



## **O CONCEITO DE INFINITO E A PERCEPÇÃO DE MOVIMENTO**

Autora: Lúcia Cristina Silveira Monteiro –  
Secretaria Municipal de Maceió -Dir. ensino  
[lucia.csmonteiro@uol.com.br](mailto:lucia.csmonteiro@uol.com.br)

### **INTRODUÇÃO**

O conceito de infinito aparece no seio do desenvolvimento das ciências distinguindo paradigmas. Na história do conhecimento encontra-se na Grécia antiga a predominância das idéias finitistas que estavam relacionadas às idéias de mundo estático e que assim permaneceram durante a maior parte da história. Na atualidade, desde o século XVII com o início da revolução científica predominam idéias infinitistas, estas, relacionadas a uma visão dinâmica de mundo.

As polêmicas em torno do conceito de infinito foram registradas desde o início do processo de sua construção, e mais particularmente, quando conceitos matemáticos exercem influências nas formas de percepção do mundo físico. A linguagem que desenvolve representações do infinito é a matemática porque embora esse conceito apresente-se crucial no processo de construção do pensamento é um conceito peculiar, pois não se tem experiência direta com ele e sua compreensão fica associada a níveis de abstrações que são os desenvolvimentos conceituais através das linguagens e suas representações.

O presente trabalho objetiva mostrar porque as abordagens do conceito de infinito são importantes na construção do pensamento dos seres humanos da atualidade podendo refletir inclusive na percepção de mundo. Nesse contexto destaca-se a importância desse conceito nos conteúdos escolares, mais especificamente, na educação matemática. De fato, o estudo aqui expõe como a linguagem matemática atual pode e deve ser utilizada para desenvolver noções de infinito, relacionada à visão dinâmica de mundo, desde os níveis mais básicos de escolaridade tomando-se consciência de que ao

se apropriar dessa linguagem estar-se-ia obtendo referenciais conceituais visando aguçar a percepção e a descrição de fenômenos.

### *1 – Histórico*

Essa investigação remete ao problema mais antigo que se tem registro envolvendo o conceito de infinito, mais especificamente o infinitamente pequeno, conhecido como o paradoxo de Zenão (450 a.C). Esse problema refere-se a uma situação em que se comparam os movimentos de um corredor que ficou na história conhecido como Aquiles, e de uma tartaruga, ambos se movendo às suas velocidades constantes. Ao se pressupor a divisibilidade infinita do espaço pressupõe-se também que se a tartaruga partir um pouco à frente ao disputar com o corredor, este poderá jamais alcançá-la, pois quando o corredor chegar ao ponto onde a tartaruga partiu, ela já não mais ali se encontra, pois terá avançado um pouco, e quando ele chegar novamente a esse outro ponto onde a tartaruga deveria estar no segundo momento, ela já teria avançado mais um pouco, e esta situação se repetiria infinitamente.

Conclui-se que ou o corredor jamais alcançará a tartaruga, gerando-se, pois, uma noção que contradiz a realidade física; ou admite-se que o corredor alcançará a tartaruga desconsiderando a noção matemática do problema da divisibilidade infinita sobre uma reta numérica.

Naquela época também havia outras formas de expor o problema. Uma das formas que mais intrigou os pensadores da época foi a versão “a dicotomia”. Nessa versão propunha-se olhar o problema de outra forma, pressupondo-se o espaço dividido infinitamente, ao se tentar transpor a distância entre dois pontos, antes teria que transpor a metade do percurso, e antes disso a metade dessa primeira metade, e antes a metade da metade da metade, e pensando-se sempre assim não se conseguiria sair do canto.

Os argumentos de Zenão de Eléa (Caraça, 2000, p.202) ficaram na história da ciência com um valor inestimável, pois mostra que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares, porque considerá-lo assim equivale a abordar o seu estudo por um método estático.

Na atualidade tem-se também exposto o problema de outras formas. Uma das mais simples delas é traduzida em uma situação que se propõe tomar um ponto inicial A e ao se partir deste ponto até um ponto B, condicionando-se à regra de que o percurso

deverá ser feito caminhando-se primeiramente a metade entre A e B, depois a metade da metade, depois a metade da metade da metade e assim sucessivamente, então se tenta compreender quais são as condições para que se alcance ou não o ponto desejado.

