



SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Alexsandra Camara Maciel
Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag
Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo –
PUC

1) Introdução

Durante os encontros realizados nos cursos do mestrado, analisamos os resultados de pesquisas e constatamos o baixo desempenho dos alunos em geometria e a dificuldade que os professores apresentam em trabalhar com estes conteúdos. O fato de que a Geometria vem sendo, de uma maneira geral, negligenciada em nosso sistema educacional motivou-me ainda mais ao estudo dos fatores que influenciam no processo ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos.

Por meio de artigos e dissertações escritos por pesquisadores em Educação Matemática (Haruna 2000, Charalambos 1991 e Sanches 1991) percebemos que, dentre outros, o conteúdo de semelhança demonstra causar dificuldade entre os alunos.

No ensino atual, geralmente para o aluno, o conceito de semelhança surge como conteúdo sem sentido, uma vez que esse conceito é introduzido sem nenhuma ligação com a vida cotidiana. O conceito de semelhança é um dos conteúdos que permite compreender e interpretar fenômenos naturais.

A experiência cotidiana ensina que um objeto quando é colocado entre a fonte e um anteparo interrompe a passagem desta luz e assim, origina a sombra. Com a aproximação desse objeto da fonte, ocorrerá um aumento da sombra formada. Por que não utilizar esse e outros fenômenos físicos para construir o conceito de semelhança?

Diante dos fatos relatados pretendemos verificar em nossa pesquisa as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança em alunos de 8ª série do ensino fundamental e produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão desse conceito, integrando esse com o de Ótica Geométrica a fim de que haja um aprendizado mais significativo.

Até o momento da pesquisa podemos dizer que passamos por um estudo preliminar, questionamento e problemática e também realizamos a construção de nossa seqüência em função dos estudos realizados.

2) Algumas observações sobre os estudos preliminares

Observamos alguns aspectos da utilização do conceito de homotetia e de semelhança de figuras geométricas ao longo da história. Eram utilizados no Egito quadriculados para determinarem figuras semelhantes, trabalhavam com a geometria de uma maneira mais prática. Na geometria grega, com Thales, percebemos um trabalho com relação ao real, porém com uma preocupação de construir propriedades gerais de figuras geométricas abstratas. Os Elementos de Euclides podem realmente ser considerado como a primeira organização da Geometria de forma dedutiva, baseiam-se nos teoremas de figuras semelhantes considerando axiomas, forma geral e abstrata em suas demonstrações, sem nenhuma menção a alguma situação real ou prática. Autores mais recentes Klein, Hadamard consideram suas definições de semelhança a partir de transformações.

Após a verificação da utilização do conceito de homotetia na definição de semelhança de figuras, consideramos importante pesquisar sobre o objeto matemático “homotetia” assim como suas principais propriedades e as relações com o conceito de semelhança. Nosso objetivo neste estudo é pesquisar o maior número possível de utilizações dos conceitos a fim de termos condições de uma escolha consciente sobre a maneira pela qual iremos introduzir o estudo de semelhança em nossa seqüência didática.

Encontramos uma pesquisa realizada por Charalambos (1991) que procurou estudar como deve ser realizada a introdução de homotetia no início do secundário, a qual consideramos importante relatar alguns resultados obtidos. Charalambos (ibid) relata que a homotetia levanta reais dificuldades didáticas e encontramos poucos estudos sobre a mesma no ensino atual. Uma característica de seu ensino é a falta de um trabalho preparatório sobre a variedade e a complexidade perceptiva de todas as configurações homotéticas possíveis. Geralmente utiliza-se a situação de dois pontos homotéticos em uma reta e as situações de figuras homotéticas não são exploradas.

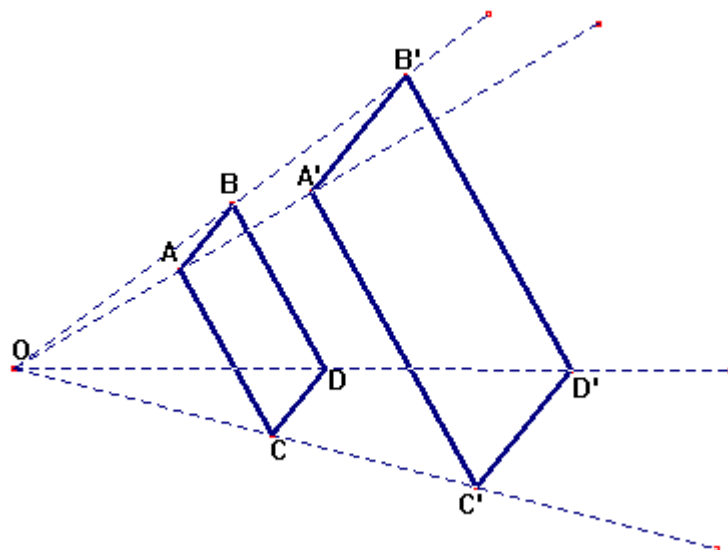
Com a realização da pesquisa percebe-se a importância das seguintes variáveis para o estudo da homotetia, número dos pontos essenciais de uma figura, configurações

