



## Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

28 a 31 de outubro de 2012

Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Hotel Vale Real - Rodovia BR 040, Km 62 - Itaipava

### O PAPEL DA MEDIAÇÃO E DA INTENCIONALIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Rodolfo Eduardo Vertuan

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

[rodolfovertuan@utfpr.edu.br](mailto:rodolfovertuan@utfpr.edu.br)

Adriana Helena Borssoi

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

[adrianaborssoi@utfpr.edu.br](mailto:adrianaborssoi@utfpr.edu.br)

Lourdes Maria Werle de Almeida

Universidade Estadual de Londrina, Brasil

[lourdes.maria@sercomtel.com.br](mailto:lourdes.maria@sercomtel.com.br)

#### RESUMO

Com o propósito de voltar atenção ao processo de aprendizagem dos alunos, quando envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, este texto busca associar aspectos teóricos da Mediação Semiótica, do ponto de vista de Lev Vygotsky, bem como da Intencionalidade como atributo da Aprendizagem Significativa, caracterizada por David Ausubel. A atividade de Modelagem que subsidia nossa argumentação foi desenvolvida com alunos durante um curso de extensão, e nossas inferências são realizadas a partir da análise de registros escritos dos alunos e de transcrições de diálogos ocorridos durante o desenvolvimento da atividade. Considerando as informações obtidas dessa análise podemos inferir que em aulas com atividades de Modelagem a mediação leva à intencionalidade e a intencionalidade leva a mediação e é por meio da ‘interação’ desses dois elementos que a internalização de conceitos se torna possível, favorecendo a aprendizagem significativa.

**Palavras-chave:** modelagem matemática, intencionalidade; mediação semiótica, aprendizagem significativa, educação matemática

## ABSTRACT

In order to return attention to the process of learning, when involved in mathematical modeling activities, this text seeks to associate the theoretical aspects of Semiotic Mediation, from the viewpoint of Lev Vygotsky, and Intentionality as an attribute of Meaningful Learning, characterized by David Ausubel. The modeling activity that subsidizes our argument was developed with students during a course of extension, and our inferences are made based on analysis of student writings and transcriptions of conversations occurring during development activity. Considering the information obtained from this analysis we can infer that in classes with modeling activities mediation takes intentionality and intentionality leads to mediation and it is through the "interaction" of these two elements that the internalization of concepts is made possible by promoting meaningful learning.

**Keywords: mathematical modelling, intentionality, semiotic mediation, meaningful learning, mathematics education**

## 1 Introdução

Ao se propor trabalhar com Modelagem Matemática no âmbito educacional o professor com espírito investigativo se depara com uma diversidade de aspectos interessantes para o processo de ensino e de aprendizagem. Tomando a concepção de Modelagem Matemática conforme a adotada neste texto, invariavelmente, ao oferecer aos alunos a possibilidade de vivenciar um ambiente de Modelagem o professor já se coloca como investigador. Cabe então definir, o que investigar?

Em atenção à demanda de pesquisa, no que diz respeito à teorização sobre o processo de aprendizagem em atividades de Modelagem Matemática, este trabalho se dedica a abordar o papel da mediação semiótica na perspectiva de Vygotsky e da intencionalidade como uma condição para a aprendizagem, durante o desenvolvimento dessas atividades.

Frente ao exposto, abordaremos inicialmente nossa compreensão sobre Modelagem Matemática destacando que a pesquisa desenvolvida tem características das perspectivas

*cognitivista e educacional*. Noutra seção, a atividade de Modelagem é apresentada para dar suporte às intervenções teóricas. A Mediação Semiótica e a internalização de conceitos matemáticos é discutida com base na referida atividade; oportunamente, com o mesmo contexto é analisada a influência da intencionalidade sobre a aprendizagem dos alunos, na ótica da teoria da Aprendizagem Significativa.

## 2 Modelagem Matemática

A construção de modelos tem sido considerada uma das estratégias com potencial para conduzir à aprendizagem, visão compartilhada por Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 192), para os quais,

os seres humanos são construtores naturais de modelos. Desde muito cedo, construímos modelos mentais de tudo o que encontramos no mundo. [...] Estes modelos incluem teorias pessoais sobre o mundo que nos permitem raciocinar sobre as coisas que encontramos. A modelagem ajuda os alunos a expressar e externar seu pensamento, visualizar e testar os componentes de suas teorias, e produzir materiais mais interessantes.

Construção de modelos permite externalizar de alguma forma os modelos mentais que as pessoas elaboram. Esta é considerada como uma poderosa estratégia de apoio para a aprendizagem.

Os autores já mencionados adotam o termo *modelo*, conforme Lesh e Doerr (2003, apud HOWLAND, JONASSEN & MARRA, 2011, p.192):

os modelos são sistemas conceituais constituídos de elementos, relações, operações e regras que são usados para construir, descrever ou explicar o comportamento de sistemas. Estes modelos estão nas mentes dos alunos e podem ser representados nas equações, diagramas, programas de computador e outros meios utilizados pelos alunos para representar o seu entendimento.

A compreensão de um problema apenas por meio de uma dada equação, que não transmitem qualquer informação conceitual, não viabiliza que os alunos entendam a natureza do que eles estão estudando. Assim, é necessário ajudar os alunos a construir uma representação qualitativa do problema, bem como quantitativa. Nesse sentido, e considerando um ambiente de ensino e aprendizagem que intenciona a construção ou significação de conceitos matemáticos, a Modelagem Matemática se mostra um espaço privilegiado.

Entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica com objetivo de relacionar a matemática escolar a aspectos extramatemáticos, de acordo com Almeida e Brito (2005). Para os autores, a modelagem se configura como uma atividade que se desenvolve segundo um esquema – um ciclo de Modelagem – no qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos em que uma abordagem de um problema não essencialmente matemático é feita por meio da Matemática.

Podemos identificar que no âmbito da Educação Matemática a Modelagem Matemática é adotada levando em conta diferentes perspectivas, de acordo com a finalidade de uso nos ambientes educacionais. Seis perspectivas (realística, contextual, sócio-crítica, epistemológica, cognitivista e educacional) são apresentadas por Kaiser e Sriraman (2006), baseadas em análises principalmente de trabalhos publicados no ICMI<sup>1</sup> e no ICTMA<sup>2</sup>.

Segundo Almeida e Vertuan (2010, p. 31)

Uma análise destas perspectivas parece sinalizar que é possível que uma mesma atividade de Modelagem contemple mais do que uma perspectiva simultaneamente. Todavia, a definição da perspectiva para cada situação está vinculada a propósitos e interesses subjacentes à implementação de atividades de Modelagem nas aulas e traz implicações para a forma como o professor conduz o desenvolvimento das atividades, visando atender a interesses e/ou necessidades em situações de ensino e aprendizagem particulares.

Para os propósitos deste trabalho entendemos que cabe destacar as perspectivas *educacional* e *cognitivista*, que são caracterizadas por Kaiser e Sriraman (2006) da seguinte forma:

- *Perspectiva Educacional*: a atividade de Modelagem Matemática tem como foco a integração de modelos matemáticos no ensino de Matemática, visando levar os alunos a investigar o 'porquê' e o 'como' dos modelos matemáticos, o que implica em ver o modelo com um objetivo em si, tanto quanto às potencialidades do modelo quanto como um meio para a aprendizagem matemática. Nesta perspectiva, é incumbência do professor analisar as dificuldades dos alunos no processo de Modelagem, especialmente as relacionadas com a matematização e interpretação dos processos e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares.
- *Perspectiva cognitivista*: se preocupa em analisar os processos cognitivos ativados pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

Podemos considerar que a perspectiva cognitivista está relacionada à perspectiva educacional, especialmente se considerarmos que o interesse, nessa última, reside na investigação dos processos cognitivos individuais dos alunos envolvidos nas atividades bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas ou cognitivas relacionadas com a aprendizagem quando os alunos desenvolvem atividades de Modelagem Matemática.

Por atividade de Modelagem Matemática nos valem de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), que entendem que esta

pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto

---

<sup>1</sup> ICMI - International Commission on Mathematical Instruction

<sup>2</sup> ICTMA - International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications

de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a realidade<sup>3</sup> (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático.

Um conjunto de ações desencadeadas durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, como: a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática, a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução, que implica em uma validação, constitui um ambiente de investigação em que tão importante quanto as respostas encontradas para o problema investigado, são as discussões realizadas durante a resolução do problema. Dentre muitos aspectos que um ambiente de Modelagem proporciona, ocorre a externalização de modelos mentais dos alunos, que são artefatos cognitivos importantes a partir dos quais o professor pode agir no sentido de realizar mediação no processo de significação/ ressignificação dos alunos.

### **3 A Atividade de Modelagem Matemática**

A atividade de Modelagem Matemática que ora apresentamos advém do trabalho de pesquisa de um dos autores deste texto. Foi desenvolvida por um grupo de cinco alunos (um deles do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática e os demais de um segundo ano do Ensino Médio), quando realizava o segundo e o terceiro encontros de um curso de extensão, semanal, sobre Modelagem Matemática. A realização do curso se deu segundo indicação de Almeida, Silva e Vertuan (2012) quanto à familiarização dos estudantes com a Modelagem no que tange à implantação das atividades no ambiente escolar. Nesta perspectiva e estando o curso no início, a atividade pode ser entendida como um primeiro momento da Modelagem, aquele no qual

[...] o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.26).

O tema, doação de órgãos, embora proposto pelo professor, foi escolhido diante de uma sondagem sobre o interesse dos alunos, realizada no primeiro dia de curso.

---

<sup>3</sup> Foge aos propósitos deste texto uma discussão sobre o que é “realidade”.

A atividade foi desenvolvida em dois encontros. No primeiro, o professor entregou aos grupos matérias de jornais e revistas (impressas e *on-line*) que discutiam o tema sob diferentes perspectivas – religiosa, médica, sob o ponto de vista de pessoas transplantadas e etc –. Algumas dessas matérias continham informações numéricas sobre doação de órgãos que poderiam conduzir a distintos problemas cuja resposta poderia ser dada em termos matemáticos. Dentre estes possíveis problemas, os alunos elaboraram três:

1) Como pode ser descrita a quantidade de transplantados no estado de São Paulo em comparação ao Brasil, nos anos de 2003 a 2009?

2) Qual o número de transplantes que poderá ser realizado com sucesso no Brasil a partir de 2010, considerando os números dos últimos anos?

3) Considerando as estatísticas de doação de órgãos no Brasil, o que se pode dizer sobre as idades dos doadores? Para qual idade o número de doadores é maior?

A elaboração destes problemas proporcionou discussões importantes sobre a caracterização de uma atividade de Modelagem Matemática, principalmente no que tange a que tipos de problemas podem conduzir a uma investigação matemática, com diferentes possibilidades de resolução. Dentre os problemas elaborados a turma decidiu investigar o terceiro. Usaram, para isso, dentre outras informações, uma tabela referente ao estado de São Paulo como representativo do que acontece no país, o que por si só, já se constitui na primeira hipótese dos alunos. A tabela tratava da idade das pessoas, doadores de órgãos, de acordo com faixa etária, no estado de São Paulo (Tabela 1).

