



A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Monica Bertoni dos Santos – PUCRS – bertoni@puers.br

Helena Koefender – PUCRS – helena@bewnet.com.br

Karin Jelinek – PUCRS – karinjelinek@yahoo.com.br

Márcia Godoy – PUCRS – mcvgodoy@yahoo.com.br

Rosane Jardim – PUCRS – rosanelopes58@hotmail.com

APRESENTAÇÃO

Cientes de que a construção de um conceito não é resultado do trabalho de um mês, nem de um semestre e motivadas a encontrar uma forma de construir um currículo em espiral, partimos para a pesquisa sobre a construção do conceito de função.

Buscamos um currículo no qual os conceitos vão sendo construídos ao longo da escolaridade, a partir da ação do sujeito sobre o objeto do conhecimento e mediado pelo professor através dos recursos oferecidos.

O presente trabalho “A construção do conceito de função no Ensino Fundamental” é resultado da pesquisa do grupo na disciplina Matemática e Realidade I, do Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS, sob orientação da professora Ruth Portanova. Consta de uma fundamentação teórica e de sugestões de atividades práticas destinadas ao ensino fundamental e, nele, está inserida a descrição do mini-curso que tem o mesmo nome e que se destina a professores de Matemática e de séries iniciais.

O mini-curso consta de atividades práticas, envolvendo a construção do conceito de função. Durante as atividades realizam-se trabalhos com máquinas, malhas, gráficos e jogos, entre eles os Blocos Lógicos e são sugeridas atividades para diferentes séries. Culmina com a análise de situações-problema que estão presentes em livros didáticos das oito séries do ensino fundamental.

DESCRIÇÃO DO MINI-CURSO

O mini-curso destina-se a professores de Matemática de ensino fundamental e médio e a professores de séries iniciais, uma vez que é fundamental construir o conceito de função com a criança desde muito cedo, no ensino fundamental, completando-o no ensino médio. Pretendemos realizar a oficina em 5 horas, apresentando:

Na primeira etapa, a partir da questão "O que é função?", são realizados um conjunto de atividades com máquinas, malhas e gráficos em que as idéias e noções subjacentes ao conceito de função serão exploradas. Desta forma, trabalharemos as idéias de seqüência, regularidade, padrão, variável, dependência de variáveis, correspondência unívoca e generalização.

Finalizando esta primeira etapa, com o auxílio de lâminas de retroprojektor, faremos a fundamentação teórica do conceito de função, abordando o seu histórico e analisando as atividades realizadas anteriormente na medida em que são próprias para serem trabalhadas nas oito séries do Ensino Fundamental na construção do referido conceito.

Entender as operações como funções, compreender os diferentes usos de letras nas equações, nas expressões algébricas e nas leis das funções serão tópicos de discussão, como também o serão as diferentes representações de uma função.

A segunda etapa iniciará com questionamentos tais como: Quais são as idéias básicas e as noções intuitivas envolvidas no conceito de função? Em que etapa da escolaridade inicia-se a desenvolver este conceito e como trabalhá-lo?

Ainda com o auxílio do retroprojektor, lançaremos as idéias básicas do conceito de função já trabalhadas e após a discussão com o grupo, apresentaremos um conjunto de atividades selecionadas de livros didáticos de educadores matemáticos que propõem uma seqüência didática em espiral que está distribuída em todas as séries do Ensino Fundamental, numa crescente graduação de complexidade.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Propomo-nos, a fazer uma fundamentação teórica da construção do conceito de função no ensino fundamental, entendendo que este é um conceito chave da Matemática, que é muito complexo, pois envolve outros conceitos na sua construção e

que deve ser introduzido, inicialmente de forma intuitiva, passando por diferentes representações que levam a sua matematização e a posterior generalização, concluindo com a sua formalização.

Aprofundamo-nos na fundamentação das noções intuitivas que envolvem este conceito, das suas representações e da sua matematização inicial, pois no nosso entender, são as etapas da construção do conceito de função a serem mais trabalhadas no ensino fundamental, já que a generalização e a formalização deverão ser mais enfatizadas no ensino médio e no superior.

Na medida em que procuramos aprofundar os conceitos de função, a serem trabalhados no ensino fundamental, empenhamo-nos em relacionar atividades e recursos pertinentes ao seu ensino, que podem ser realizadas ao longo das oito séries. Há noções que iniciam a ser trabalhadas na pré-escola, pois é neste nível de escolaridade que começa a alfabetização, entendida no seu sentido mais amplo e que inclui a alfabetização matemática.

