaram do estudo 100 crianças de baixa renda, de 8 a 12 anos, alunas do 4º ano do ensino fundamental de escolas públicas da cidade do Recife que apresentavam dificuldades com o conceito de divisão, conforme avaliação realizada em um pré-teste. Os participantes foram igualmente divididos em dois grupos, um Experimental (GE) e um Controle (GC). Além das atividades usuais em sala de aula, as crianças do GE participaram de uma intervenção, enquanto as crianças do GC participavam apenas das atividades escolares corriqueiras.

O pré-teste consistia na resolução individual de 12 problemas de divisão apresentados por escrito, sendo dez problemas denominados computacionais, por requerer uma computação numérica para sua resolução; e dois problemas denominados não computacionais, por requerer o uso de estimativa para sua resolução. Os problemas computacionais eram de divisão exata e inexata, podendo ser de partição e de divisão por quotas. Os problemas não computacionais eram de divisão exata, podendo ser de partição e de divisão por quotas (ver Quadro 1).

Quadro 1: Exemplos de problemas no pré-teste.

	Computacionais	**Não computacionais**
Divisão por partição	Pedro comprou 28 carrinhos e quer colocá-los em 7 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?	Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João? Por quê?
Divisão por quotas	Uma loja de brinquedos recebeu 55 pulseiras que serão vendidas em pacotes com 9 pulseiras em cada um. Quantos pacotes serão montados?	Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo?

O pós-teste foi semelhante ao pré-teste, diferindo apenas quanto aos pares numéricos e referentes apresentados no enunciado dos problemas. Houve um período de nove a dez semanas entre as duas ocasiões de testagem.

2.2 A Intervenção no GE

A intervenção foi individual e consistia na resolução de problemas que eram lidos pela examinadora e pela criança, sendo disponibilizado material manipulativo, lápis e papel. A partir de uma entrevista clínica, solicitavam-se explicações a respeito da maneira como cada criança resolvia os problemas. Dentro de um contexto de discussão, a examinadora fornecia *feedback* e comentava a respeito das formas de resolução adotadas, fossem elas corretas ou incorretas, enfatizando os princípios invariantes da divisão. Ao todo foram apresentadas seis atividades, duas em cada sessão.

A primeira sessão voltava-se para um dos princípios invariantes relativo às dificuldades com a divisão documentadas na literatura: as relações de co-variação inversa entre os termos da divisão.

Na Atividade 1 apresentava-se um problema de base, do qual derivavam-se outros problemas, a partir da ação da examinadora de aumentar ou de diminuir o tamanho das partes ou o número de partes, mantendo o dividendo constante. Exemplo:

> *Problema de base (divisão por partição):* Paulo comprou 24 piões e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa?
>
> > *Variação 1: aumento do divisor e diminuição do tamanho das partes*
> > Paulo resolveu aumentar o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 4 caixas. Ele quer colocá-los agora em 6 caixas. Veja que aumentou o número de caixas. Antes eram 4 caixas e agora são 6 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê?
> >
> > *Variação 2: diminuição do divisor e aumento do tamanho das partes*
> > Paulo resolveu diminuir o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 6 caixas. Ele quer colocá-los agora em 2 caixas. Veja que diminuiu o número de caixas. Antes eram 6 caixas e agora são 2 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê?

Na Atividade 2, os problemas envolviam duas pessoas dividindo a mesma quantidade de objetos em um número determinado de partes ou dividindo a mesma quantidade de objetos em quotas pré-estabelecidas. Exemplos:

> *Problema de divisão por quota:* Juliana e Clara foram à floricultura e cada uma comprou 36 rosas. Juliana quer colocar 9 rosas em cada vaso e Clara quer colocar 4 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos Clara ou Juliana? Por quê?

> *Problema de divisão por partição:* Eduardo e Ana foram a uma loja e cada um comprou 48 foguetes. Eduardo quer guardar seus foguetes em 6 caixas e Ana quer guardá-los em 8 caixas. Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo? Por quê?

A segunda sessão versava sobre outro princípio invariante relativo às dificuldades com a divisão: o papel do resto em problemas de divisão inexata. A Atividade 3 centrava-se na ideia de que ao alterar o valor do resto alteram-se os valores dos demais ternos. Semelhante ao procedimento adotado na Atividade 1, apresentava-se um problema de base e suas variações. Exemplo:

> *Problema de base (divisão por partição):* Ana comprou 22 botões e quer colocá-los em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa?
>
> *Variação 1: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a um*
> E se a gente der mais 3 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?
>
> *Variação 2: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto maior que um*
> E se a gente der mais 5 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?
>
> *Variação 3: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a zero*
> E se a gente der dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?

