Rute Borba e Gilda Guimarães (Org.)

Pesquisa e Atividades para o aprendizado matemático na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Biblioteca do Educador
Coleção SBEM
Volume 8

ISBN: 978-85-98092-30-0

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Rute Borba e Gilda Guimarães (Org.)

Pesquisa e Atividades para o Aprendizado Matemático na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

ISBN: 978-85-98092-30-0

Sociedade Brasileira de Educação Matemática

2015

Pesquisa e Atividades para o Aprendizado Matemático na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Organização: Rute Borba e Gilda Guimarães
Editoração: Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Diagramação e Arte: André Luis Albuquerque

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pesquisa e atividades para o aprendizado
matemático na educação infantil e nos anos
iniciais do ensino fundamental [livro eletrônico]/
Rute Borba e Gilda Guimarães, (org.) . --
Brasília : Sociedade Brasileira de Educação
Matemática - SBEM, 2015.
5.098 Kb ; PDF

1. Educação - Finalidade e objetivos
2. Aprendizado 3. Matemática (Ensino fundamental)
4. Matemática - Estudo e ensino 5. Prática de ensino
6. Professores - Formação 7. Sala de aula -
Direção I. Borba, Rute. II. Guimarães, Gilda.

15-10322 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Sumário

O GT 01 – Grupo de Trabalho 01 - Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM – é composto por pesquisadores e professores que ensinam ou investigam o ensino e o aprendizado de Matemática no início da escolarização e/ou atuam como docentes em cursos de formação de professores dos segmentos iniciais do ensino. Diversas têm sido as ações desse grupo de trabalho, no sentido de promover debates sobre a educação matemática de crianças: publicações em periódicos e em anais de congressos científicos, livros e capítulos de livros, eventos e cursos, dentre outras ações.

É com muito prazer que apresentamos mais essa produção do GT01. O grupo apresenta agora uma terceira publicação da Coleção SBEM. As duas publicações anteriores intitularam-se *Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula* (volume 2 da Coleção SBEM) e *Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos inicias de escolarização* (volume 6 da coleção). Assim como nas publicações anteriores, essa terceira obra tem como preocupação a articulação das pesquisas efetuadas na área com práticas em sala de aula.

É também uma honra que o GT01 seja o primeiro grupo de trabalho a lançar, pela SBEM, um *e-book*, ou seja, um livro em formato digital. Esse *e-book*, de livre acesso a todos os interessados no ensino e na aprendizagem da Matemática, baseia-se em recentes investigações desenvolvidas por membros do GT01. Desse modo, esse *e-book* busca trazer claras contribuições para a sala de aula da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Em cada um dos capítulos são apresentados resultados de pesquisas referentes à Educação Matemática de início de escolarização e neles são apresentadas reflexões sobre como a Matemática pode ser trabalhada com crianças, bem como trazem, direta e indiretamente, sugestões de atividades que podem ser vivenciadas em sala de aula junto às crianças. Esperamos, assim, que as experiências exitosas relatadas nesse *e-book* possam servir de inspiração para um trabalho criativo e proveitoso, que resulte no desenvolvimento matemático de crianças da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Sendo o foco desse *e-book* a escola e, mais particularmente, a sala de aula da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – seja com o olhar mais voltado para as ações dos estudantes, seja para as ações do professor – são apresentadas temáticas variadas, as quais retratam a diversidade de possibilidades de trabalho com a Matemática junto às crianças. Nos capítulos são, assim, tratados conteúdos diferentes – alguns relativamente novos nos currículos e outras temáticas mais usuais aos anos iniciais de escolarização, mas com novas perspectivas de como trabalhá-las efetiva e eficazmente em sala de aula.

A primeira das temáticas do e-book é o trabalho que trata a produção de discursos algébricos por crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental. Ana Vírginia Luna, Elizabeth Souza e Cremilzza Souza no capítulo "*Caminhos discursivos multimodais na aprendizagem da álgebra no primeiro ano do Ensino Fundamental"* analisam o caminho discursivo multimodal constituído entre uma professora e crianças em torno da aprendizagem da álgebra. Elas argumentam que esse caminho discursivo considera múltiplas formas de produções discursivas das crianças como legítimas e constitutivas do discurso matemático algébrico. O estudo é realizado à luz da perspectiva teórica de Matemática como Discurso de Sfard (2008) e apresenta implicações para o desenvolvimento do discurso algébrico pelas crianças.

Probabilidade e *Combinatória* compõem outra temática tratada no *e-book* – conteúdos também mais recentes nos currículos de início de escolarização e, na prática, ainda pouco trabalhados em sala de aula da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Rute Borba, Rita Batista e Juliana Azevedo, do Geração – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório – apresentam o capítulo *"Levantando possibilidades para o desenvolvimento dos raciocínios probabilístico e combinatório de crianças em anos iniciais de escolarização"* e nele tratam de tipos de pensamentos mais avançados que podem ser trabalhados desde cedo com as crianças e desenvolvidos ao longo de suas escolarizações. A partir de noções básicas da Probabilidade e de relações presentes na Combinatória, as autoras falam de como esses conteúdos se articulam, em particular por intermédio do levantamento de espaços amostrais. Para tal, apresentam jogos e *software* que foram testados e podem ser trabalhados junto às crianças de início de escolarização para o desenvolvimento de seus raciocínios probabilístico e combinatório.

Mais uma temática ainda não muito usual nas salas de aula de anos iniciais é o trabalho com *escalas em representações gráficas*. Gilda Guimarães, Milka Cavalcanti e Betânia Evangelista no capítulo *"Compreensão de escala nos anos iniciais"* buscam, a partir de estudos realizados pelo Grupo de Pesquisa Gref – Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental, refletir sobre a aprendizagem de escalas representadas em gráficos de barras e de linha com adultos e crianças dos anos iniciais de escolarização. As autoras trazem evidências de que a experiência de vida não é suficiente para a compreensão dessa representação, mas que os alunos são capazes de uma aprendizagem em curto espaço de tempo se incentivados a refletir sobre as mesmas de modo sistemático. Dessa forma, fica posta a possibilidade e necessidade da escola trabalhar, desde os anos iniciais, a compreensão sobre escala.

Dentre as formas de cálculo trabalhadas em início de escolarização, temos o *cálculo mental* como um desafio, ainda mais quando se trata de trabalhá-lo numa *proposta inclusiva*. Clélia Nogueira, Maria Emília Zanquetta e Fábio Borges no capítulo *"Surdez, Libras e Educação Matemática: o cálculo mental em questão"* realizaram uma investigação acerca das possibilidades de uma estratégia metodológica de cálculo mental em uma perspectiva dialógica em Libras, para a construção dos conhecimentos matemáticos relativos ao Sistema de Numeração Decimal e às operações do Campo Aditivo (adição e subtração). Os autores observaram que uma dinâmica dialógica favoreceu a troca de ideias e o desenvolvimento da autonomia dos participantes, proporcionando um avanço qualitativo do raciocínio, bem como aumentou a capacidade de concentração dos alunos e colaborou para a compreensão, o enriquecimento e a flexibilização dos procedimentos algorítmicos. Com a intervenção foi possível vislumbrar as potencialidades de uma exploração pedagógica adequada da Libras como língua veicular, em particular para um trabalho de cálculo mental junto a crianças surdas.

