Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

ANÁLISE COMBINATÓRIA: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Cristiane Maria Roque Vazquez
UNESP - Rio Claro
vazquez@linkway.com.br
Fabiane Cristina Höpner Noguti
UNESP - Rio Claro
fhopner@zipmail.com.br

Introdução

Há algum tempo trabalhando com alunos do Ensino Médio pudemos constatar as dificuldades de entendimento e compreensão relativas ao conteúdo estudado em Análise Combinatória. Diante de tal preocupação nos motivamos a estudar alguns aspectos históricos que possam vir ajudar o desenvolvimento desse tema.

Durante os estudos realizados procurávamos encontrar elos de ligação entre a combinatória desenvolvida desde os primeiros séculos dessa era com aquela estudada pelos alunos hoje. Isso nos levou a pensar e desenvolver atividades que ajudassem professores e alunos a melhor compreender esses conceitos.

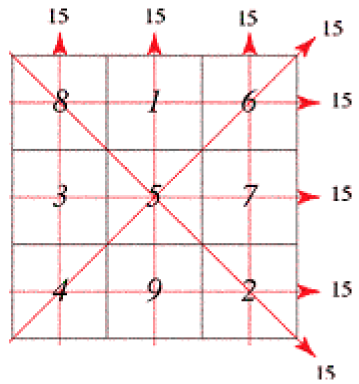
Propomos a utilização de problemas conjuntamente com a história da matemática, que desafiem e motivem alunos e professores a estudar, aprender e entender a análise combinatória.

Assim, a realização desse mini-curso tem como objetivo discutir e abordar o uso da combinatória no ensino, utilizando aspectos históricos e atividades que proporcionarão uma discussão de idéias sobre o tema bem como a compreensão dos conceitos de arranjo, combinação e permutação. Com isso buscamos atingir professores de Ensino Fundamental e Médio que poderão enriquecer os debates e utilizar as atividades que serão desenvolvidas com seus alunos.

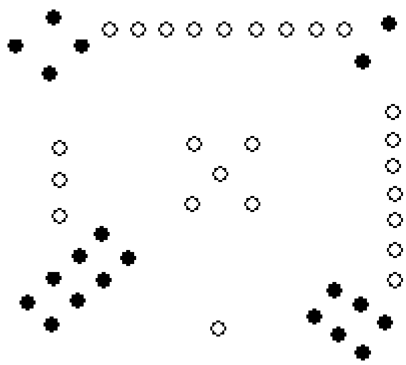
Aspectos Históricos

Durante muito tempo a Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório foi considerado completamente desligado do cálculo aritmético, segundo Rey Pastor (1939) *"o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas".*

Segundo Wieleitner o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números $1,2,3...n^2$ em um quadrado $n\times n$ de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Como vemos abaixo:



O primeiro quadrado mágico conhecido é o *Lo Shu*, que segundo Needham (1959) data do século I d.C., mas que pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (Berge, 1971):



=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde vários ritos eram realizados, sendo que a substituição destes símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado *Saturn.* Este quadrado causava uma grande fascinação para a maioria das pessoas, pois nesta época, mesmo a mais simples aritmética era algo espantoso. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos foi transmitida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo *Lo Shu*.

Há ainda, uma poesia infantil que parece ter sobrevivido em várias culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios (Biggs, 1979):

> *Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *Eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tem sete sacos,*
> *Cada saco tem sete gatos,*
> *Cada gato tem sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?*[1]

Esta poesia data, pelo menos de 1730 e é usualmente interpretada como uma brincadeira, entretanto, poderia se imaginar que por trás dela existiriam propósitos bem mais sérios, pois existe um problema similar no *Líber Abaci*, "*Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?"*[2]*,*escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações mostram aspectos artificiais do problema envolvendo a adição e a repetição do número sete, reforçando a memorização do mesmo.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue: *Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[3] *de grãos; quantos itens têm ao todo?* Ou também o problema da construção de quadrados mágicos.