homotéticas de razão positiva e negativa, posição respectiva de figuras homotéticas, número de traços das configurações de figuras homotéticas. Segundo Charalambos (ibid), estas variáveis permitem extrair uma classificação das representações figurais de situação de homotetia para o ensino.

Na Física, o conceito de semelhança está presente em diferentes situações que estudam os fenômenos da Óptica Geométrica. Entende-se por estudo de Óptica, o estudo da luz e dos fenômenos ópticos em geral.

Para a formação de sombra teremos uma situação homotética no espaço que se define de maneira análoga a do plano. Suponhamos um ponto de origem O (fonte puntiforme) situado em um espaço tridimensional E e dois pontos deste espaço P e P' . Se $OP' = k OP$, sendo $K \in \mathbb{R}^*$ diz-se que: o ponto P' é homotético de P em uma homotetia de centro O e razão K ($H_{O, K}$). Na realidade, a homotetia ($H_{O, k}$) é uma aplicação que permite associar a pontos do espaço outros pontos do próprio espaço.

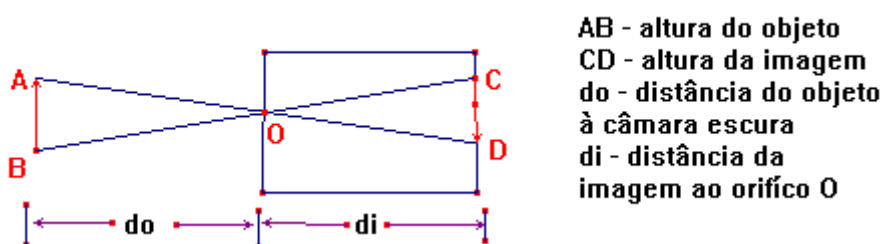
Considerando um retângulo $ABCD$ e um ponto O do plano, efetuando uma homotetia $H_{O, K}$, teremos:



Houve uma transformação do retângulo original $ABCD$ (objeto) no retângulo $A'B'C'D'$ (sombra) que apresenta as seguintes propriedades: pontos alinhados da figura original correspondem a pontos alinhados e na mesma ordem na figura homotética, os segmento homólogos são proporcionais, os ângulos homólogos são congruentes, pontos coplanares se transformam em pontos coplanares, a imagem de um plano é outro plano

paralelo, a distância da imagem ao centro de homotetia é k vezes a distância do centro ao plano original (objeto).

Uma outra aplicação da propagação retilínea da luz é a câmara escura de orifício. Consiste em uma caixa fechada com uma das faces laterais feitas com um papel semitransparente. Na face oposta é realizado um pequeno orifício. Considerando um objeto luminoso ou iluminado colocado em frente à câmara, os raios de luz que partem do objeto atravessam o orifício O determina na parede oposta ao orifício uma figura semelhante à figura inicial. Essa figura é considerada imagem do objeto, que se apresenta semelhante e invertida em relação ao objeto real.



A câmara escura pode ser um simples quarto escurecido com um pequeno orifício em uma parede que já era conhecida no século X. Nessa época, um cientista árabe, Alhazen de Bastha, escreveu sobre o fenômeno de formação, projeção e inversão de imagem (Mazzini, 1982). Neste caso, da câmara escura de orifício, apresentamos uma situação homotética de razão negativa $K (H_{O,K}) < 0$.

3) Questão de pesquisa e hipóteses

Após os problemas levantados, podemos dizer que a nossa questão de pesquisa se resume em: como produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do conceito de semelhança, integrando esse com o de Ótica geométrica a fim de que haja um aprendizado mais significativo? Diante os estudos realizados (pesquisas, teses de mestrado) temos como **hipóteses da problemática**:

- Para que o aluno tenha condições de trabalhar com o objeto físico real e a partir desta situação alcançar uma geometria formal é necessário que o ambiente de ensino ofereça condições para esta realização.
- Uma seqüência de atividades que vise o desenvolvimento do conceito de semelhança de figuras pode partir de situações de formação de sombra e de imagem em ótica geométrica.