Tabela 1: Faixa etária dos doadores de órgãos no São Paulo

Faixa etária	<01	01 - 05	06 - 10	11 - 17	18 - 34	35 - 49	50 - 64	65 - 79	>80
Nº de doadores	0	10	8	25	118	158	119	31	2

Fonte: [http://www.abto.org.br/abtov02/portugues/populacao/rbt/anoXVI\\_n2/index.aspx?idCategoria=2](http://www.abto.org.br/abtov02/portugues/populacao/rbt/anoXVI_n2/index.aspx?idCategoria=2)

Os grupos trabalharam com a mesma situação e embora dois deles tivessem apresentado resoluções parecidas, focaremos nossa atenção na resolução de um terceiro grupo. Este, a partir de uma simplificação na Tabela 1 (Figura 1) e de uma representação gráfica correspondente à nova tabela (Figura 2), optou por um ajuste de curvas utilizando uma função polinomial do segundo grau para isso. Obtiveram por meio da resolução de um sistema linear com três equações e três incógnitas (os coeficientes numéricos da função polinomial) o seguinte modelo para a situação:

$$T(i) = -0,167.i^2 + 14,4.i - 144 \quad \text{para } i \in R / 14 \leq i \leq 72 \quad (1)$$

<i>idade</i>	<i>transpl.</i>
3	10
8	8
14	25
26	118
42	158
57	119
72	31

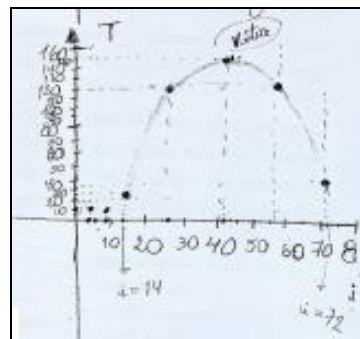


Figura 1: Simplificação da Tabela 1      Figura 2: Representação Gráfica da Situação Inicial

A partir do modelo (1), o grupo de alunos deduziu a fórmula para obtenção do  $x$  do vértice de uma parábola e encontraram a resposta para a segunda parte do problema inicial: segundo este modelo, 43 anos é a idade do maior número dos transplantados com sucesso no país (Figura 3).

$$x_v = \frac{x' + x''}{2}$$

$$x_v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_v = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + -b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_v = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_v = \frac{-14}{0,267} = -52,43 \Rightarrow 43,11 = 43 \text{ anos}$$

Figura 3: Dedução da fórmula para obtenção do  $x$  do vértice de uma parábola

Por meio do breve relato da resolução, feito com base nos registros escritos do grupo de alunos, poderíamos até inferir como se deu todo o processo pelo qual passou o grupo. No entanto, tal inferência não leva em conta os diálogos dos alunos, a intervenção do professor e dos outros alunos, assim como a influência desses registros sobre os percursos adotados pelos sujeitos para resolver o problema. Para compreender como se dá a internalização<sup>4</sup> dos

<sup>4</sup> Segundo Martins e Branco (2001, p.172), "a internalização refere-se ao processo através do qual sugestões ou conteúdos externos ao indivíduo apresentados por um "outro social" são trazidos para o domínio intrapsicológico (do pensar e do sentir subjetivos), passando a incorporar-se à subjetividade do indivíduo".

conteúdos e estratégias bem como a intervenção em uma atividade de Modelagem, complementamos os registros escritos com o áudio das resoluções e utilizamos a ideia de “mediação semiótica” de Vygotsky.

#### **4 Mediação Semiótica e a internalização dos conceitos matemáticos na atividade em questão**

Muitas vezes, em sala de aula, pode haver uma valorização do registro escrito dos alunos em detrimento das discussões que os levaram à produção deste registro. Em contrapartida, assim como na atividade de Modelagem apresentada, pouco se compreende sobre os percursos adotados pelos alunos e sobre a influência do professor, dos demais alunos e dos signos na escolha por tais percursos, quando se leva em consideração apenas o registro escrito.

Ao observarmos o registro do aluno (Figura 3) podemos inferir, ou que foi o professor quem deduziu a fórmula utilizada para obter o  $x$  do vértice de uma função polinomial do segundo grau cabendo ao aluno copiar a dedução, ou ainda, que foi o aluno mesmo quem fez tal dedução. Em ambos os casos, todavia, para inferir se (e como) o aluno internalizou essa informação é necessário conhecer, além do registro escrito, como os participantes envolvidos no processo lidaram com a situação e que meios utilizaram para isso. Em outras palavras, faz-se conveniente investigar como a mediação semiótica, na perspectiva vygotskyana, interveio na atividade de Modelagem Matemática e na internalização dos conteúdos matemáticos e das estratégias de resolução. Mas por que investigar a mediação semiótica?

Para Vygotsky, tudo que aprendemos, desde o nome dado a certo conteúdo matemático, o conteúdo em si, até as suas diferentes representações, depende de nossas interações, já que os conteúdos, inclusive os matemáticos, são, por natureza, construtos sociais, históricos e culturais e, como tal, só podem ser internalizados por meio da interação social, interação esta que é ‘mediação’.

