Realização SBEM 15 anos SBEM PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

EXPLORANDO A GEOMETRIA DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE REFLEXÕES, TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES.

Lilian Nasser – IM/UFRJ e CETIQT/SENAI
Geneci A de Sousa – SEE/RJ, SME/RJ
José Alexandre Pereira – SEE/RJ, SME/RJ
Projeto Fundão - IM/UFRJ – pfundao@im.ufrj.br

De acordo com diversos estudos e pesquisas internacionais, a geometria deve ser abordada de forma dinâmica, no sentido de incentivar os alunos a manipular e construir as figuras e sólidos geométricos, e levá-los a perceber que os objetos geométricos podem ocupar diversas posições sem alterar suas características. Assim, será visto neste mini-curso que algumas *Transformações no Plano* podem ser ferramentas úteis na exploração de conceitos fundamentais como a congruência de figuras.

As vantagens do uso das transformações no plano no ensino-aprendizagem de geometria foram comprovadas no trabalho desenvolvido por Nasser (1992). Das aplicações desse trabalho em diversas turmas no Rio de Janeiro resultou o livro "Geometria segundo a teoria de van Hiele" (Nasser e Sant'Anna, 1997), publicado pelo Projeto Fundão (IM/UFRJ).

Esta também é uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1997), que incluem entre os Conceitos e Procedimentos para a área de Espaço e Forma no 3º ciclo do ensino fundamental:

- *Movimentação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da área da superfície).*

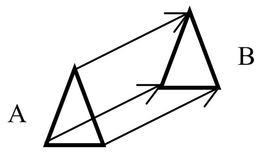
  E para o 4º ciclo do ensino fundamental:

- *Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de sua movimentação (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da área da superfície).*

Neste mini-curso vamos explorar alguns tipos de *"transformações geométricas"* no plano e suas aplicações no ensino de geometria. A palavra transformação usualmente significa *"mudança"*. É portanto natural pensarmos que, ao falar em *"transformação geométrica"*, estamos falando em mudanças em figuras geométricas.

A forma pela qual uma figura é *"transformada"* precisa ser definida com precisão para que se possa saber, a partir da figura inicial, qual será a *"transformada"*. É neste ponto que a matemática lança mão de um dos seus conceitos mais importantes: o de função.

Na *"transformação geométrica",* cada ponto da figura inicial é levada em um ponto da figura em que ela se transforma. No caso de um triângulo, por exemplo, cada vértice do triângulo A á associado a um vértice do triângulo B e o mesmo acontece com cada um dos outros pontos.



Essa correspondência que a cada ponto de A faz corresponder exatamente um ponto de B precisa ser bem definida para que, conhecida a figura A, sejamos capazes de saber exatamente qual é a figura B, chamada imagem de A pela transformação.

Uma transformação no plano é uma função, cujo domínio é o conjunto dos pontos do plano e cujo contradomínio também é o conjunto dos pontos do plano. Diz-se então que esta correspondência é uma *"transformação geométrica"* no plano, ou, simplesmente, uma *"transformação"* no plano.

Para a realização das atividades propostas em sala de aula, é recomendado o uso de instrumentos de desenho, papel transparente e para dobrar ou recortar. Não se deve, no entanto, deixar de considerar a possibilidade cada vez maior de o professor usar o computador em sala de aula. Os *softwares* de geometria dinâmica são um excelente recurso para que os alunos possam construir os conteúdos de geometria. Mas este recurso não substitui os outros mencionados.

Vamos tratar de transformações que possuem características comuns. Quando se aplica uma transformação a uma figura de modo que ela apenas possa ocupar outro lugar no plano, sem alterar sua forma e tamanho originais, dizemos que a transformação aplicada é uma isometria.

Isometria: *iso* quer dizer igual, mesmo; e *metria* está relacionada a comprimento.

Logo, as isometrias têm por característica principal manter invariantes os comprimentos e a forma da figura. Isto significa que se uma figura geométrica sofrer uma transformação do tipo isometria, as medidas de seus lados e de seus ângulos serão mantidas.

Antes de introduzir formalmente o conceito de isometria em sala de aula, é interessante motivar os alunos para o seu uso, habituando-os a trabalhar com movimentos e transformações de figuras no plano.

Eixos de Simetria

Antes de estudarmos a primeira isometria no plano, a reflexão, é importante conceituar eixo de simetria, que é o eixo em relação ao qual a figura é refletida. Isso é feito usando dobraduras, tentando identificar todos os possíveis eixos de simetria de diversas figuras geométricas.

Definição: Um eixo de simetria é uma reta que divide a figura em duas partes que podem coincidir exatamente. É como se um espelho perpendicular ao plano que contém a figura fosse colocado sobre a reta, refletindo exatamente a figura do outro lado.

Uma figura pode possuir um eixo de simetria, mais de um eixo de simetria, ou não possuir eixo de simetria algum. Os pontos que coincidem quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo.

Observe que:

– A linha que une cada par de pontos simétricos é perpendicular ao eixo de simetria;

– Dois pontos simétricos estão à mesma distância (perpendicular) do eixo de simetria.