O trabalho com os *números e operações* em início de escolarização também pode ser realizado por meios diferenciados como na produção de *Performances Matemáticas Digitais*. Ricardo Scucuglia e Alana Rodrigues apresentam no capítulo *"Discursos de Professores e Futuros Professores dos Anos Iniciais sobre Aprendizagem Significativa em Performance Matemática Digital"* uma discussão acerca de discursos de estudantes de graduação em Pedagogia (futuros professores) e de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre a noção de aprendizagem significativa, envolvendo a análise de Performances Matemáticas Digitais. Os autores observaram que o discurso dos professores e futuros professores revelou a existência de aspectos que caracterizam a aprendizagem significativa na análise de materiais educacionais que podem fomentar futuras atividades didático-pedagógicas e de pesquisa no que se refere à utilização e produção de Performances Matemáticas Digitais no início da escolarização básica.

Articulado à *literatura infantil*, pode ser também um modo de se trabalhar a Matemática nos anos iniciais de escolarização, em particular no estudo de *frações*. Angélica Garcia Silva, Tânia Campos e Ruy Pietropaolo em seu capítulo *"Literatura infantil e Matemática: possibilidades para ampliar o trabalho com os diferentes significados das frações"*, apresentam ideias partilhadas por pesquisadores e professores que lecionam Matemática, durante uma formação continuada, acerca da introdução do conceito de fração nos anos iniciais. Os autores também analisaram o processo de aplicação, em salas de aula, de uma sequência de atividades selecionadas por professores participantes dessa formação, utilizando material manipulável e literatura infantil como contexto para a problematização. Observaram contribuições do processo formativo no desenvolvimento profissional dos professores participantes, os quais modificaram suas práticas por meio da abordagem do conceito de fração – em seus diferentes significados, tais como parte-todo e quociente – a partir da literatura infantil.

O recurso à *literatura infantil* e à linguagem das *artes* pode ser outra forma de abordar conceitos matemáticos no início da escolarização – em particular quando se trata do estudo da *Geometria*. Ana Abrahão, no capítulo intitulado *"Práticas interdisciplinares: opções de aprendizagem matemática significativa"*, com base em estudos realizados por pedagogos em formação e por professores dos anos iniciais, propõe práticas para desenvolver conceitos geométricos de forma contextualizada e articulada a outros componentes curriculares. As propostas de criação de livros paradidáticos, visitas a exposições de arte, bem como análise de obras de artes presentes em livros didáticos de Matemática, possibilitaram a articulação de diferentes disciplinas no estudo da geometria no início da escolarização básica. As propostas interdisciplinares, dessa forma, possibilitam caminhos para aprendizagens contextualizadas e significativas para as crianças.

A *Geometria* também se faz presente no capítulo de Edda Curi e Solange Mariano, intitulado *"A comunicação e a interpretação do espaço por crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental: algumas considerações"*. As autoras apresentam, nesse capítulo, uma pesquisa realizada no âmbito do Grupo de Pesquisa CCPPM - Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática. Observaram que as atividades relativas às relações espaciais propostas em livros e em materiais didáticos não contemplam as três competências básicas do domínio do Espaço: a comunicação, a representação e a interpretação. As autoras apresentam reflexões sobre sequências de atividades desenvolvidas com crianças de 8-9 anos, evidenciando que a compreensão do pensamento dos alunos ao desenvolverem as atividades e a discussão de seus procedimentos permitiram avanços nas aprendizagens das crianças e também nas práticas da professora participante do estudo.

Refletir sobre os *algoritmos* também se faz necessário no ensino de Matemática dos primeiros anos de escolarização. Reflexões nesse sentido estão presentes no capítulo *"'Vai' e 'empresta': a relação ente o conceito e o procedimento, entre o ensino e a aprendizagem"*. As autoras, Leila Da Costa e Regina Pavanello, apresentam e discutem resultados de uma pesquisa referente a números e operações, tendo como ponto de partida a reflexão sobre erros em produções de alunos e o conhecimento necessário a professores para auxiliar no aprendizado matemático das crianças. Concluem que o ensino de algoritmos precisa partir dos conhecimentos que as crianças já possuem e a análise da produção delas se mostrou bastante benéfica à formação das professoras do estudo. Um outro aspecto destacado foi a vontade das professoras em realizarem um trabalho com resultados mais positivos, de modo a possibilitar o desenvolvimento da compreensão das crianças referentes aos algoritmos utilizados no Sistema de Numeração Decimal.

Esperamos que a leitura desse *e-book* seja de bom proveito a todos os interessados nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – em seus amplos conteúdos e abordagens. Que os conteúdos *novos* e *antigos* possam se vestir de novas roupagens e, a partir dos resultados de pesquisa aqui discutidos, avanços no aprendizado matemático de nossas crianças se torne um fato comum em nossas escolas.

Destacamos, por fim, que os e-mails de contato dos autores de cada um dos capítulos estão colocados para que haja abertura de diálogo com outros pesquisadores e com professores que queiram comentar as investigações desenvolvidas e também compartilharem as suas pesquisas realizadas, bem como as suas experiências vivenciadas em sala de aula.

Rute Borba

Gilda Guimarães

(Organizadoras)

Caminhos Discursivos Multimodais na Aprendizagem da Álgebra no Primeiro Ano do Ensino Fundamental

Ana Virgínia de Almeida Luna[1]
Elizabeth Gomes Souza[2]
Cremilzza Carla Carneiro Ferreira Souza[3]

Introdução

Realizar generalizações, identificar padrões, fazer relações entre variáveis, representar simbolicamente em termos matemáticos situações matemáticas e extramatemáticas são exemplos de práticas escolares relativas à álgebra (BRASIL, 1998). A importância da inserção de tais práticas no contexto escolar é reiterada em alguns discursos curriculares oficiais como os dos Estados Unidos (NTCM, 2000).

Neste artigo, adotamos a álgebra em uma perspectiva discursiva (SFARD, 2008). Trata-se uma opção ontológica que considera a matemática uma produção humana constituída *nas e pelas* produções discursivas dos sujeitos. Nessa direção, os discursos matemáticos que podem ser orais, escritos, gestuais, etc., são vistos como a constituição da própria matemática e não a representação simbólica dela (SFARD, 2008).

A expressão *discurso algébrico* compreende o discurso como elemento de análise em si. Sua produção embora individual, é concebida como produto da participação do indivíduo na comunidade de pessoas que produzem esse discurso. O discurso não representa nada, ele mesmo é visto como elemento constituidor e constituinte da comunidade. Assim, difere-se do uso da expressão pensamento algébrico (KIERAN, 1996), por exemplo. Neste último, o discurso é tomado como *representação* de esquemas cognitivos mobilizados individualmente.

No Brasil, o ensino do discurso algébrico está presente nas orientações curriculares nacionais para os anos finais do Ensino Fundamental. No entanto, muitos autores apontam para a aprendizagem do discurso algébrico pelas crianças se constituir de forma gradual durante os diversos anos do período de escolarização.

