



NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA ANALÍTICA: QUANTOS EXEMPLOS BASTAM PARA PROVAR UM TEOREMA?

Humberto José Bortolossi, UESC, hjbortol@uesc.br

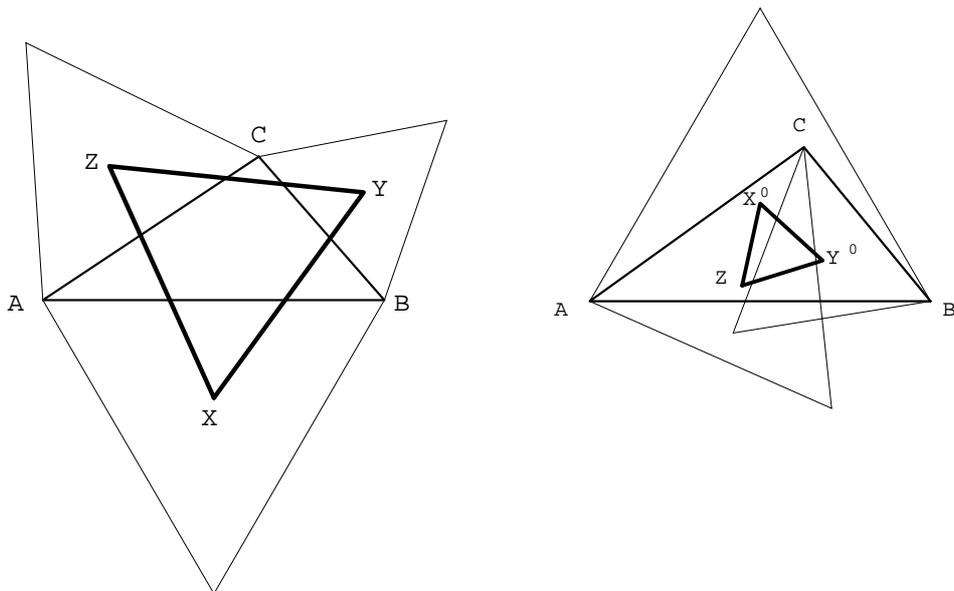
Silvana Marini Rodrigues Lopes, PUC-Rio, silvana@mat.puc-rio.br

Carlos Tomei, PUC-Rio, tomei@mat.puc-rio.br

O TEOREMA DE NAPOLEÃO

Nosso primeiro exemplo é o teorema de Napoleão. Começamos com os enunciados clássicos. Dado um triângulo ΔABC qualquer, construa triângulos equiláteros apoiados externamente sobre cada um de seus lados. O *triângulo externo de Napoleão* é obtido unindo-se os baricentros X , Y e Z destes triângulos (figura 1). Se, por outro lado, os triângulos equiláteros são construídos internamente a ΔABC , seus baricentros X' , Y' e Z' formam o *triângulo interno de Napoleão* (figura 1).

Teorema 1. *Os triângulos externo e interno de Napoleão de qualquer triângulo são equiláteros.*



O triângulo externo de Napoleão

O triângulo interno de Napoleão

Figura 1.

O teorema é atribuído a Napoleão Bonaparte (1769-1821), embora não haja evidências de que seja ele o autor do mesmo (SCRIBA, 1980). A referência mais antiga que relaciona Napoleão com este teorema é o livro (FAIFOER, 1911).

O teorema tem um enunciado simples, mas sua demonstração não o é: não se espera que um aluno do ensino médio seja capaz de obtê-la. O teorema e suas extensões foram tratados com técnicas de geometria sintética (COXETER; GREITZER, 1967), variáveis complexas (HAHN, 1994), álgebra linear (YAGLOM, 1973), trigonometria (BRODIE; LAMBROU, 2000), análise harmônica (PECH, 2001), geometria discreta (RIGBY, 1988) e geometria mecanizada (CHOU; GAO; ZHANG, 1998). Nosso ponto de vista é ainda outro, bastante elementar.

Quando A , B e C são colineares, a construção dos triângulos de Napoleão não faz sentido. Faremos, agora, uma construção semelhante que permite enunciar o teorema para quaisquer vértices A , B e C e que unifica os casos interno e externo. Sejam dados três pontos A , B e C , no plano. Gire de 60° no sentido anti-horário o segmento AB em torno do vértice B , o segmento BC em torno de C e CA em torno de A , obtendo os pontos P , Q e R , vértices dos triângulos equiláteros $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle ACR$, respectivamente. Chamaremos o *triângulo de Napoleão obtido por rotações* ou, mais simplesmente, o *triângulo de Napoleão*, aquele obtido pela união dos baricentros X , Y e Z desses três triângulos equiláteros. O triângulo de Napoleão agora está bem definido para quaisquer pontos A , B e C , inclusive quando eles são colineares ou coincidentes (figura 2).

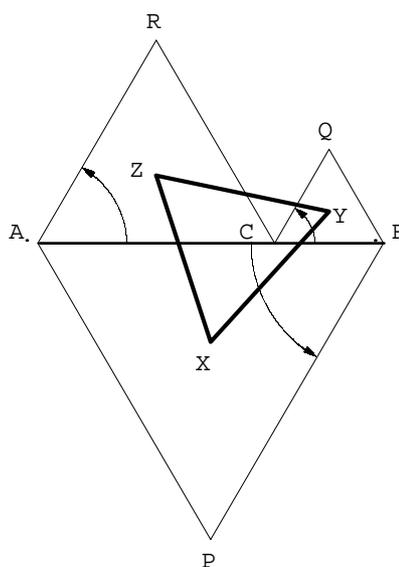


Figura 2.

Quando os vértices A, B e C estão dispostos no sentido *anti-horário*, o triângulo de Napoleão obtido por rotações coincide com o triângulo *externo* de Napoleão e, quando os vértices A, B e C estão dispostos no sentido *horário*, o triângulo de Napoleão obtido por rotações coincide com o triângulo *interno* de Napoleão (figura 3).

Teorema 2. *O triângulo de Napoleão é equilátero.*

Rotações no plano são fáceis de descrever em notação complexa: isso simplifica em muito as contas, como veremos.

Demonstração do teorema 2 (usando números complexos).