É por meio de elementos de mediação que um sujeito internaliza conceitos, atividades e comportamentos sócio-históricos e culturais. Estes elementos são construídos nas relações humanas e para as relações humanas. É o caso dos instrumentos (elementos que regulam as ações sobre os objetos, tais como um lápis, por exemplo) e dos signos (elementos que regulam as ações sobre os psiquismos das pessoas) – elementos do ambiente humano carregados de significado cultural –. Estes signos têm tanto a função de tornar presente o que é da cultura e está ausente, quanto a função de dirigir a ação dos outros e a própria ação. Para Rivière (1987)



[...] los *signos*, que son utensilios especiales que median la relación del hombre con los otros y consigo mismo. Pero sucede que la conciencia humana, en su sentido más pleno, es precisamente “contacto social con uno mismo”, y por ello tiene una *estructura semiótica*, está constituida por signos, tiene literalmente un origen cultural, y es al mismo tiempo una función instrumental de adaptación. Por eso dice Vygotsky que “el análisis de los signos es el único método adecuado para investigar la conciencia humana”. (p.93)

O registro escrito, tal como o da Figura 3, é um signo assim como a palavra, pensada e falada. A palavra pode ser considerada um signo privilegiado, carregado de significações que foram, aos poucos, constituindo o que o signo é para quem o utiliza. Neste sentido, quando um sujeito utiliza uma palavra num dado contexto, tem nesta palavra muitas ‘vozes’ representadas, ou seja, a palavra é carregada de significações do entorno cultural da pessoa que a utiliza. Isso acontece “[...] exatamente porque um pensamento não tem um equivalente imediato em palavras, a transição do pensamento para a palavra passa pelo significado. [...] A comunicação só pode ocorrer de forma indireta” (Vygotsky, 1993 p.129).

A atividade de Modelagem Matemática caracteriza-se como uma atividade essencialmente colaborativa, já que os alunos e professor conversam sobre o encaminhamento do desenvolvimento da atividade e sobre os conceitos matemáticos que podem ou não ser utilizados de modo a validar uma estratégia, ressignificar um conceito e resolver um problema. Neste sentido, a aula com o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem pode ser considerada um espaço de interação social em que a palavra falada, o diálogo entre os sujeitos, as registros escritos, são instrumentos necessários para a concretização da atividade. Em termos vygotksyanos, podemos dizer que a atividade de Modelagem Matemática constitui-se um espaço privilegiado de interação social, interação que é mediação semiótica e mediação semiótica que, por sua vez, promove a internalização de instrumentos e signos, a ressignificação e aprendizagem de estratégias e conceitos, assim como o desenvolvimento cognitivo.

Em Modelagem Matemática, ou mesmo em outras atividades de um evento educativo, os alunos devem ter a oportunidade de falar, já que é por meio da exposição de como pensam determinado assunto que se dará a interação e a mediação. Para Moreira (1999b, p. 119), “interação e intercâmbio implicam, necessariamente, que todos os envolvidos no processo ensino-aprendizagem *devam* falar e tenham *oportunidade de falar*”.

É por meio da possibilidade de discutir diferentes modos de pensar sobre o problema que distintos encaminhamentos podem ser dados para a resolução. Os signos, ao mesmo tempo em que conferem significado ao percurso do ‘resolver um problema’, ganham significados neste percurso, o que denota que a interação determina o encaminhamento de

uma resolução e as consequentes possibilidades de aprendizagem suscitadas pelo problema. Neste sentido, o professor é um importante agente na interação já que dentre os diferentes sujeitos é ele quem já internalizou significados socialmente compartilhados referentes à temática em questão. Para Moreira (1999b, p.118-119):

[...] na interação social que deve caracterizar o ensino, o professor é o participante que já internalizou significados socialmente compartilhados para os materiais educativos do currículo. Em um episódio de ensino, o professor, de alguma maneira, apresenta ao aluno significados socialmente aceitos, no contexto da matéria de ensino, para determinado signo – da Física, da Matemática, da Língua Portuguesa e da Geografia. O aluno deve, então, de alguma maneira, “devolver” ao professor o significado que captou.

Isso nos leva a caracterizar como um papel do professor em sala de aula: o de mediar significados via intervenções que gerem uma ação nos alunos, uma ação que promova sua aprendizagem. Na atividade de Modelagem que apresentamos, foi a partir da intervenção do professor e dos alunos entre si que a hipótese de que uma parábola e não outra curva se ajustaria aos dados, foi adotada. No entanto, elencar esta hipótese não foi tarefa tão imediata (Ver a transcrição do diálogo a seguir<sup>5</sup>). Ela foi possível diante dos conhecimentos prévios dos alunos, do entendimento destes sobre o problema e do julgamento que faziam sobre os possíveis encaminhamentos da resolução.

*R1: Em relação às idades, o que acontece com os dados conforme a idade aumenta?*

*R2: Chega uma hora que ela aumenta e depois começa a diminuir.*

*D: Mas aí tem outros problemas né. Aí depende...*

*Professor: Ela aumenta e depois diminui?*

*R2: É.*

*R1: No meio é uma parábola.*

*D: Mas aí depende das condições da morte. Imagina, uma pessoa de 80 anos vai... não tem todos os órgãos pra doar.*

*(R2 ri)*

*R1: É quase uma meia senóide.*

*R3: Não gosto de senóide.*

*R1: Eu gosto.*

*R3: É muito louco senóide.*

[...]