[1]Professora Doutora da Universidade Estadual de Feira de Santana- Bahia. Coordenadora do Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Feira de Santana (NEEMFS) e da equipe pedagógica da Escola Despertar-Bahia. Diretora Regional da SBEM-BA. andrluna@uol.com.br

[2]Professora Doutora da Faculdade de Educação Matemática e Científica e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará - Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI). Membro do Grupo de Estudos em Modelagem Matemática e Grupo de Estudos de Linguagem Matemática. elizabethgs@ufpa.br

[3]Coordenadora da Escola Despertar. Vice-coordenadora do Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Feira de Santana (NEEMFS). Professora da Rede Pública Municipal de Ensino de Feira de Santana.cremilzza@yahoo.com.br

A maneira gradual pela qual o discurso algébrico pode ser inserido dos anos iniciais, é denominada por alguns autores de "álgebra elementar" (CASPI; SFARD, 2012, tradução nossa, p.1), "álgebra inicial" (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, p. 3, tradução nossa) e ainda de pré-algebra (VALE et. al., 2006). Trata-se de estudos pelas crianças de elementos básicos desse discurso, a fim de formar um repertório discursivo para a compreensão de elementos mais formalizados do discurso algébrico nos demais anos de escolaridade (THOMPSON, 1995). Neste artigo, não faremos distinção classificatória e utilizaremos a expressão ampla de discursos algébricos, considerando, porém, que estes discursos se constituem de maneira situada e distinta nos diferentes níveis de ensino.

A produção desses discursos pode assumir configurações diversas, como: resolução de problemas que envolvam sua compreensão entre diversos formatos (imagens, tabelas, símbolos matemáticos, desenhos, em termos simbólicos, linguagem natural); tarefas que suscitem a descrição e a identificação de padrões e regularidades, bem como tarefas escolares que objetivem desenvolver o estabelecimento de relações entre grandezas, entre outros (NCTM, 2000; SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007).

Além disso, essa inserção deve ocorrer em conexão com os demais discursos matemáticos desenvolvidos nos anos iniciais, como o discurso geométrico, aritmético, estatístico, entre outros, em contraposição a sua inserção ocorrer de forma pontual e desconectada (KIERAN, 2004; LINS; GIMENEZ, 1997).

Todavia, a inclusão do discurso algébrico nas salas de aula dos anos iniciais precisa ter o envolvimento dos professores desse nível de escolaridade. Freire (2011) identificou em sua pesquisa que alguns professores não inserem tal discurso por se sentirem inseguros com a produção discursiva das crianças e com a elaboração de tarefas escolares adequadas ao nível de escolaridade delas.

Com isso, este estudo visa identificar e analisar o caminho discursivo constituído entre professoras e crianças do primeiro dos anos iniciais na produção de discursos matemáticos algébricos. As análises desse estudo podem trazer indícios para os professores sobre a produção matemática algébrica que pode ser suscitada pelas crianças a partir de determinadas escolhas discursivas do professor.

O Discurso matemático escolar

A Matemática escolar, expressão frequentemente utilizada para designar um conjunto de conhecimentos abordados no âmbito escolar, é concebida neste texto como de Discurso matemático escolar (SFARD, 2008). Assim, definimos Discurso[4] matemático escolar toda produção discursiva constituída no âmbito escolar sob status de "disciplina de Matemática". Entendemos como produção discursiva, as produções verbais, gestuais, escritas, pictóricas, entre outras elaboradas pelos participantes do discurso.

Reiteramos conforme aponta Sfard (2008) que a assertiva de a Matemática escolar ser um Discurso atribui a ele uma instância própria, ou seja, o Discurso não é concebido como a expressão, ou simplesmente um *meio* pelo qual, as atividades matemáticas se manifestam ou são representadas. O discurso verbal, escrito ou gestual, quando produzidos pelos sujeitos é entendido como Matemática escolar e não a expressão dela.

As atividades comunicativas que constituem o Discurso matemático escolar são extensas e diversificadas. "Falar"[5] de números e de formas geométricas são algumas dessas atividades. Nessa direção, o discurso algébrico é constituído pelo conjunto de produções discursivas que caracterizam tal discurso como algébrico, a exemplo, a identificação de regularidades e padrões, o uso de simbologia para indicar grandezas, descrever variações, entre outros.

Aprendizagem do Discurso matemático escolar

Um Discurso se intitula como matemático escolar, das ciências biológicas ou das ciências humanas, pelos *usos que possuem as palavras* que compõem os discursos dos participantes. Assim, o Discurso matemático escolar se define pelos *usos* peculiares que as palavras, nesse caso, as palavras matemáticas possuem.

No Discurso matemático escolar, as palavras possuem seus *usos* já normatizados, ou seja, advém de elaborações históricas, as quais foram instituídas e cristalizadas em atividades nominadas de Matemática. A essa normatização, denominaremos de *usos regidos por regras.*

[4]Utilizamos a expressão discurso em letra minúscula para nos referirmos aos discursos produzidos pelos sujeitos individualmente. Enquanto utilizamos Discurso, com letra maiúscula, quando estamos nos referindo ao conjunto de atividades discursivas matemáticas produzidas pelos sujeitos, frequentemente, intitulada de Matemática escolar.

[5]Quando utilizarmos o verbo "falar" entre aspas, estamos indicando que este deve ser entendido de maneira ampla, se estendendo a outras formas de manifestações discursivas, como o discurso escrito e o discurso gestual.

Para Sfard (2008) esse caráter regrado dos usos das palavras matemáticas imprime a necessidade de *participação*[6] *no* Discurso, para que ocorra a aprendizagem matemática. Essa participação diz respeito à participação em atividades matemáticas, ou seja, os aprendizes devem *se engajar no uso regrado das palavras matemáticas*. Tal inserção e participação no discurso é somente possível por meio de uma pessoa cujo discurso seja formado por *usos* de palavras matemáticas peculiares ao Discurso matemático escolar.

A aprendizagem matemática com base nessas concepções pode ser compreendida como sendo aprender os *usos* peculiares das palavras matemáticas relativas ao Discurso matemático escolar. Em termos discursivos, a aprendizagem matemática ocorre quando "fala-se" um discurso em que os usos das palavras são usos historicamente estabelecidos.

No contexto escolar, o professor de Matemática é identificado como alguém cujo discurso segue os usos das palavras matemáticas, tal qual foram historicamente instituídas. Assim, na prática de aprendizagem do Discurso matemático escolar, o professor tem a função de apresentar aos participantes aprendizes, *como* as palavras matemáticas são usadas nesse Discurso e ainda de avaliar, se os aprendizes *usaram* ou não as palavras, à luz do Discurso matemático escolar.

Nesse processo de interação, a produção discursiva geradora de discursos legítimos ocorre, segundo Sfard (2008), a partir do estabelecimento de acordos na maioria das vezes implícitos, na condução discursiva a ser produzida entre os participantes do Discurso.

Um dos acordos, o acordo sobre o "discurso líder", descritos por Sfard (2008, p.283, tradução nossa) envolve a decisão a respeito de quais dos *usos* serão adotados como legítimos diante de uma gama de produções discursivas.

Para Sfard (2008), o discurso do professor é o discurso líder, ou seja, o uso que o professor atribui às palavras matemáticas é o uso a ser considerado legítimo naquela *prática* de aprendizagem matemática, o discurso modelo para a mudança discursiva dos alunos. Por conta disso, os alunos devem se alinhar ao discurso matemático do professor, realizando mudanças discursivas para os usos historicamente estabelecidos.