Problemas semelhantes ao de Zenão de Eléa, conhecidos por sua contradição na compreensão física da idéia matemática do infinitamente pequeno, se revelaram ponto de motivação de uma linguagem matemática voltada para a descrição desses fenômenos. Encontra-se no desenvolvimento da matemática, diferenças entre interpretações antigas e atuais para tratar problemas desse tipo.

Uma diferença crucial é que a linguagem matemática atual utiliza o conceito de infinitamente pequeno, hoje, também tratado como infinitésimo. Esse conceito volta ao palco das discussões durante o desenvolvimento de suas formas de representação iniciados nas observações de Galileu no século XVII durante as tentativas em compreender e descrever alguns tipos de fenômenos, como o da queda dos corpos. Depois de compreender a definição de velocidade média, Galileu tenta compreender qual a velocidade de um objeto em queda em cada instante, entre dois momentos aproximados por uma distância infinitamente pequena durante a queda. Essa que seria mais tarde definida como a velocidade instantânea.

Mas, o que surge inicialmente é novamente a impressão de que um objeto parece estar evoluindo *zero metros* em *zero segundos* e essa relação  $0m / 0seg$ , não tem nenhum significado matemático ou físico. As conclusões assemelhavam-se ao problema de Zenão na versão “a dicotomia”, onde se concluía que, se fosse assim, o movimento não existia.

Algumas décadas de polêmicas depois e o fenômeno passou a ser analisado pensando-se em acréscimos, variações infinitamente pequenas como as definições feitas por Libnitz e Newton (Caraça, 2002). Associado a essa idéia se introduz o conceito de função, ou *fluentes* como designara Newton, que resultará na linguagem que melhor definirá o infinitamente pequeno. O rigor matemático a respeito dessa linguagem durou séculos para se desenvolver, mas essa forma de compreender o infinitésimo associado ao deslocamento, percepção de um movimento, é uma linguagem atual, utilizada em todas as ciências. Dessa forma tentou-se descrever uma representação para uma quantidade infinitesimal ou infinitamente pequena, e, à variável  $X = 1/n$  foi atribuída a noção de acréscimo infinitesimal.

A variável  $1/n$  vem de uma relação com o conceito de infinito dos números Naturais, pois, dado uma variável inteira  $n$ , cujo domínio é a seqüência infinita de

números naturais representados por  $1, 2, 3, 4, \dots$ , então, é possível pensar nessa outra variável  $X = 1/n$  e têm-se  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ . De fato se é possível pensar sempre em um número maior que  $n$ , pelo menos por acréscimo da unidade, ou seja,  $n+1$ , será possível pensar sempre em um número menor que  $1/n$ , ou seja, o quociente  $1/(n+1)$ , que poderá ser muito próximo de zero, sem nunca poder ser igual a zero. Assim surge na linguagem matemática uma relação muito particular que afirma, com outras palavras, que *fazer  $1/n$  ir para zero* equivale a dizer que  *$n$ , do quociente  $1/n$  está indo para o infinito*.

O que está descrito anteriormente é uma nova definição, a definição de infinitésimo: vale a pena destacar a essência desse conceito dizendo que para  $1/n$  ser infinitésimo é necessário que haja valores de  $1/n$  na *vizinhança* de zero, mas essa condição não é suficiente, pois  $1/n$  só será infinitésimo quando se considerarem sucessivamente valores tão próximos de zero quanto se queira. Assumindo-se os valores de  $n$  cada vez maiores se está dizendo que  $1/n$  vai ficando cada vez menor ou tendendo para zero. É interessante ressaltar que pode existir um outro caso, em que uma função  $1/n$ , se  $n$  não tende para o infinito,  $1/n$  não *tende para zero*, então, neste caso específico,  $1/n$  não seria infinitésimo.

Uma vizinhança não é um segmento, mas sim uma variável, cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo.

*“ o conceito geométrico de vizinhança corresponde portanto ao conceito analítico de infinitésimo e, por meio deste, podemos estudar o que se passa na vizinhança de pontos, isto é, ver como joga, no fenômeno a estudar, a interdependência dum ponto com os seus vizinhos; então não se pode esquecer que um infinitésimo não é um número, é uma variável (Caraça, 2000, p.207).*

A variável  $1/n$  foi designada por **infinitésimo principal**, quando  $n$  tende para infinito, porém se existir uma outra função de  $n$  que tenha o mesmo comportamento do infinitésimo principal, esta também é um infinitésimo, como por exemplo,  $f(n) = 1/2^n$ . Essa última função citada é muito importante nesse trabalho porque se trata da representação matemática que permitirá uma análise do movimento que acontece no paradoxo de Zenão utilizando-se dessa nova linguagem matemática.