Desenhe o triângulo ΔABC no plano complexo, de forma que o vértice A esteja na origem e B em 1. Seja z o número complexo associado ao vértice C (figura 4). Como P é obtido a partir da rotação de $\pi/3$ no sentido anti-horário do vértice A em torno de B , podemos escrever

$$P = (A - B) e^{\pi i/3} + B = 1 - e^{\pi i/3}.$$

Analogamente, temos que

$$Q = (B - C) e^{\pi i/3} + C = (1 - z) e^{\pi i/3} + z \quad \text{e} \quad R = (C - A) e^{\pi i/3} + A = z e^{\pi i/3}.$$

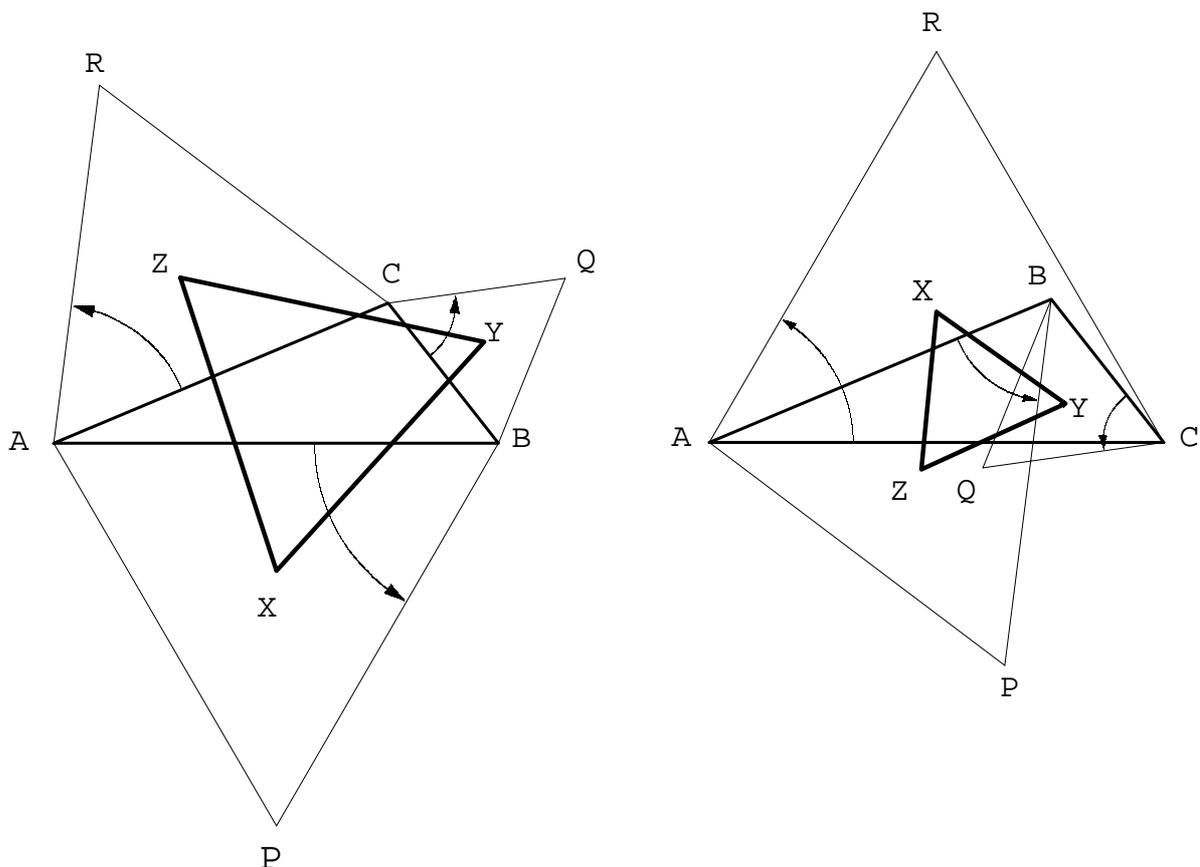


Figura 3.

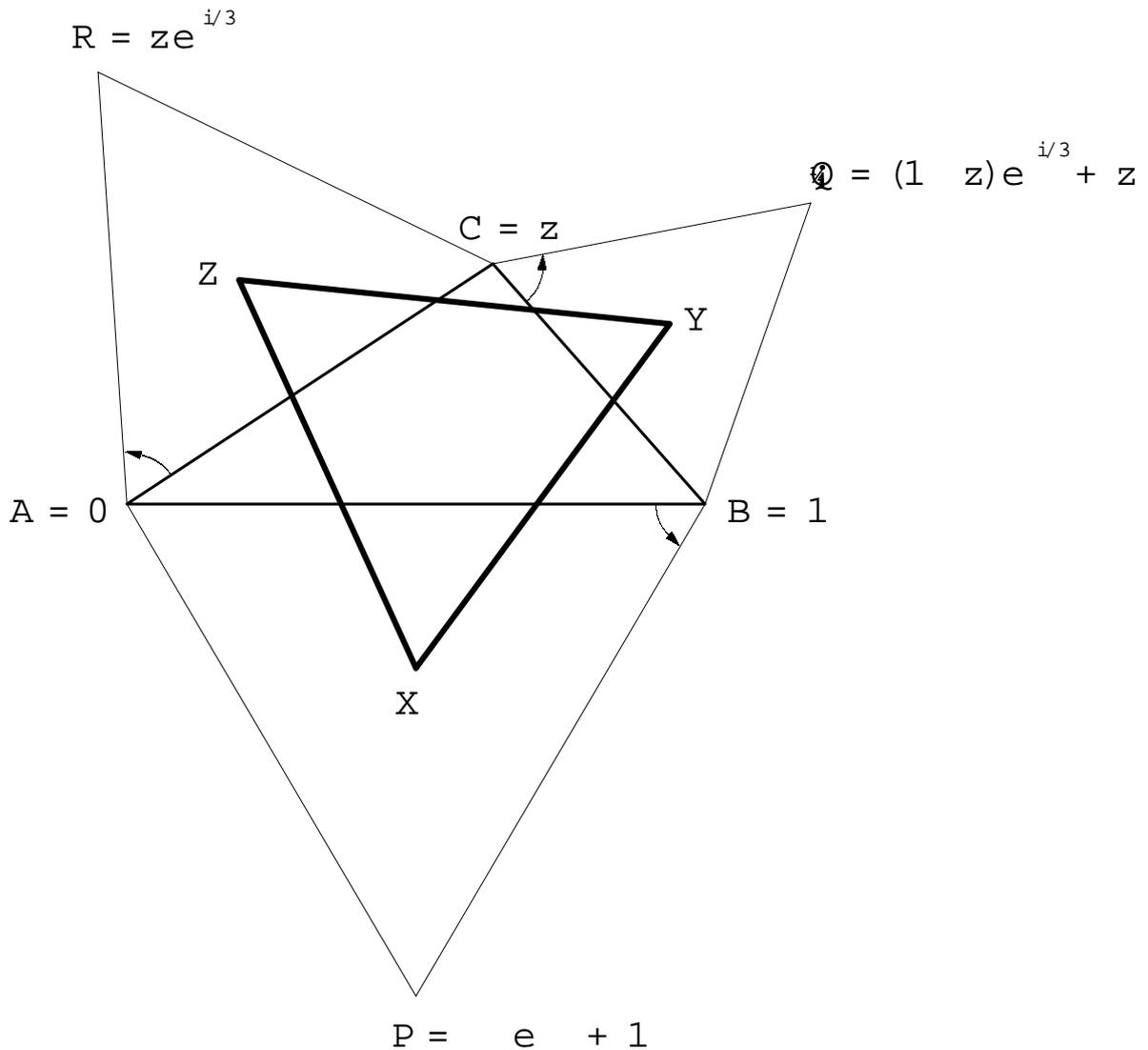


Figura 4.

