



## Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

28 a 31 de outubro de 2012

Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Hotel Vale Real - Rodovia BR 040, Km 62 - Itaipava

### AS PREMISSAS E OS PRESSUPOSTOS NA CONSTRUÇÃO CONCEITUAL DE MODELOS

Dale Bean  
Universidade Federal de Ouro Preto  
dale@iceb.ufop.br

#### RESUMO

A concepção de modelagem matemática como uma construção conceitual elaborada por meio da adoção de premissas e formulação de pressupostos utilizando a linguagem matemática, oferece uma lente para um entendimento dos papéis de modelos em atividades socioculturais. Este ensaio apresenta essa concepção de modelagem, ilustrando-a com o modelo galileano de queda livre com intuito de exemplificar a conceituação de um número limitado de aspectos da construção do modelo, que chamamos de *isolado*, destacando as *premissas* e os *pressupostos* que são fundamentais para sua construção.

**Palavras-chave:** modelagem, isolado, premissas e pressupostos.

#### ABSTRACT

The conception of mathematical modeling as a conceptual construction elaborated by means of the adoption of premises and the formulation of assumptions using mathematics as a language, offers a lens to understand the roles of models in sociocultural activities. This essay presents this conception of modeling, illustrating it with Galileo's free fall model to exemplify the conceptualization of a limited number of aspects in the construction of the model, that we name the *isolate*, emphasizing the *premises* and the *assumptions* that are fundamental for its construction.

**Keywords:** modeling, isolate, premises and assumptions.

## 1 Introdução

Existe uma pluralidade de perspectivas e concepções que dizem respeito à modelagem matemática na educação matemática (KAISER e SRIRAMAN, 2006; ARAÚJO, 2010; BUENO, 2011), cujos múltiplos significados vêm oferecer subsídios para a educação matemática e a educação em geral. Entre essa diversidade, Monteiro (1992 *apud* Araújo, 2002, p. 16) e Araújo (2002) apontam duas vertentes amplas, não mutuamente exclusivas, relativas à modelagem matemática no âmbito educacional. Uma delas se aproxima da matemática aplicada, por enfatizar a construção e a aplicação de modelos matemáticos. A outra se aproxima de estratégias ou metodologias para o ensino e a aprendizagem, por focalizar a contextualização da matemática em outras áreas de atuação, abrindo, dessa forma, a oportunidade de trabalhar uma diversidade de objetivos educacionais.

Este ensaio tem por objetivo examinar a modelagem como uma atividade de construir modelos, entendendo-a como uma construção conceitual por meio da adoção de *premissas*, que são ideias ou concepções globais que guiam a construção, e da formulação de *pressupostos*, que se referem ao modo como os aspectos levados em consideração na modelagem serão conceituados. Por entender que utilizamos modelos para nortear atividades socioculturais, essa concepção de modelagem fornece uma lente para desenvolver uma compreensão a respeito de relações entre modelos e atividades humanas na evolução de quaisquer práticas socioculturais, qualquer que seja a área de atuação.

Independentemente do que seja o entendimento do que é modelagem, a questão *O que é um modelo?* geralmente aparece. Em termos gerais, modelos são construções simbólicas, utilizadas para desenvolver e comunicar uma compreensão de como entendemos situações da vida, nas quais nos encontramos. É por meio dessa compreensão que os modelos norteiam nossas atividades referentes às situações (BEAN, 2007). Como modelos são construções humanas, os saberes, interesses, objetivos e as visões de mundo dos modeladores estão embutidos nas suas construções. Essa presença da *mão* do ser humano nos modelos se torna evidente, ao analisar modelos cuja elaboração se dá por meio da adoção de premissas e da formulação de pressupostos. É essa atividade de construção de modelos que entendemos por modelagem, e a descrição desse tipo de construção conceitual é o foco deste ensaio.

Embora a concepção de modelagem a ser apresentada neste ensaio alinhe-se com

a modelagem que aproxima o trabalho do matemático aplicado à construção de modelos (BLUM e NISS, 1991; BASSANEZI, 2002; BORROMEO FERRI, 2006; CIFUENTES e NEGRELLI, 2009, 2011; BEAN, 2007; MELILLO e BEAN, 2011, MELILLO, 2011), os argumentos desenvolvidos se fundamentam nos conceitos premissas e pressupostos, de modo que a concepção seja generalizável para qualquer atividade sociocultural (ver BEAN, 2007). De modo geral, a construção de um modelo, como construto conceitual, incorpora uma variedade de atividades que se sobrepõem umas às outras e se encadeiam de maneira não linear, numa dinâmica de conceituação e reconceituação. Ao descrever a atividade de modelar no contexto do trabalho do matemático aplicado, Bassanezi (2002) explicita algumas fases gerais que fornecem subsídios para um entendimento a respeito da construção de modelos matemáticos. A partir de uma situação problemática, o modelador envolve-se em: a) experimentação e obtenção de dados considerados pertinentes à formulação do problema e à construção do modelo; b) abstração – isto é, o levantamento de hipóteses e a realização de simplificações, a respeito do que está entendido como a situação-problema, de modo que a situação seja tratável dentro dos quadros conceituais da(s) comunidade(s) na(s) qual(is) o problema está sendo conceituado, apoiando-se nas tecnologias, nos conhecimentos e nas linguagens dessa(s) comunidade(s); c) substituição das linguagens dessa(s) comunidade(s) (por exemplo, uma linguagem técnica dos biólogos, que inclui conceitos com significados específicos na comunidade) por uma linguagem matemática julgada apropriada pelos modeladores para obtenção do modelo matemático; d) apreciação da adequação do modelo, tanto à situação quanto aos objetivos dos modeladores; e) com base na avaliação, com a possibilidade da realização de modificações (por exemplo, ajustes em parâmetros ou até reconceituações), o subseqüente uso do modelo.