Durante o diálogo com a criança, a examinadora explicitava que ao alterar o valor do resto altera-se também o valor do dividendo e do quociente nos problemas apresentados.

Na Atividade 4 eram apresentados procedimentos incorretos de resolução, sendo dito que eram formas de resolução adotadas por crianças de outras escolas. O participante tinha que descobrir qual seria o erro que a criança da outra escola havia feito ao resolver o problema. Exemplo:

> *Problema lido*: Elena comprou 19 garrafas de refrigerante para a festa de aniversário de João. Ela quer servir 6 garrafas de refrigerante em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?
>
> *Instrução*: Agora vou mostrar como foi que a criança da outra escola fez para resolver este problema [a examinadora resolve incorretamente o problema, colocando seis garrafas em duas bandejas, colocando ao lado sete garrafas relativas ao resto, deixando o resto com um número de elementos maior que o número de partes e maior que o tamanho das partes].

Os procedimentos incorretos envolviam formas inadequadas de lidar com o resto, a saber: o resto era ignorado durante o processo de resolução; o resto era inserido em uma das partes; o resto era distribuído em algumas das partes, mas não em outras; o resto era maior do que o número de partes e do que o tamanho das partes.

Na terceira sessão procedimentos incorretos de resolução eram apresentados em cartelas sob forma de desenhos. A criança era solicitada a identificar os procedimentos incorretos e propor formas adequadas de como resolvê-los.

Na Atividade 5 era apresentado um problema e dois procedimentos de resolução, sendo um correto e outro incorreto. A criança era solicitada a identificar qual a resolução apropriada, justificando sua escolha.

Na Atividade 6 mostrava-se um procedimento de resolução incorreto, tendo a criança que identificar o tipo de erro e indicar formas apropriadas de como resolvê-lo. Os problemas eram análogos aos da Atividade 5 e os procedimentos incorretos incluíam os mesmos tipos de erros.

Tanto na Atividade 5 como na Atividade 6, a examinadora explicava a razão de um procedimento ser mais adequado que o outro, explicitando o tipo de erro apresentado e que princípios invariantes estavam sendo violados.

3 Resultados

A análise dos dois tipos de problemas foi feita a partir de escores, conforme o Quadro 2.

Quadro 2: Escores da pontuação adotada nos problemas computacionais e não computacionais

Pontuação	Computacionais	Não computacionais
zero	a criança não resolve o problema ou interpreta seu enunciado de forma incorreta, empregando outras operações que não a divisão	a criança fornece uma resposta incorreta acompanhada de justificativa também incorreta
um	a criança aplica a operação de divisão, porém erra por: (i) confundir os valores do divisor e do quociente; (ii) produzir um resultado absurdo gerado da divisão dos valores presentes no enunciado; ou (iii) armar a operação de divisão, mas sem finalizar a resolução	a criança fornece uma resposta correta, podendo ou não fornecer uma justificativa. A justificativa, quando fornecida, é incorreta ou vaga
dois	a criança adota uma estratégia de resolução apropriada e explicita adequadamente a resposta que pode ser acompanhada ou não do valor do resto quando a divisão é inexata.	a criança fornece uma resposta correta acompanhada de justificativa apropriada

No pré-teste, o teste U de Mann-Whitney não detectou diferenças significativas entre os grupos que obtiveram um alto percentual de respostas incorretas tanto no GC (pontuação zero: 62%) como no GE (pontuação zero: 61%) e um baixo percentual de respostas corretas (pontuação dois no GC: 7% e no GE: 6%).

Tabela 1: Porcentagem de cada pontuação em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	**Grupo Controle**		**Grupo Experimental**	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
zero	62	59	61	18
um	31	30	33	43
dois	7	11	6	39

No pós-teste foram observadas diferenças entre os grupos (Z= -6.407, p = 0.000): as crianças do GE (pontuação dois: 39%) tiveram um percentual maior de respostas corretas do que o GC (pontuação dois: 11%), e um percentual de respostas incorretas menor do que o GC (GC: 59% e GE: 18%).