Partimos para o estudo teórico da construção do conceito de função, no ensino fundamental, de uma problemática que queremos responder ao longo desta fundamentação:

_ O que é função?

_ Quais são as idéias básicas e as noções intuitivas envolvidas no conceito de função?

_ Em que etapa da escolaridade inicia-se a desenvolver o conceito de função?

_ Como trabalhar com os alunos o conceito de função?

No ensino atual de funções, destacam-se duas concepções que dão embasamento para a escolha da linha metodológica a ser utilizada na introdução deste conceito e no seu ensino. Uma refere que o conceito de função passa pelo seu entendimento como o de uma expressão analítica e traduz o pensamento de alguns matemáticos ao longo do processo histórico de sua definição, e a outra que entende função como um conjunto de pares ordenados, subconjunto do produto cartesiano dos conjuntos envolvidos, que é um caso particular de relações.

Optamos por fazer a escolha da metodologia para a construção do conceito, a partir da primeira concepção, uma vez que, para nós, é a história da Matemática quem, via de regra, indica os caminhos da metodologia do ensino da Matemática.

Retomemos um pouco da história das funções, para situar alguns conceitos e idéias que queremos abordar.

Focamos este breve passeio pela história, a partir do século XIV, quando esta ferramenta matemática retomou o rumo de sua construção.

As primeiras manifestações, do que chamamos representação gráfica de uma função, traduzidas em um gráfico, relacionando velocidade e tempo, são atribuídas a Oresme (século XIV). Conta-se que, para isto, ele partiu do questionamento: **Seria possível expressar em um gráfico ou em uma figura, a maneira pela qual as coisas variam?**

A idéia de variação trouxe a idéia de movimento, quebrando o ideal platônico de um mundo estático e foi, no Renascimento, representado especialmente na figura de Leonardo da Vinci, que apareceram os indícios do surgimento de leis quantitativas para o entendimento dos fenômenos da natureza, expressas através da Matemática e de suas ferramentas. “Fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já não o encontras” (DA VINCI apud CARAÇA, 1989, p.203).

Assim, é o Renascimento que transforma o mundo de sua época e põe na pauta o desenvolvimento das funções.

[...] ao cabo de 20 séculos, renasce das cinzas, onde parecia enterrado para sempre, aquele ideal de *ordenação matemática quantitativa* que víamos despontar com os pitagóricos. Que caminho andado e que diferença! Quantas ilusões ingênuas desfeitas! E veja também, como só uma transformação orgânica total da sociedade veio a exigir a criação do conceito que havia de fazer renascer este ideal. (CARAÇA, 1989, p.202)

Seguiram-se os séculos XVI com Descartes e Fermat a quem se atribui a introdução do método analítico de definir funções e o século XVII, quando, com Leibnitz, aparece o primeiro uso da palavra função, quase no sentido que hoje é usada e com Galileu e Newton as noções lei e de dependência entre fenômenos.

No século XVIII, Bernoulli usou funções para designar valores obtidos de operações entre variáveis e constantes e, com Euler, a idéia de função tornou-se fundamental no estudo dos processos infinitos, definindo-se, então, a notação atual de função.

Foi com Dirichlet que expressou, no século XIX, a definição de função que mais se aproxima da atual. Ele, porém, não utilizava para defini-la a teoria dos conjuntos que,

somente passou a ser usada com os Boubarkis no século XX, quando formalizaram o conceito e sua notação, ambos usados nos dias de hoje.

Com esta breve imersão na História, percebemos que, a medida em que se verificou que os fenômenos, com suas regularidades e dependências, podiam expressar-se através de ferramentas matemáticas, as funções, estas foram sendo exploradas e desenvolvidas a partir das idéias de correspondência unívoca entre conjuntos, onde as variáveis dependentes e independentes, as leis quantitativas, as notações e as representações em gráficos foram surgindo e compondo esta ferramenta que se aplica aos processos infinitos.

Várias são as formas de expressar o conceito de função, escolhemos a que segue, pois refere vários aspectos, que consideramos importantes para serem explorados em diferentes graus de complexidade e em diferentes atividades, desde a pré-escola até a oitava série do ensino fundamental.