Desta maneira, concluímos que as coordenadas de X , Y e Z são dadas por

$$X = (A + B + P)/3 = (2 - e^{\pi i/3})/3,$$

$$Y = (B + C + Q)/3 = ((2 - e^{\pi i/3}) + 1 + e^{\pi i/3})/3 e$$

$$Z = (C + A + R)/3 = (1 + e^{\pi i/3}) z/3.$$

Queremos mostrar que o triângulo de Napoleão ΔXYZ é equilátero. Para isso, basta verificarmos que Y é a rotação de $\pi/3$ de X em torno de Z :

$$Y = (X - Z) e^{\pi i/3} + Z.$$

Em termos da variável z , devemos então verificar que

$$(1 - e^{\pi i/3} + e^{2\pi i/3}) z + (1 - e^{\pi i/3} + e^{2\pi i/3}) = 0.$$

Mas isto segue imediatamente da identidade $1 - e^{\pi i/3} + e^{2\pi i/3} = 0$. □

As contas acima são mais simples do que as necessárias para uma demonstração por geometria analítica, e, como veremos, elas são até dispensáveis! De fato, como vimos, todos os pontos envolvidos no teorema podem ser escritos como *funções afins* de z , isto é, que os números complexos relevantes são da forma

$$az + b,$$

com a e b constantes complexas.

Nova demonstração do teorema 2 (limitando a complexidade algébrica).

Mais uma vez, como na figura 4, o triângulo inicial $\triangle ABC$ está no plano complexo com os vértices A , B e C em 0 , 1 e z (qualquer). No plano complexo, girar um número em torno da origem é o mesmo que multiplicar este número por uma constante complexa de módulo 1; girar em torno de um ponto qualquer é uma operação afim. Assim, os números complexos associados aos vértices P , Q e R são expressões afins em z , pois são rotações dos números complexos 0 , 1 e z em torno de 1 , z e 0 , respectivamente. Os vértices X , Y e Z também são expressões afins em z , pois são médias aritméticas de expressões afins.

Para ver que o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero, verificaremos que Y pode ser obtido através da rotação no sentido anti-horário de $\pi/3$ do vértice X em torno de Z , ou seja, que $Y = (X - Z)e^{\pi i/3} + Z$, ou ainda, que

$$Y - (X - Z)e^{\pi i/3} - Z = 0.$$

Como X , Y e Z são expressões afins em z , devemos então mostrar que uma certa expressão afim em z (um mero polinômio de grau 1!) é zero para *qualquer valor* de z .

Para isto basta encontrarmos dois valores de z que são raízes desta expressão afim. Por exemplo, os valores

$$z = e^{\pi i/3} \quad \text{e} \quad z = -e^{\pi i/3},$$

cujas configurações geométricas correspondentes são mostradas na figura 5. □

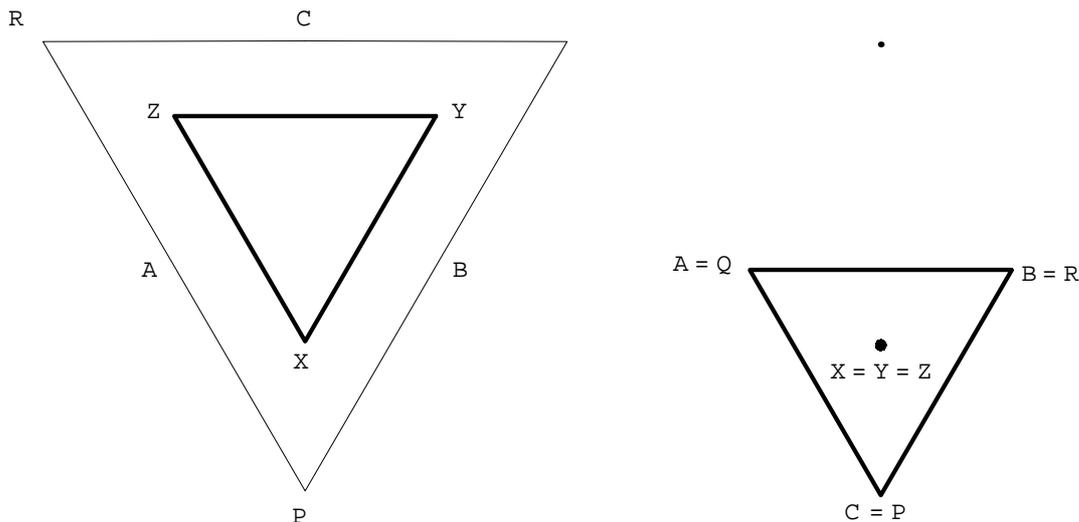


Figura 5.

A demonstração do teorema de Napoleão dada acima sugere uma técnica de demonstração de teoremas em geometria: obtém-se um polinômio que é identicamente nulo se, e somente se, o teorema é verdadeiro, e identifica-se um número suficiente de situações para o qual é o teorema é obviamente correto. Assim, o grau do polinômio pode ser tomado como uma medida da *complexidade algébrica* do teorema, estimando além disso o número de casos particulares necessários para a sua demonstração. Ao teorema de Napoleão, por exemplo, conseguimos associar um polinômio de grau 1 e, então, com apenas dois exemplos (banais), provamos o caso geral! Vejamos agora outros exemplos do uso desta técnica.

Propriedade 1. *Os triângulos de Napoleão externo e interno têm o mesmo baricentro, que coincide com o do triângulo inicial.*

Demonstração. Considere a configuração da figura 4. Os baricentros dos triângulos externo e interno de Napoleão do triângulo inicial são expressões afins em z . Ver que este baricentros coincidem também resulta em uma equação afim. Assim, para verificarmos a propriedade, basta exibirmos duas configurações desta propriedade. Considere, por exemplo, aquelas indicadas na figura 5. □

Propriedade 2. *A diferença entre as áreas dos triângulos externo e interno de Napoleão é igual a área do triângulo inicial.*

Demonstração. Novamente, considere a configuração da figura 4, onde $A = 0$, $B = 1$ e $C = z$. Já vimos que os triângulos externo e interno de Napoleão são equiláteros e que seus vértices são expressões afins em z .

Se l e l' são os lados destes triângulos, respectivamente, então podemos escrever

$$l = \|\alpha z + \beta\| \quad \text{e} \quad l' = \|\delta z + \gamma\|, \quad \text{onde } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Se X, Y e Z são os vértices do triângulo externo de Napoleão e X', Y', Z' são os vértices do triângulo interno de Napoleão (figura 1), então

$$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$\text{área}(\Delta XYZ) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\alpha z + \beta\|^2 \quad \text{e} \quad \text{área}(\Delta X'Y'Z') = \frac{\sqrt{3}}{4} l'^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\delta z + \gamma\|^2.$$

Queremos mostrar que $\text{área}(\Delta ABC) = \text{área}(\Delta XYZ) - \text{área}(\Delta X'Y'Z')$, isto é, que

$$\frac{1}{2} \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\sqrt{3}}{4} \|\alpha z + \beta\|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \|\delta z + \gamma\|^2.$$

Desenvolvendo esta equação, chegamos à seguinte expressão em z e \bar{z} :

$$(\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\alpha})z\bar{z} + \left(\delta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} - \frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)z + \left(\gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} + \frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)\bar{z} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} = 0,$$

de modo que a propriedade 2 é verdadeira se, e somente se, a expressão

$$P(z) = (\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\alpha})z\bar{z} + \left(\delta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta} - \frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)z + \left(\gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} + \frac{4\sqrt{3}i}{3}\right)\bar{z} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}$$

é igual a zero para todo $z \in \mathbb{C}$.