Essas funções infinitesimais que transformam um número natural em um número real são analisadas como sucessões que podem ser enumeradas. E, portanto chamadas sucessões enumeráveis. No exemplo acima,  $f(n) = 1/2^n$ , para  $n=1$ , tem-se  $f(n) = 1/2$  que corresponde ao primeiro termo desta sucessão designado por  $a_1$ ; para  $n=2$ , tem-se  $f(n) = 1/4$  que representa o segundo termo dessa sucessão designado por  $a_2$ . Assim são gerados infinitos termos a partir desta relação entre as variáveis  $n$  e  $1/n$ .

Então se usa com frequência para exprimir que uma sucessão enumerável  $a_n = f(n)$  é infinitésima, a afirmação de que a função  $a_n = f(n)$  é vizinha de zero quando  $n$  é vizinho de infinito.

Depois da criação desse conceito de infinitésimo associado as tentativas em descrever situações como a proposta por Galileu semelhante aos problemas propostos por Zenão, fica explicitado que, o que se passa em um ponto só pode ser compreendido em interdependência com o que se passa em pontos vizinhos. E diretamente relacionado ao conceito de infinitésimo, fica estabelecido o conceito de limite. Diz-se que  $a_n$  tem por limite  $L$  se  $a_n$  é vizinho de  $L$  quando  $n$  é vizinho de infinito. No caso da sucessão enumerável ser infinitésimo, o limite é zero.

O conceito de limite abre espaço através dessa nova linguagem e permite analisar dificuldades antigas, recordando-se a argumentação de Zenão de Eléa a respeito da compreensão do movimento, exposta anteriormente. Sob esse novo olhar, no seu argumento *Aquiles(A)* e a *Tartaruga(T)*, Zenão constrói duas sucessões de posições sucessivas de  $A$  e  $T$  e sob uma atitude estática, nota que a distância  $AB$  nunca é nula, então, fica incompreensível como Aquiles pode alcançar a Tartaruga.

A matemática atual de posse da operação de passagem ao limite, no estudo do deslocamento determina que o fenômeno só pode ser compreendido em interdependência com os estados vizinhos. Chamando-se  $d$  a distância entre  $A$  e  $T$  que representa o avanço inicial de  $T$  sobre  $A$ , as distâncias dos dois móveis nessas sucessões são  $d, d/2, d/4, \dots, d/2^n, \dots$  e como limite dessa sucessão numerável,  $d/2^n$  com  $n$  indo para o infinito é zero tem-se nessa relação a representação dessa interdependência.

*“ o pensamento matemático moderno, adotando uma relação dinâmica com relação ao conceito de infinito, torna-o elemento de construção, obtendo-se o resultado que a experiência confirma. (Caraça, 2000, p.236).*

É importante lembrar que o método das primeiras e últimas razões, como Newton chamou o método dos limites, nasceu, também, em um ambiente de controvérsia a respeito de um método anterior, o método dos indivisíveis [ Cavalier]. Essa tempestade durou todo o século XVIII até quase o final do século XIX.

É importante também considerar a entidade  $d + d/2 + d/4 + \dots + d/2^n + \dots$ , que ao exercer a passagem ao limite, tem-se a noção de que essa entidade se trata de uma soma, por uma recorrência à linguagem, pois, é uma soma, porém, uma soma de uma infinidade de parcelas, estabelecendo-se um outro tipo de igualdade, uma igualdade no infinito.