*R3: Porque pelo que dá pra ver ele segue a ordem de uma senóide, daí o 42 vai ser o ápice que era 58 e a partir deste 58 ele vai começar a decrescer para chegar a ser 19.*

*R1: Sim, eu pensei nisso também.*

*R3: Porque tem que chegar à conclusão de que é esse número multiplicado por menos... não, não pode ser menos... por menos alguma coisa...*

*R1: Não precisa ser necessariamente uma senóide, pode ser uma, uma quadrá..., não!*

*R3: Não é!*

*R1: Não, não é uma quadrática. Não, porque aqui, no caso, ela tá fazendo só isso, ela vem fazendo assim ó (desenha uma parábola no ar).*

*R2: Mas ela começa assim ó (desenha no ar).*

*R3: Ela segue picos, não?*

*R2: Daí começa a subir e depois começa a descer.*

*R1: Tá... mas do jeito que eu fiz ela sobe e desce.*

*R3: Então... tá, mas de qualquer maneira ela vai chegar a um ápice, que provavelmente... Não, mas vai ter que chegar a alguma conclusão, alguma razão. Eu acho que...*

<sup>5</sup> Na transcrição, os nomes dos alunos são substituídos pelas respectivas letras iniciais. Quando dois nomes iniciam com a mesma letra, acrescenta-se os números 1, 2 e 3 de acordo com o aluno que fala primeiro, segundo e terceiro, respectivamente.

No diálogo, os alunos R1, R2 e R3 discutiam, apenas a partir da tabela (Figura 1), se os dados poderiam ser ajustados via uma senóide ou uma parábola. A dúvida dos alunos justificava-se diante do domínio em que realizariam o ajuste. Neste domínio, tanto um gráfico quanto o outro, teriam um valor de  $i$  (idade) para o qual  $T(i)$  (número de doadores com a idade  $i$ ) seria máximo. Neste contexto, fica evidente que os alunos tinham em mente a segunda parte do problema investigado (“Para que idade o número de doadores é maior?”) e, por isso, é que, intencionalmente, procuravam uma matemática que permitisse a resolução desta questão. De todo modo, a intervenção de uma colega do grupo, apoiada pelo professor (uma intervenção, portanto, reforçada), levou os alunos a considerar um novo signo.

*D: Hein, mas como seria o gráfico dessa... Hein, como seria o gráfico dessa...*

*Professor: Perfeito! Comecem por aí, como seria o gráfico desses pares ordenados. O gráfico pode dar uma ideia do que é esse negócio, de como pode ser esse negócio.*

*R2: Vamos fazer o gráfico.*

A partir da construção do gráfico dos pares ordenados da tabela, os alunos optaram por desconsiderar os valores iniciais e finais – que davam a ideia de senóide – e centrar esforços em modelar, via ajuste de curvas, os dados centrais, os quais continham o valor de  $i$  para o qual  $T(i)$  é máximo. O gráfico, neste caso, foi um importante signo na definição de que encaminhamento tomar e isso se deu a partir da intervenção da aluna D e da intervenção do professor que aprovou a mediação de D.

No entanto, do ponto de vista educacional, acreditamos que nem toda intervenção é o que podemos chamar de produtiva. No diálogo a seguir, quando R2 e D dizem à R1 “*faz as raízes primeiro*” e “*é, apaga isso!*”, intervêm de modo que R1, aquele que no momento conduz a discussão do grupo, pare de realizar a dedução da fórmula do  $x$  do vértice, o que já estava para ser concluído (Figura 3).

*Professor: Essa fórmula aqui (se referindo à fórmula que determina as raízes da função quadrática) você tá usando pra representar as duas raízes, como é que você faria pra representar as duas em separado?*

*R2: Colocar uma com mais e a outra com menos.*

*Professor: Então faz isso.*

*(R1 escreve de forma generalizada)*

*R2: Faz as raízes primeiro.*

*D: É, apaga isso!*

*(R1 pega a borracha)*

*Professor: Mas precisa? Vamos tentar terminar desse jeito para ver se dá?*

*(R1 decide continuar a dedução)*

*R1: Ah! (escreve falando alto) Menos b mais raiz de b ao quadrado menos 4ac.*

*R2: Este é o x linha!*

*R1: [...] menos b menos raiz...*

*R2: Dividido por 2.*

*R1: Menos 2b [...] Ah! (empolgado)*

*(o grupo ri)*

*R1: Eu lembro. Agora eu quase me lembro. Eu me lembro que era parecido com soma e produto mas não era igual.*

*D: Dividido por 2a? (estranhando o cálculo que deveria resultar e 4º no denominador)*

*R1: Não, não é! É que eu tava empolgado!*

(o grupo ri)

D: “Tava empolgado” foi boa!

R1: [...] menos dois  $b$  sobre  $4a$ . *Aí simplifica por 2 e dá menos  $b$  sobre  $2a$ . Não falei que era o ‘ $x$  do vértice’?*

Na situação, se não houvesse uma rápida intervenção do professor – “*Mas precisa? Vamos tentar terminar desse jeito pra ver se dá?*” –, a dedução da fórmula para obter o  $x$  do vértice de uma parábola poderia não acontecer.

Neste caso, em específico, os alunos resolveriam o problema mesmo sem terminar a dedução da fórmula, objetivo este mais do professor que dos alunos no momento – era uma intenção didática que os alunos soubessem deduzir a fórmula quando não a recordassem e estivessem frente a um problema no qual seu uso fosse adequado. Embora entendessem que a média entre as raízes da função possibilitaria o mesmo resultado, não enxergavam relação entre esse raciocínio e a fórmula não recordada (Figura 3).

Neste exemplo, a intervenção do professor possibilitou que os alunos compreendessem como se dá a dedução da fórmula para obter o  $x$  do vértice da função quadrática e relacionassem esta fórmula com o raciocínio de calcular o  $x$  do vértice via média aritmética entre as duas raízes da função.