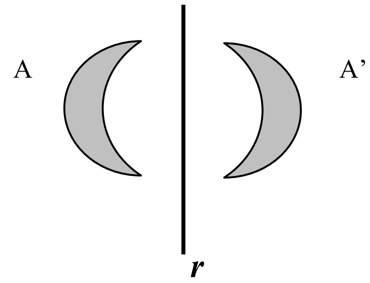
Estas condições são essenciais para a identificação de eixos de simetria. Portanto, devem ser fixadas por meio de diversos exercícios.

As atividades propostas envolvem a identificação de eixos de simetria e de pontos correspondentes em diversas figuras: logotipos de marcas conhecidas, polígonos, tabuleiros de jogos.

Reflexão

Vamos considerar agora uma transformação no plano, caracterizada por uma reta ***r*** desse plano, que a cada ponto do plano associa o seu simétrico em relação à reta ***r***.

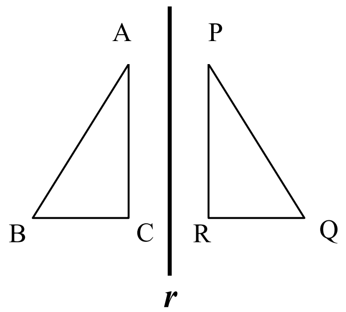
Vejamos a imagem de uma figura plana por esta transformação no seguinte exemplo:



Nesse caso, foi aplicada uma reflexão à figura A, obtendo-se a nova figura A’, congruente à original e simétrica em relação à reta ***r*** que é chamada eixo de simetria.

Observe que cada ponto da figura é refletido em relação ao eixo, dando origem a um ponto correspondente na figura refletida, obedecendo às regras vistas anteriormente:

– A linha que une cada par de pontos simétricos é perpendicular ao eixo de simetria;
– Dois pontos simétricos estão à mesma distância (perpendicular) do eixo de simetria.



A e P são correspondentes
Q corresponde a B
C e R são correspondentes

Uma reflexão em relação a uma reta ***r*** é também chamada de simetria axial em relação a ***r*** (eixo de simetria).

<u>Definição</u>: Seja ***r*** uma reta.

Uma figura é obtida de outra por uma **reflexão** de eixo ***r*** se:

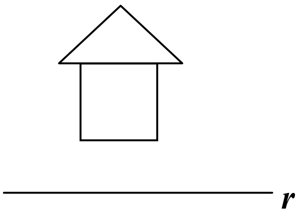
- cada ponto P da figura original está na mesma perpendicular a ***r*** que o ponto P’ correspondente da figura refletida
- P e P’ distam igualmente de ***r***, e situam-se em semi-planos distintos em relação a ***r.***

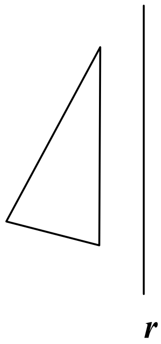
Para definir uma reflexão, basta portanto fixar o eixo de simetria ***r***.

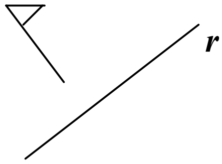
Note que a imagem de uma figura por reflexão mantém sua forma e dimensões, mas em posição “espelhada” em relação ao eixo de simetria.

<u>Atividades:</u>

1) Desenhe a imagem de cada figura abaixo, pela reflexão de eixo *r* indicado.

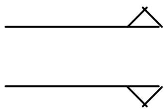


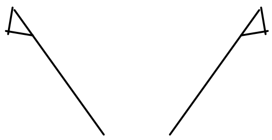




<u>Obs:</u> Dependendo da experiência dos alunos, as primeiras atividades devem ser feitas sobre papel quadriculado, onde a distância ao eixo pode ser medida contando os quadradinhos. Mas o papel quadriculado só é útil quando o eixo coincide com uma das linhas do quadriculado, para que as demais linhas sejam paralelas ou perpendiculares ao eixo da reflexão.

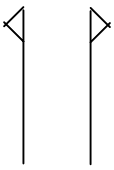
2) Em cada item, uma das figuras é a reflexão da outra, em relação a um eixo. Desenhe o eixo em cada caso.

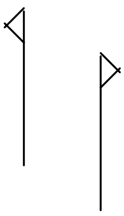
a) 

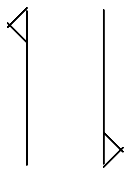
b) 

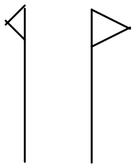
c) 

3) Em cada item, trace o eixo de simetria, caso exista:

a) 

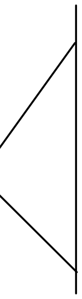
b) 

c) 

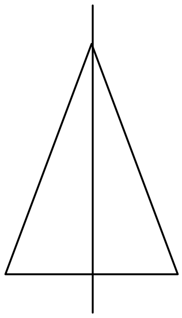
d) 

4) Determine a imagem pela reflexão de cada triângulo abaixo em relação aos eixos de simetria traçados. Use caneta colorida para desenhar essas imagens.