Assim, aprender o Discurso matemático algébrico pelas crianças compreende o alinhamento das produções discursivas delas à produção discursiva legítima produzida pelo professor. As crianças se

[6]O termo participação é utilizado com referência em Wenger (1998), mas nesse caso, participação refere-se ao engajamento na prática de atribuir usos legítimos às palavras matemáticas do Discurso matemático escolar.

tornarão "falantes" do Discurso algébrico quando identificarem relações entre variáveis, regularidades e padrões, produzirem sequências, entre outros.

Neste artigo, a compreensão de palavras matemáticas no Discurso matemático escolar não se limitará às configurações escritas, orais, pictóricas e gestuais, assumidas por Sfard (2008), Caspi e Sfard (2012). Inspiradas nos estudos de Radford et al. (2009) e Radford (2014), também consideramos palavras matemáticas aquelas de natureza *embodied*[7].

A perspectiva ontológica de cognição *embodied* (RADFORD et al., 2009) ou atividade *embodied* (RADFORD, 2014) assume o corpo como elemento constituinte da cognição humana, portanto da atividade matemática dos indivíduos.

Para Radford (2014, p. 350, tradução nossa), "o corpo, a mente e o mundo são entidades interrelacionadas". O corpo molda a cognição e esta não se resume a atividades mentais, mas ao contrário, é constituída por elementos culturais e sociais dos indivíduos. Neste artigo, essa perspectiva é analisada à luz das ideias de Matemática como Discurso de Sfard (2008), assim, o corpo é concebido como o próprio discurso matemático e a cognição como forma de comunicação individual.

A seguir, descrevermos os alunos e a professora cujas produções discursivas de diferentes naturezas serão tomadas para análise.

Os participantes do Discurso algébrico e atividade algébrica *embodied*

Neste artigo, analisaremos a produção discursiva de crianças e suas interações discursivas com sua professora na dinâmica do desenvolvimento de discursos algébricos. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 1995), pois visamos delinear compreensões a respeito do caminho discursivo dos participantes do Discurso.

A professora Márcia e seus alunos[8] do primeiro ano do ensino fundamental realizaram uma atividade cujo objetivo era identificar regularidades e construir sequências simbólicas a partir de uma atividade *embodied*. A atividade foi desenvolvida em uma escola particular da cidade de Feira de

[7]Manteremos a tradução em seu original, em função de não identificarmos uma tradução que englobe os significados da palavra no idioma de origem.

[8]Os participantes do Discurso analisados neste artigo, bem como seus respectivos responsáveis no caso das crianças, assinaram termo de consentimento livre e esclarecido, no qual consta o aceite no uso das imagens, discursos e nomes fictícios pelas autoras desse artigo.

Santana/Bahia, com 26[9] (vinte e seis) crianças com idades entre 6 (seis) e 9 (nove) anos do 1º ano do Ensino Fundamental e teve duração de 6(seis) dias.

As aulas foram gravadas em vídeo e suas transcrições e observações foram realizadas pela própria professora. Adotamos trechos do referido material de transcrição, descrição e observação da professora como fonte de dados de análise. Os trechos estão identificados de trecho 1, 2 e 3.

A professora regente da turma que planejou a atividade possuía no momento de coleta de dados 7(sete) anos de atuação docente. Formou-se em Pedagogia no ano de 2009 e quando concluiu o curso já atuava como professora auxiliar nessa mesma instituição – toda sua experiência profissional foi centrada na atuação nessa escola.

Nos trechos discursivos analisados, identificamos o discurso da professora pela sigla "Profa", das crianças individualmente "Cça" e das crianças quando produziram o mesmo discurso, optamos por indicar por meio da sigla "Cças". Além disso, os comentários da professora estão identificados com dois parênteses.

As interações discursivas da atividade algébrica

Atividade foi iniciada a partir da solicitação da professora Márcia ao professor de música da escola para que o mesmo conduzisse a realização pelas crianças de movimentos corporais sequenciados e repetidos. O professor de música pediu às crianças que realizassem determinados movimentos do corpo ao serem pronunciadas algumas palavras de comando. Em seguida, a professora assumiu a dinâmica da aula, dispondo a turma, para iniciarem uma roda de conversa sobre esse primeiro momento. A seguir, uma imagem da turma e o trecho 1 selecionado para análise nesse artigo.

Imagem 1: Crianças do 1º ano e professor de Música realizando movimentos corporais solicitados pela professora

Profa [1]: O que vocês fizeram hoje na aula de música?
Cças [2]: Dançamos, foi muito legal!
Profa[3]: Foi uma dança livre? **Cada um dançou do jeito que queria**?
Cça[4]: Não. Ele ensinou **4 movimentos.**
Cças[5]; ***Perna aberta, braço aberto, braço acima da cabeça e mãos fechadas no peito*** ((como se tivesse rezando)).
Cça[6]: Depois ele formou uma fila e foi dizendo onde começava e terminava cada movimento.
Cça[7]: Aí, a gente foi fazendo.

[9]As frequências das crianças variaram nos seis dias do desenvolvimento da atividade.

A professora Márcia escolheu iniciar a produção de discursos algébricos das crianças, buscando a identificação de regularidades em uma situação, a partir de movimentos *embodied*, questionando: “foi uma dança livre?”[3]. Esses movimentos foram produzidos durante a aula de um professor que conduz a produção de discursos **relativos ao campo musical**, e não do discurso matemático escolar, propriamente. Os movimentos foram quatro e a uma das crianças notou que eles se repetiam [7].

Em seguida, na roda de conversa, a professora questiona as crianças a respeito da característica dos movimentos realizados, em particular sobre a sua padronização, “cada um dançou do jeito que queria?”[3]. A pergunta da professora conduziu as crianças a produzirem discursos sobre a identificação da **natureza** dos movimentos realizados por elas, [4], [5] e [7]. A seguir, o trecho 2 de análise.

> Profa [8] **Os movimentos eram todos misturados**?
> Çças [9]: **Não**. Primeiro tinha que abrir as pernas, depois abria os braços, levantava acima da cabeça e terminava com mãos fechadas. Aí começava **tudo de novo**.
> Profa[10]: **Quando a gente faz algum movimento e repete várias vezes o mesmo movimento, que nome damos a esta repetição?**
> Cça[11] Acho que é **sequência.**
> Profa [12]: **Sequência de quê?**
> Cças [13]: **Sequência de movimentos**.
> Profa[14]: **Isso mesmo**. Vocês fizeram uma sequência de movimentos.
> Em seguida, **desenhamos na lousa quatro bonequinhos** representando os movimentos descritos pelo grupo seguindo a sequência[10].

Nos discursos analisados acima, podemos identificar que a professora, após criar a identificação da natureza dos movimentos, faz questionamentos no intuito de gerar a produção algébrica das crianças a respeito da presença, ou não de regularidades nos movimentos, por meio da seguinte pergunta “os movimentos eram todos misturados?”

O discurso da professora produziu discursos almejados e uma das crianças explicou a **ordem** dos movimentos e o período de sua **repetição** [9]. Em seguida, a professora conduziu as crianças para produção do vocabulário matemático legítimo relativo à denominação de movimentos regulares, suscitando o uso correto da palavra [10]. No trecho de número 14, podemos notar que a professora reiterou estar correto no Discurso matemático escolar, o uso da palavra **sequência** pelas crianças.

Na finalização deste trecho, a professora relata que inseriu no quadro branco desenhos que reproduzissem os movimentos do corpo desenvolvidos no início da atividade com o professor de música. A seguir, a continuação da produção discursiva da professora e das crianças.