Alguns quadrados mágicos maiores que o *Lo Shu* foram encontrados por um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que apresentaram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle*

---

[1] Tradução feita pelas autoras.
[2] Tradução feita pelas autoras.
[3] Hekat é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo que equivale a 4,8 litros.

arithmétique (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

O matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como "método de fronteira"[4] que aprendeu com o povo de Sião.

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo *"o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos"* enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como *"o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si"*.

Segundo Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de "configurações", pois instintivamente os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir – muitos dos quais podem ser ilustrados pelo problema de dispor n distinguíveis objetos em uma fileira.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, x.y.

Na análise combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: *arranjos, permutações e combinações,* e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

[4] O método de fronteira será apresentado na forma de atividade durante o mini – curso.

Ainda no princípio do século XIX não havia significado preciso para o emprego dos termos *arranjo* e *permutação*. Leibniz designava as permutações por *variações*, que é a palavra hoje utilizada por alguns autores para indicar *arranjos*.

Quando num problema figura uma coleção de elementos, é possível que a solução desse problema vá depender da maneira por que se escolhe alguns desses elementos e também da ordem em que os mesmos se dispõem.

Se considerarmos uma coleção ou um conjunto de elementos quaisquer e, tomarmos um, dois, três,... desses elementos, temos um agrupamento. Um agrupamento é simples quando o mesmo elemento não figura nele mais de uma vez; caso contrário, o agrupamento é denominado com repetição.

Ao agrupamento em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, e um elemento figura uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela *natureza* ou pela *ordem* dos elementos que neles figuram, chamamos *arranjo simples* e quando o agrupamento formado difere apenas pela *natureza* de pelo menos um elemento temos uma *combinação simples*. Já ao agrupamento formado por todos os elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos, chamamos *permutação*.

Durante o desenvolvimento da análise combinatória muitos matemáticos adotaram diferentes simbologias para denominar as mesmas operações. O símbolo $\pi(n)$ foi instituído por Gauss (1777-1855) para representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) usava o símbolo $\Gamma(n+1)$; a notação n! é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e $\left|\underline{n}\right.$ usada por outros autores. A Arbogast (Strasburgo, 1800) deve-se a denominação *fatorial.*

A Análise Combinatória serve hoje de base a várias teorias da Análise Matemática: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc. Tal assunto é foco de muita atenção, pois na literatura não existe uma definição satisfatória desta ciência e de suas ramificações.

Importância da Análise Combinatória no Ensino da Matemática

A Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e, principalmente, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da Matemática que permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja necessidade de enumerá-los.

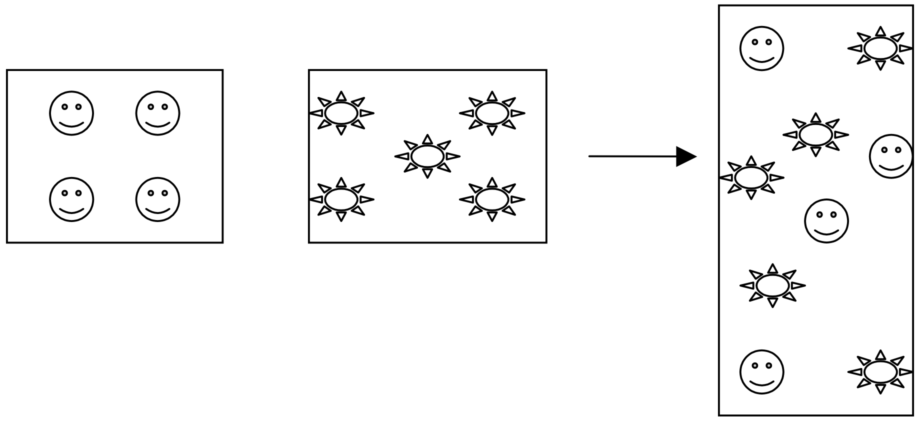
Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los. As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica, para familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida, sem regras em princípio, de modo que ele adquirisse um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando uma posterior formalização no ensino médio.

Esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos.

Com o princípio fundamental da contagem, podemos apresentar ferramentas básicas que permitem determinar o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são aprendidas pelas crianças através da aplicação de problemas de contagem, sem que muitas vezes elas percebam isso.

Por exemplo, a operação de adição é em geral introduzida conjuntamente com um problema de contagem, como podemos ver na figura abaixo:



Acreditamos que o ensino da combinatória é válido quando utilizamos raciocínio e entendimento das fórmulas propostas pelos matemáticos. A aplicação direta de fórmulas sem o entendimento da mesma faz com que os alunos apenas repitam passos e trabalhem mecanicamente, tornando o seu estudo e aprendizado apenas um jogo de fórmulas.

Como uma primeira apresentação dos conceitos de análise combinatória, podemos salientar os princípios da adição e da multiplicação. A figura dada acima ilustra um dos princípios básicos da contagem, o Princípio da Adição:

*"Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com **p** e **q** elementos, respectivamente, então a união destes dois conjuntos possui **p**+**q** elementos".*

Outra ferramenta básica para resolver problemas de contagem é o Princípio da Multiplicação:

*"Se uma decisão pode ser tomada de **x** maneiras e se uma vez tomada a decisão 1, a decisão 2 puder ser tomada de **y** maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões 1 e 2 é **x.y**.".*

Vejamos um exemplo: Maria quer vestir sua boneca, para isto ela dispõe de 4 blusas de cores diferentes e 3 saias também de cores diferentes. De quantos modos ela pode vestir a boneca?

Decisão1 : escolher a blusa;

Decisão2 : escolher a saia;

Como a decisão 1 pode ser tomada de 4 maneiras e a decisão 2 pode ser tomada de 3 maneiras, o número de maneiras de vestir a boneca, será $4 \times 3 = 12$.

Sabemos que alguns problemas podem ser resolvidos pela simples enumeração de seus casos (como vimos acima), e que muitas vezes esse método torna-se impraticável devido ao número extremamente grande de casos que podem aparecer. Sendo assim, podemos mostrar a necessidade de algumas “regras” para a obtenção dos resultados desde que sejam deduzidas e compreendidas pelos nossos alunos.

Partiremos do seguinte exemplo: “Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?”.

Representemos um número de três algarismos, arbitrário, pelos três quadros seguintes:

$$\square \quad \square \quad \square$$

Ora, o primeiro número pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes; em seguida, o segundo número pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes e, por último, o terceiro número pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Assim temos:

$$\boxed{6} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4}$$

Portanto, pelo princípio da multiplicação[5], existem 6.5.4 = 120 possíveis números de três algarismos distintos formados com os seis algarismos dados; isto é, existem 120 arranjos de 6 algarismos tomados 3 a 3 e que podemos representar por A (6,3). Agora, então, poderemos falar sobre arranjo e através de outros exemplos mostrar suas características. Em seguida, poderemos deduzir uma fórmula que sirva de auxílio na resolução de exercícios que possuam muitos casos a analisar:

O primeiro elemento de um arranjo de n objetos, tomados r a r, pode ser escolhido de n maneiras diferentes; depois, o segundo elemento do arranjo pode ser escolhido de n - 1 maneiras; depois, o terceiro elemento do arranjo pode ser escolhido de n - 2 maneiras e continuando essa seqüência, teremos que o último elemento do arranjo pode ser escolhido de n - (r - 1) = n - r +1 maneiras diferentes. Logo:

$$A(n, r) = n.(n-1).(n-2). \ldots .(n - r + 1)$$

---

[5] Método que permite resolver problemas só com o uso da multiplicação

Multiplicando-se, membro a membro, essa relação por:

(n - r)! = (n -r).(n -r -1). 3.2.1

vem:

(n -r)!.A(n,r) = n.(n -1).(n -2). ... .(n -r + 1). (n -r).(n -r -1). 3.2.1

ou:

(n -r)!.A(n,r) = n!

donde:

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Poderíamos, então, propor o seguinte problema: "Quantos números de 6 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?" Nesse caso, em que n = r, temos que:

A(n,n) = n.(n -1).(n -2). ... .3.2.1 = n! Em outras palavras, existem n! permutações de n objetos tomados n a n. Com isso introduziríamos o termo permutação como sendo um caso particular de arranjo e o resultado do problema dado seria 6! = 720 números distintos.

Agora vejamos o seguinte problema: "Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?"

Teríamos que o primeiro representante poderia ser escolhido de 9 maneiras diferentes, o segundo de 8 maneiras diferentes, o terceiro de 7 maneiras diferentes e o quarto de 6 maneiras diferentes, ou seja, um arranjo de 9 professores tomados a cada 4. Mas, nesse caso, um agrupamento se distingue do outro somente quando apresenta pelo menos uma pessoa diferente, pois invertendo a ordem dos elementos não alteramos o grupo. A quantidade de agrupamentos formados por esses professores, mudando-se apenas a ordem, é dada por 4! = 24. Logo teremos 3024 : 24 = 126 grupos formados. A esse tipo de agrupamento damos o nome de combinação e sua fórmula poderia ser deduzida assim:

Em cada combinação de n objetos tomados r a r temos r! permutações dos objetos da combinação, podemos concluir que:

A(n,r) = r!.C(n,r)

Assim, obtemos:

C(n,r) = $\dfrac{A(n,r)}{r!} = \dfrac{n.(n-1).....(n-r+1)}{1.2.3.....r}$

Multiplicando por (n –r)! os dois membros, vem:

(n –r)!.C(n,r) = $\dfrac{n.(n-1).....(n-r+1).(n-r)(n-r-1).....2.1}{1.2.3.....r}$

Logo, C(n,r) = $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Atividades a serem desenvolvidas durante o mini – curso:

Segue abaixo duas das atividades que pretendemos desenvolver com os participantes do mini-curso, sendo que outras atividades poderão ser realizadas mediante o tempo disponível.

Atividade 1: Quadrados Mágicos

O objetivo desta atividade é de estudar combinatória, construindo quadrados mágicos de ordem ímpar através de um esquema denominado “técnica de fronteira”:

Vamos construir um quadrado 3×3. Desenhe um quadrado e o divida em 9 celas. Contorne o quadrado com celas ao longo de suas bordas superior e direita e sombreie a do canto direito. Escreva 1 na cela central superior do quadrado original. A regra geral consiste em proceder diagonalmente para cima e para a direita com os inteiros sucessivos. As exceções a essa regra ocorrem quando essa operação nos leva para fora do quadrado original ou a uma cela já ocupada. Na primeira dessas situações voltamos ao quadrado original deslocando o número que cairia fora, ou de cima para baixo ou da direita para a esquerda, conforme seja o caso, para a última cela em branco da fila correspondente. Na segunda situação escrevemos o número na cela imediatamente abaixo da última a ter sido preenchida e prosseguimos com a regra geral. Deve-se considerar ocupada a cela sombreada. Em nossa ilustração, então, a regra geral indica que se deve colocar o 2 diagonalmente acima do 1 na terceira cela do contorno superior do quadrado. Portanto, deve-se deslocar o 2 para a terceira cela da linha de baixo do quadrado original. Prosseguindo com a regra geral quando se chega ao 3 atinge-se a segunda cela do contorno lateral direito do quadrado. Deve-se, então, deslocar o 3 para a segunda cela da primeira coluna do quadrado original. A regra geral colocaria o 3 na cela já ocupada pelo 1; portanto, ele deve ser escrito na cela exatamente abaixo da do último número registrado, ou seja, o 4. E assim por diante, teremos então:

	9	2	
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

Propomos agora, a construção de um outro quadrado mágico de ordem ímpar 7×7.