Mas, o que faz uma intervenção ser ou não apropriada? Para Vygotsky (2001, p.337) “ensinar uma criança o que ela não é capaz de aprender é tão estéril quanto ensiná-la a fazer o que ela já faz sozinha”. Neste contexto, uma intervenção apropriada seria aquela a partir da qual um sujeito consegue resolver um problema (realiza uma atividade, compreende um conceito e etc) para o qual ainda não tinha funções cognitivas suficientemente desenvolvidas. Essa intervenção, para Vygotsky, é aquela que age na zona de desenvolvimento proximal (ZDP) de um sujeito. Segundo Rivière (1987, p.96):

Desde el momento en que el desarrollo de las funciones superiores exige la internalización de instrumentos y signos en contextos de interacción, el aprendizaje se convierte en la condición de desarrollo de estas funciones, pero lo es en tanto en cuanto se sitúe precisamente en la zona de desarrollo potencial<sup>6</sup> del sujeto, definida por la diferencia entre lo que es capaz de hacer por si solo y lo que hace con ayuda de otros. En este concepto se sintetiza, por tanto, la concepción del desarrollo como apropiación de instrumentos (y especialmente signos) proporcionados por agentes culturales de interacción, la idea de que el sujeto humano no es solo um destilado de la especie, sino también – en un sentido menos metafórico de lo que pudiera parecer – una creación de la cultura.

Atuar na zona de desenvolvimento proximal de um aluno implica ao professor conhecer aquilo que ele já sabe (ou ao menos inferir isso) para, a partir de então, realizar intervenções. Neste artigo, consideramos estas intervenções, por sua vez, de “intervenções intencionais”.

---

<sup>6</sup> Na literatura, as expressões ‘Zona de Desenvolvimento Imediato’, ‘Zona de Desenvolvimento Potencial’ e

Em Modelagem Matemática, dada a natureza da atividade – cooperativa, aberta e com múltiplas possibilidades de resolução – são muitas as possibilidades de intervenção, por parte do professor (intervenção intencional) e do outro aluno, e as possibilidades de compreensão (significação e ressignificação) dos conceitos matemáticos. Segundo Moysés (1997, p.37):

Conhecendo a zona de desenvolvimento proximal do aluno, o professor bem preparado saberá fazer as perguntas que irão provocar o desequilíbrio na sua estrutura cognitiva fazendo-a avançar no sentido de uma nova e mais elaborada reestruturação.

Para este autor, portanto, “criando zonas de desenvolvimento proximal, o professor estaria forçando o aparecimento de funções ainda não completamente desenvolvidas” (MOYSÉS, 1997, p.34). O desenvolvimento dessas funções tende a forçar, por sua vez, o aparecimento de outras não completamente desenvolvidas, assim como num momento anterior. O mesmo acontece em atividades de Modelagem Matemática em relação ao levantamento de hipóteses, validação, matematização, problematização e tantas outras ações ligadas à compreensão matemática e aos encaminhamentos de resolução.

É aí que reside a finalidade do ensino: promover o desenvolvimento de funções ainda não completamente desenvolvidas no sujeito, mas por algum motivo necessárias, a partir de situações que propiciem o aparecimento delas, bem como a ocorrência de intervenções pertinentes. Para Vygotsky (2001, p.334)

A aprendizagem só é boa quando está a frente do desenvolvimento. Neste caso, ela motiva e desencadeia para a vida toda uma série de funções que se encontravam em fase de amadurecimento e na zona de desenvolvimento imediato. É nisto que consiste o papel principal da aprendizagem no desenvolvimento.

Todavia, as intervenções que atuam na zona de desenvolvimento proximal de um sujeito diferem daquelas que atuam na zona de desenvolvimento proximal de outro, uma vez que as atividades que um aluno desenvolve com a ajuda de um ‘outro’ ou não são passíveis de entendimento pelo segundo sujeito, ou já são, por ele, realizadas com autonomia. De todo modo, a maneira como as informações advindas da interação social (inclusive da intervenção intencional) – que é mediação semiótica – são processadas e internalizadas pelo sujeito que aprende, depende, dentre outros fatores, do seu arcabouço de experiências, dos conceitos e funções já existentes em sua estrutura cognitiva e, principalmente, de como o sujeito se compromete com a atividade. Em outras palavras, neste último caso, a internalização depende também da ‘intencionalidade’ do aluno frente às situações.

---

‘Zona de Desenvolvimento Proximal’ são sinônimas.

## **5 A Intencionalidade na Atividade de Modelagem Matemática**

A intencionalidade é uma condição importante para a aprendizagem e esta não é influenciada apenas por aspectos cognitivos, mas também por fatores motivacionais e características do ambiente de ensino e aprendizagem. Assim, pretendemos identificar na atividade mencionada na seção 3, o papel da intencionalidade como condição para a aprendizagem e mais especificamente para a aprendizagem significativa.

Entendemos aprendizagem significativa nos termos da teoria formulada por David Ausubel, que é uma proposta psicoeducativa com um enfoque cognitivista, em que a aprendizagem é entendida como um processo que leva ao desenvolvimento cognitivo. Por isso, grande importância é dada aos processos cognitivos dos alunos, que ocorrem em uma interação entre as informações novas e a estrutura cognitiva de cada um.

Para que o ensino conduza a uma Aprendizagem Significativa, Ausubel indica as condições básicas, de grande influência para esse processo (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980): O material organizado para o ensino deve ser potencialmente significativo; a estrutura cognitiva do aluno deve dispor de conhecimentos prévios que permitam o relacionamento do que o aluno já sabe com os conhecimentos novos; o aluno deve apresentar uma predisposição positiva para aprender de maneira significativa.