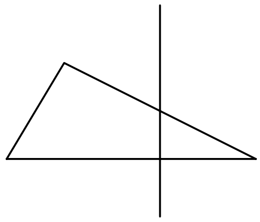
a)



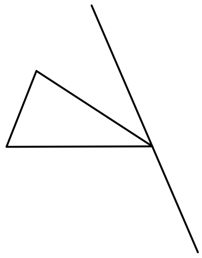
b)



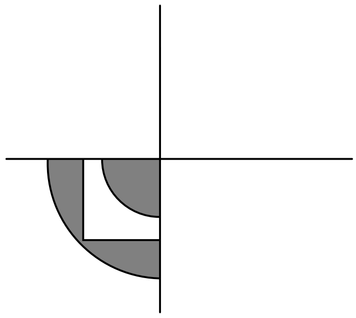
c)

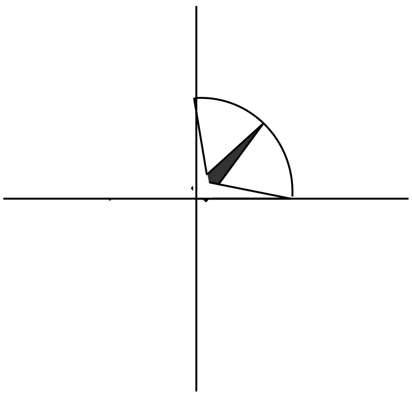


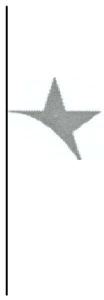
d)



5) Em cada item abaixo aparece parte de um logotipo e as retas representam eixos de simetria. Refletindo as partes da figura em relação aos eixos, complete as figuras, e identifique os logotipos.

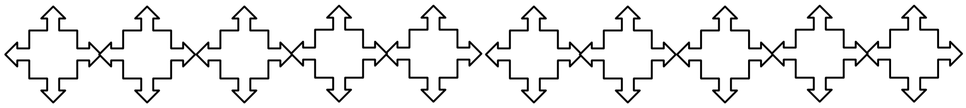


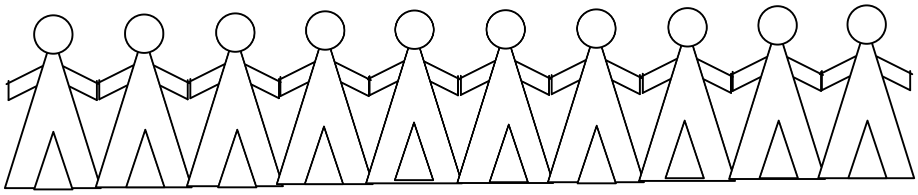




Translação

Em alguns galões de enfeitar roupas, ou em guirlandas, uma figura é repetida continuamente. Observe os exemplos:





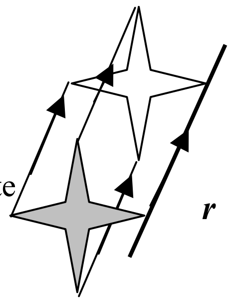
Nesses casos, a primeira figura foi repetida, deslizando na direção horizontal, sempre a distâncias iguais.

Dizemos que foi aplicada uma translação a essa figura.

Definição:

Seja ***r*** uma reta.

Uma figura é obtida de outra por uma **translação** de direção ***r*** se todos os pontos da figura original se deslocam paralelamente a ***r*,** no mesmo sentido, percorrendo a mesma distância.



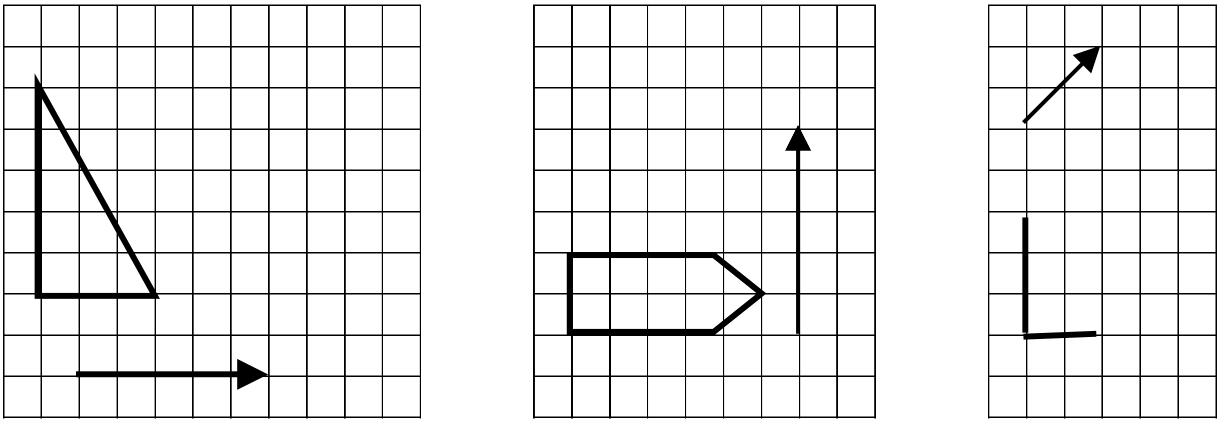
Para definir uma translação devem ser fixados, portanto, direção, o sentido e o comprimento (amplitude) de deslocamento.