- Acreditamos que, com a utilização das situações experimentais do contexto da Física, e conseqüente conversão para o contexto matemático, poderemos trabalhar com as variabilidades de configurações dos casos de homotetia e posteriormente a transferência e ampliação das configurações para as situações de semelhança.

IV) Procedimentos metodológicos

Com a finalidade de procurar validar, invalidar ou acrescentar as hipóteses acima levantadas, elaboramos uma seqüência didática com atividades experimentais em que os alunos irão trabalhar com atividades práticas no contexto de Ciências, atividades que irão necessitar de instrumentos de desenho como régua, compasso e transferidor para realizar construções e medições no contexto matemático.

Trabalharemos com duas turmas de 8ª série do ensino fundamental. Na 8ª série B aplicaremos a nossa seqüência de ensino. A aplicação será realizada pela professora da sala e a pesquisadora realizará uma observação sistemática durante todo o desenvolvimento das atividades. Na 8ª serie C, que tem uma outra professora, será trabalhado o conceito de semelhança da forma como ela escolher, provavelmente com a utilização do livro didático. Também realizaremos uma observação sistemática de todas as situações realizadas. As duas turmas serão submetidas ao pré-teste e ao pós-teste.

V) Apresentação da seqüência de ensino

5.1) A fundamentação teórica

Para a elaboração da nossa seqüência didática utilizamos como referencial teórico os registros de representação semiótica propostos por Raymond Duval, um quadro teórico para a geometria de Bernard Parsysz (2000), as observações realizadas por Charalambos (1991) na pesquisa sobre homotetia e nas considerações feitas por Paolo Boero (1994) na pesquisa sobre a utilização de situações de sombra com relação a uma geometria racional.

Com relação aos registros de representações semiótica de Duval nos apoiamos nos seguintes aspectos:

- o desenvolvimento de um conceito não pode ser formado com base em um único registro. É necessário que sejam trabalhados a diversidade e a relação entre diferentes

registros, visando a uma melhor compreensão do objeto em relação as suas representações;

- na conversão de registros e tratamentos em cada um deles;

Procuramos na elaboração de nossa seqüência, fazermos que os alunos relacionem os vários registros figurais com suas respectivas representações numéricas no que tange a questão da proporcionalidade.

As diferentes geometrias consideradas por Bernard Parsysz serviram como base para a elaboração de nossa seqüência:

- G0, a geometria concreta, na qual serão observados os fenômenos de formação de sombra e imagem na câmara escura assim como a utilização de maquetes;
- G1, em que os objetos em jogo são os desenhos realizados. Nestas tarefas utilizamos régua graduada, compasso esquadro e transferidor;
- G2, a técnica utilizada refere-se aos objetos geométricos (retas, segmentos, ângulos) cuja existência é assegurada pelas definições e propriedades consideradas.

Podemos dizer que os dois quadros teóricos por nós adotados apresentam-se em perfeita sintonia. No que se refere o ponto de vista de Parsysz, existem duas capacidades que devem visar o ensino de geometria. Uma delas é a característica permanente do objeto em estudo e a outra é a versatilidade do trabalho com os registros de representação, aspectos que se forem realizados de modo consciente no desenvolvimento do estudo podem fazer com que haja uma formação significativa dos conceitos envolvidos.