Comparações entre as duas ocasiões de testagem foram realizadas através do teste Wilcoxon, mostrando diferenças significativas entre o pré e o pós-teste apenas no GE (Z = -5.948; p = 0.000). Isso ocorreu porque no pré-teste havia um percentual elevado de respostas incorretas, e após a intervenção as crianças do GE aumentaram de forma expressiva o percentual de respostas corretas (pontuação um: de 33% para 43%; e pontuação dois: de 6% para 39%) e diminuíram o percentual de respostas incorretas (pontuação zero: de 61% para 18%). Em contraste, as crianças do GC não melhoraram quanto à compreensão acerca da divisão, pois os percentuais de respostas incorretas no pré-teste (62%) e no pós-teste (59%) eram altos, enquanto os de respostas corretas eram muito baixos (7% e 11%, respectivamente pré e pós-teste).

O desempenho nos problemas computacionais foi examinado através do U de Mann-Whitney (ver Tabela 2), observando-se que no pré-teste os dois grupos não diferiam significativamente, pois apresentavam um percentual elevado de respostas incorretas (GC: 56.6% e GE: 55%).

Tabela 2: Porcentagem de cada pontuação nos problemas computacionais em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	Grupo Controle		Grupo Experimental	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
zero	56.6	56.4	55	16
um	35.6	32	37.8	45.8
dois	7.8	11.6	7.2	38.2

No pós- teste, entretanto, o teste U de Mann-Whitney detectou diferenças entre os grupos (Z = -5.774; p = 0.000), pois o percentual de respostas incorretas (pontuação zero) era menor no GE (16%) do que no GC (56.4%); enquanto o percentual de respostas corretas (pontuação dois) era maior no GE (38.2%) do que no GC (11.6%).

Comparações entre o pré-teste e o pós-teste em cada grupo evidenciaram que no GE houve um aumento no percentual de respostas corretas após a intervenção de 7.2% para 38.2% e uma diminuição no percentual de respostas incorretas de 55% para 16% (Wilcoxon: Z= -5.948; p= 0.000). O mesmo não foi observado em relação ao GC que continuou apresentando altos percentuais de respostas incorretas no pré-teste (56.6%) e no pós-teste (54.6%).

Nos problemas não computacionais (Tabela 3) observou-se que no pré-teste ambos os grupos tiveram um percentual igualmente elevado de respostas incorretas (pontuação zero no GC: 89%; e no GE: 93%). Contudo, no pós-teste, notou-se um percentual de respostas incorretas bem mais alto no GC (73%) do que no GE (28%); e um baixo percentual de respostas corretas (GC: 10%) em comparação ao GE (41%). Tais diferenças, como indicado pelo teste U de Mann-Whitney (Z= -5.510; p = 0.000), revelaram que o desempenho nos problemas não computacionais melhorou após a intervenção para ambos os grupos.

Tabela 3: Porcentagem de cada pontuação nos problemas não computacionais em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	Grupo Controle		Grupo Experimental	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
zero	89	73	93	28
um	8	17	7	31
dois	3	10	0	41

Consta-se, que no GE houve progresso, visto que as crianças que haviam errado todos os problemas no pré-teste passaram a dar resposta corretas no pós-teste (41%). Estas, além de diminuir o percentual de respostas incorretas de 93% para 28%, passaram a ter um percentual maior de respostas que receberam pontuação um (de 7% para 31%). Nota-se, também, que as crianças do GC ampliaram o percentual de respostas corretas (de 3% para 10%) e de respostas que receberam pontuação um (de 8% para 17%), e diminuíram o percentual de respostas incorretas (de 89% para 73%). O teste Wilcoxon revelou que as diferenças entre o pré-teste e o pós-teste são significativas tanto para o GE (Z= -5.829; p = 0.000) como para o GC (Z= -3.125; p = 0.002). Isso significa que as crianças do GC também tiveram progresso nos problemas não computacionais, apesar de não haverem participado da intervenção. Esse progresso, entretanto, foi mais expressivo no GE.

4 Conclusões e discussão

Os dados mostram que as crianças que participaram da intervenção alcançaram níveis de compreensão mais sofisticados sobre os invariantes operatórios da divisão do que aquelas que não tiveram esta mesma experiência, ainda que todos os participantes apresentassem muita dificuldade com o conceito de divisão, como avaliado no pré-teste. Dois pontos são discutidos adiante, com o objetivo de compreender as razões que geraram o progresso das crianças do GE.

O primeiro aspecto refere-se à interação adulto-criança. Destaca-se o fato de que o adulto propiciava discussões e reflexões de natureza metacognitiva que levavam a criança a refletir acerca dos seus processos de resolução, ou seja, de sua forma de raciocinar frente a uma dada situação-problema. Explicações eram sistematicamente fornecidas por parte da examinadora que direcionava a atenção da criança para os aspectos relevantes da situação; assim como explicações eram sistematicamente solicitadas da criança por parte da examinadora. Ao solicitar que a criança explicitasse sua forma de resolver as situações-problema, a examinadora gerava oportunidade para a tomada de consciência por parte da criança. A explicitação da criança permitia também que a examinadora passasse a conhecer sua forma de raciocinar, intervindo de forma apropriada.