Observe que P é um polinômio de grau 2 nas variáveis $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$. Na verdade, esse resultado pode ser deduzido sem fazer contas (por quê mesmo?). As contas dizem mais: $P(z) = 0$ é a equação de um círculo, em notação complexa. Sabemos que existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares. Portanto, se encontrarmos quatro raízes de P que não estão em uma mesma circunferência (isto é, quatro configurações geométricas para as quais a propriedade 2 é verdadeira) então, obrigatoriamente, $P(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Para isto, basta considerar as quatro configurações da figura 6, correspondentes aos valores $z = 0$, $z = 1$, $z = e^{\pi i/3}$ e $z = -e^{\pi i/3}$, respectivamente. \square

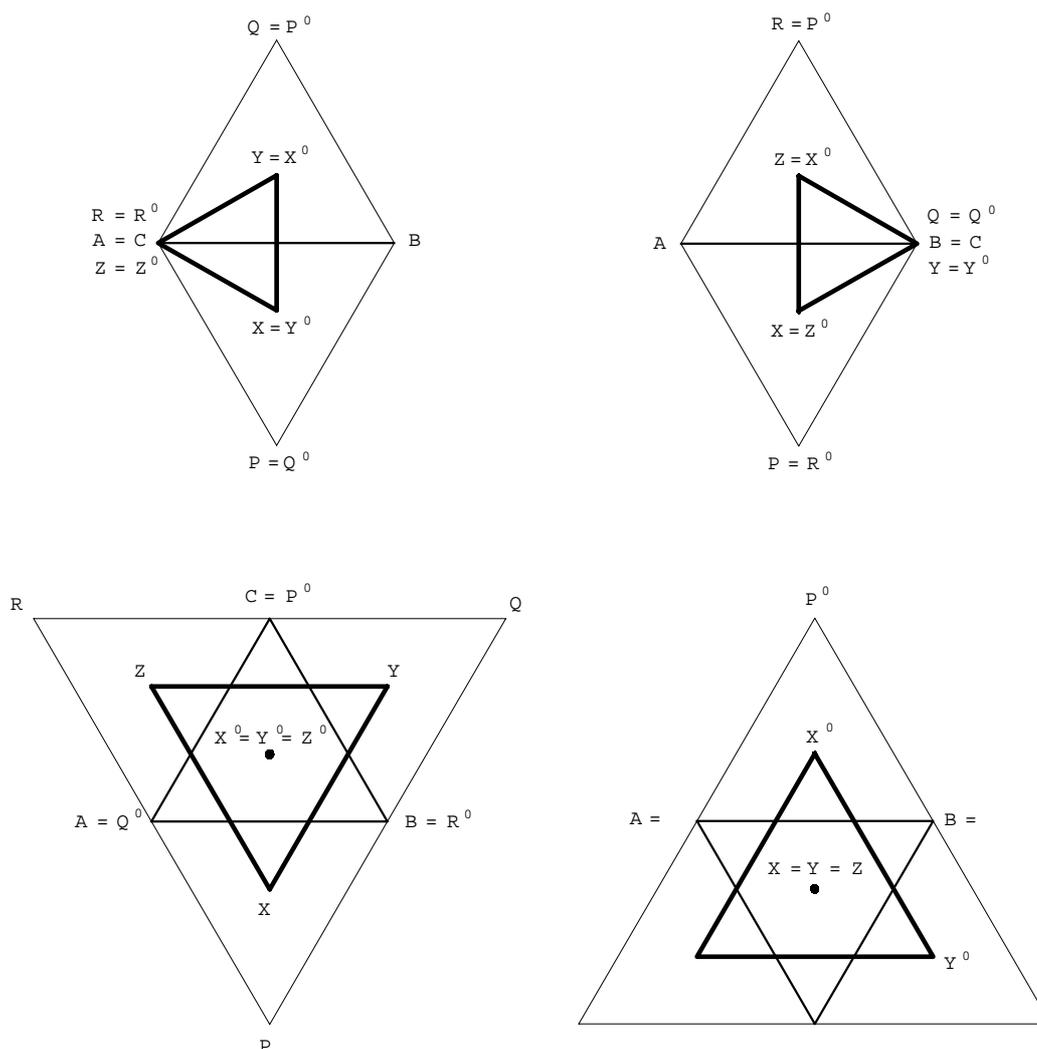


Figura 6.

Propriedade 3. Na configuração de Napoleão, as retas que unem os vértices P , Q e R dos triângulos equiláteros aos vértices opostos do triângulo inicial ΔABC se encontram em um único ponto I . Além disso, as retas fazem 60° entre si, e os segmentos AQ , BR e CP têm o mesmo comprimento.

Demonstração. O fato que os segmentos AQ e BR têm o mesmo comprimento e se encontram fazendo 120° segue do fato que, em notação complexa, $R - B$ é uma rotação de 120° de $Q - A$. Como nos exemplos acima, é fácil ver que esta é uma propriedade afim: dois exemplos em que ela se verifica são óbvios (os da figura 5).

Para demonstrar a afirmação que falta, considere desta vez o triângulo ΔABC no plano cartesiano \square^2 , de forma que seus vértices tenham coordenadas reais, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (x, y)$ qualquer. É fácil ver que, mais uma vez, as coordenadas de P , Q e R

são expressões afins em x e y , isto é, elas são da forma $\alpha x + \beta y + \gamma$, com α, β, γ constantes reais. Sobre o ponto P sabemos um pouco mais: suas coordenadas são constantes. Portanto, podemos escrever $P = (a, b)$ e, usando a notação afim para indicar uma expressão afim nas variáveis x e y , $Q = (\text{afim}, \text{afim})$ e $R = (\text{afim}, \text{afim})$ (figura 7).