Focalizaremos o que Bassanezi (2002) denomina *abstração*, por entender que as premissas e os pressupostos que fazem parte dessa abstração distinguem a modelagem de outras atividades humanas. Introduzimos o termo *isolado* (BEAN, 2009; MELILLO e BEAN, 2011; BEAN e VIDIGAL, 2011; MELILLO, 2011), a ser descrito em maiores detalhes na seção 4.1, para destacar como as premissas adotadas e os pressupostos formulados pelos modeladores entram na construção de um recorte-conceituação da situação sendo modelado. Recorte-conceituação refere-se à ideia de que, em uma dada situação, o que é possível considerar já possui um grau de significação para os modeladores, remetendo aos quadros conceituais que eles utilizam. O conceito de *isolado*, de que trata esse recorte-conceituação, aproxima-se do conceito de *modelo real*

usado por Blum e Niss (1991), quando abordam modelagem e aplicações no contexto da matemática aplicada e do conceito de *pseudorrealidade*, usado por Cifuentes e Negrelli (2011) no contexto de modelagem matemática, tanto em outras áreas de atuação diferentes da Matemática, como a Física, quanto na própria Matemática (CIFUENTES e NEGRELLI, 2006, 2007; NEGRELLI, 2008). O conceito do *isolado* também abraça ideias de Skovsmose (2001) quanto à construção de modelos matemáticos para a formatação de atividades socioeconômicas, bem como ideias de Hestenes (2006) e Ferreira e Justi (2008) no contexto do ensino e aprendizagem das ciências, quanto aos papéis de modelos na construção do conhecimento científico.

Com o intuito de evidenciar o conceito de *isolado* e as premissas e os pressupostos que são considerados na elaboração do modelo, distinguimos duas classes abrangentes de modelos. Uma envolve o uso significativo de inter-relações entre conceitos relativos a uma dada situação, que chamaremos construções conceituais. Nesta classe, o modelo é uma unidade composta de relações entre conceitos que expressa ou comunica uma compreensão a respeito da situação além daquela que seus elementos, tomados separadamente, podem expressar ou comunicar. A outra classe envolve tipos diversos de construções, que não fazem uso significativo de inter-relações entre conceitos referentes ao contexto da situação. Embora a distinção entre essas classes não seja nítida, ela fornece um ponto de referência para desenvolver uma compreensão a respeito da maneira na qual estamos utilizando os conceitos de premissas e pressupostos.

Na próxima seção, descreveremos, em termos gerais, o que é um modelo matemático e diferenciaremos modelos, relativamente à forma de construção, exemplificando com modelos que expressam relações entre distância e tempo para o fenômeno da queda livre. Um desses modelos, aquele de Galileu, é resultado de uma construção conceitual, e o outro, resultado de um *ajuste de curva*. Na sequência, na seção 3, interpretaremos a construção do modelo galileano, destacando os conceitos: premissas, pressupostos e isolado. Em seguida, descreveremos com maiores detalhes como esses conceitos estão sendo entendidos para servir como conceitos-chave da concepção de modelagem exposta neste ensaio. Encerraremos com considerações gerais a respeito dessa concepção de modelagem.

## 2 Modelo matemático

Entendemos por modelo matemático uma construção simbólica expressa principalmente na linguagem matemática, que se refere a algumas relações consideradas pertinentes a uma situação, de modo que o modelo auxilie na interpretação, compreensão e / ou tomada de decisão concernente a tal situação ou em outras situações, nas quais se considere adequado aplicar o modelo. Nesse sentido, um modelo possui certo grau de generalidade, ou seja, pode ser útil em situações além daquela para a qual foi construído.

Existem várias maneiras para categorizar modelos. Por exemplo, há categorias cujos critérios para diferenciação se fundamentam no tipo de situação abordada, e outras categorias que se referem à matemática utilizada para conceber a situação. Com relação à natureza dos fenômenos considerados, podemos ter modelos *estáticos* e modelos *dinâmicos*. Os modelos estáticos se caracterizam por serem conceituados geometricamente, modelando formas ou objetos, como por exemplo, um alvéolo no favo de uma colmeia. Os modelos dinâmicos, por sua vez, são construídos para levar em consideração as variações, como por exemplo, o crescimento populacional de uma colmeia. Em se tratando da classificação da matemática utilizada, duas categorias de modelos servem como exemplos: *lineares* e *não lineares* que se diferenciam pelos tipos de equações utilizadas. (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Como este ensaio objetiva uma conceitualização da atividade de modelar, o critério para diferenciar as categorias de modelos se fundamenta na maneira que o modelo está construído. Exemplificaremos com duas categorias de modelos: *construto conceitual* e *ajuste de curva*. A criação de um construto conceitual se fundamenta na elaboração de relações entre conceitos, para que o modelo possa ser interpretado com referência aos quadros conceituais utilizados na construção, como os quadros da Física e da Matemática, no exemplo ilustrativo de queda livre, a seguir, na seção 2.1. No caso do ajuste de curva, a obtenção do modelo apoia-se, por grande parte, em técnicas e/ou procedimentos matemáticos, que fundamentaram a construção de um algoritmo, utilizado para obter uma curva que se ajuste a um conjunto de dados (exemplificado na seção 2.2). Reconhecemos que essas duas categorias de modelos – *construto conceitual* e *ajuste de curva* – não são exaustivas como categorias, nem são a única maneira de classificar a atividade de elaboração de modelos. Utilizamos essas categorias para fins

comparativos, com intuito de exemplificar e situar características da construção de um construto conceitual entre as diversas maneiras para construir modelos. Nas duas subseções a seguir, exemplificaremos a obtenção de modelos que expressam uma relação entre as grandezas distância e tempo para um corpo em queda livre; primeiro, por meio de uma construção conceitual e, em seguida, por meio de um ajuste de curva.