*“A importância desse método é tal que todas as vezes que, no estudo de um fenômeno de qualquer natureza – físico, biológico, econômico, geométrico, para a determinação quantitativa dum seu estado nos apareça como indispensável o considerar a interdependência desse estado com os estados vizinhos, essa determinação far-se-á por meio de um limite - limite que é a resultante da infinidade de possibilidades dos estados vizinhos.” (Caraça ,2002, p.251)*

As definições envolvendo o infinitésimo proposta por Leibniz foram inicialmente a mais difundida e aceita em sua época, ele considerou uma quantidade a qual deu o nome de  $\Delta x$ <sup>1</sup> que é definida como uma variação, uma diferença entre duas variáveis de um campo de variação ao qual pode-se denominar de um certo,  $x_2$  e um certo,  $x_1$ . Quando no campo de variação dos  $x$ is, varia-se de ,  $x_2 - x_1$ , ou seja de  $\Delta x$ , implica uma outra variação, em um outro campo de variação, digamos dos  $y$ pslons, de  $y_2 - y_1$ , ou seja, de  $\Delta y$ . Diante da variação em uma primeira quantidade acontece uma variação em uma outra quantidade com a qual a primeira está se relacionando.

Leibniz traduz da seguinte forma: dada uma função  $f$ , a lei que rege uma relação, então ao variar  $\Delta x$  descreve-se a variação  $\Delta y$ , por essa lei. Então  $\Delta y$ , representará a pequena variação sofrida por  $y$ , quando houver uma pequena variação em  $x$ . Em notação de função será definida como sendo o resultado da diferença entre, a função  $f(x)$  acrescida da variação  $\Delta x$  e a função  $f(x)$  simplesmente sem acréscimos. Ou seja:

---

<sup>1</sup> Lê-se “delta xis”, em que delta, ( $\Delta$ ) é a quarta letra grega, maiúscula.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Essas definições conduzem a muitas possibilidades matemáticas, por exemplo, o fato de  $\Delta x$  ser uma diferença entre números distintos implicava ser  $\Delta x$ , diferente de zero, na verdade isto se caracterizava como condição de existência do problema,  $x_1$  é diferente de  $x_2$ , motivado pelo estudo do movimento que pairava sobre as pesquisas, e nesse caso específico em que  $x_1$  e  $x_2$  se tratavam de dois números associados a dois instantes distintos da trajetória de um móvel.

A condição de  $\Delta x$  ser diferente de zero estabelecia a possibilidade de algumas operações lógicas, como por exemplo, a possibilidade de se dividir por  $\Delta x$ . O que implicaria na igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

E está descrita uma razão entre pequenas variações representadas pelo *delta ypsilon* e pelo *delta xis*. Uma grande idéia. Mas quando utilizada em relação à função  $f(x) = x^2$  que descreve o fenômeno da queda dos corpos, a relação entre dois instantes em que o corpo cai e a posição em que se encontra, acarreta a seguinte igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Desenvolvendo o quadrado entre os parênteses implica a igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

Simplificando essa igualdade cancelando os simétricos, equivale matematicamente a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

No lado direito da igualdade acima, uma operação lógica legítima, que não altera essa igualdade, é o cancelamento de um delta xis em cada um dos termos deste quociente, o que resulta em:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Considera-se que essa igualdade define a velocidade instantânea também denominada de derivada da função definida como  $f(x) = x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Matematicamente, essa relação determinará muitas definições, como por exemplo, a velocidade instantânea do móvel em qualquer ponto. Mas havia um problema, considerando-se a última igualdade como uma igualdade absoluta, está-se assumindo um  $\Delta x$  igual a zero, o que é inaceitável matematicamente, pois se estaria admitindo em todo processo uma divisão por zero, o que é logicamente impossível.

Praticamente concomitante às elaborações de Leibnitz, na organização do cálculo como proposta por Isaac Newton, há uma outra forma de interpretar essa igualdade matemática. O problema é solucionado a partir da introdução de uma linguagem que torna essa igualdade menos absoluta, essa linguagem trata de um conceito fundamental para a matemática atual, o conceito de limite. Diz-se então que o limite do quociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  com  $\Delta x$  indo para zero é então igual a  $2x$  e escreve-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x$$

Observa-se que a diferença entre aquela igualdade, proposta por Leibnitz, e essa, que introduz uma noção de limite, está na introdução de movimento no conceito associado à linguagem matemática. Cria-se a possibilidade de uma variável como  $\Delta x$  ir para zero sem precisar chegar a ser zero de fato. Depurando a compreensão dessa linguagem, associada à percepção de fenômenos, observa-se que se introduziu uma linguagem que produz um outro tipo de igualdade. É uma construção compartilhada com a linguagem, em que se utiliza uma idéia de movimento continuado, entendendo-se que os números estão indo.