Com o tempo, um enfoque mais humanista foi delineado por Joseph Novak, que considera a Aprendizagem Significativa como “uma visão da criação de significados que engloba, quer uma teoria da aprendizagem quer uma epistemologia da construção do conhecimento”. Para Novak (2011) a Aprendizagem Significativa compreende a integração construtiva entre pensamento, sentimento e ação em que, a cada evento de aprendizagem, estão esses elementos envolvidos em maior ou menor grau. Desse modo, defende que todo evento educativo deve implicar em ação para trocar significados entre professor e aluno, visando a aprendizagem significativa de um conhecimento contextualmente aceito.

Em consonância com as bases da teoria da Aprendizagem Significativa, Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 2) expressam que:

para que os alunos aprendam de forma significativa, devem se engajar voluntariamente em uma tarefa significativa. Para que a aprendizagem significativa ocorra, a tarefa deve envolver os alunos de forma ativa, construtiva, intencional, autêntica, e de forma colaborativa. Ao invés de testar o conhecimento inerte, as escolas devem ajudar os alunos a aprender como organizar e resolver problemas, compreender fenômenos novos, construir modelos mentais desses fenômenos, e, dada uma situação nova, definir metas e regular sua própria aprendizagem (tradução nossa).

Entendemos que o ensino deve agir no sentido de que os alunos aprofundem e ampliem os significados que constroem ou adquirem por meio da participação nas atividades de aprendizagem. Segundo Howland, Jonassen e Marra (2011) a natureza das tarefas melhor determina a natureza da aprendizagem do aluno e estas são significativas quando envolvem os alunos de forma intencional, ativa, construtiva, colaborativa e autêntica. Os autores representam tais atributos na forma da Figura 4 e entendem que estes são interdependentes e interrelacionados.

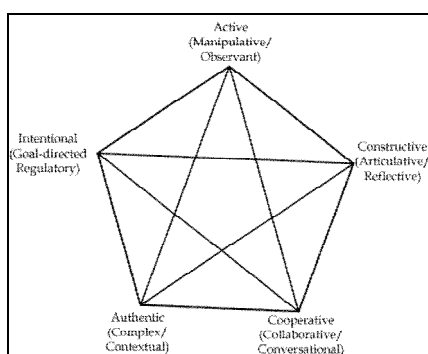


Figura 4: Atributos da Aprendizagem Significativa

Fonte: Howland, Jonassen e Marra (2011, p. 193)

Pretendemos voltar atenção a um dos atributos a que se referem os autores, a *intencionalidade*. Em particular, nas atividades de Modelagem, em especial na atividade mencionada na seção 3, podemos considerar que este atributo está estreitamente relacionado com a terceira condição colocada por Ausubel, a predisposição positiva para aprender de maneira significativa.

Howland, Jonassen e Marra (2011, p.4) afirmam que: “Quando os alunos estão ativamente e intencionalmente tentando atingir um objetivo cognitivo eles pensam e aprendem mais porque estão cumprindo uma intenção”. Esta alegação está de acordo com Bereiter e Scardamalia (1989), para quem a aprendizagem intencional é o processo persistente e contínuo para adquirir, compreender e utilizar uma variedade de estratégias para melhorar a sua capacidade de atingir e aplicar o conhecimento. Nesse sentido, o aluno intencional é alguém que: está motivado para aprender; assume a responsabilidade pela aprendizagem; e, se envolve ativamente em estratégias que facilitam a aprendizagem.

Evidenciamos que, ao propor uma atividade de investigação, em que os alunos se sentiram convidados a decidir por um problema a investigar, o professor estava ajudando a criar um ambiente mais propício à aprendizagem intencional. A interação que resultou na formulação das três questões (seção 3) e posteriormente a opção pela de número 3, remete a

intenção dos alunos delineando os rumos da atividade; o que demonstra que os alunos assumiram para si a responsabilidade de especificar as suas próprias metas de aprendizagem e a mediação do professor ajudou-os a fazer progresso em direção a elas.

O registro dos diálogos (seção 4) nos permite inferir que ao se expressar, buscando solucionar o problema os alunos externalizam mais que ideias matemáticas, expressam também sentimentos que influenciam em suas ações, bem como na mediação do professor, conforme revela o diálogo dos alunos:

*R1: No meio é uma parábola.*

*D: Mas aí depende das condições da morte. Imagina, uma pessoa de 80 anos vai... não tem todos os órgãos pra doar.*

*(R2 ri)*

*R1: É quase uma meia senóide.*

*R3: Não gosto de senóide.*

*R1: Eu gosto.*

*R3: É muito louco senóide.*

A mediação semiótica do professor, baseado nos diálogos e na expressão de modelos mentais ou signos (como na Figura 1 e na Figura 2), influenciou para que resultasse no modelo  $T(i) = -0,167.i^2 + 14,4.i - 144$  para  $i \in R / 14 \leq i \leq 72$ . A partir deste modelo, o professor colaborou com a reflexão dos alunos com o intuito de resolver o problema. Podemos observar que as intervenções do professor, destacadas em negrito abaixo, buscam despertar uma intencionalidade pontual nos alunos, e estes a tomam para si, como podemos perceber por meio das frases que seguem no diálogo.