## 2.1 Modelo matemático como resultado de uma construção conceitual

A construção de um modelo para a queda livre feita por Galileu incluiu a elaboração de relações entre conceitos físicos e matemáticos, que ele considerou pertinentes para seu objetivo: descrever em linguagem matemática a forma como acontece a queda. A modelagem de Galileu envolveu a construção de relações entre conceitos, como distância, tempo, velocidade, aceleração e força de atração da gravidade, utilizando a linguagem matemática, o que resultou em uma relação (modelo 1) entre as grandezas de distância ( $s$ ) e tempo ( $t$ ) da queda, onde  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade:

$$s = \alpha t^2 \quad (1)$$

Galileu, ao desenvolver seu modelo, assumiu a *premissa* de que existe uma força de atração entre a Terra e o corpo em queda. Ainda *pressupôs* que tal força agisse de forma constante. Ao desprezar a influência do ar na queda, ou seja, ao formular o *pressuposto* de que não há resistência do ar, a modelagem admite o uso de proporcionalidade para construir a relação, segundo a qual a velocidade ( $v$ ) do corpo aumentaria proporcionalmente ao tempo ( $t$ ) da queda:

$$v = \beta t \quad (2)$$

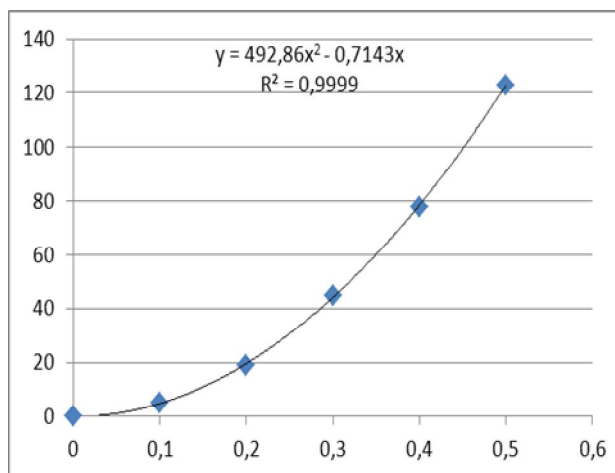
A partir dessa relação entre as grandezas físicas – velocidade e tempo –, é possível deduzir, pelo teorema da velocidade média, que a distância percorrida é proporcional ao quadrado do tempo transcorrido (modelo 1). Esse exemplo de uma construção conceitual será desenvolvido em mais detalhes na seção 3. Para fins comparativos, descreveremos a obtenção de um modelo para a queda livre por meio de um ajuste de curva.

## 2.2 Modelo matemático como resultado de um ajuste de curva

Um modelo obtido por meio de um ajuste de curva tem por propósito o estabelecimento de uma correlação entre grandezas. Para a queda livre, um modelo pode ser elaborado por meio de um conjunto de dados experimentais por algum método de ajuste de curva a esses dados, por exemplo, o método dos mínimos quadrados. Os dados, de tempo e distância para queda livre, apresentados a seguir, foram obtidos em uma apostila de Física experimental (LAPOLLI *et al.*, 2008, p. 24). Utilizaremos estes dados para obtenção de um modelo por meio de um *ajuste de curva* (efetuado por um *software* próprio).

**Tabela 1.** Dados de tempo e distância para a queda livre extraídos de Lapolli *et al.* (2008, p. 24).

Tempo (segundos)	Distância (cm)
0	0
0,1	5
0,2	19
0,3	45
0,4	78
0,5	123



**Figura 1.** Curva de um ajuste da função quadrática aos dados na tabela 1.

Ao selecionar um ajuste para uma função polinomial de grau dois, o *software* fornece o seguinte modelo:

$$s = 492,86 t^2 - 0,7143 t \quad (3)$$

A função quadrática (modelo 3) se ajusta bem ao conjunto de dados. A função, entretanto, possui duas raízes, 0 e  $\frac{0,7143}{492,86} \approx 0,00145$ , o que significa que o modelo prevê valores de distância negativos entre elas. O intervalo de tempo, porém, de zero até 0,00145 segundos, dependendo do objetivo do modelador, pode ser considerado não

pertinente, portanto pouco importaria essa anomalia relativamente às informações que o modelo lhe fornece.

O modelo obtido pelo *ajuste de curva* conceitua a situação concernente ao estabelecimento de uma correlação entre grandezas, na qual o comportamento global destas está associado às características da curva. O modelo, no entanto, fecha-se em si, isto é, não é aberto para incorporar modificações conceituais, ao levar em consideração outros aspectos e relações para a criação de outro modelo. Por exemplo, o ajuste não faz discriminação entre conceituações de aspectos específicos, como a influência da resistência do ar.

### **3 Modelagem de Galileu para queda de corpos**

Estudiosos apresentam informações e conjecturas a respeito da modelagem da queda livre realizada por Galileu e, ao mesmo tempo, apontam lacunas nas informações disponíveis quanto ao conhecimento acessível a Galileu e à ordem das suas cadeias lógicas na construção do seu modelo. Por exemplo, Clavelin (1974) levanta questões relativas às fontes nas quais Galileu possivelmente, ou não, apoiou-se, ao desenvolver suas conceituações. De acordo com Koyré (1986, p. 107-108), Galileu, em 1604, concebeu a relação entre as distâncias de queda e os quadrados dos tempos como sendo proporcional, antes de afirmar a relação de que a velocidade é proporcional ao tempo. Em outros termos, inverte-se a dedução lógica a ser apresentada nesta seção, que parte da relação entre velocidade e tempo, para chegar à relação entre a distância e o quadrado do tempo. Isso, de certa forma, exemplifica algumas características que fazem parte da construção de modelos, como a não linearidade do pensamento, da intuição e da criatividade.