## *2 – As metáforas conceituais*

Nas sociedades atuais há um volume de conhecimento científico muito vasto, mas ao mesmo tempo compartimentado em suas respectivas áreas de estudo, e por isso mesmo, sub-utilizados.

Encontra-se a linguagem matemática, que tem sido criada e usada durante todo o processo de desenvolvimento da humanidade, tornando-se assunto de interesse para as ciências cognitivas, no rol dos pensamentos infinitistas que pretendem analisar idéias matemáticas, sob uma perspectiva cognitiva.

Inicialmente, o maior interesse está em saber como mecanismos cognitivos humanos são empregados na criação e compreensão de idéias matemáticas. Lakoff e Núñez (2000) propõem que a matemática na mente humana baseia-se no uso de metáforas conceituais, e que estas são parte da própria matemática.

Por exemplo, sabe-se que a matemática, no processo da construção dos números conceituou quantidade de objeto como números e depois de uma forma mais complexa, conceituou números como conjuntos. Mas refletindo mais detalhadamente sabe-se não ser necessário iniciar uma abordagem conceituando números como conjuntos, já que a aritmética existiu dois mil e quinhentos anos sem essa metáfora. Embora conceituar números como conjunto pode-se mostrar uma metáfora conceitual bem compreendida para tratar algumas idéias matemáticas.

O que está claro é que metáforas são uma parte essencial no desenvolvimento do pensamento matemático. Isso traz o reconhecimento de que as análises às metáforas em matemática são muito importantes para o desenvolvimento do pensamento. Importantes para a psicologia cognitiva, porque indicam como se desenvolve o pensamento matemático, para a educação matemática, pois destaca mais uma vez a importância no tratamento a matemática sob a sua condição de linguagem, e, principalmente para a matemática por que muitos problemas, que são metáforas conceituais, são tomados como paradoxos quando são compreendidos literalmente, porém, quando o verdadeiro caráter metafórico da matemática se revela, muitas confusões e paradoxos desaparecem.

Nesse panorama surge o interesse também da psicologia cognitiva por um conceito peculiar, proveniente da atividade mental humana, o conceito de infinito. Esse interesse está justificado, segundo Núñez (1994), pelo menos por duas razões: por fazer um importante papel em diferentes disciplinas do conhecimento humano como a matemática, a filosofia, a economia, ciências sociais etc, e porque é uma rica e

representativa concepção da dimensão da atividade mental humana não baseada em experiência direta.

As ações que descrevem processos contínuos e que são representadas por sentenças do tipo “a águia voou, voou, voou” podem ser caracterizadas, em termos cognitivos, por uma metáfora de um processo contínuo, indefinido. Essa metáfora é importante para a conceituação do infinito. Ela é usada na conceituação em matemática, para descrever processos contínuos que apresentam uma iteração. Essa iteração é um passo a passo, no qual cada passo é discreto e mínimo. Comumente essa idéia é aplicada em processos infinitamente contínuos.

Lakoff & Núñez (2000) concluem concebendo o conceito de infinito como sendo constituído por metáforas que descrevem processos contínuos com uma quantidade indefinida de repetições. Segundo esses autores as metáforas matemáticas que descrevem o infinito podem ser uma metáfora do Infinito, mas depende da forma como são abordadas. A diferença está na introdução da percepção do movimento contínuo intrínseco aos fenômenos.

### *3 – A Pesquisa:*

Para um grupo de alunos do ensino fundamental foram mencionadas situações similares às descritas por Núñez (1994) no que se refere ao paradoxo de Zenão. O problema foi proposto da seguinte forma: o sujeito deve deslocar-se entre dois pontos, partindo de um ponto conhecido dado até um outro ponto também conhecido e a condição do problema é que os espaços devem ser percorridos cobrindo-se primeiramente a metade do percurso e depois sempre a metade do restante. As representações matemáticas foram omitidas na exposição do problema para esses alunos, explicitando-se apenas que seria a metade, depois a metade da metade, depois a metade da metade da metade, e assim sucessivamente.

Para professores da Educação Básica, com licenciatura em matemática, a proposta foi para que organizassem uma opinião a respeito do paradoxo de Zenão, em uma abordagem que pudesse ser utilizada em situações de sala de aula. Esses professores deveriam ter em mente pelo menos as duas opiniões mais prováveis que poderiam ser dadas por seus alunos: a de que se chegaria ao ponto desejado ou a de que não se chegaria. A proposição foi no sentido de tentar entender os argumentos que cada um compreende que poderia ser utilizado para seus alunos, a respeito desse problema.