Note que a imagem de uma figura por translação mantém sua forma e tamanho.

Esta transformação preserva os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas preservando, portanto, outras grandezas derivadas destas, como a área.

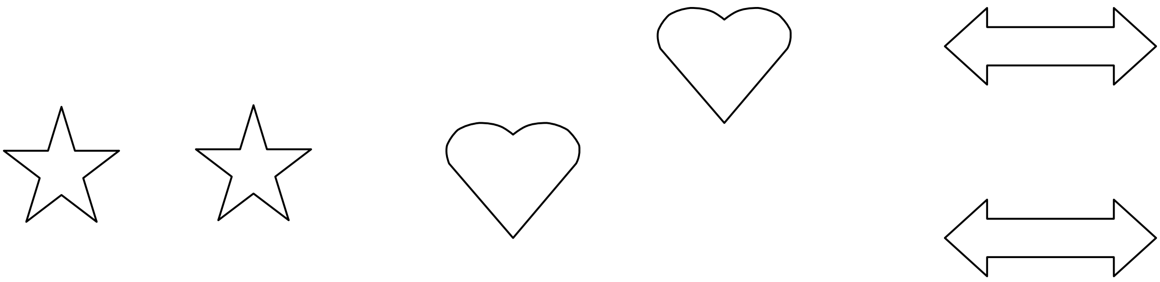
Atividades

1)Desenhe as imagens das figuras pela translação de direção, sentido e amplitude indicados pela seta.



2) Nos pares de figuras a seguir, uma figura é imagem da outra por uma translação.

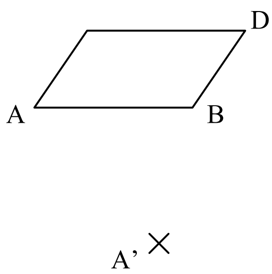
Em cada item, represente por uma seta a direção, o sentido e a distância (amplitude) da translação aplicada.



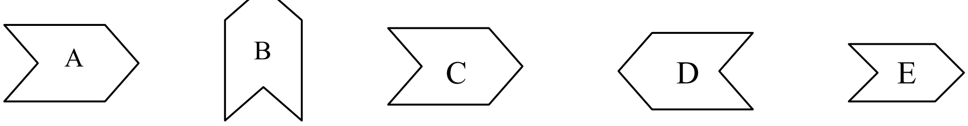
3) O ponto A da figura foi transladado para o ponto A'.

É possível determinar a imagem completa da figura por essa translação?

Justifique sua resposta.



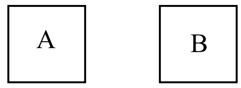
4) Qual das figuras é imagem da figura A por uma translação ?



Indique que tipo de transformação foi aplicada para obter as demais opções.

5) A imagem do quadrado A por uma transformação é o quadrado B.

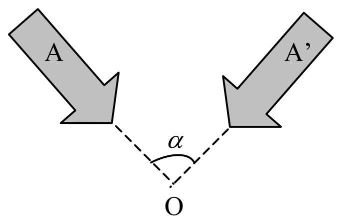
Que transformação(ões) podem ter sido aplicadas?



Rotação

Vamos considerar agora uma transformação no plano caracterizada por uma giro. Tendo fixado um ponto O e escolhido um ângulo α, a imagem P’ de cada ponto P do plano é obtida quando P descreve um arco de circunferência de centro O e ângulo α, no sentido escolhido (horário ou anti-horário).

Vejamos a imagem de uma figura plana por uma transformação desse tipo no seguinte exemplo (figura ao lado).



Tendo fixado o ponto O e o ângulo de giro α, considere a figura A.

A imagem de cada ponto da figura A é obtida através do giro de centro em O e ângulo α, no sentido horário.

Dizemos que a figura A’ é a imagem da figura A por uma *rotação* de centro O e ângulo α, no sentido horário.

Definição:

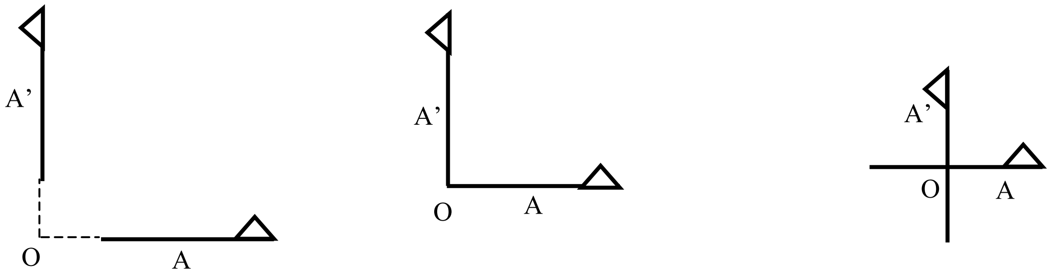
Uma **rotação** de centro O e ângulo α é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um de seus pontos segundo o arco de circunferência de centro O, correspondente ao ângulo α, no sentido fixado, que pode ser horário ou anti-horário.