Nesta seção, devido à impossibilidade de reconstruir as idas e vindas do pensamento de Galileu, utilizaremos informações históricas para construir uma narrativa coerente sobre a construção conceitual do seu modelo, destacando o que interpretamos como as premissas e os pressupostos considerados.

Losee (2000), ao analisar os estudos de Galileu, utiliza o termo *idealização*, para se referir à atividade de formular pressupostos, no intuito de matematizar situações. De acordo com Losee,

Galileu insistiu sobre a importância da abstração e da idealização para a Física, assim entendendo o alcance das técnicas indutivas. No seu próprio trabalho, ele fez uso de idealizações tais como “queda



livre no vácuo” e “pêndulo ideal”. [...] Galileu foi capaz de deduzir o comportamento aproximado dos corpos em queda e de pêndulos reais a partir de princípios explicativos que especificam propriedades dos movimentos idealizados. Uma consequência importante deste uso das idealizações foi enfatizar o papel da imaginação criadora no Método de Resolução. Não se pode obter hipótese sobre idealizações nem por indução por enumeração simples nem pelo método da concordância e diferença. É necessário intuir, selecionando as propriedades dos fenômenos que constituem uma base adequada da idealização, e aqueles que podem ser ignorados (LOSEE, 2000, p. 66-67).

No caso da queda de corpos, é importante ressaltar que Galileu teve como objetivo a matematização do *como* da queda; ou seja, descrever o comportamento da queda quantitativamente. Isso se opõe a uma investigação do *porquê*, ou das causas finais da queda, conforme o propósito de Aristóteles, cujo modelo para a queda de corpos se fundamentou na premissa de que cada *coisa* tem seu lugar natural. Essa premissa possui uma coerência com a conceituação aristotélica de que objetos sólidos “tendem a procurar a Terra”. Em contraposição, o pensamento e o olhar de Galileu eram guiados pelo seu objetivo, influenciando o que ele julgou importante relativamente às premissas a serem adotadas e à formulação de pressupostos.

O modelo galileano pode ser compreendido com base em duas premissas. Uma diz respeito ao fato de que um corpo qualquer tende a permanecer na mesma velocidade se não houver uma força agindo sobre ele. Essa noção, que é conhecida como a primeira lei de Newton, também foi conceituada por Galileu e anunciada por Descartes (KLINE, 1985, p. 103-104). A segunda premissa, que já teve um grau de aceitação na sua época, é a ideia de que a Terra exerce uma força sobre os corpos terrestres; assim, existiria uma força de atração entre um corpo em queda e a Terra. A partir dessas premissas sobre forças e dos pressupostos que serão delineados a seguir, o modelo galileano pode ser construído, logicamente coerente com conceitos físicos e matemáticos da época, de maneira que a queda de corpos pode ser expressa e comunicada por meio da linguagem matemática.

No modelo galileano, a influência da gravidade está acentuada pela formulação do pressuposto de que não há resistência do ar. Em outros termos, Galileu *imaginou* a ausência de resistência do ar e, por meio dessa conceituação, desconsiderou aspectos idiossincráticos dos corpos, como a diferença entre a queda de uma pena e a de uma pedra. Um pressuposto adicional entra na modelagem: com base na premissa de que existe uma força de atração (gravidade) ou uma forma de interação entre o corpo e a

Terra, Galileu pressupôs que essa interação se comporta de modo constante.

Em resumo, a construção do modelo galileano de queda livre envolveu a elaboração de um conjunto finito de premissas, aspectos, e pressupostos apreciados como proveitosos para a modelagem. Essa elaboração remeteu às experiências de Galileu e à formulação e à realização de experiências empíricas e de pensamento, que indicaram que esses elementos levantados podem ser inter-relacionados e conceituados, de forma que admitiriam a construção de um modelo. Chamamos a esses elementos o *isolado* e reconhecemos que são indissociáveis da atividade subjetiva de inter-relacioná-los. Por exemplo, a elaboração do isolado da queda livre envolveu a realização de um experimento de pensamento sobre uma queda no vácuo, a construção de relações entre distância, tempo, velocidade e aceleração e a relação entre a força de atração e a aceleração.

A seguir, apresentamos elementos do isolado da construção do modelo de queda livre, conforme as conceituações de Galileu:

*Premissas adotadas:*

- A velocidade de um corpo, na ausência de uma força, permanece invariante.
- Existe uma força de atração entre a Terra e os corpos.

*Aspectos levantados:*

- Força de atração.
- Ar ou atmosfera.
- Distância.
- Tempo.
- Velocidade.
- Aceleração.

*Pressupostos formulados:*

- A força de atração entre o corpo e a Terra é constante.
- Não há resistência do ar.

Assumindo essa formulação conceitual do isolado, que inclui a aceitação das premissas e dos pressupostos, é possível descrever a queda livre, de forma que a

velocidade ( $v$ ) do corpo varia uniformemente com o tempo ( $t$ ) da queda; expresso na linguagem matemática:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad (4)$$

Ainda, utilizando conhecimentos (Teorema I, proposição I, *Duas novas ciências*, de Galileu, 1988, p. 170) equivalentes ao teorema da velocidade média, conhecido desde o século XIV, é possível deduzir que a distância ( $s$ ) da queda é proporcional ao quadrado do tempo ( $t$ ):

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad (5)$$

O teorema de velocidade média afirma que, se a velocidade varia uniformemente com o tempo, então a distância percorrida em  $t$  unidades de tempo é igual à distância percorrida à velocidade média para o mesmo tempo  $t$ . Em outras palavras, dada uma velocidade uniformemente variada, a distância  $s$  percorrida em tempo  $t$  é dada por  $s = \frac{1}{2}vt$ . Resolvendo essa equação para  $v$  e substituindo a expressão obtida no lugar de  $v_1$  e  $v_2$  na relação (4), obtém-se o modelo galileano (modelo 5).