$$R = (\text{afim}, \text{afim})$$

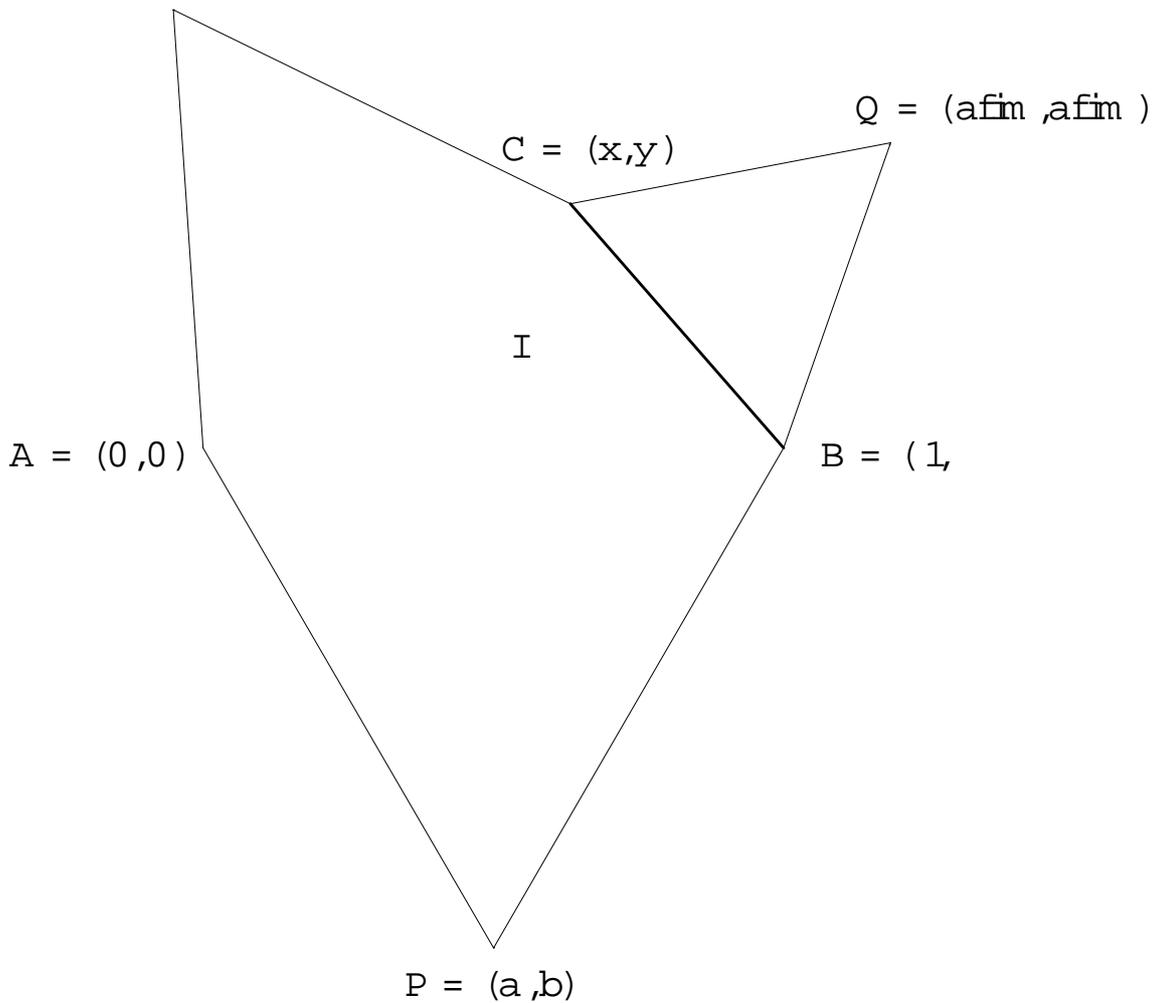


Figura 7.

Em termos das seguintes parametrizações das retas AQ , BR e CP ,

$$r \mapsto A + r(Q - A) = (0,0) + r(\text{afim}, \text{afim}),$$

$$s \mapsto B + s(R - B) = (1,0) + s(\text{afim} - 1, \text{afim}) = (1,0) + s(\text{afim}, \text{afim}),$$

$$t \mapsto P + t(C - P) = (a,b) + t(\text{afim} - a, \text{afim} - b) = (a,b) + t(\text{afim}, \text{afim}),$$

vemos que elas se interceptam em um mesmo ponto I se, e somente se, existem valores de r, s e t tais que

$$(0,0) + r(\text{afim}, \text{afim}) = (1,0) + s(\text{afim}, \text{afim}),$$

$$(0, 0) + r(\text{afim}, \text{afim}) = (a, b) + t(\text{afim}, \text{afim}),$$

ou ainda, que existem valores de r, s e t que satisfazem a seguinte equação matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \text{afim} & \text{afim} & 0 \\ 0 & \text{afim} & \text{afim} & 0 \\ a & \text{afim} & 0 & \text{afim} \\ b & \text{afim} & 0 & \text{afim} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mas a fim de que $(1, r, s, t)$ seja uma solução *não trivial* do sistema linear homogêneo definido pela matriz M , devemos ter que

$$\det(M) = 0.$$

Por outro lado, o determinante de qualquer matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \\ \text{constante} & \text{afim} & \text{afim} & \text{afim} \end{pmatrix}$$

é um polinômio nas variáveis x e y do tipo

$$p(x, y) = \alpha(x) y^3 + \beta(x) y^2 + \gamma(x) y + \delta(x),$$

onde α, β, γ e δ são polinômios na variável x .

Assim sendo, se mostrarmos que $p(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \square^2$, teremos então estabelecido que a propriedade 3 é verdadeira. Faremos isto usando a técnica de provar a partir de casos particulares. Para a propriedade 3, a configuração geométrica evidente é aquela onde o triângulo inicial ΔABC é isósceles (figura 8).

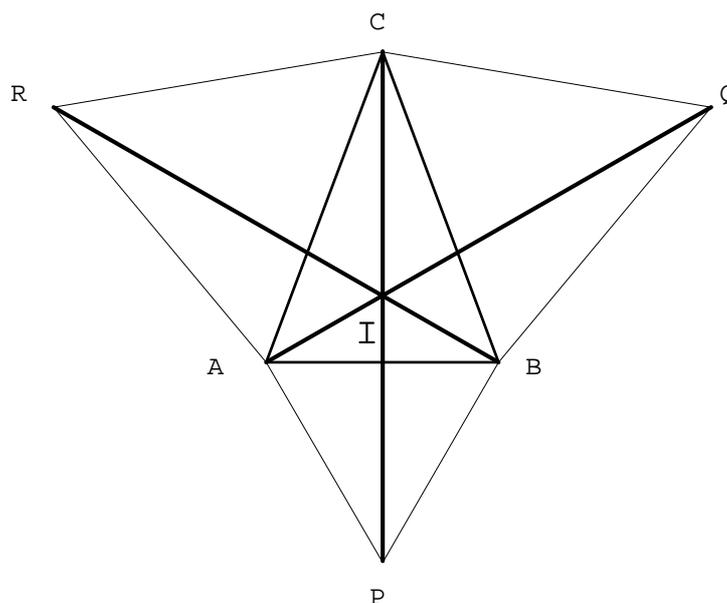


Figura 8.

Fixe agora $x = x_0$ no intervalo $(0, 1/2)$, conforme a figura 9. Se escolhermos C como sendo um dos pontos (x_0, y_1) , (x_0, y_2) , (x_0, y_3) e (x_0, y_4) , obtidos a partir da interseção da reta $x = x_0$ com os círculos de raio 1 e centro em $(0, 0)$ e $(1, 0)$, veremos que o triângulo ΔABC correspondente será isósceles.