Uma rotação, portanto, é determinada pelo centro O, um certo ângulo de rotação α e um sentido, que pode ser horário ou anti-horário.

Note que a imagem de uma figura por rotação mantém sua forma e suas dimensões.

A rotação mantém invariantes os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas preservando, portanto, outras grandezas derivadas destas, como a área.

O ponto O pode estar localizado fora da figura a ser girada, sobre o seu contorno, ou no interior da figura, como nos exemplos a seguir, em que a bandeirinha A' é a imagem da bandeirinha A por uma rotação de centro O e ângulo de 90º, no sentido anti-horário:

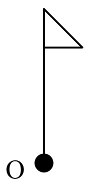


Note que a posição da imagem de uma mesma figura pode ser diferente, dependendo da posição do ponto O. O mesmo acontece se mudarmos o ângulo ou o sentido de rotação.

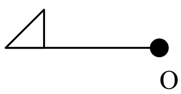
Atividades:

1) Trace a imagem de cada figura abaixo por uma rotação de 90º no sentido horário, em torno do centro O

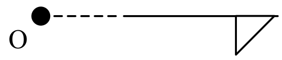
a)



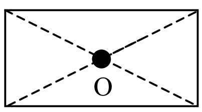
b)



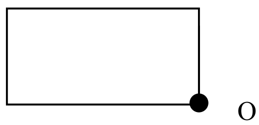
c)



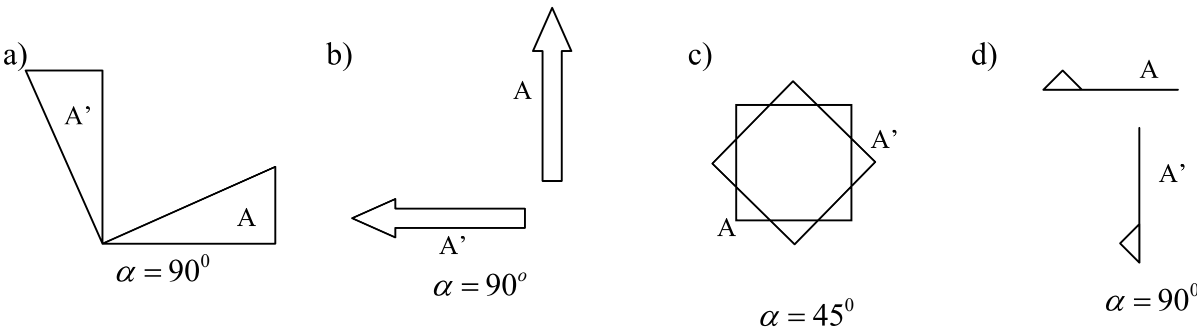
d)



e)



2) Em cada item, a figura A' é a imagem de A por uma rotação no sentido anti-horário, cujo ângulo está indicado. Marque os centros de rotação.



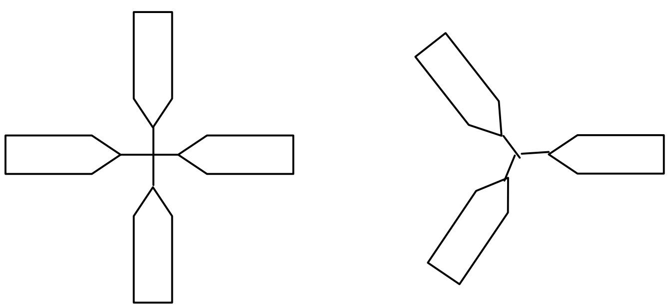
<u>Comentários</u>:

- No item (b), A' também pode ser vista como a imagem de A por uma reflexão cujo eixo é uma reta que passa pelo centro de rotação. Trace essa reta.

- O item (d) é mais difícil que os demais. Para encontrar o centro de rotação, ligue dois pontos da bandeirinha A a seus correspondentes na bandeirinha A'. Trace as mediatrizes desses dois segmentos. O ponto de interseção será o centro de rotação. Se você tiver dificuldades, não se preocupe, pois voltaremos a ele no capítulo 3, depois que relembrarmos a noção de mediatriz.

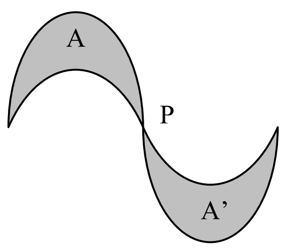
3) Vamos observar as pás de um ventilador de teto.

a) Se o ventilador possui 4 pás, qual é o ângulo de rotação que uma pá descreve até ocupar o lugar que a pá seguinte ocupava?



b) Esse ângulo de rotação é o mesmo no caso do ventilador de 3 pás? Justifique.

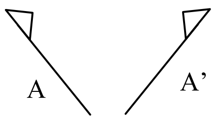
4) Observe a figura A, e sua imagem A', por uma rotação de 180º no sentido anti-horário, em torno do ponto P.