*Professor: Vocês já tem o modelo e vocês o consideram válido pelo que percebi*

*R1: Sim*

***Professor: Como é que vocês vão usar este modelo agora para responder em qual idade é possível que o número de doações é maior?***

*R1: é o pico!*

*... (outras falas)*

*R3: Não tem uma fórmula com a ou b e tal ou alguma coisa assim?*

*R1: Deixa eu pensar... tem haver com o a, com o b e com o c também.*

*Professor: Qual o nome do que a gente procura?*

*R2: Ponto de máximo!*

*Professor: Ponto de Máximo! Qual o nome que a gente dá para o desenho deste gráfico?*

*R1: Parábola com concavidade voltada para baixo.*

***Professor: Então... determinar o ponto de máximo da parábola com concavidade voltada pra baixo é achar o quê da parábola?***

*R1: O a? Não!*

*D: Meu Deus!*

*R1: O x do vértice?*

***Professor: Isso! E como a gente faz isso?***

*R2: Era 2a sobre alguma coisa.[...]*

*Professor: Então, este vértice da parábola tem diferentes jeitos de achar, como é que a gente pode achar ele.*

*R3: A gente estudou isso no ano passado.*

*R2: Era 2a sobre alguma coisa.*

***Professor: Esse pode ser 'um jeito', mas e se eu não lembrar esse jeito, que outro jeito eu vou usar?***

*[...]*

*R1: Ah ah ah... é o negócio dividido por 2.*

*Professor: Dividido por 2?*



*R1: É que eu tenho que dividir ela no meio, porque dá o ponto má... daqui pra cá é uma coisa e daqui pra cá é outra entendeu?*

*Professor: Mas você vai achar o meio entre quem?*

Por fim, a conclusão de que 43 anos é a idade da maior parte das pessoas doadoras de órgãos no país (Figura 3) foi a solução compartilhada tanto pelos alunos quanto pelo professor.

Como mencionam Howland, Jonassen e Marra (2011), a intenção pode não ser, inicialmente, expressa pelo aluno, mas deve ser aceita e adotada por ele. Desse modo, os alunos passam a entender mais e mostram melhores habilidades ao usar o conhecimento que eles têm construído em novas situações.

## 6 Considerações Finais

Colocar alunos sentados próximos uns dos outros com o objetivo de que realizem uma atividade de Matemática não é garantia de que discussões sobre a atividade acontecerão. Na condição de professores, é comum observarmos nas aulas de Matemática a seguinte dinâmica do trabalho em grupo: os alunos sentam-se, baixam suas cabeças para resolver as questões e a levantam para inquirir o outro com frases do tipo “o meu deu tanto, e o seu?”, “já terminei e você?” – frases que denotam que, de fato, não houve trabalho em grupo.

Acreditamos que o tipo de atividade proposta pelo professor aos alunos contribui para que estes atribuam à atividade uma intenção. É o caso da Modelagem Matemática, alternativa pedagógica na qual as situações são escolhidas pelos alunos em conjunto com o professor, na qual os problemas são elaborados pelos alunos, os quais acabam por compartilhar as intencionalidades relacionadas ao trabalho com Modelagem. A partir da intencionalidade é que a dinâmica do grupo será constituída, uma dinâmica em que os diálogos, a negociação de significados, os encaminhamentos, enfim, a interação social – carregada de signos – será constante. E é por meio da interação, da cooperação entre os sujeitos, que os conceitos matemáticos são internalizados.

Segundo Moreira (1997, p.26):

En la óptica vygotskyana, la “internalización” de significados depende de la interacción social, pero, así como en la visión ausubeliana, pueden presentarse a la persona que aprende en su forma final. El individuo no tiene que descubrir lo que significan los signos o cómo se usan los instrumentos. Él se apropia (reconstruye internamente) de esas construcciones por la vía de la interacción social.

Nesse sentido, as intervenções intencionais do professor e as intervenções do outro (outro aluno e/ou demais signos do ambiente cultural) é que mediam significados socialmente

constituídos para os conceitos, inclusive os matemáticos. Logo, via interação é que se dá a mediação, a internalização e a intervenção entre sujeitos.

Se por um lado os elementos de mediação utilizados pelo professor são, em parte, responsáveis pelo despertar da intencionalidade de um sujeito frente a um problema matemático de sala de aula, por outro, é somente a partir da intencionalidade de um sujeito frente a uma situação que qualquer elemento de mediação pode contribuir para a internalização dos conceitos. Isto nos leva a inferir que, em sala de aula, mediação leva a intencionalidade e intencionalidade leva a mediação e é por meio da “interação” desses dois elementos que a internalização se torna possível.

### Referências

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 11, p. 1-16, 2005.

AUSUBEL, D. P; NOVAK, J. D. e HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Trad. Eva Nick. 2ª edição. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BEREITER, C. & SCARDAMALIA, M. (1989). Intentional learning as a goal of instruction. In L. B. Resnick (Ed.), **Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser** (pp. 361-392). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

HOWLAND, J. L.; JONASSEN, D.; MARRA, R. M.. **Meaningful Learning with Technology**. 4. ed. Boston: Pearson, 2011. 292 p.

MARTINS, Lincoln Coimbra; BRANCO, Angela Uchôa. **Desenvolvimento moral: considerações teóricas a partir de uma abordagem sociocultural construtivista**. *Psic.: Teor. e Pesq.* [online]. 2001, vol.17, n.2, pp. 169-176.

MOREIRA, M. A.. **Aprendizagem Significativa**. Fórum Permanente de professores. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1999 a.

\_\_\_\_\_. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999 b.

\_\_\_\_\_. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In: **Actas del**

**Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo.** Burgos, España. p. 17-45, 1997.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.** 9ª edição. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NOVAK, J. D.. A Theory of Education: meaningful learning underlies the constructive integration of thinking, feeling, and acting leading to empowerment for commitment and responsibility. **Aprendizagem Significativa em Revista**, Porto Alegre, v. 1, n. 2, p.1-14, ago. 2011. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/asr>>. Acesso em: 05 fev. 2012.

RIVIÈRE, Angel. **El sujeto de la psicologia cognitiva.** Madrid: Alianza, 1987.

VYGOTSKY, Lev S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, Lev. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1993.