Para Professores do Ensino superior do Curso de Licenciatura em Matemática, foi proposto que emitissem parecer sobre as possibilidades de discursos em torno da utilização do paradoxo de Zenão como instrumento didático para se abordar o conceito de infinito e de infinitésimo na educação básica e então a possibilidade de explorar esses conceitos atribuindo uma relevância na utilização das dízimas periódicas, com seus componentes paradoxais, da mesma natureza que o paradoxo citado. Nesse grupo foi feita a referência ao problema de Zenão também na versão a dicotomia.

Foram observadas noções de movimento nas várias formas de descrever o conceito de infinito. Percebe-se que essas descrições, com um menor ou maior aprofundamento, encontram seu estímulo na linguagem matemática.

As declarações abaixo foram emitidas por alunos do ensino fundamental diante da questão sobre o que seria infinito e evidenciam a existência de noções sobre esse conceito, expostas de certa forma com naturalidade, utilizando principalmente a noção de números:

*S1: Os números, o universo.*

*S2: assim... que não tem fim, assim... tipo os números da matemática, o número de estrelas, o universo...*

*S4: Ahn! Ahn! Ahn! ... pode ser número, né? Acho que não tem fim, pra mim não tem.*

Alguns sujeitos desse grupo, em primeira instância utilizam expressões que parece querer exprimir o que não é finito:

*S3: que não tem fim*

*S5: infinito é uma coisa que não tem fim, né? Que não tem fim, infinito.*

Porém, essas primeiras declarações desses sujeitos vão sendo complementadas com a continuidade dos diálogos:

*P: você conhece alguma coisa que não tem fim?*

*S3: os números da matemática.*

Em *S7* observa-se uma descrição de infinito como percepção de movimento em processos contínuos. A idéia de números é a abstração que contribui para a descrição de um processo contínuo.

P: [...]os números, por exemplo, os números naturais, tem alguma coisa de infinito nos números naturais?

S7: tem.

P: como é que é o infinito dos números?

S7: bom, é uma coisa que vai sendo, vai sendo, vai sendo... e nunca acaba... ele vai, vai,  
vai, vai até...

Nas respostas sobre o que aconteceria ao se tentar chegar a um ponto desejado caminhando por metades foram observadas três tipos de conclusões expostas por esses sujeitos. Essas respostas também detectadas por Núñez (1994) são: os que afirmaram que chegariam ao ponto desejado; outros, que afirmaram que não chegariam; e os que consideraram as duas respostas possíveis, oscilando entre as duas possibilidades diante dos contra-argumentos.

Observa-se nos argumentos utilizados na presente pesquisa para dizer que chega ou que não chega semelhanças sob alguns aspectos. Analisando abaixo as colocações de S1 e S2:

S2: Vai sendo... dividindo e vai e chega...vai diminuindo menos a distância.

S1: [...]porque é assim: tem um birô, e a porta, você andando a metade. Depois a metade da metade, depois a metade da metade da metade, vai ficar uma distância muito pequena, mas mesmo assim você não vai conseguir chegar ao seu ponto certo. [...] você tem uma distância de 1cm, você sempre vai ter que andar zero vírgula cinco, ... você nunca vai poder andar o zero vírgula cinco, aí depois o zero vírgula vinte e cinco, depois o zero... vírgula cento e vinte e cinco, aí nunca vai conseguir chegar ao ponto certo.

O que se observa nas duas posturas é uma prioridade dada a uma ou outra linguagem: a linguagem apenas do que se vê através dos sentidos, a experiência física, ou a linguagem puramente abstrata das divisões. Evidencia-se a necessidade de uma mediação entre essas percepções unilaterais, uma linguagem que possa explicar o fenômeno.

S7 está entre os que oscilam diante dos contra-argumentos. Depois de ter afirmado que chegaria entra em conflito após a introdução do contra-argumento das

divisões infinitas no diálogo e reconsidera a resposta anterior, mas também não consegue expressar suas dúvidas.