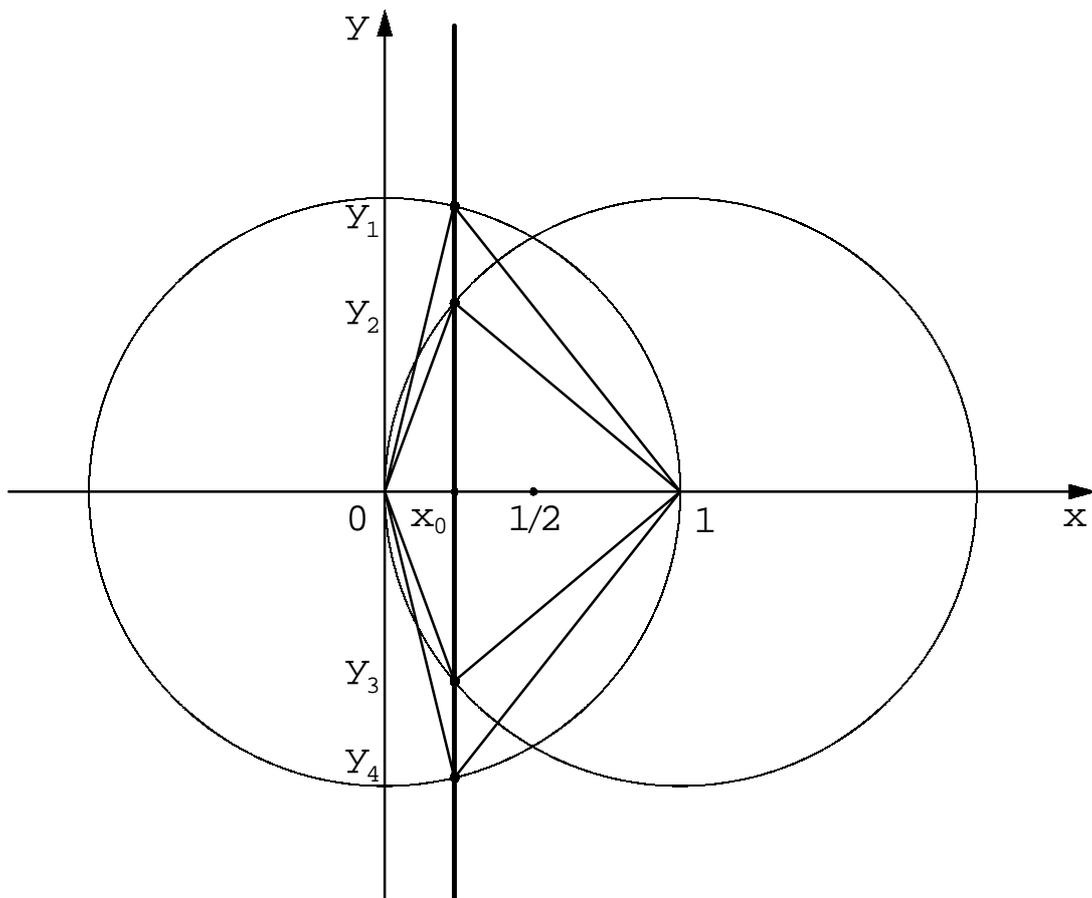


Figura 9.

Desta maneira, segue-se que y_1, y_2, y_3 e y_4 são quatro raízes distintas do polinômio

$$q(y) = p(x_0, y) = \alpha(x_0) y^3 + \beta(x_0) y^2 + \gamma(x_0) y + \delta(x_0).$$

Como q tem grau 3, vemos que $q(y) = p(x_0, y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Mas se isto acontece, então $\alpha(x_0) = \beta(x_0) = \gamma(x_0) = \delta(x_0) = 0$. Uma vez que x_0 é um ponto qualquer no intervalo $(0, 1/2)$ e α, β, γ e δ são polinômios, segue-se que

$$\alpha(x) = \beta(x) = \gamma(x) = \delta(x) = 0,$$

para todo $x \in \square$. Conseqüentemente, $p(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \square^2$, como queríamos demonstrar. \square

A GENERALIZAÇÃO DE BARLOTTI

Uma pergunta natural é se a construção e as conclusões sugeridas pelo teorema de Napoleão podem ser generalizadas para outros polígonos além do triângulo. Mais precisamente, queremos saber se os baricentros dos n -ângulos regulares construídos (externamente ou internamente) sobre cada um dos lados de um dado n -ângono formam, por sua vez, um outro n -ângono regular. A resposta é não, já para $n = 4$, como mostra a figura 10.

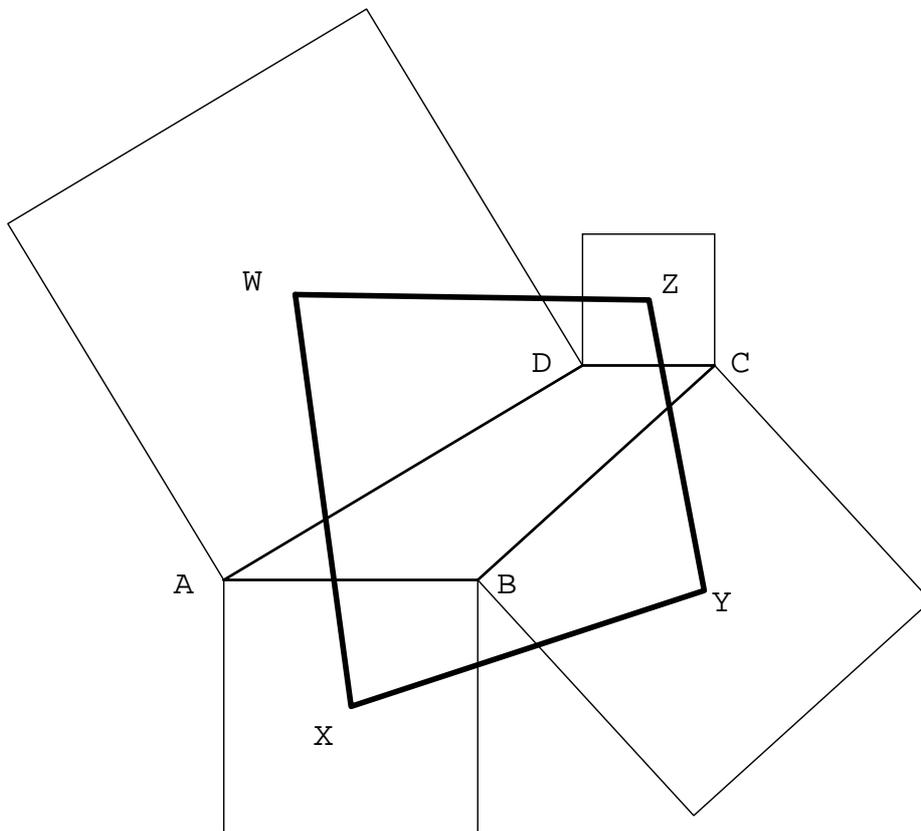


Figura 10.

Contudo, ainda com relação ao caso $n = 4$, Thébault (THÉBAULT, 1937) demonstrou que para um *paralelogramo*, os baricentros dos quadrados construídos (externamente ou internamente) sobre cada um de seus lados formam *sempre* um outro quadrado (figura 11).