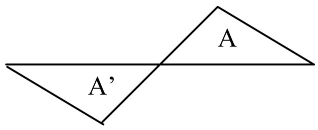


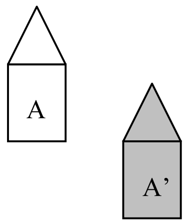
Use papel transparente para traçar a imagem A'' da mesma figura A, por uma rotação de 180º no sentido horário, em torno do ponto P.

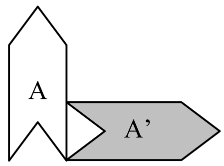
Qual a conclusão a que você chega, comparando A’ e A’’?
Experimente com outro ângulo de rotação. Aconteceu a mesma coisa?

5) Em cada item, verifique se a figura A’ é imagem da figura A por uma rotação. Em caso afirmativo, indique o centro, o ângulo de rotação e o sentido. Em caso negativo, verifique se foi aplicado outro tipo de transformação.

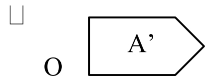
a)


b)


c)


d)


6) A figura A’ é a imagem de uma figura A por uma rotação de 90º em torno do ponto O no sentido horário.



a) Como poderíamos encontrar a figura A?
b) Qual a transformação que leva a figura A’ na figura A?
c) Se A’ é a imagem da figura A por uma rotação de ângulo α no sentido horário, qual a transformação que faria o inverso?

Congruência de Figuras

As isometrias podem ser usadas para motivar a introdução ao conceito de congruência de figuras planas. Desse modo, é possível evitar um enfoque formal, partindo dos casos de congruência de triângulos.

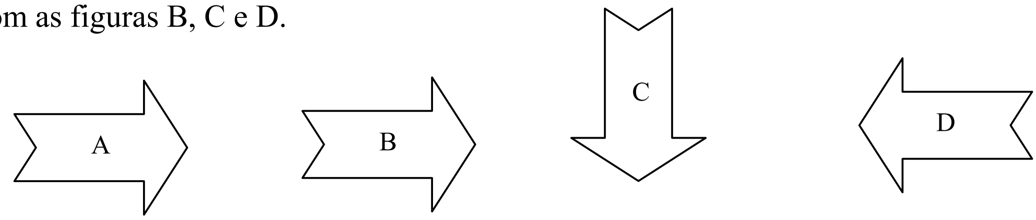
Neste capítulo vamos estudar a congruência de figuras, e estabelecer condições para que duas figuras sejam congruentes.

<u>Definição</u> - Duas figuras planas são **congruentes** quando podem coincidir por superposição.

Por esta definição, constatamos que as isometrias, a reflexão, a translação e a rotação, bem como as combinações possíveis destas três transformações, levam qualquer figura em outra congruente a ela.

Atividades:

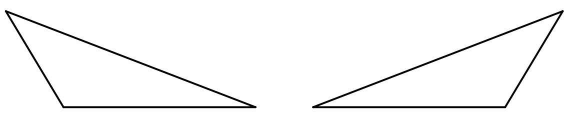
1. Copie a figura A em papel transparente e verifique, por superposição, se ela coincide com as figuras B, C e D.



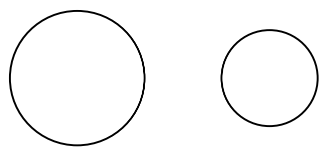
Identifique que transformações podem ser usadas para obter as figuras B, C e D a partir da figura A.

2) Verifique quais dos seguintes pares de figuras são congruentes, usando papel transparente. Para os pares de figuras congruentes, indique que isometria foi aplicada.

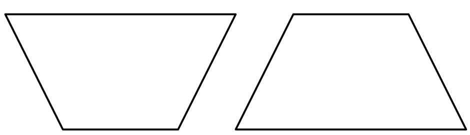
a)



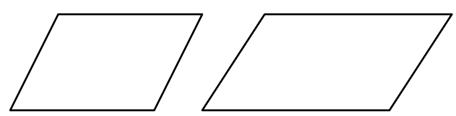
b)



c)



d)

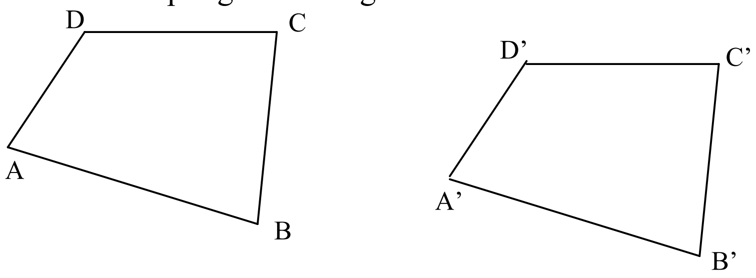


Observação:

Se dois polígonos ABCD e A’B’C’D’ são congruentes, usamos a notação “≡”, e escrevemos: ABCD ≡ A’B’C’D’.

Quando dois polígonos são congruentes, as medidas de seus lados correspondentes **e** as medidas de seus ângulos correspondentes são respectivamente iguais.