[10]Trata-se de comentários da própria professora extraído do material de transcrição, descrição e análise realizado pela mesma.

Profa[15]**: Como poderiam representar esta sequência usando outros símbolos?**
Cça [16]: Usando **cores** (verde, laranja, vermelho e azul) **aí vai repetindo**.
Cça [17]: Com a **sequência dos números** crescente.
Cça [18]: **Pode usar sequência de letras AB, AB, AB, AB**.
Cça [19]: **Formas geométricas** (círculo, triângulo, quadrado, retângulo)
Após este momento pedimos às crianças que **registrassem em uma folha em branco as sequências mencionadas** por elas representando a sequência dos movimentos feitos na aula de música**.**

Neste trecho, podemos notar que a professora por meio de sua pergunta, suscita que as crianças identifiquem formas de construir a sequência de movimentos do corpo não mais por meio de desenhos, mas que produzissem discursos algébricos simbólicos.

As respostas das crianças apontaram para uma diversidade de possibilidades pelas quais elas poderiam elaborar discursos algébricos a respeito das regularidades identificadas na sequência dos movimentos.

As crianças, além de perceberem essas possibilidades (cor, número, letras, formas geométricas) e a necessidade de repetição (“e aí vai repetindo” [16]), produziram discursos a respeito da quantidade de letras, cores, números e formas geométricas necessárias para compor a sequência de movimentos. Os quantitativos foram sugeridos em função dos quatros movimentos corporais realizados por elas.

Para finalizar a produção discursiva das crianças, a professora relata que solicitou que elaborassem discursos algébricos na forma escrita sobre os padrões e regularidades dos movimentos corporais, com base na simbologia escolhida por elas. Seguem algumas imagens das crianças na realização de suas produções.

Imagem 2: Crianças desenhando sequências simbólicas dos movimentos *embodied*

Imagem 2: Crianças desenhando sequências simbólicas dos movimentos *embodied*

O caminho discursivo dos participantes do Discurso

Nos discursos produzidos no processo de interação discursiva entre professora e as crianças podemos identificar que a professora conduziu a produção discursiva algébrica pelas crianças de forma gradual.

O início da atividade consistiu em uma atividade matemática *embodied na* qual sequências e regularidades foram corporificadas. O caminho discursivo produzido pelas crianças e pela professora foi finalizado pela produção de discursos simbólicos.

Assim, a natureza *embodied* da atividade foi adotada pela professora como base para gerar as demais produções discursivas relativas ao discurso algébrico. Para isso, a professora *usou* palavras que conduziram as crianças para identificação de características específicas na sequência de movimentos corporificados por elas. Como por exemplo, "os movimentos eram **misturados**?", "quando os movimentos se **repetem**, nomeamos de quê?

Em outros momentos, a professora usou palavras que suscitassem a produção discursiva algébrica necessária para a identificação do movimento, sua regularidade e registro, como a realização de desenhos sobre os movimentos e a solicitação de registro escrito dos referidos movimentos e de sua repetição.

De maneira geral, podemos dizer que a interação entre a professora e as crianças com vistas a suscitar a produção de discursos algébricos seguiu o caminho discursivo seguinte: a professora solicitou a realização *embodied* do discurso algébrico (produção discursiva corpórea) → identificação do movimento (produção discursiva oral) → observação sobre o movimento e sua repetição (produção discursiva oral) → denominação oral legitima do movimento (produção discursiva oral) → o registro escrito em forma de desenho (produção discursiva pictórica) → elaboração de registros escritos simbólicos (produção discursiva oral) → elaboração de registros escritos simbólicos (produção discursiva escrita).

O caminho discurso apresentado acima indica que a produção de discursos algébricos pelas crianças assumiu uma natureza *multimodal*, podendo esta se assinalar como uma característica nos anos iniciais. A *multimodalidade* envolve a ideia de que a cognição humana é moldada por diferentes formas de comunicação: a corpórea, a escrita, oral, pictórica, simbólica, entre outras, são exemplos de discursos que moldam/configuram a cognição e jogam papel constituinte na aprendizagem matemática (ARZARELLO; ROBUTTI, 2010).

A possibilidade de produzir o referido discurso algébrico foi permeada por um padrão interativo de perguntas e questionamentos pela professora às crianças. Em alguns momentos, podemos notar que seu discurso foi o discurso líder para a produção discursiva das crianças, mas as crianças também elaboraram tal discurso. Isso ocorreu quando as crianças apontaram como poderiam simbolicamente representar a sequencia de movimentos, registradas em [16] [17] [18] e [19]. Esse fato pode indicar que um estilo de interação aberto, em forma de questionamentos possibilita que as crianças elaborem seus discursos matemáticos legítimos e não apenas a professora.

Também, a inserção de um professor que não participa de forma institucional do Discurso matemático escolar, permitiu que as crianças elaborassem discursos algébricos escritos a partir da produção de discursos algébricos *embodied*.

> **"Foi uma atividade muito legal porque aprendemos a criar outras sequências usando outros símbolos: letras, cores, números e formas geométricas"**

As crianças nos anos iniciais podem se envolver em atividades algébricas, destacam diversos autores (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2007; THOMPSON, 1995). Esse envolvimento é importante para a sua *participação* legítima em atividades algébricas nos demais níveis de escolarização ocorrer de maneira sólida (NTCM, 2000; LINS; GIMENEZ,1997; VALE et al. , 2006).

Este artigo identificou que o caminho discursivo *multimodal* constituído pela professora e pelas crianças pode gerar discursos algébricos que considera múltiplas formas de produções discursivas das crianças como legítimas e constitutivas do discurso matemático algébrico.

O caminho discursivo da turma analisado neste artigo não será o mesmo, ainda que a professora Márcia realize essa atividade em outra turma. Não objetivamos ser prescritivo ao apresentar esse caminho. Ao contrário, intencionamos evidenciar que as crianças produzem diferentes discursos matemáticos e a abertura do professor para esse tipo de participação *no* Discurso matemático escolar pode ser uma regularidade pedagógica fértil para a elaboração de discursos matemáticos ricos e legítimos no primeiro ano do Ensino Fundamental.

Agradecimentos

Agradecemos às crianças, à professora, ao professor de Música e aos pais pelo aceite em ceder as imagens e os discursos das crianças para análise nesse artigo. Também, somos gratas pelos comentários realizados pelos avaliadores *ad hoc* do GT-01 do SIPEM, à versão prévia deste artigo.

Referências

ARZARELLO, F; ROBUTTI, O. Multimodality in multi-representational environments. *ZDM* (*Mathematics Education*), v. 42, p. 715-731, 2010.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática/Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARREHER, D. W; MARTINEZ, M; SCHILIEMANN, A.D. Early Algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,*v.40, p.3-22, 2008.

CASPI,S ; SFARD,S. Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra, S. *International Journal of Educational Research*, p. 1-21, 2012.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Ed.) *Handbook of qualitative research.* 3. ed. Thousand Oaks: Sage, 2005.

FREIRE, S. R. *Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental*. 2011. 181 p. Tese (Doutorado em Educação Brasileira). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

KIERAN, C. The changing face of school algebra. In.:. ALSINA, C, J et. al (Orgs). In.: *International Congress on Mathematical Education*, Espanha: ICMI, 1996, p. 271-290.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades*:* What is it? *The Mathematics Educator*, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MIORIM, M. Â; MIGUEL, A; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro.*Zetetikê*, ano I, n. 1, 1993.