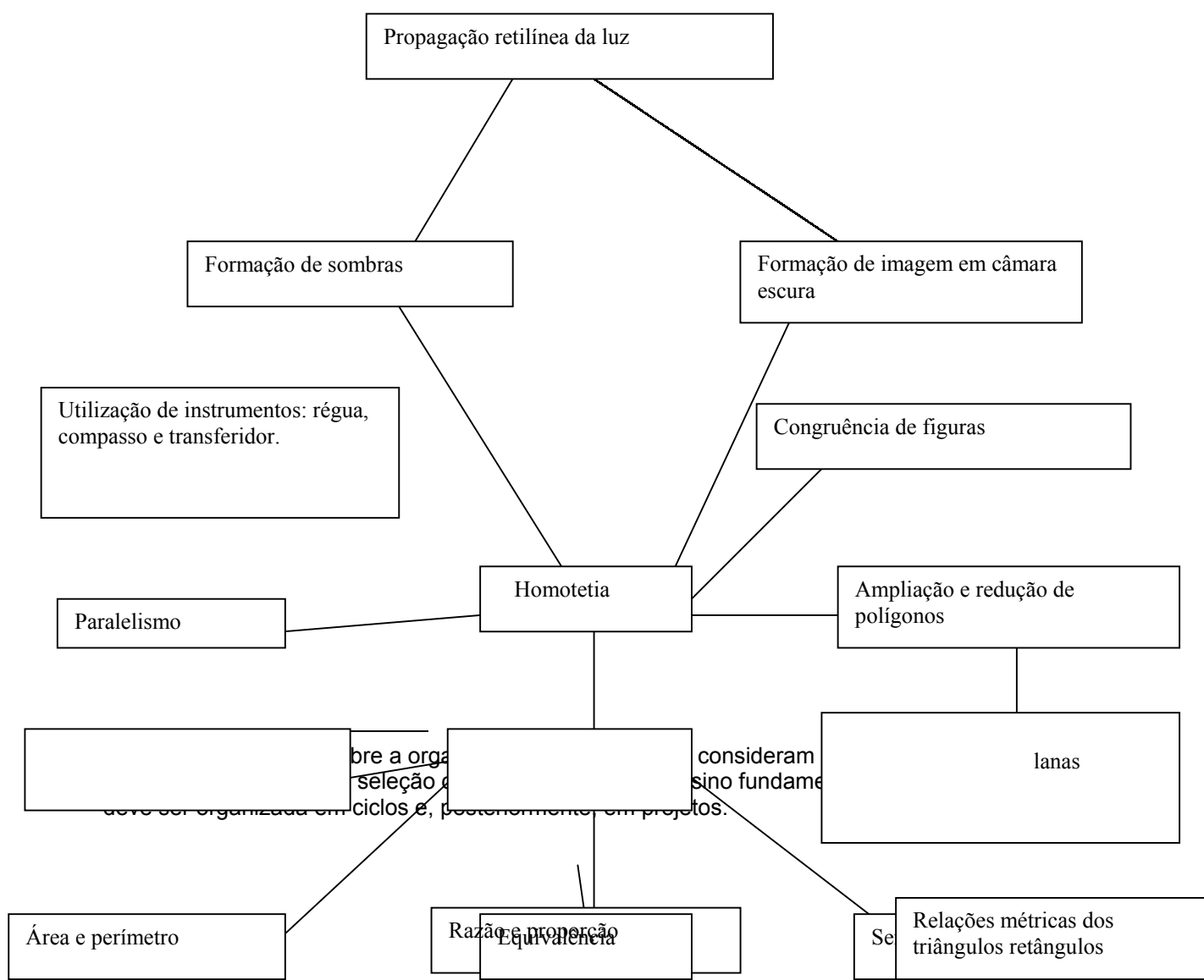
Em sua pesquisa, Charalambos, observou que com a exploração das variedades de configurações homotéticas assim como a articulação entre os registros numérico e discursivo fez que houvesse um aumento no índice de acertos na aplicação do teorema de Thales.

Boero, em pesquisa realizada sobre as argumentações realizadas pelos alunos nas explicações de situações de formação de sombra, observou que muitos estudantes verificaram o modelo de proporcionalidade assim como a representação geométrica da situação.

Percebemos nos livros analisados formas diferenciadas de iniciar e justificar o conceito de semelhança, ou seja, eles partem de conceitos diferentes. A partir destas informações, faz-nos lembrar de uma citação que muito chamou a atenção desde o estudo de Teorias da Aprendizagem no início do curso de mestrado:

“Um conceito remete a muitas situações e reciprocamente uma situação remete a muitos conceitos. E o desenvolvimento dos conhecimentos de um aluno se faz através de um conjunto relativamente vasto de situações entre as quais existe” parentesco *“e para a análise das mesmas é necessário utilizar muitos conceitos e muitos tipos de simbolizações”.* (Vergnaud, 1985).

Segundo os Pcms de Matemática as possibilidades de seqüência dos conteúdos são múltiplas e decorrem mais das conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que a idéia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida a priori. Embora existam conhecimentos que precedam outros, a hierarquização entre eles não é tão rígida como tradicionalmente é apresentada¹. Considerando a nossa escolha, de uma situação interdisciplinar de ensino, assim como a utilização do conceito de homotetia para posterior formação do conceito de semelhança, realizamos a seguinte rede:



Com a situação de formação de sombra estaremos trabalhando com uma das conseqüências da propagação retilínea da luz, portanto, estaremos situados em uma situação homotética do espaço com razão positiva. Considerando nossa outra situação prática, a câmara escura de orifício, também estaremos situados em uma situação homotética do espaço, a diferença é que, neste caso, a homotetia relacionada à situação apresenta razão negativa.