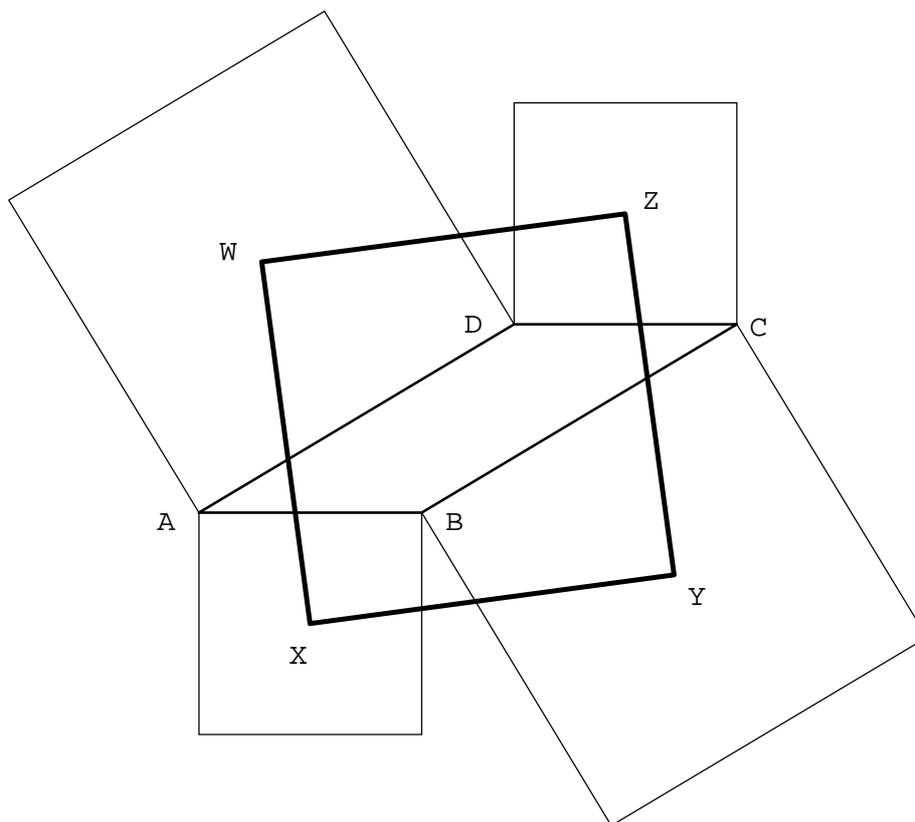


Figura 11.

Tanto o triângulo quanto o paralelogramo são exemplos de polígonos *regulares afins*, isto é, polígonos que podem ser escritos como a imagem por uma transformação afim de um n -ágono regular. A. Barlotti mostrou que a propriedade de regularidade afim é suficiente para se obter uma generalização dos teoremas de Napoleão e de Thébault para outros tipos de polígonos.

Teorema 3. *Sejam P_n um n -ágono qualquer e Q_n o n -ágono cujos vértices são os baricentros dos n -ângulos regulares construídos (todos externamente ou todos internamente) sobre cada um dos n lados de P_n . Se P_n é regular afim, isto é, se P_n é a imagem por uma transformação afim de um n -ágono regular, então Q_n é regular.*

Barlotti apresentou sua generalização em 1955, usando trigonometria no plano complexo para justificá-la (BARLOTTI, 1955). Desde então, várias alternativas de demonstração foram sugeridas: (GERBER, 1980) usando trigonometria, (RUOFF; SHILLETTO, 1978) usando polígonos recursivos, (FISHER; RUOFF; SHILLETTO, 1985) usando análise de Fourier e formas hermitianas.

Daremos a seguir uma demonstração cotando a complexidade algébrica do resultado. Mais precisamente, vamos mostrar que a generalização de Barlotti é associada a uma expressão afim. Desta maneira, como no caso do teorema de Napoleão, duas configurações geométricas (onde a generalização de Barlotti é claramente verdadeira) serão suficientes para estabelecer o resultado no caso geral.

Demonstração do teorema 3. Como a propriedade de um n -ágono ser regular é invariante por translações, rotações e homotetias, basta considerar os casos em que P_n é a imagem por uma *transformação linear* $T: \square \rightarrow \square$ (sobre o corpo dos reais) do n -ágono regular R_n cujos vértices são as n -ésimas raízes da unidade $1, w^1, \dots, w^{n-1}$.

A partir desta observação, é fácil de ver que a generalização de Barlotti é equivalente a seguinte sentença: *para cada transformação linear* $T: \square \rightarrow \square$, os baricentros dos n -ágonos regulares construídos sobre os lados de $P_n = T(R_n)$ formam um n -ágono Q_n regular. Vamos apresentar uma demonstração deste resultado supondo que T é uma transformação linear inversível. Uma vez feito isto, o caso em que T não é inversível seguirá por continuidade.

Se T é inversível, então podemos supor que $T(1) = 1$. Toda transformação linear deste tipo fica completamente identificada pelo seu valor z em i : $T(i) = z$. Sendo assim, para estabelecer o resultado, devemos mostrar que *para cada* $z \in \square$, os centros $O_1(z), O_2(z), \dots, O_{n-1}(z)$ dos n -ágonos regulares construídos sobre os lados do n -ágono de vértices $T(1), T(w^1), \dots, T(w^{n-1})$ formam, por sua vez, um outro n -ágono regular (figura 12).

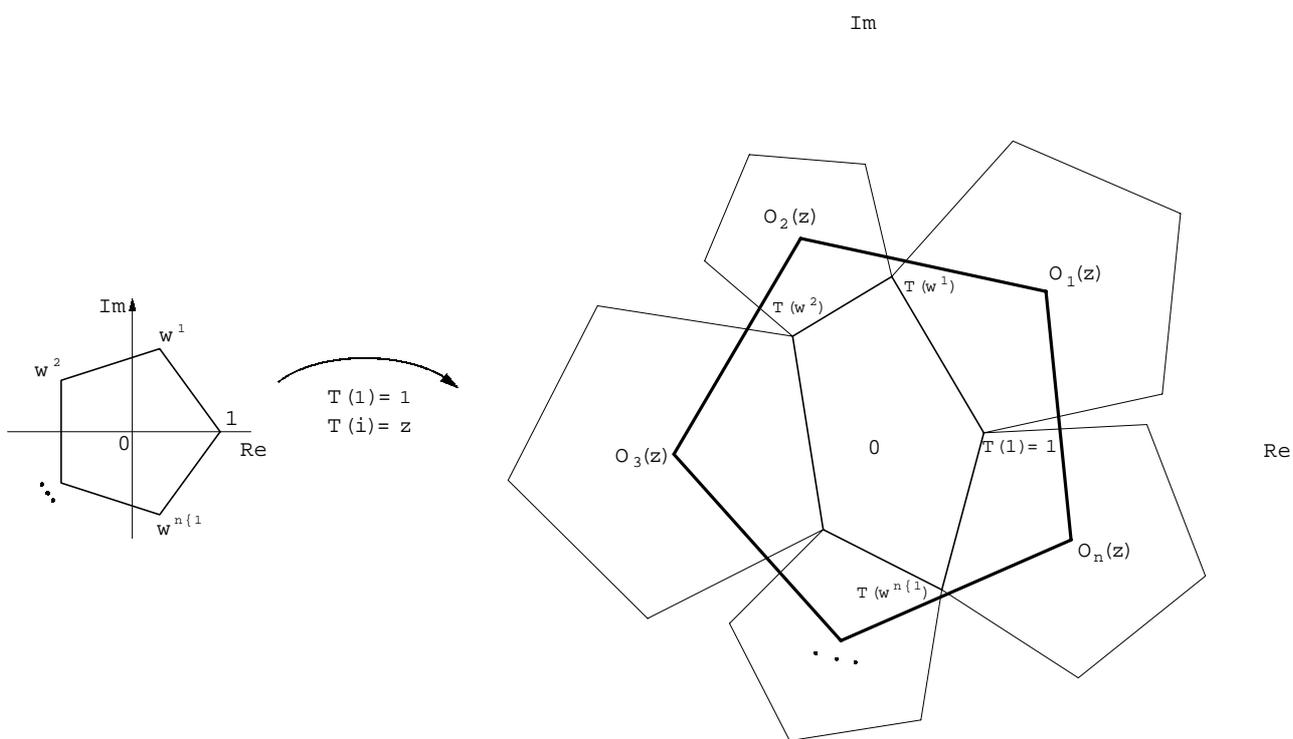


Figura 12.