NCTM. Nacional council of teaches of mathematics. *Principles and Standarts of School Mathematics*. 2000. Disponível em : <http://standardstrial.nctm.org/document/index.htm>. Acesso em: 20 jul. 2015.

RADFORD, L. et al. On embodiment, artifacts, and signs: a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In.:CHICK, H.J. ; VINCENT, J.L. (Org.). *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne: PME, 2009, pp. 113-120.

RADFORD, L. Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition, *ZDM*, v.46., p. 349-361, 2014.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic:* From Children's Ideas to Classroom Practice. 1ª ed. USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

SFARD, A. *Thinking as communicating*: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press, 2008.

THOMPSON, F.M. O ensino de álgebra para crianças mais novas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. p. 79-88.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no Ensino-Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, I.; PIMENTAL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Org). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006.

WENGER, E. *Communities of practice*: learning, meaning, and identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

Capítulo 2

Levantando Possibilidades para o Desenvolvimento dos Raciocínios Probabilístico e Combinatório de Crianças em Anos Iniciais de Escolarização

Rute Borba[1]
Rita Batista[2]
Juliana Azevedo[3]
Universidade Federal de Pernambuco[4]

Iniciando a Conversa

A cada dia, as crianças têm mais e mais acesso a informações variadas e precocemente entram em contato com conceitos mais complexos. A escola não pode ignorar esse fato e precisa se preparar para discutir esses conceitos, em modos acessíveis às crianças, e, assim, auxiliar no desenvolvimento de raciocínios mais avançados. A partir de noções intuitivas possuídas pelos estudantes, formas de pensar mais complexas podem se desenvolver, por intermédio de eficientes ações promovidas em sala de aula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997), ressaltam a importância de que desde o início da escolarização se trabalhe com um amplo espectro de conteúdos e inclui-se – na mesma direção do movimento mundial – a recomendação de se trabalhar com Estatística, Probabilidade e Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A justificativa para essa recomendação se dá baseada em demanda social, pois as crianças estão desde cedo em contato com conceitos estatísticos e vivenciam, cotidianamente, situações combinatórias e probabilísticas.

Com relação à Probabilidade, os PCN apontam a necessidade dos alunos do início de escolarização compreenderem noções básicas – tais como a *aleatoriedade*, o *acaso* e a *incerteza*. Quanto à Combinatória, os PCN, recomendam, desde os anos iniciais, o trabalho com situações de diferentes tipos de problemas: *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*. Nesse sentido, é preciso discutir, junto a professores, como se podem trabalhar esses conceitos mais complexos de modo acessível às crianças em início de escolarização.

[1]Professora da Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco e Líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE - Geração. resrborba@gmail.com
[2]Professora de Matemática da Educação Básica. Mestranda em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. rita_mat_@hotmail.com
[3]Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica. azevedo.juliana1987@gmail.com
[4]As autoras fazem parte do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE – Geração. Maiores informações sobre o grupo e os textos desenvolvidos pelo mesmo podem ser acessados em: http://geracaoufpe.blogspot.com.br/

No presente capítulo, discutimos resultados de pesquisas realizadas junto a alunos de anos iniciais, referentes a seus conhecimentos de Probabilidade e de Combinatória. Antes de discutirmos cada um dos estudos efetuados, apresentamos breves discussões sobre esses conteúdos e como se tem recomendado que os mesmos sejam abordados no início da escolarização. Em seguida, apresentamos as pesquisas por nós desenvolvidas, Batista e Borba (2015) e Azevedo e Borba (2013) e os resultados que obtivemos. Por fim, discutimos implicações para o trabalho com Probabilidade e com Combinatória em sala de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Discutindo o Ensino de Probabilidade e de Combinatória nos Anos Iniciais

Piaget e Inhelder (1975) afirmaram que o *raciocínio combinatório* é fundamental para o aprendizado de Probabilidade por parte de crianças, ou seja, as noções probabilísticas são essencialmente de natureza combinatória. Esse tipo de raciocínio é, portanto, essencial no levantamento de todas as possíveis combinações do *espaço amostral*.

Bryant e Nunes (2012) alertam que há importantes condições a serem consideradas no levantamento de possibilidades do *espaço amostral.* É necessário que as crianças percebam: a) que não podem ser incluídas combinações impossíveis (como tirar 7 no lançamento de um dado, por exemplo), b) que é necessário incluir todos os casos possíveis (sendo assim, por exemplo, o *espaço amostral* do lançamento simultâneo de duas moedas: Cara-Coroa, Coroa-Cara, Coroa-Coroa e Cara-Cara), e c) que é preciso considerar quando a ordem dos elementos implica, ou não, em possibilidades distintas (como, quando a ordem determina distintas possibilidades, por exemplo, números que podem ser formados a partir dos algarismos 1, 2 e 3, quais sejam: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 e 33; e quando a ordem não implica em possibilidades distintas: a escolha, por exemplo, de duas bolas dentre bolas vermelha, azul e verde, que são: vermelha e azul, vermelha e verde e azul e verde).

Quanto à possibilidade/impossibilidade de combinações, as crianças precisam diferenciar bem o que é impossível e o que é pouco provável que aconteça. No lançamento de dois dados, por exemplo, é impossível que a soma resulte em número maior ou igual a 13, já que a soma máxima é 12 (6 em um dado com 6 em outro dado). Por outro lado, é pouco provável – mas possível – que a soma seja 2 (com 1 em um dado e 1 em outro dado).

Embora em situações do dia-a-dia nem sempre seja necessário que levantemos todos os elementos de um *espaço amostral*, para o cálculo de probabilidades, é essencial a determinação de quantos elementos constituem esse espaço. Segundo os PCN (BRASIL, 1997), a finalidade principal da Probabilidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos diários são de natureza aleatória e que é possível identificar os prováveis resultados. Em conformidade com esse documento, as ideias de acaso e incerteza que se manifestam intuitivamente pelas crianças devem ser exploradas em sala de aula.

No caso de possibilidades de lançamento de um único dado, temos como espaço amostral: 1, 2, 3, 4, 5, e 6. Assim, a probabilidade para tirar qualquer um dos seis números é 1 em 6 (1/6). Já para saber qual a probabilidade de obtermos determinada soma com o lançamento simultâneo de dois dados, é preciso pensar no espaço amostral dessa situação, como pode ser observado no Quadro 1, no qual se indica que há 36 combinações possíveis.

Dado 2	Dado 1					
	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6	1 + 6 = 7
2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7	2 + 6 = 8
3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	3 + 6 = 9
4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9	4 + 6 = 10
5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10	5 + 6 = 11
6	6 + 1 = 7	6 + 2 = 8	6 + 3 = 9	6 + 4 = 10	6 + 5 = 11	6 + 6 = 12

Quadro 1: Espaço amostral referente à soma obtida a partir do lançamento simultâneo de dois dados

Assim, a probabilidade de obter a soma 2 no lançamento de dois dados é 1 em 36 (1/36), pois apenas é possível com o lançamento do 1 em um dado e do 1 em outro dado. Essa é a mesma probabilidade de se obter a soma 12 (com um dado com 6 e outro dado com 6 também). Para obter-se 3, a probabilidade é de 2/36, pois há duas maneiras diferentes de obter-se 3 (1 + 2 e 2 + 1), as quais constituem possibilidades distintas, pois pode-se obter 1 em um dado e 2 em outro ou vice-versa). Observa-se, assim, que os cálculos de *probabilidades* são baseados em levantamentos de *espaços amostrais*, os quais são efetuados com base em *raciocínio combinatório*, considerando-se se a ordem dos elementos determina, ou não, casos distintos.