São as premissas e os pressupostos baseados em conceitos físicos e matemáticos da comunidade científica, utilizados e formulados de forma diferenciada (em relação ao modelo aristotélico vigente), que fundamentam esse modelo. O modelo se mostrou adequado para o objetivo de Galileu e serve, até hoje, como um parâmetro para trabalhos e investigações que levam em consideração corpos em queda.

Caso o interesse ao desenvolver um modelo de queda livre mude, por considerar, por exemplo, que corpos tendem a uma velocidade terminal, pode-se partir do modelo de Galileu para fazer mais uma modelagem. É possível substituir o pressuposto de que não há resistência do ar por um pressuposto que admite a influência do ar. Por exemplo, pode-se pressupor que a influência do ar no corpo seja concebida em relação à velocidade do corpo. Não entraremos em mais detalhes sobre essa mudança no

pressuposto referente ao aspecto ar;<sup>1</sup> apenas a levantamos, no intuito de exemplificar que um modelo do tipo construto conceitual, visando a outros objetivos, fica aberto para ser modificado, ao se formularem outros pressupostos.

#### **4 Modelagem e modelagem matemática**

Entendemos por modelagem, sem o adjetivo *matemático* (ou seja, sem referência a uma linguagem em particular), a atividade de elaborar construções conceituais que envolvem uma mudança em premissas e/ou pressupostos, como exemplificada com os dois pressupostos que dizem respeito ao aspecto do ar para a queda livre. Pode até ser uma construção inédita, como no caso de Galileu, adotando premissas e formulando pressupostos, de forma que eles estão utilizados de maneira não usual na construção do modelo. É a alteração em premissas e/ou pressupostos que transforma a conceituação e, assim, o construto conceitual, ou seja, o modelo. Por consequência, altera o modo como compreendemos o fenômeno em questão. Além disso, quando a linguagem matemática está envolvida nessa construção, adjetivamos a atividade relativamente à linguagem matemática e a chamamos *modelagem matemática*.

##### **4.1 O isolado**

Na atividade de construir um modelo, os modeladores trabalham com um número finito de aspectos e constroem um número finito de relações entre aspectos referentes a uma situação. Desta forma, delimita e isola *o que* será considerado e inter-relacionado na construção do modelo. Em grande parte, decisões a respeito do levantamento de aspectos e da formulação de pressupostos para a elaboração do isolado remetem a considerações de simplicidade e interesse em torno dos propósitos dos modeladores. Por isso, o isolado é uma noção central para a compreensão da atividade de modelar.

Apropriamo-nos do termo isolado de Caraça (1998), ampliando-o e ressignificando-o no contexto da concepção de modelagem exposto neste ensaio. De acordo com Caraça (1998, p. 105), o *isolado* é uma construção que delimita o que considerar, reconhecendo que, “na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador *recorta, destaca*, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados” (grifo do autor). Entendemos que os seres e fatos também incluem elementos como teorias,

---

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, Boyce e DiPrima (2006), para um modelo de queda livre que leva em consideração a resistência do ar.

princípios, modelos e conceitos dos quadros conceituais de uma ou de algumas comunidades.

Ampliamos a concepção de Caraça, por acentuar que as experiências e os objetivos do *observador* (modelador, em nosso contexto), que entendemos como uma pessoa ativa com interesses e objetivos, influenciam as decisões, tanto a respeito de quais aspectos considerar quanto com relação às conceituações tidas como apropriadas para a construção do modelo, uma construção simbólica. Concordamos com Putnam, que símbolos ou

signos não correspondem intrinsecamente a objetos, independentemente de como esses signos são empregados e por quem. Mas o signo que é realmente empregado de uma maneira específica por uma comunidade específica de usuários pode corresponder a objetos específicos *dentro do esquema conceitual desses usuários*. “Objetos” não existem independentemente de esquemas conceituais. *Nós* cortamos o mundo em objetos quando introduzimos um ou outro esquema de descrição. (PUTNAM, 1981, p. 52, grifos do autor, tradução nossa).

Em outras palavras, além dos papéis dos interesses e objetivos dos modeladores na construção de modelos, os esquemas conceituais da comunidade ou das comunidades em que os modelos estão sendo construídos fornecem fontes de significados aos modeladores.

É importante estar ciente de que a elaboração do modelo não depende somente da vontade dos modeladores e dos seus esquemas conceituais. Ao recortar e conceituar, ou seja, ao criar, na elaboração do isolado, este nem sempre pode ser desenvolvido como os modeladores pretendem, devido ao fato de que o mundo também é um *agente* ativo e fará sua própria *crítica* sobre as conceituações dos modeladores.

Entendemos que, uma vez envolvido em uma situação problemática, os modeladores devem fazer uma leitura crítica da problemática à luz dos quadros conceituais e dos modelos vigentes e analisar a coerência da forma em que os aspectos estão sendo qualificados e inter-relacionados no contexto da situação. Com base nas suas experiências, adotam premissas e identificam aspectos considerados pertinentes e os qualificam (formulação de pressupostos) em relação aos seus objetivos. Dessa forma, entre uma infinidade de aspectos e relações que podem ser construídos referentes à situação, os modeladores trabalharão com um conjunto finito deles na elaboração do isolado.