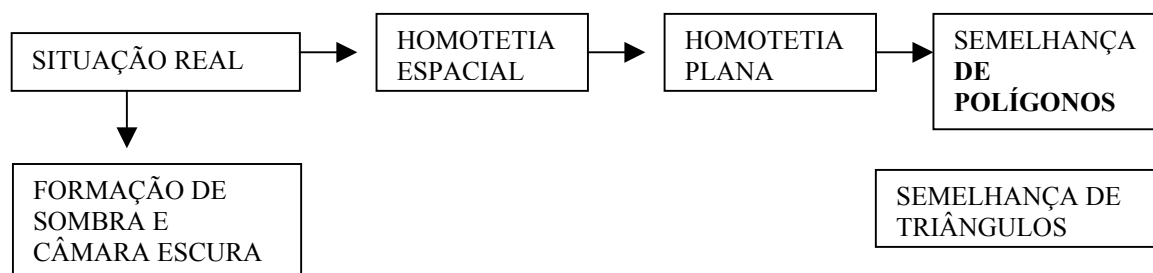
Após relacionarmos os fenômenos físicos com as situações homotéticas espaciais trabalharemos com situações homotéticas no plano, procurando trabalhar algumas variabilidades perceptivas. Neste momento, teremos trabalhado conceitos como paralelismo, ampliação e redução de polígonos, congruência de polígonos e razão e proporção.

Com a realização do trabalho das situações práticas e homotéticas pretendemos introduzir o conceito de semelhança de polígonos em função de figuras homotéticas. Na semelhança serão trabalhadas as condições necessárias e suficientes para polígonos e triângulos, assim como as razões entre perímetros e áreas de figuras semelhantes.

5.2) A estrutura da seqüência

A seqüência de ensino foi construída em função dos estudos histórico, didático e teórico realizados. As atividades deverão ser trabalhadas em grupos de quatro alunos, em duas atividades teremos situações práticas que serão realizadas em laboratório em que utilizarão material como figuras de madeira, elásticos, fontes de luz, câmara escura e trena. Para as outras atividades serão necessários a utilização de régua, compasso e papel quadriculado conforme a situação proposta.

Para uma melhor compreensão da nossa proposta realizamos um esquema geral das situações.



Elaboramos a seqüência partindo de situações reais de formação de sombra e de formação de imagem em câmara escura. Essas situações apresentam-se dentro de uma noção homotética espacial. No desenvolvimento do conceito homotético faremos com que os alunos construam em maquetes a representação da formação de sombra e de imagem e somente depois que verificarão as propriedades geométricas em papel e lápis.

As maquetes utilizadas em nossa pesquisa têm como objetivo contribuir para melhorar a imagem visual do aluno e também favorecer as mudanças de pontos de vista. Parsysz (1989)² apresenta como hipótese de sua pesquisa que a iniciação em geometria espacial só pode ser feita tendo recorrido, não somente às representações desenhadas, mas também as maquetes tridimensionais, e isso ocorre independentemente da idade dos alunos.

Com a definição do conceito homotético espacial, partiremos para as situações homotéticas planas. Novamente, utilizaremos material concreto para a construção de figuras homotéticas com a realização de medições, observações e constatações, com o objetivo de verificarem as propriedades da mesma. Após a percepção, por parte dos alunos, da existência da homotetia no plano, trabalharemos situações que promovam o reconhecimento e a compreensão de algumas configurações homotéticas e relacionaremos suas representações figurais, numéricas e discursivas.

Um outro passo para a nossa seqüência é a introdução do conceito de semelhança em função de figuras homotéticas. Trabalharemos primeiramente com situações de polígonos em geral e somente depois com situações de semelhança de triângulos. Em uma última fase da seqüência trabalharemos situações em que será necessária a utilização de conceitos já estudados durante o desenvolvimento das atividades.

² PARSYSZ B. (1989). Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir (Thèse). Université Paris-7.

VI) Considerações Finais

Conforme Boero (1994) atividades que utilizem situações de formação de sombra possibilitam que os alunos percebam a relação de proporcionalidade existente entre as grandezas. Esse tipo de situação sugere um certo otimismo ao objetivo de que através de atividades corretamente elaboradas haja uma aproximação do conhecimento geométrico de forma construtiva.