O segundo aspecto refere-se ao fato de que a intervenção tomou por base a perspectiva de Vergnaud (1990, 1997, 2003) de que uma única situação é insuficiente para abarcar todas as facetas e peculiaridades de um dado conceito, sendo necessário examinar um mesmo conceito à luz de diversas situações. Esta ideia foi aplicada na construção da intervenção que envolvia situações que versavam tanto sobre os invariantes operatórios da divisão como sobre as dificuldades específicas que as crianças experimentam: dificuldades em lidar com o resto e com as relações inversas entre os termos da divisão.

De maneira geral, com esta investigação, pode-se apontar algumas implicações para a Educação Matemática derivadas da pesquisa em Psicologia Cognitiva, entendendo-se os invariantes como instâncias definidoras dos conceitos que precisam ser consideradas nas situações de ensino. As situações apresentadas na intervenção podem, com as devidas adaptações ao contexto de sala de aula, se tornar situações didáticas proveitosas. Por exemplo, criar situações-problema em que: (i) o resto é colocado em evidência, de forma que seja dado ao aluno a possibilidade de compreender que o resto faz parte da divisão e que não pode ser ignorado ou inserido em uma das partes em que o todo foi dividido, o que acarretaria em violar o princípio da igualdade entre as partes; e (ii) é possível manipular os valores de seu enunciado, permitindo uma reflexão acerca das relações entre os termos da divisão, auxiliando o aluno a compreender as relações inversas entre os termos da divisão.

Para finalizar, a sala de aula poderia tornar-se um ambiente de discussão em que o pensamento e as ações dos alunos fossem sistematicamente colocados em evidência (Lautert & Spinillo, 2011; Spinillo, 2003).

Agradecimentos

Esta pesquisa recebeu apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através de bolsa de estudos recebida pela primeira autora para a realização de doutorado sob a orientação da segunda autora.

Referências

BORBA, R. E. S. R.; SELVA, A. C. V.; SPINILLO, A. G.; SOUSA, N. A. Influência de representações e de significados da divisão em problemas com resto. In: **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** (Trabalho completo). Recife, 2004, CD-ROM.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. **Estudos de Psicologia,** Natal, RN, 9 (1): 145-155, 2004.

_________. A compreensão intuitiva da criança acerca do conceito de divisão por cotas de quantidades contínuas. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática**. (pp. 185-205). São Paulo: Alínea, 2006

_________; Spinillo, A. G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In

PAVANELLO, R. M (Org.). **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula.** (pp. 103-127). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, 2004.

_________; NUNES, T. ; BRYANT, P. Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. **Journal of Educational Psychology** Estados Unidos da América, 90, 2, 321-329, 1998.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Estudo de intervenção sobre a divisão: ilustrando as relações entre metacognição e aprendizagem. **Educar em Revista**, 1, 93 - 108, 2011.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

_________; CAMPOS, T. Mª M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas.** São Paulo: PROEM, 2001.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. In SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos. Ensino e Pesquisa** (pp 95-119)**,** Campinas: Papirus, 1998.

SILVER, E. A. Solving story problems involving division with remaiders: the importance of semantic processing and referential mapping. In **Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chaper of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** North Illinois University,1988, p. 127-133.

_________; SHAPIRO, L. J.; DEUTSCH, A. Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students solution processes and their interpretations of solutions. **Journal for Research in Mathematics Education,** Estados Unidos da América, v. 24, n. 2, p.117- 135, 1993.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. **Boletim GEPEM,** 43,11- 48, 2003.

SQUIRE, S.; BRYANT, P. The influence of sharing of children´s initial concept of division. **Journal for Experimental Child Psychology,** v. 81, p.1- 43, 2002.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 10, n. 13, p. 133 -170, 1990.

_________. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las**

matemáticas en la escula primaria. México: Trillas, 1991.

_________. The nature of mathematical concepts. In NUNES T. ; BRYANT P. (Orgs.). **Learning and teaching mathematics. An international perspective.** Hove: Psychology Press Ltd.Publishers, 1997, p. 5-28.

_________. A gênese dos campos conceituais. In GROSSI, E. P. (Org.). **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Rio de Janeiro.