O *raciocínio combinatório* pode ser definido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010). Este tipo de pensamento permite que todas as combinações, que atendem certos critérios, sejam consideradas. É um modo de pensar mais complexo que leva um longo tempo para se desenvolver, mas que pode ser incentivado desde os anos iniciais de escolarização.

A partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), Pessoa e Borba (2009) argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com diferentes tipos de problemas combinatórios: *produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*. As autoras defendem que há relações básicas de Combinatória contidas nestes quatro tipos de problemas e trabalhar esta variedade de situações pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Os *produtos cartesianos* são os problemas nos quais se combinam elementos de um conjunto com elementos de outro(s) conjunto(s). Poderia-se, por exemplo, combinar saias (uma preta e outra azul), com blusas (uma verde, outra amarela e mais outra branca) e com colares (um prateado e outro dourado). Uma possível combinação seria: saia preta com blusa verde e colar prateado. Outra possibilidade seria: saia preta com blusa verde e colar dourado. Após o levantamento de todas as combinações com a saia preta (6 possibilidades), poderia levantar as combinações com a saia azul (também 6 possibilidades). Esse problema de *produto cartesiano* resulta, assim, num *espaço amostral* composto por 12 elementos.

Nas *combinações*, elementos de um conjunto único são combinados e nos quais a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas. Se, por exemplo, se deseja escolher dois brinquedos a partir de quatro (um patinete, uma bola, um ioiô, um pião), pode-se ter as seguintes possibilidades de escolha: patinete e bola, patinete e ioiô, patinete e pião, bola e ioiô, bola e pião, e ioiô e pião. Nesse caso, a possibilidade patinete e bola é a mesma que bola e patinete e devem, assim, ser contadas como uma só possibilidade.

Nos *arranjos*, ao contrário das *combinações*, a ordenação dos elementos indica possibilidades distintas. Assim, por exemplo, se desejamos colocar os quatro brinquedos (um patinete, uma bola, um ioiô, um pião) como primeiro e segundo brinquedos favoritos de uma turma, pode-se ter patinete como o mais preferido e bola como o segundo mais preferido, o que se diferencia da bola ser o brinquedo favorito e o patinete como o segundo em ordem de preferência.

Um quarto tipo de situação combinatória são as *permutações*, nas quais todos os elementos aparecem em todas as possibilidades, variando apenas a ordem deles. Assim, se se deseja colocar três brinquedos (um patinete, um ioiô, um pião) enfileirados numa estante, pode-se ter as seguintes possibilidades: patinete-ioiô-pião; patinete-pião-ioiô; ioiô-patinete-pião; ioiô-pião-patinete; pião-patinete -ioiô, pião-ioiô-patinete. Essas são as seis possibilidades para ordenar-se os três elementos.

Em pesquisas realizadas com estudantes de distintos níveis de escolaridade – tal como Pessoa e Borba (2009) – observou-se que crianças em início de escolarização resolviam problemas combinatórios – dos quatro tipos acima descritos – primordialmente, por meio espontâneo de desenhos e de listagens. A maior dificuldade observada foi a das crianças listarem todas as possibilidades, ou seja, determinarem todos os elementos do *espaço amostral*. As crianças bem sucedidas foram as que buscaram sistematizar suas soluções, ou seja, desenharam ou listaram todas as possibilidades, combinando o primeiro elemento com todos os demais e, em seguida, combinando cada um dos restantes elementos com os demais do conjunto.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970) apontam a construção de árvores de possibilidades como modo eficiente de levantamento de *espaços amostrais*. Os diagramas de árvores são modos de sistematizar o levantamento de possibilidades quando diversos elementos devem ser combinados. Exemplos de árvores de possibilidades serão apresentados a seguir, quando relatarmos os resultados obtidos em estudo com crianças de anos iniciais que levantaram espaços amostrais em situações combinatórias.

A seguir, apresentamos resultados de estudos realizados com crianças de anos iniciais nos quais investigamos seus desempenhos em situações probabilísticas e combinatórias. O aspecto em comum desses estudos é o levantamento de *espaços amostrais* – seja para se pensar em *probabilidades*, seja para resolver distintos tipos de *problemas de Combinatória*.

Levantando Espaços Amostrais em Jogos

Considerando a importância apontada para o trabalho com a Probabilidade, Batista e Borba (2015) realizaram um estudo com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com o objetivo de analisar a compreensão das mesmas acerca de alguns elementos da Probabilidade, dentre eles, o *espaço amostral*. Outras noções relativas a situações probabilísticas foram tratadas junto às crianças, mas nesse texto concentramos a atenção no *espaço amostral*.

No desenvolvimento de nossas atividades utilizamos alguns jogos apresentados no Caderno de Jogos na Alfabetização Matemática do Pacto Nacional para Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2014, p. 39, 40 e 71). Entendemos que em situações de jogos, a ludicidade e a descontração permitem às crianças evidenciarem conhecimentos, intuições e também fragilidades acerca de determinados conceitos, possibilitando ao professor perceber quais aspectos dos conceitos envolvidos são efetivamente compreendidos pelas crianças e quais ainda carecem serem desenvolvidos, os quais merecem atenção especial por parte do professor.

Historicamente a Probabilidade sempre esteve ligada aos "jogos de azar" e, embora, não trabalhemos especificamente com estes, utilizamos as ideias centrais destes – como a *aleatoriedade*, o *acaso*, a *incerteza* e o *espaço amostral* – nas atividades pedagógicas, especialmente com o uso de moedas e dados. Os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012), afirmam que os jogos são experiências pedagogicamente relevantes nas aulas de Matemática em função de seu caráter lúdico, que é importante no desenvolvimento integral dos estudantes, bem como das ideias e relações matemáticas presentes neles e na busca por estratégias para solucionar os desafios que incluem uma variedade de questões de lógica e de Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) consideram que

> por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (...) Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações (BRASIL, 1997; p.35).

Num estudo inicial, utilizamos três jogos: *Cara ou Coroa*, *Pintando o Sete* e *Travessia do Rio* (BRASIL, 2014). Apresentaremos suscintamente todos os jogos, mas analisaremos mais especificamente os dados obtidos apenas no jogo *Travessia do Rio* que fez parte de um estudo mais aprofundado.

***Jogo Cara ou Coroa* –** Utiliza um tabuleiro numerado de 1 a 40 (Figura 1), dois marcadores e duas moedas. Tem como objetivo principal identificar situações de *incertezas* e compreender a noção do conceito de *independência*.

Regras: Os jogadores decidem quem será o Jogador A e o Jogador B e, em seguida, lançam as duas moedas. O Jogador A avança três casas, caso saiam duas coroas, enquanto o Jogador B avança três se saírem duas caras. Se saírem uma coroa e uma cara, os jogadores avançarão apenas uma casa. Ganha quem chegar primeiro no final do percurso.