Função é uma relação unívoca entre dois conjuntos, que traduz uma relação de dependência entre suas variáveis e que atende às condições de existência e unicidade, expressando-se através de uma lei e cuja notação é:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$y = f(x)$$

O surgimento do conceito de função, emergiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizar em leis quantitativas que se expressam analiticamente.

Assim, as idéias básicas que constituem o conceito de função, estão presentes nos conceitos que envolvem as regularidades, as variáveis, a dependência entre variáveis e as generalizações.

Regularidades

As regularidades estão ligadas às seqüências. Há seqüências que não apresentam regularidades. As regularidades aparecem nas seqüências que apresentam padrões.

Os padrões podem ser topológicos, geométricos, numéricos, sonoros, de linguagem, de cores e tantos outros. Há seqüências em que as regularidades combinam dois ou mais padrões, formando um novo padrão a partir dos combinados.

Os padrões estão em toda parte no mundo ao nosso redor. Reconhecê-los, identificá-los, criá-los, expressá-los matematicamente, é entender como a Matemática é aplicada e está presente no mundo em que vivemos.

Trabalhar com uma extensa variedade de padrões, ajuda as crianças, a desenvolverem a habilidade de classificar e organizar informações.

Relacionar padrões em geometria, números, medidas, auxilia as crianças, a compreender as conexões entre os tópicos matemáticos que, por sua vez, desenvolvem o pensamento matemático, que as torna competentes, para ir construindo os mais abstratos conceitos, em especial, o de função.

A idéia de relações funcionais, inicialmente deve ser, intuitivamente desenvolvida na pré - escola e nas séries iniciais do ensino fundamental, através da observação de regularidades em eventos, formas, composições e conjuntos numéricos. Nas seqüências, os alunos, além de descrever, entender, analisar, criar e relacionar uma variedade de padrões, devem representá-los analiticamente, através de letras, em expressões algébricas e equações. As representações gráficas em tabelas, em diferentes tipos de gráficos e diagramas, devem acompanhar todo o percurso da construção do conceito.

Observando e representando variadas regularidades com padrões semelhantes ou não, e relacionando-os, as crianças serão levadas a identificar suas propriedades, que mais adiante, serão descritas através de letras ou outros símbolos. O uso das letras e de outros símbolos, proporcionará a generalização, a partir da descrição destas propriedades, tornando as crianças aptas a trabalhar com variáveis e suas dependências. Estas experiências desenvolvem, assim, habilidades para as generalizações matemáticas, o que leva ao estudo da álgebra e das funções. Desta forma, a construção de modelos matemáticos capazes de prever o comportamento dos fenômenos do mundo real, passa pelo reconhecimento, a descrição e a generalização de padrões, que se efetiva nas suas diferentes representações.

Estas experiências conferem aos estudantes, até as séries finais do ensino fundamental, a habilidade de explorar e generalizar as funções.

Variáveis

A idéia de variável surge, concomitantemente, à idéia de conjunto, pois a variável representa individualmente qualquer elemento de um conjunto.

As variáveis são representações simbólicas para os conjuntos que nos permitem expressar as generalizações, saindo das tabelas que referem resultados particulares.

Os conjuntos que representam quantidades e, portanto, são numéricos, podem ser finitos ou infinitos e qualquer dos seus elementos é representado por símbolos, geralmente letras, que são as variáveis neles introduzidas,

[...] seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1) e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida esta que se nutre da vida individual de cada um de seus membros, mas não se reduz a ela. CARAÇA, 1989, pág. 127)

"Como salienta CARAÇA (1951), a noção de variável é das mais difíceis para os alunos. É um número qualquer de um determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números deste conjunto" (TINOCO, 2001, p.5)

As variáveis são representadas geralmente por letras, o que aumenta as dificuldades, pois as letras também são utilizadas nas representações de outros entes matemáticos, como:

- Nas funções, onde as letras representam quantidades variáveis, mas às vezes constantes.
- Nas equações, onde as letras representam incógnitas que são valores dados.
- Nas expressões algébricas, onde as letras são usadas como generalizações.

Desde muito cedo, deve-se dar a oportunidade ao aluno, de utilizar letras nas variadas situações em que elas são empregadas na Matemática, para que não faça falsas generalizações.

Se o aluno só se deparar com letras em equações, sempre como incógnitas, correrá o risco de igualar qualquer expressão algébrica a zero, na tentativa de determinar um valor para as letras.