*P: você não chegaria?*

*S7: depende, talvez.*

*P: talvez?*

*S7: é talvez.*

O que se observa na descrição de fenômenos aparentemente simples, como o paradoxo de Zenão é que a linguagem matemática está sub utilizada, dada a riqueza dos desenvolvimentos conceituais atuais para descrever problemas desse tipo. Evidencia-se que se deve acrescentar componentes explorando a linguagem que melhor descreva o problema. Essa linguagem deve contemplar a necessidade de utilização de conceitos envolvidos no problema observado a partir da experiência vivenciada.

Com S8, professor da Educação Básica, as elaborações estão totalmente voltadas para os aspectos teóricos da matemática atual e o argumento formulado sobre o que ele diria aos alunos a respeito de chegar ou não chegar ao ponto desejado foi o seguinte:

*S8: teoricamente ele nunca chegaria, ou... Chegaria cada vez mais próximo.*

*P: [...] e eles (os alunos) me garantiram que chegariam, o que você diria para eles?*

*S8: [...]ele vai chegar no limite.*

*P: você falaria no limite?*

*S8: certo, seria... você nunca vai chegar lá. Você vai caminhar daqui até ali...*

*S8: pronto esse obstáculo que você quer chegar é o limite.*

*[...]se o pessoal prestar atenção vai entender ... sempre vai ter um epsilonzinho bem pequenininho que você vai dividir por dois, e você nunca vai chegar, é como  $1/n$  quando  $n$  tende pro infinito.*

O discurso de S8 é totalmente voltado para o conhecimento matemático atual, e só consegue expressar-se formalmente. A diferença dos argumentos desse sujeito para aqueles da época de Zenão está no âmbito do desenvolvimento da própria linguagem matemática, que permite uma análise sobre o problema de forma diferenciada daqueles da antiguidade. Essa diferença evidencia-se em sua disposição ao fazer referência ao

conceito de limite e ao citar a variável  $1/n$ , importante para construção da noção de infinitésimo.

Uma mudança de comportamento em professores de matemática pode ser detectada na concordância da pertinência do uso de problemas do tipo proposto por Zenão, já no ensino fundamental, assim como também se detecta uma aparente preocupação com a construção de conceitos como os de limite, infinito e infinitésimo. Esses sujeitos reconhecem que, nas teorias e currículos atuais, há uma linguagem a ser explorada, mas também lhes faltam argumentos que justifiquem as formas de conduzir abordagens a esses conceitos, nesse nível de ensino.

No caso específico, esses conceitos que podem explicar um fenômeno do tipo do paradoxo de Zenão e que envolve o conceito de infinito e infinitésimo, entre outros, estão atrelados a conceitos como: limite, aproximação, diferença entre igualdades matemáticas, esses por sua vez associados a uma percepção de movimento intrínseco aos conceitos, presentes também nas declarações de S13, professor de Licenciatura em Matemática.

*S13: [...] É um processo, novamente volto àquela história, é um processo de movimento é um processo que você, que você tá caminhando, caminhando, é um processo infinito. Então na verdade... quando você escreve uma igualdade não é uma igualdade de forma absoluta não é? É igualdade relacionando o limite. O limite que é igual àquilo ali, tá certo?*

S13 destaca que essa questão também tem a ver com a necessidade de se explicitar as diferenças entre os tipos de igualdades em matemática. Para isso, salienta formas de como fazer compreender as declarações matemáticas do tipo  $0,999... = 1$ . Lembra que não pode deixar de ficar claro que não se trata de uma igualdade do tipo comum, mas que está implícito um processo de algo que *está indo*, uma idéia de movimento, uma idéia de limite, uma idéia de infinito.

*S13: [...] Essa questão da dízima... essa igualdade representa, um limite de uma seqüência... então... essa noção, tá? De limite, parece-me que é extremamente necessária para tornar isso claro, né? Na hora que você escreve a igualdade aí, você... você tá abrindo mão de uma verdade, você não tem uma igualdade, você tem... você tem num limite, quer dizer, num limite no infinito você tem a igualdade, isso não significa dizer que... do ponto de vista prático, essa igualdade seja uma igualdade... absoluta né? Você tem a igualdade no limite.*

*Que é uma coisa que você tá indo pro infinito, aquele processo de movimento que você tem. [...]*

### Considerações finais

A pesquisa aponta para uma proposta de construção de conceitos que pode ser iniciada a partir das análises cognitivas às idéias matemáticas, das metáforas conceituais percebidas durante a pesquisa e da relação entre esses dois aspectos que podem ser utilizados em uma transposição didática para abordar problemas envolvendo o conceito de infinito.