Essa concepção do isolado se aproxima do que Cifuentes e Negrelli (2011)

denominam *pseudorrealidade*, que, de acordo com os autores, é a construção de uma realidade conceitual com base na realidade empírica, de forma que ela admite a formulação de um modelo. Coerente com o entendimento de Cifuentes e Negrelli, entendemos que o isolado não é um modelo. Consideramos a elaboração do isolado uma atividade que parte das percepções dos modeladores, relativamente à situação problemática, e envolve a adoção de premissas, o levantamento de aspectos, a formulação de pressupostos, inter-relacionando esses elementos em um ir e vir, criando, assim, uma compreensão da situação.

A noção de isolado também é similar ao conceito de *modelo real* que Blum e Niss (1991) utilizam para distinguir entre a *situação*, o *modelo real* (similar ao que nos referimos como o *isolado*) e o *modelo matemático*:

[A] situação tem que ser simplificada, idealizada, estruturada, sujeita a apropriadas condições e pressupostos, e ser feita mais precisa pelo “solucionador de problema” de acordo com seus interesses. Isto leva a um *modelo real* da situação original que por um lado ainda possui características essenciais da situação original, mas por outro lado já é tão esquematizado que (se for possível) admite uma abordagem por meios matemáticos. O modelo real tem que ser matematizado, i.e. seus dados, conceitos, relações, condições e pressupostos serão traduzidos para a matemática. Assim, tem por resultado um modelo matemático da situação original. (BLUM e NISS, 1991, p. 38-39, grifos dos autores, tradução nossa).

Entendemos que uma situação não possui características essenciais em si, mas aspectos ou características apreciados como importantes em relação aos interesses e às experiências do modelador. Isso está posto implicitamente por Blum e Niss quando escrevem as frases “sujeita a apropriadas condições e pressupostos” e “de acordo com seus interesses”.

Os conhecimentos e a compreensão matemática dos modeladores também interferem no seu levantamento de aspectos e na formulação de pressupostos a serem matematizados. De modo geral, a matematização faz parte da construção do isolado.<sup>2</sup> Desse modo, se a modelagem envolve a construção de um modelo matemático, as conceituações têm de admitir a formulação na linguagem matemática, e, assim, o levantamento, o uso e a manipulação de conceitos com esse fim fazem parte da formulação do isolado.

---

<sup>2</sup> Cifuentes e Negrelli (2006) referem-se ao caso da modelagem matemática na própria Matemática. Assim, em princípio, uma vez que não existem conceituações fora dos quadros conceituais da Matemática para ser matematizadas, não acontece a matematização.

A respeito da noção do isolado, Dutra (2005, p. 221-225)<sup>3</sup>, utiliza o conceito de *modelo-réplica*, similar ao conceito de *modelo real* de Blum e Niss. Central ao conceito de modelo-réplica usado por Dutra é a atribuição de *propriedades de conveniência* para que uma situação seja *conceitualmente concebível* em relação a uma teoria ou a princípios. Assim, a construção do isolado admite afirmações que podem entrar em desacordo com o que o modelador entende por realidade, como no caso do pressuposto de que não há resistência do ar na queda livre. O isolado pode possuir até conceituações *ad hoc* para permitir a formulação de relações na construção do modelo. É por isso que, como afirmamos anteriormente, o isolado é um conceito chave para uma compreensão de modelagem quando entendida como construção conceitual. Esse tipo de construção é o que generaliza a modelagem como atividade humana e, ao mesmo tempo, é o que a especifica entre as diversas atividades humanas. Em outras palavras, a atividade de modelar fundamenta-se na construção do isolado, que se realiza pela adoção de premissas e pela formulação de pressupostos que, por sua vez, remetem a uma situação problemática, aos objetivos dos modeladores, aos quadros conceituais utilizados e às tecnologias, como instrumentos empregados para a coleta e o tratamento de dados.

#### 4.2 Premissas e pressupostos

A construção conceitual de modelos nos leva aos quadros conceituais utilizados e às linguagens adotadas pelos modeladores para expressar e comunicar uma interpretação ou um entendimento a respeito das situações sendo modeladas. Qualquer que seja a linguagem utilizada, a conceituação envolve a adoção de uma ou mais premissas que estabelecem um norte ou uma base para o pensamento e, ao mesmo tempo, delimitam o que será considerado da situação. Essa adoção de premissas pode-se dar por tradição, pelo costume de sempre se conceituar assim, ou pode ter a pretensão de se diferenciar do tradicional. É uma questão que conduz às experiências e aos objetivos do modelador. Compatíveis com as premissas, entretanto mais próximos das condições particulares ou idiossincráticas das situações, os pressupostos são afirmações a respeito de aspectos identificados na situação, sem que se pretenda comprová-las. São qualificações formuladas pelos modeladores, referentes à forma como eles concebem os aspectos à luz dos seus objetivos (MELILLO e BEAN, 2011).

A seguir, mostraremos como estamos utilizando os termos *premissas* e

---

<sup>3</sup> Dutra (2005) discorre sobre a construção de modelos, fundamentando-se em trabalhos como os de Hesse (1966) *Models and analogies in science* e Cartwright (1983) *How the laws of physics lie*.

*pressupostos* no contexto da modelagem.

As premissas são teorias, princípios ou ideias-guia que o modelador assume, conscientemente ou não, numa dada situação. Elas fornecem a concepção global a respeito da maneira como a situação a ser modelada será compreendida. Uma vez que uma premissa é apreciada como promissora, ou se demonstra adequada para a conceituação da situação, ela é adotada, e a construção do modelo se comporta de acordo com tal adoção (MELILLO e BEAN, 2011). Premissas servem como bases para o pensamento dos modeladores. Atuam como diretrizes que delimitam a forma global, na qual os modeladores enxergarão a situação e, conseqüentemente, influenciarão a conceituação da situação.