É importante também, que o aluno seja levado a refletir sobre os diferentes usos das letras, nas equações, nas expressões algébricas e nas funções, a fim de compreender seus diferentes usos e identificá-los.

Dependência de variáveis

Observemos a tabela abaixo:

Bicicletas	1	2	3	4
Rodas	2	4	6	8

Nela encontramos duas simples seqüências que apresentam regularidades e um padrão, que é a lei quantitativa que as relaciona.

Estas seqüências são sucessões de números que representam a quantidade de bicicletas ou a quantidade de rodas das bicicletas.

As duas seqüências estão representadas por conjuntos, colocados em correspondência um com o outro e podemos afirmar que esta correspondência é unívoca, no sentido do conjunto de bicicletas para o conjunto das rodas das bicicletas, pois nesta relação, o número de rodas depende do número de bicicletas.

Podemos nos expressar dizendo que a variável, número de rodas (**r**), é função da variável (**b**), número de bicicletas, e afirmar que a correspondência é unívoca no sentido de **b** para **r**. Assim, **b** é o antecedente e **r**, o conseqüente.

A forma como acontece a correspondência dos elementos do conjunto **b** para os elementos do conjunto **r** é a lei quantitativa que generaliza a variação.

O instrumento matemático que estabelece, através de uma lei quantitativa, a correspondência unívoca entre os dois conjuntos que apresentam regularidades, é uma relação funcional que, por sua vez, é a função.

A lei matemática do fenômeno que queremos interpretar expressa-se por uma expressão analítica que é o modo de estabelecer a correspondência entre as duas variáveis e não pode ser confundida com a função.

Na relação funcional entre duas grandezas variáveis, uma delas a dependente, a função, é perfeita e univocamente determinada pela outra, a independente.

As variáveis, a forma como variam, a dependência entre elas, a correspondência unívoca, a questão de identificar e diferenciar a variável dependente, da independente, são noções e idéias que devem ser trabalhadas ao longo do ensino fundamental, com diferentes materiais manipulativos, com máquinas, nas operações, em exercícios e situações problema.

São idéias e noções que vão sendo trabalhadas em níveis diferentes de complexidade, e representadas em palavras, em gráficos e em expressões analíticas até serem explicitadas e generalizadas.

Generalização

Fenômenos que ocorrem com regularidade podem ser generalizados e isto envolve abstração.

As generalizações não podem ser abstraídas de casos particulares. É preciso que os alunos desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, realizando diferentes representações e concluindo esta etapa com o registro das leis em linguagem algébrica, o que é decisivo para a construção do conceito de função.

As representações de uma função

As funções, ao longo do ensino fundamental, nas diferentes etapas da construção do conceito, devem ser representadas por palavras na linguagem oral e escrita, graficamente em diagramas e gráficos de diferentes tipos, incluindo as tabelas e analiticamente, por expressões matemáticas.

A flexibilidade da passagem de uma representação para outra é de fundamental importância para a generalização do conceito, pois trabalha com a mudança de quadros: do algébrico para o analítico e para o geométrico e vice-versa.

A passagem de uma representação para outra, também se efetiva no trabalho em grupo quando, a partir da manipulação de materiais concretos, da resolução de situações problema, do trabalho com jogos e brincadeiras, as crianças discutem e registram as idéias e as soluções, usando a palavra oral e escrita.

As representações gráficas são variadas e ricas e facilitam a construção dos conceitos que envolvem, principalmente, relações quantitativas.

As tabelas são maneiras de organizar visualmente as informações e podem ser usadas desde muito cedo no ensino fundamental.

Os diagramas de Venn são utilizados nas representações dos conjuntos de um número finito ou infinito de elementos, e, também, representam operações entre conjuntos.

Os diagramas de Venn constituem um importante apoio do pensamento, seja para esclarecimento de situações recíprocas entre mais entes, seja pela

fixação dos termos de um raciocínio, como a havia antecipado Euler. (CASTELNUOVO, 1975, p. 151).

Os diagramas que incluem flechas, a partir de uma ou duas regiões fechadas, representam as relações, bem como as classificações, as ordenações e as funções entre outras e propiciam a análise de suas propriedades.

As representações através de gráficos incluem, entre outros, gráficos de barras, de setor e cartesianos, sendo que nestes, representam-se pontos e linhas, a partir dos conjuntos numéricos envolvidos.