3) Observe os dois polígonos da figura:



a) Compare os ângulos e os lados dos polígonos acima e identifique os que são correspondentes por congruência. Chame de A’ o vértice correspondente ao vértice A. Faça o mesmo para os vértices B, C e D.

b) Pode-se concluir que ABCD $\equiv$ A’B’C’D’ ?

4) Pela definição que demos de figuras congruentes, é verdade que:

Se a uma figura geométrica faz-se corresponder outra por uma translação, uma rotação, uma reflexão ou por uma combinação destas três, concluímos que a segunda figura será congruente à primeira.

Pode-se afirmar que a recíproca desta afirmação é verdadeira? Isto é, que se duas figuras são congruentes, então uma delas pode ser sempre obtida da outra por alguma destas transformações ou por uma certa combinação delas?

Para responder às atividades seguintes, use material auxiliar como régua e compasso, ou papel transparente, e experimente, fazendo tentativas.

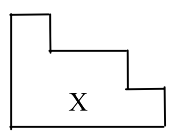
5) Verifique se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas, e justifique:

a) Dois polígonos regulares são sempre congruentes.

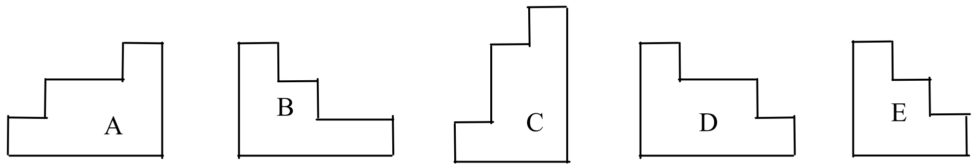
b) As diagonais de um losango dividem-no em 4 triângulos congruentes.

c) Uma diagonal de um trapézio divide-o em 2 triângulos congruentes.

6) Observe a figura X ao lado, e identifique as três figuras congruentes à figura X, indicando a transformação aplicada



em cada caso.



Congruência de Triângulos

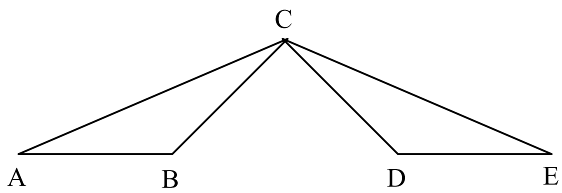
Dois triângulos, sendo polígonos particulares, só serão congruentes se tiverem 6 pares de elementos congruentes: 3 pares de ângulos e 3 pares de lados congruentes.

Essa é, portanto, **condição necessária** para que dois triângulos sejam congruentes.

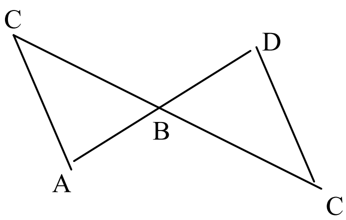
Atividade:

Em cada par de triângulos congruentes abaixo, identifique os lados e os ângulos congruentes.

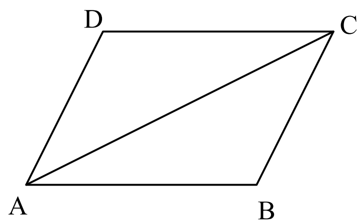
a)



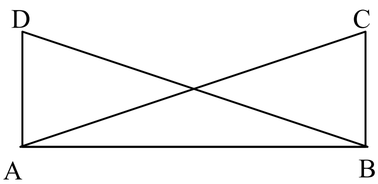
b)



c)



d)



O próximo passo é identificar as **condições suficientes** para que dois triângulos sejam congruentes. Isso será feito por meio da construção de diversos triângulos, levando ao estabelecimento dos casos de congruência.

<u>Atividades:</u>

1) Nesta atividade use régua e compasso para construir triângulos, todos com lados medindo

e 7cm, seguindo as instruções.

a) Comece com o lado AB = 4 cm , e faça AC = 5 cm e BC = 7 cm.

   No capítulo I.2 você já construiu triângulos com régua e compasso. Se achar necessário, volte lá para recordar.

b) Construa outro triângulo, começando com o lado de 5 cm.

c) Construa um terceiro triângulo, começando agora com o lado de 7cm.

d) Copie o primeiro triângulo em papel transparente e compare-o com os outros dois triângulos. O que você pode concluir?

e) Que isometrias podem ser usadas para obter os triângulos construídos em (2) e (3) a partir do primeiro triângulo?

f) É possível construir um triângulo com as dimensões dadas que não seja congruente a estes?

2) Providencie três tiras de cartolina com comprimentos distintos, que formem um triângulo. Prenda as tiras duas a duas nas pontas com alfinetes ou tachas, formando um triângulo.

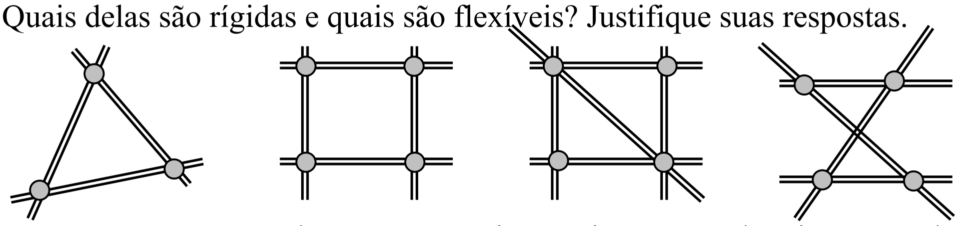
a) Tente mover as tiras, para mudar a forma do triângulo. O que você observou?

b) Construa agora uma estrutura com quatro tiras de cartolina unidas duas a duas pelas pontas sem que elas se cruzem, e tente mudar sua forma, movendo a estrutura. O que você observou?