Uma das principais indicações nessa pesquisa é a relação entre o conceito de infinito em seus vários níveis de abstração, com uma abstração fundamental, a percepção de processos, ou seja, a percepção de movimento nos fenômenos.

Deve-se, pois, estimular a percepção do movimento intrínseco a processos contínuos utilizando-se linguagem matemática associada a situações observáveis; construindo as condições para futuras abordagens matemáticas podendo-se acrescentar às descrições iniciais dos fenômenos, modelos matemáticos correspondentes.

A utilização de abordagens visando uma igualdade absoluta pode ser traduzida como uma postura finitista, estática, muitas vezes sem significado. Do ponto de vista cognitivo, posturas como essa não privilegiam desenvolvimentos como o do pensamento indutivo, intuitivo, dedutivo e analógico, que ao se traduzirem em competências poderiam ser percebidas em situações concretas. Situações matemáticas mais voltadas para análise da realidade admitem aproximações como sendo muitas vezes mais verdadeiras, até porque no dia-a-dia, as aproximações são muito mais frequentes que as exatidões.

Propomos utilizar problemas do tipo de Zenão em situação didática como propõe Brusseau (PARRA, 1996), pois percebemos trata-se de um problema em que ele próprio é uma situação didática e que pode oferecer requisitos para muitos desenvolvimentos conceituais mais especificamente de infinito, infinitésimo, aproximação, limite. Nesse intuito podemos, por exemplo, colocar o seguinte questionamento ao problema: ***“caminhando-se por metades e utilizando-se uma medida qualquer, qual é a menor distância a que se consegue chegar do local pretendido, sem quebrar a regra matemática do problema?”***.

É fundamental que a matemática como linguagem científica que é, exponha seu caráter descritivo dos fenômenos. Deve-se reconhecer que ao apropriar-se dessa

linguagem matemática atual, desde suas características de pensamento metafórico até as generalidades e possibilidades de operacionalização de suas representações, torna-se imprescindível o destaque ao aspecto infinitista presente em toda essa linguagem e que oferece elementos para a percepção do movimento, de dinâmicas implícitas aos fenômenos.

Palavras chave: linguagem matemática; infinito; movimento.

**Palavras chave:** matemática; infinito; movimento.

### ***Referências Bibliográficas***

- CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática, Lisboa, 6ª edição*, Gradiva, 2002.
- COURANT, R. & ROBBINS, H. *O Que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Ed. UnB, 2001.
- DIAS, M.G. & SPINILLO, A.G. (org). *Tópicos em psicologia Cognitiva. Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos*. Da Rocha Falcão, J.T. Recife, Editora Universitária da UFPE, 1996.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.
- FAIRCLOUGH, N. *Discurso e mudança social*. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 2001.
- KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo, Editora Perspectiva, 2001.
- LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York, Basic Books
- MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*. S.Paulo, Cortês editora, 4ª Edição, 1998.
- MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. S.Paulo, Cortês editora, 2ª edição, 1997.
- MEIRA, L. (Prelo). *Students' early albebraic activity: Sense-making and the production of meanings in mathematics*. Federal University of Pernambuco, Brasil.

- MORRIS, R. *Uma breve história do infinito: Dos paradoxos de Zenão ao Universo Quântico*. RJ. Jorge Zahar editor, 2000.
- NÜÑEZ, R. *Development and Infinity in The Small: Paradoxes and Consensus*. Berkeley, CA Editado por Ashwin Ram and Kurt Eiselt, 1994.
- PARRA, C.& SAIZ, I. (org). *Didática da Matemática. Reflexões Psicopedagógicas. Os Diferentes Papéis do Professor*, Brousseau, G. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.
- PCN's de 5ª a 8ª série -matemática & PCN's - *Ensino Médio de Matemática ciências e suas tecnologias* , Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998.
- SCHLIEMANN, A. & Carraher D. Meira, L. Falcão, J. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Aprendizagem e Ensino de Funções*, Meira, L. Recife, Ed. Universitária da UFPE, 1997.
- VYGOTSKY, L.S. *Pensamento e linguagem*. São Paulo, Martins Fontes, 1998.
- VYGOTSKY, L.S. *A formação social da mente*. São Paulo, Martins Fontes, 2000.