Em termos algébricos, precisamos verificar que

$$O_{j+1}(z) - O_j(z) e^{2\pi i/n} = 0 \quad (*)$$

para cada $z \in \square$ e para cada $j = 1, \dots, n$. Mas cada centro $O_j(z)$ é uma expressão afim em z , dado que cada vértice $T(w^j)$ também é uma expressão afim em z , pois se $w^j = a_j + b_j i$, então

$$T(w^j) = T(a_j + b_j i) = a_j T(1) + b_j T(i) = a_j + b_j z.$$

Desta maneira, duas soluções particulares z_1 e z_2 da equação (*) (isto é, duas escolhas de transformações lineares para as quais a generalização de Barlotti é verdadeira) são suficientes para estabelecer o resultado no caso geral. Basta tomar, por exemplo, $z_1 = i$ (quando T é a identidade) e $z_2 = -i$ (quando T é a reflexão com relação ao eixo real). \square

OBSERVAÇÕES FINAIS

O que a técnica que descrevemos acima mostra é que cabe ao professor escolher entre duas alternativas: ou induzir o aluno a buscar um argumento geral (que é o que se faz habitualmente), ou pedir para que ele considere o problema de contar quantos exemplos são necessários para que o resultado geral seja uma consequência deles – nesse caso, poucos exemplos demonstram o caso geral!

Geometria analítica é freqüentemente apresentada como uma panacéia universal: problemas em geometria convertem-se em contas, ainda que enfadonhas. A afirmação entretanto é passível de crítica, e seria interessante apresentar essa opinião em sala de aula. Para começar, as contas, como descritas nos cursos em geral, não são as mais adequadas (evidência de que ninguém realmente resolve problemas dessa maneira). Mais, a maioria das contas pode ser literalmente *evitada*, como mostra o argumento que cota a complexidade algébrica de um problema. O tema abre muitas possibilidades didáticas: exemplos abundam no currículo escolar de geometria.

A escolha de exemplos no texto acima foi motivada para mostrar ainda um pequeno conjunto de técnicas de cálculo, entre elas, fórmulas para área de um triângulo se os vértices são dados como números complexos, a equação do círculo em notação complexa, o uso de transformações lineares no plano. É evidente que poucos alunos seriam capazes de usar confortavelmente todos estes recursos, mas o objetivo é mostrar a alunos e professores a riqueza de conexões e estruturas em assuntos já tão batidos. Idéias desse tipo são fundamentais em pesquisas contemporânea em geometria: robótica, demonstradores automáticos de teoremas. Um exemplo tradicional de aplicação de geometria em robótica é o *problema da mudança do piano*. Como fazer para que um robô en-

contre, a partir da disposição dos móveis em uma sala (que ele obtém por uma câmera), um caminho para levar um piano sem danificar móveis e piano?

Usando o programa de computador *Geometry Expert* (CHOU; GAO; ZHANG, 2002), Chou demonstrou automaticamente cerca de 366 problemas extraídos de um livro típico de geometria do ensino médio (ALTSCHILLER-COURT, 1952). A estatística foi a seguinte: 219 deles são lineares e os demais são quadráticos, no sentido que os polinômios em várias variáveis obtidos na conversão do contexto geométrico para o contexto algébrico são tais que, considerando-se uma variável de cada vez, apenas polinômios de grau no máximo igual a 1 e 2 aparecem, respectivamente. Um problema de geometria de grau 3 (que não é estudado no ensino médio) é o teorema de Morley: os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos de um triângulo qualquer formam sempre um triângulo equilátero. Com este levantamento, Chou também propôs uma classificação do nível de dificuldade dos teoremas de geometria em termos dos vários tipos de construções geométricas envolvidas: colinearidade, paralelismo, proporcionalidade, perpendicularidade, círculo, ângulo, em ordem crescente de dificuldade.

Palavras-chave: interdisciplinaridade, geometria, álgebra.

BIBLIOGRAFIA

- ALTSCHILLER-COURT, N. *College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools*. Barnes & Noble, Inc., 1952.
- BARLOTTI, A. *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -gono regolare*. Bollettino della Unione Matematica Italiana, vol. 10, no. 3, pp. 96-98, 1955.
- BRODIE, S., LAMBROU, M. *Napoleon's Theorem*. Internet WEB link: <http://www.cut-the-knot.com/proofs/napoleon.shtml>, 2000.
- CHOU, S.-C. *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Dordrecht Reidel Publishing Company, 1988.
- CHOU, S.-C., GAO X.-S., ZHANG, J.-Z. *Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems*. World Scientific Publishing, 1998.
- CHOU, S.-C., GAO X.-S., ZHANG, J.-Z. *Geometry Expert*. Internet WEB link: <http://www.mmrc.iss.ac.cn/~xgao/gex.html>, 2002.

- FAIFOFER, A. *Elementi di Geometria*, décima sétima edição, 1911.
- FISHER, J. C.; RUOFF, D.; SHILLETTO, J. *Perpendicular Polygons*. *The American Mathematical Monthly*, vol. 92, no. 1, pp. 23-37, 1985.
- GERBER, L. *Napoleon's Theorem and Parallelogram Inequality for Affine-Regular Polygons*. *The American Mathematical Monthly*, vol. 87, pp. 644-648, 1980.
- HAHN, L. S. *Complex Numbers & Geometry*. Spectrum Series, MAA, 1994.
- LAISANT, C. A. *Sur quelques propriétés des polygones*. *Compte rendu: Association Française pour l'Avancement des Sciences*, pp. 142-154, 1877.
- PECH, P. *The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem*. *Journal of Geometry and Graphics*, vol. 5, no. 1, pp. 13-22, 2001.
- RIGBY, J. F. *Napoleon Revisited*. *Journal of Geometry*, vol. 33, pp. 129-146, 1988.
- RUOFF, D.; SHILLETTO, J. *Recursive Polygons*. *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, vol. 15- B, no. 5, pp. 968-981, 1978.
- SCRIBA, C. J. *Wie kommt "Napoleon Satz" zu seinem Namen?* *Historia Mathematica*, vol. 8, pp. 458-459, 1980.
- THÉBAULT, V. *Solution to Problem 169*. *National Mathematics Magazine*, vol. 12, pp. 192-194, 1937-38.
- TURNER, G. *Elementi di Geometria*, vol.-I, 1843.
- YAGLOM, I. M. *Geometric Transformations I*. New Mathematical Library, MAA, 1973.