Entendemos como teorias conjuntos de concepções gerais inter-relacionadas, que fornecem uma ótica para a compreensão de situações. São crenças globais que mantemos, às vezes, sem estarmos cientes, por serem tão embutidas em nossa cultura. No exemplo da modelagem de Galileu, entendemos que uma teoria mais abrangente, como a mecânica celeste de Newton (desenvolvida após os trabalhos de Galileu), não fez parte do isolado. Foram considerados princípios menos abrangentes, relativos a uma força de atração, os quais delimitaram a conceituação galileana da queda de corpos; princípios, por serem úteis, serviriam como contribuições à construção dos quadros conceituais da mecânica clássica.

No exemplo do modelo galileano, explicitamos dois princípios que servem como premissas: a) a velocidade de um corpo, na ausência de uma força, permanece invariante; b) a existência de uma força de atração entre a Terra e os corpos. Essas premissas podem apontar o pensamento na direção de qualificar *como* a força age – constante no caso do modelo de Galileu –, e reparar em possíveis interferências à queda do corpo, como a resistência do ar, dando, dessa forma, direcionamento à modelagem.

Ao reconhecer que a construção de modelos nem sempre se baseia em uma teoria específica, nem em princípios bem definidos, empregamos e ressignificamos o conceito *ideia-guia* de Dewey, por entender que a modelagem se encaminha de acordo com alguma(s) diretriz(es) global(ais). Dewey (1959, p. 136), ao discorrer sobre situações indeterminadas (situações problemáticas) e o levantamento de hipóteses para torná-las determinadas, afirma que, “Sem uma ideia-guia, os fatos seriam amontoados como grãos de areia; não se organizam em unidade intelectual”. Entendemos que, uma vez adotada uma ideia-guia para uma construção conceitual, ela serve como premissa para nortear o pensamento na elaboração do modelo (MELILLO e BEAN, 2011).



Seja ideia-guia, princípio ou teoria, os modeladores possuem crenças gerais ou adotam concepções globais que servem como norte para seu pensamento na conceituação da situação em que eles se encontram.

Compatíveis com as premissas, os pressupostos são afirmações que os modeladores formulam, a partir de aspectos identificados na construção do modelo; podem até ser formulados simultaneamente ao levantamento. Utilizamos o termo *pressuposto* de maneira similar a Cifuentes e Negrelli (2009) e Skovsmose (2001). Cifuentes e Negrelli (2009, p. 9), ao considerarem uma modelagem feita dentro dos quadros conceituais da Física para o lançamento de um projétil, apontam para possíveis pressupostos: a superfície terrestre é plana, a trajetória do projétil não sofre alteração devido ao atrito com a atmosfera, e a ação da força de gravidade tem a mesma intensidade a qualquer altura; dentre outros. Apesar de entendermos essas afirmações como contrárias ao que compreendemos por realidade, são afirmações que possibilitam uma construção conceitual. Skovsmose (2001), por sua vez, ao abordar modelos matemáticos para atividades econômicas, mostra a necessidade de examinar quais aspectos econômicos estão sendo levados em consideração, conceituados e inter-relacionados na construção dos modelos. Ressalta que “para desenvolver uma atitude mais crítica em relação a essa construção de modelos, não basta entender a construção matemática do modelo; também temos de conhecer seus pressupostos” (p. 42). Skovsmose aponta a importância de, além de entender a matemática, compreender as ideias econômicas embutidas nos modelos econômicos. Da mesma forma, Cifuentes e Negrelli implicitamente destacam a importância de se conhecer conceitos e concepções físicas, ao tratar de um modelo para a trajetória de um projétil nos quadros conceituais da Física.

Os pressupostos, nesse entendimento, além de se referirem ao levantamento de aspectos que são considerados pertinentes, “dizem respeito à maneira na qual tais aspectos serão utilizados na construção do modelo” (MELILLO e BEAN, 2011, p. 87). O termo *aspecto* trata de um fator de influência ou característica que, na apreciação dos modeladores, relaciona-se com a situação à luz do problema e de seus objetivos. Os *pressupostos* são as qualificações desses aspectos, de modo que eles podem ser inter-relacionados, mais ou menos coerentemente, para obter um construto conceitual, um modelo. No exemplo da modelagem de queda livre por Galileu, o aspecto ar ou atmosfera foi considerado pertinente em razão do conhecimento de que o ar fornece resistência ao corpo em queda. No contexto tanto dos conhecimentos e das tecnologias

da época quanto das informações que o modelo deve oferecer em relação ao objetivo de Galileu, a formulação do pressuposto de que o ar não interfere na queda – não há resistência do ar – era coerente com sua experiência do pensamento sobre a queda de corpos no vácuo. Além disso, esse pressuposto permite a matematização de uma relação entre tempo e velocidade da queda, no que concerne à proporcionalidade. É importante ressaltar que os pressupostos qualificam *como* os aspectos considerados pertinentes à situação serão utilizados na modelagem.

## **5 Considerações sobre modelos e modelagem**

A modelagem concebida como uma construção conceitual fundamentada na adoção de premissas e na formulação de pressupostos oferece uma lente para enxergar os modelos, de modo que desafia a ideia que estes representam a realidade em si, ou, ainda, que existe uma realidade desvinculada dos quadros conceituais, dos interesses e objetivos humanos. Oferece subsídios também para desenvolver uma compreensão a respeito do que está envolvido na construção e na análise de modelos. Em outros termos, ao construir um modelo, do tipo construto conceitual, os modeladores, conscientemente ou não, assumem premissas que delimitam e orientam as concepções globais da modelagem e, ao formular pressupostos, fazem afirmações relativas a seus entendimentos da realidade, quando interpretada sob a lente das suas construções. Se quisermos compreender um modelo, e, assim, as tomadas de decisões e as atividades que se apoiam nele, é importante examinar as premissas e os pressupostos nos quais o modelo se fundamenta. Além disso, ao reconhecer que compreensões alternativas da realidade se fundamentam em premissas e pressupostos alternativos, é admitir que podemos argumentar para, ou até mesmo construir, modelos diferentes, por nos fundamentar em premissas e / ou pressupostos diferentes.