Como na pesquisa de Charalambos foi observado um primeiro progresso em relação à obtenção do centro de homotetia em uma configuração homotética, a determinação dos pontos homólogos, a determinação do sentido da transformação de uma figura em outra e a relação entre as constituintes numéricas da razão de homotetia e os elementos figurativos. Pretendemos utilizar as variáveis numéricas por ele observadas com o objetivo de obtermos uma correta concepção sobre o conceito de semelhança.

Um outro resultado importante, e de grande interesse à nossa pesquisa, refere-se à aplicação de Thales. Foi constatado um progresso importante, sem ter havido nenhuma referência explícita ao conteúdo. Houve um progresso, no índice de acertos, de 95% e 60% nas questões que foram aplicadas ao final do experimento enquanto que na avaliação inicial havia respectivamente 70% e 35% para estas questões. Esse progresso foi obtido para todas as classes em que foi aplicado o ensino experimental, cujo avanço com relação a Thales foi tão evidente quanto em uma outra classe em que esse conteúdo foi aplicado de forma explícita.

Com a melhora do índice de acertos nas resoluções de problemas com a aplicação do teorema de Thales também acreditamos que haja uma possibilidade de melhor compreensão na aplicação do conceito de semelhança, principalmente no cálculo do valor de um segmento na paralela, que é a questão em que os alunos encontram maiores dificuldades.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) têm como uma das preocupações dos Ensinos Fundamental e Médio o desenvolvimento de um ensino contextualizado, interdisciplinar que favoreça situações que relacionem a prática com a teoria.

Na disciplina de matemática percebemos que, para o aluno, o conteúdo de semelhança surge como um conteúdo sem significado, distante de sua vida cotidiana.

Na disciplina de Física percebemos que o conceito, as propriedades de semelhança são utilizadas como regras, sem qualquer preocupação das propriedades que estão sendo utilizadas.

A Geometria ensinada na escola deveria ter como grande objetivo o de desenvolver a atividade intelectual do aluno. No entanto, o que percebemos é a utilização de regras prontas, acabadas, em que são exigidas somente a memorização de regras, algoritmos e definições.

Observamos com freqüência os trabalhos de alguns professores com a utilização excessiva de regras, com pressa no cumprimento do conteúdo, oferecendo certas “receitas” aos alunos. Na verdade, o ensino acaba tolhendo a curiosidade, a iniciativa, a exploração e a criatividade do aluno.

Segundo Piaget (1972), as operações lógico-matemáticas no plano físico são atribuídas ao próprio objeto, que são transformados em operadores. Com a utilização do objeto físico observado a realidade passa a não ser mais este objeto ou fenômeno observável, e sim toda a estrutura que se apresenta subjacente a ele. Esta estrutura é construída por dedução, mediante a ação, fornecendo assim explicações aos dados observados.

Pretendemos utilizar uma prática pedagógica interdisciplinar como um possível caminho para chegar à sistematização do conhecimento matemático. Na realização desta pesquisa não desconsideraremos os aspectos formais e abstratos que sugerem os conteúdos matemáticos utilizando-se apenas de aplicações particulares e empíricas do mesmo, o nosso objetivo com esta metodologia é favorecer o significado do conceito.

Palavras Chaves: Homotetia, semelhança e interdisciplinaridade.

VII) Referências bibliográficas

BOERO, P., GARUTI R. Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional. PME Tsukuba, Japan, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHARALAMBOS, Lemonidis. 1991. Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. França: IREM, Université louis pasteur, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 11, n° 23, pp 295-324.

DUVAL, Raymond. Sémiosis et Pensée Humaine: Registres sémiotiques et apprentissages. Paris: Peter Lang S.A., 1995.

_____. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. P.37-65. 1993.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. Mestrado em educação matemática – PUC- SP - 2000

PARSYSZ. Bernard. Un cadre théorique pour la géometrie enseignée. Equipe DIDIREM, université Paris-7- 2000.

PIAGET, J. Para onde vai a educação? Tradução de Ivette Braga. Rio de Janeiro, Editora- Livraria José Olympio , 1973

SANCHES, Lucilia Bechara. O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas. Dissertação de mestrado. Anna Maria. USP-Faculdade de Educação -São Paulo, 1991.

VERGNAUD, G. Conects et schemes dans une théorie opératória de la representation. In: Psychologie Française, n° 30, nov. 1985.