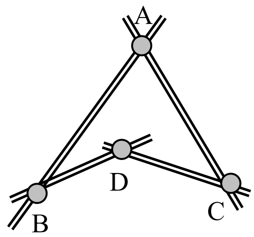
c) Procure exemplos em que a rigidez do triângulo é utilizada no nosso cotidiano.

3) As estruturas abaixo foram construídas com tiras de madeira e pinos.

a) Quais delas são rígidas e quais são flexíveis? Justifique suas respostas.



b) O que acontece se colocarmos um pino na interseção das tiras cruzadas na última estrutura?



c) Uma pessoa precisou construir uma estrutura com a forma ao lado.
Pode-se garantir que ela ficará rígida? E se ligarmos os vértices B e C?
Sua resposta muda se ligarmos A e D?

4) Construa, usando régua e transferidor, um triângulo com ângulos medindo 40º, 60º e 80º.

a) Você consegue construir outro triângulo, com as mesmas condições dadas, que não possa coincidir com o primeiro?

b) O que há de comum entre os dois triângulos construídos?

c) O que se pode concluir sobre dois triângulos que possuem os ângulos respectivamente congruentes?

5) Construa, usando régua e transferidor, um triângulo com um lado de 6 cm e um ângulo de 60º.

a) Todos os triângulos com essas características têm a mesma forma?
b) Tente construir outro triângulo com as características dadas, que não seja congruente ao que você já construiu.

6) Usando régua e compasso, construa um triângulo com lados medindo 5 cm e 6 cm.

a) Construa outro triângulo com dois lados com essas mesmas medidas, mudando a medida do ângulo formado por eles.
b) Os dois triângulos são congruentes?
c) O que você pode concluir sobre dois triângulos que possuem apenas dois lados respectivamente congruentes?

7) Construa um triângulo ABC com lados AB = 5 cm, AC = 6 cm, e ângulo $\hat{A}$ = 50º.

a) Desenhe outro triângulo DEF com dois lados medindo 5 cm e 6 cm e o ângulo entre eles medindo 50º.
b) Compare os triângulos ABC e DEF, e verifique se eles são congruentes.
c) É possível construir um triângulo com essas características que não seja congruente ao triângulo ABC?

8) Construa um triângulo com ângulos de 40º e 80º, de modo que o lado comum a esses ângulos meça 5 cm.

a) É possível construir um triângulo com essas características que não seja congruente ao triângulo construído?
b) O que você pode concluir sobre dois triângulos que possuem essas características ?

9) Registre na tabela abaixo as conclusões a que você chegou sobre os triângulos construídos nas atividades 1 e de 4 a 8:

	Atividade 1	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8
Nº de lados dados						1
Nº de ângulos dados						2
Ordem em que os elementos conhecidos aparecem						ALA
O triângulo está bem determinado?						sim

Observe que apenas os triângulos construídos nas atividades 1, 7 e 8 ficaram bem determinados. Isto significa que todos os triângulos com as características dadas em cada uma dessas atividades serão congruentes entre si. Ou seja, não é possível construir um triângulo não congruente a eles com essas mesmas características.

O resultado das atividades 8, 14 e 15 nos mostra que nem sempre é necessário verificar a congruência dos seis pares de elementos correspondentes nos dois triângulos. Basta verificar a congruência de três pares de elementos correspondentes, exatamente os três pares de elementos dados nas construções dessas atividades.

Esses três casos constituem condições suficientes para garantir a congruência de dois triângulos. Esses casos são chamados de ***casos de congruência de triângulos***:

1º caso (LLL): Dois triângulos que têm os três lados respectivamente congruentes são congruentes.

2º caso (LAL): Dois triângulos que têm dois lados e o ângulo formado por esses lados respectivamente congruentes são congruentes.

3º caso (ALA): Dois triângulos que têm um lado e os ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

Palavras-chave: isometrias – ensino dinâmico - geometria

Referências:

MEC (1977): Parâmetros Curriculares Nacionais.

Nasser, L. (1992): *Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil.* Tese de doutorado apresentada na Universidade de Londres, Inglaterra.

Nasser, L. (1994): *Usando a teoria de van Hiele para melhorar o ensino secundário de Geometria no Brasil*: Eventos (INEP), nº 4, 2ª parte.

Nasser, L e Sant'Anna, N.P. (1997): *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Projeto Fundão – UFRJ.

Nasser, L. e Tinoco, L. (coord.) (2003): Curso Básico de Geometria – enfoque didático. Vol. 2: Visão dinâmica da Congruência de Figuras. Projeto Fundão – UFRJ.