Os gráficos de barras são os que, no nosso entender, prestam-se para trabalhar com as séries iniciais do ensino fundamental quando, primeiramente, cada "barrinha" ou cada representação individualizada deve significar apenas uma unidade, passando posteriormente, a significar um número cada vez maior de unidades.

Na representação das funções, os gráficos cartesianos são fundamentais, pois seus pontos representam os números que variam em conjuntos e as figuras, suas correspondências, o que facilita a generalização.

[...] o ponto se transforma em número, a curva se chama equação, relações algébricas traduzem particulares posições de retas e de planos, e a variação de um termo da equação tem o poder de fazer mudar a forma de uma superfície, transformando-a sob nossos olhos. O número grande e o pequeno são vistos como segmentos de comprimentos distintos, o máximo e o mínimo de uma sucessão contínua de números não são mais do que pontos de maior ou menor altura, unidos no seu percurso por uma certa curva. (CASTELNUOVO, 1975, pág. 163).

Na medida em que os conjuntos numéricos vão se ampliando, as representações cartesianas vão se tornando mais e mais apropriadas para representar as transformações dos fenômenos da natureza. A representação gráfica da lei de uma função, expressa por uma expressão analítica, transforma-se em uma curva. A expressão analítica e a curva são diferentes representações do mesmo fenômeno, sendo uma o "espelho" da outra.

O trabalho com máquinas de diferentes tipos, a partir de máquinas de papelão (construídas com caixas de sapato), utilizadas nas séries iniciais, vai se desenvolvendo e sofisticando-se, até chegar às representações simbólicas com desenhos especiais que representam as idéias de máquinas ligadas à função, às transformações e às operações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No nosso trabalho, analisamos teoricamente as questões envolvidas na compreensão e na construção do conceito de função.

As noções e idéias que, a princípio, são vagas e incertas vão sendo exploradas, representadas, relacionadas com os fenômenos da natureza que vão sendo observados e, nas séries finais do ensino fundamental, com a introdução de gráficos cartesianos e o auxílio de regras de recorrência tais noções vão se generalizando e o conceito de função é explicitado.

Assim, a partir das seqüências com suas regularidades e seus padrões, trabalhadas a partir de estímulos visuais, sonoros, táteis, envolvendo eventos e objetos do mundo das crianças, as noções e idéias que envolvem o conceito de função são trabalhadas desde a pré-escola. Estas regularidades com seus padrões vão sendo representadas em tabelas e gráficos e as leis quantitativas que relacionam as variáveis envolvidas, vão expressando os padrões que vão sendo identificados, por exemplo, em máquinas que, por sua vez trabalham com variáveis independentes (entrada) e dependentes (saída) e leis (as transformações), que também são representadas em gráficos cada vez mais complexos que envolvem conjuntos mais completos. Este trabalho deve ser realizado ao longo de todo o ensino fundamental, a partir da pré-escola,

Nas séries finais, no nosso entender, ainda através de máquinas, de regras de recorrência, da construção e interpretação de gráficos cartesianos, através do uso de letras em expressões algébricas, equações e expressões analíticas das próprias funções, através de relações funcionais que se expressam por pares ordenados, a ferramenta matemática função é generalizada e pode ser definida e formalizada na sua expressão analítica.

Consideramos, ao longo deste estudo teórico, ter dado algumas respostas para as questões propostas.

O conceito de função, no nosso entender, não é um conceito a ser introduzido numa determinada série do ensino fundamental ou do ensino médio. Deve ser introduzido e trabalhado com atividades especialmente programadas ou inserido em várias questões ao longo de todo ensino fundamental, considerando ainda, a pré-escola.

Nas transformações de caráter topológico e geométrico, nas operações, nas correspondências, nas relações entre objetos, ações e eventos, com auxílio das representações, a idéia de função vai sendo explorada e construída pelo aluno com a mediação intencional e competente do professor que, atualmente pode contar com contribuição dos educadores matemáticos que em suas publicações recentes trazem ricas e significativas sugestões de trabalho neste sentido.

Palavras-chaves: Ensino fundamental, funções, currículo em espiral

REFERÊNCIAS

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

CASTELNUOVO, Emma. *Série de Matemáticas: Didáctica de la matemática moderna*. México: Editorial Trillas, 1975.

TINOCO, Lucia A.A. (Coord.) *Construindo o Conceito de Função*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/ UFRJ, 2001.