## **Agradecimentos**

Apesar de não serem responsáveis pelas posições descritas neste ensaio, agradeço aos demais membros do Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática no Âmbito Educacional (GEPMAE) da Universidade Federal de Ouro Preto pelas observações que contribuíram para a elaboração deste texto.

## Referências

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 42, n. 3-4, p. 337-348, 2010.

\_\_\_\_\_. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as Discussões dos Alunos**. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BEAN, Dale. Modelagem: uma conceituação criativa da realidade. In: IV ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 4, Ouro Preto – MG. **Anais...** Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto: Editora UFOP, 2009. p. 90-104.

\_\_\_\_\_. Modelagem matemática: Uma mudança de base conceitual. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, Ouro Preto – MG. **Anais...** Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto e Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, 2007. p. 35-58.

BEAN, Dale; VIDIGAL, Cássio Luiz. Modelagem matemática como a construção de uma realidade intermediária ou um isolado. In: COLÓQUIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2011, Juiz de Fora – MG. **Anais...** III Colóquio de Educação Matemática. Juiz de Fora – MG: NIDEEM, 2011. p. 1-10.

BLUM, Werner, NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, Feb. 1991.

BORROMEO FERRI, Rita. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Karlsruhe, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BOYCE, William E.; DiPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8ª ed. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006. 434 p.

BUENO, Vilma Candida. **Concepções de modelagem matemática e subsídios para a educação matemática**: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro. 2011. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2. ed. Edição revista por Paulo Almeida. Lisboa: Gradiva, 1998. 295 p.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. O processo de modelagem matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara Loiola; BISOGNIN, Eleni (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiência e propostas pedagógicas. Londrina: Editora da UEL, 2011. p. 123-140.

\_\_\_\_\_. A modelagem matemática: uma epistemologia da matemática aplicada. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, Londrina – PR. **Anais...** Universidade Estadual de Londrina – Londrina, 2009. 21 p.

\_\_\_\_\_. Modelagem matemática e o método axiomático. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 63-77.

\_\_\_\_\_. Perspectivas epistemológicas e metafísicas na modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (G10 – Modelagem Matemática), 3. 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 21 f.

CLAVELIN, Maurice. **The natural philosophy of Galileo**: Essay on the origins and formation of classical mechanics. Translation by A. J. Pomerans. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1974. 498 p.

DEWEY, John. **Como pensamos**. Traduzido por Haydée de Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. 292 p. (Coleção Atualidades Pedagógicas, v. 2).

DUTRA, Luiz Henrique de Araújo. Os modelos e a pragmática da investigação. **SCIENTI(AE) studia**, São Paulo, v. 3, n. 2. p. 205-232, 2005.

FERREIRA, Poliana Flávia Maia; JUSTI, Rosária da Silva. Modelagem e o “Fazer Ciência”. **Química Nova na Escola**. Instituto de Química, USP. n. 28, p. 32-36, maio 2008. Disponível em: <<http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc28/08-RSA-3506.pdf>>. Acesso em: 26 fev. 2009.

GALILEU GALILEI. **Dois novas ciências** (incluindo **Da Força de percussão**). Tradução e notas de Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda. Rio de Janeiro: Museu de Astronomia e Ciências Afins; São Paulo: Nova Stella, 1988. 315 p.

HESTENES, David. Notes for a modeling theory of science, cognition and instruction. In: **Proceedings of the 2006 GIREP conference: Modeling in Physics and Physics Education**. Disponível em: <[http://modeling.asu.edu/R&E/Notes\\_on\\_Modeling\\_Theory.pdf](http://modeling.asu.edu/R&E/Notes_on_Modeling_Theory.pdf)>. Acesso em: 26 fev. 2009.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Karlsruhe, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KLINE, Morris. **Mathematics and the search for knowledge**. New York: Oxford University Press, 1985. 257 p.

KOYRÉ, Alexandre. **Estudos galilaicos**. Tradução de Nuno Ferreira da Fonseca. Lisboa: Dom Quixote, 1986. 426 p.

LAPOLLI, André Luis; CANELLE, João Batista Garcia; MARINHO, José Roberto. **Física Básica Experimental** (apostila), 2008. Disponível em: <[lapolli.pro.br/escolas/faatesp/laboratorio/apostila-1.pdf](http://lapolli.pro.br/escolas/faatesp/laboratorio/apostila-1.pdf)>. Acesso em 03 fev. 2012.

LOSEE, John. **Introdução histórica à filosofia da ciência**. Tradução de Boriss Cimberis. Belo Horizonte e Rio de Janeiro: Itatiaia, 2000. 229 p. (Coleção o homem e a ciência, v. 5).

MELILLO, Célio Roberto. **Modelagem matemática no futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método de caso**. Dissertação. 2011. 218 p.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.

MELILLO, Célio; BEAN, Dale. Modelagem matemática na atribuição de probabilidades em jogos do campeonato brasileiro de futebol. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ARAÚJO, Jussara Loiola; BISOGNIN, Eleni (Orgs.). **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**: relatos de experiência e propostas pedagógicas. Londrina: Editora da UEL, 2011. p. 83-103.

MONTEIRO, Alexandrina. **O ensino de matemática para adultos através do método modelagem matemática**. 1992. 310 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, São Paulo, 1992.

NEGRELLI, Leônia Gabardo. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática**. 2008. 94 f. Tese (Doutorado em Educação) – Curso de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

PUTNAM, Hilary. **Reason, truth and history**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 222 p.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. 160 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).