Atividade 2: O Problema do Aniversário

Um problema muito interessante de probabilidade consiste em determinar se duas pessoas de um grupo fazem aniversário no mesmo dia do ano. Será que é difícil encontrar duas pessoas com a mesma data de aniversário, ou será fácil encontrá-las? Para isso teremos que perguntar para todos os participantes da sala a data de seu aniversário e anotá-las. Façamos isso.

Após a realização da tarefa e discussão dos resultados saiba que em um grupo de 60 pessoas a probabilidade disto acontecer é maior do que 99%! Com 40 pessoas é maior do que 80%. Vamos descobrir o porquê:

Para simplificar vamos supor que todos os anos têm 365 dias, isto é que não existem anos bissextos. Utilizaremos o princípio multiplicativo já anteriormente visto. Cada data de aniversário pode ser pensada como um número entre 1 e 365. Se perguntamos à primeira pessoa qual o dia em que nasceu, a resposta pode ser qualquer número entre 1 e 365, certo? Logo para a primeira decisão existem 365 maneiras diferentes de se obter a resposta. Uma vez que a primeira pessoa foi consultada, passamos à segunda. Novamente existem 365 possibilidades e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo as possibilidades no caso de n pessoas será de 365^n possibilidades.

Contemos agora as possibilidades dessas n pessoas não fazerem aniversário no mesmo dia. Ao consultarmos a primeira pessoa teremos 365 possibilidades, já consultando a segunda teremos 364 possibilidades, a terceira 363 possibilidades. Logo, consultando a n-ésima pessoa teríamos 365 – (n – 1) = 365 - n + 1 possibilidades. Então pelo Princípio multiplicativo temos: 365.364.363. ... . (365 – n + 1).

Como a probabilidade de um evento ocorrer é o quociente entre o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis e a probabilidade de um evento não ocorrer é 1 menos a probabilidade do evento ocorrer, temos:

1. A probabilidade de que n pessoas **não** aniversariem no mesmo dia é

$$P = \frac{365.\ 364.\ 363.\ \ldots\ .\ (365 - n + 1)}{365^n}$$

2. A probabilidade de duas pessoas aniversariarem no mesmo dia é

$$1 - P = 1 - \frac{365.\ 364.\ 363.\ \ldots\ .\ (365 - n + 1)}{365^n}$$

Com a ajuda do computador, montamos a seguinte tabela:

Número de Pessoas	Probabilidade pelo menos duas aniversariarem no mesmo dia
5	0,027
10	0,117
20	0,411
22	0,476
23	0,507
50	0,970
60	0,994

Observamos que, com 23 pessoas, a probabilidade é aproximadamente 50% e com 60 pessoas a probabilidade é maior do que 99%, sendo quase certo encontrar duas pessoas com aniversário no mesmo dia, não é incrível?

Palavras-chave: ensino-aprendizagem, aspectos-históricos e contagem.

Referências Bibliográficas:

BERGE, C. Principles of Combinatorics. Vol 72. New York: Academic Press,1971. p.1-11.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. Revista Historia Mathematica. Vol 6. 1979. p.109-136.

QUINTELLA, Ary. Matemática 2º ano colegial. 3ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. 187pp.

LIPSCHUTZ, S. Matemática Finita. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.p.175-185.

NEEDHAM, J. Science and Civilisation in China. London: Cambridge University Press. Vol 3.1959. p.58

PASTOR, J. R. Elementos de análisis algebraico. 5ed. Madrid: Talleres Lusy, 1939.p.134-150.

ROXO, Euclides et al. Matemática 2º ciclo. 7ed. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1955. 234pp.

WIELEITNER, H. Historia de la Matematica.Barcelona: Labor. 1932. p.134

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. Combinatorics. 1990. p.952-965.

URL: http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html (versão 14/01/2004).