Figura 1: Jogo Cara ou Coroa
Fonte: BRASIL, 2014, p.71

Jogo Pintando o Sete – Utiliza uma folha com os números de 2 a 12 (exceto o 7) e com os "setes", (Figura 2), dois dados e lápis. Tem como objetivo central resolver adições e analisar *possibilidades de soma* resultando em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 no lançamento de dois dados.

Regras: Cada jogador lança dois dados, soma o total e risca o resultado em sua folha. Se o resultado for 7, ele deverá pintar um "sete". Quem pintar todos os "setes" sai do jogo. Ganha o jogo quem conseguir riscar todos os números da folha.

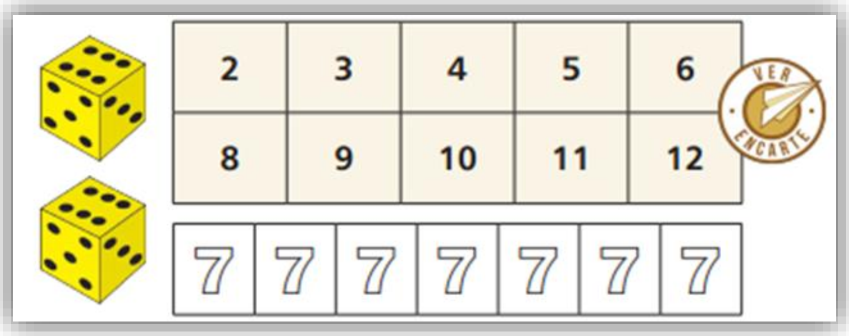


Figura 2: Jogo Pintando o Sete
Fonte: Brasil, 2014 p.39

Jogo Travessia do Rio – Utiliza um tabuleiro (Figura 3); 12 fichas verdes; 12 vermelhas e dois dados. O objetivo principal do jogo é resolver adições e analisar *possibilidades de soma* resultando em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 no lançamento de dois dados.

Regras: Cada jogador coloca suas fichas nas casas de uma das margens do rio, podendo pôr mais de uma ficha na mesma casa, deixando as outras vazias, se desejar. Alternadamente, os jogadores lançam os dados e calculam a soma obtida. Se a soma corresponder a uma das casas onde estejam suas fichas, passa -se uma delas para o outro lado do rio. Ganha quem primeiro conseguir passar todas as fichas para o outro lado.

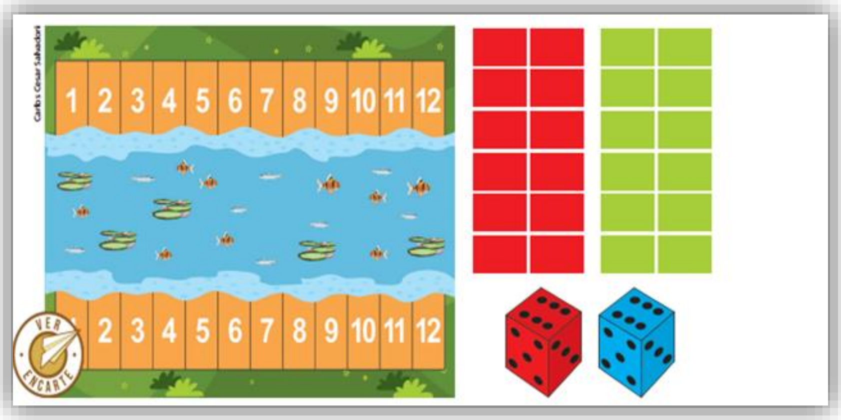


Figura 3: Jogo Travessia do Rio
Fonte: BRASIL, 2014, p.40

Realizamos entrevistas com os alunos do 1º, 3º e 5º anos, a partir das perguntas norteadoras que aparecem no Quadro 2.

QUESTÃO / FOCO	CARA OU COROA	PINTANDO O SETE	TRAVESSIA DO RIO
1-Chance igual	Considerando as regras do jogo, quem tem mais chance de ganhar: eu ou você? Por quê?	Pedro e Ana faltavam, cada um, apenas um número para ganhar o jogo. Pedro faltava o 2 e Ana o 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?	Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?
2-Evento impossível	Considerando a regra do jogo, foram lançadas as duas moedas e nenhum dos jogadores "andou" nenhuma casa. Isso é possível? Explique.	Pedro disse que só não ganhou o jogo porque no seu último lançamento deu 13. Como você vê essa situação? É possível?	João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê?
3-Chance diferente	Pedro, André e Marcos decidiram novas regras para o jogo e combinaram que: -Se sair uma cara e uma coroa, Pedro avança duas casas. -Se sair duas coroas, André avança duas casas. -Se sair duas caras, Marcos avança duas casas Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?	Ao final de uma rodada do jogo, a situação era a seguinte: - Ana falta assinalar o 6. - Pedro falta assinalar o 3. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?	Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê?
4-Pouco provável	Quando lanço duas moedas, tenho muita chance, pouca chance ou nenhuma chance de sair duas caras?	Felipe disse que ganharia o jogo, sem pintar nenhum sete. É possível isso acontecer? Por quê?	Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê?

5-Espaço amostral	Quando jogo duas moedas quais resultados podem aparecer?	Carlos pintou todos os "setes", mas ele percebeu que nem sempre saiam os mesmos valores nos dados. Quais os resultados diferentes que podem ter saído para Carlos pintar todos os "setes?	João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?
6- Indepen-dência de eventos	Paulo jogou a moeda e saiu cara, jogou novamente e saiu cara, jogou outra vez e saiu cara mais uma vez. Se ele jogar novamente pode sair cara de novo? Por quê?	André jogou o dado vermelho algumas vezes e o resultado foi sempre o 5. Se ele jogar novamente você acha que poderá sair o 5 novamente? Por quê?	André jogou o dado vermelho algumas vezes e o resultado foi sempre o 5. Se ele jogar novamente você acha que poderá sair o 5 novamente? Por quê?
7-Equipro-babilidade	Se eu lançar a moeda de um real e você lançar a de 50 centavos, quem tem a maior chance de tirar cara: eu ou você? Por quê?	Ana se perguntou se a chance dela tirar 7 quando ela joga dois dados é a mesma de Pedro quando ele faz o mesmo lançamento. O que você acha? Justifique.	Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem você acha que terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê?
8-Aleatorie-Dade	Quando eu jogo uma moeda é mais fácil sair cara ou coroa? Por quê?	Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números do dado? Por quê?	Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê?

Quadro 2: Discriminação das perguntas norteadoras dos jogos.
Fonte: Adaptado de Batista e Borba (2015)

As questões focais da Probabilidade foram: *chance igual* e *diferente*, *evento impossível* e *pouco provável*, *independência de eventos*, *equiprobabilidade*, *espaço amostral* e *aleatoriedade*. As crianças tiveram a oportunidade de conhecer as regras de cada jogo, brincar um pouco e, em seguida, era realizada a entrevista com cada aluno, individualmente.

Aqui, apresentamos algumas reflexões sobre os resultados obtidos na pesquisa. O recorte apresentado, trata especificamente, do *espaço amostral* que tem estreito laço com a Combinatória. Como mencionado anteriormente, utilizamos como suporte para o trabalho explorado a seguir, o jogo Travessia do Rio (BRASIL, 2014, p.40).

Os dados foram obtidos por meio do trabalho envolvendo 36 crianças, das quais 12 estudavam no 1º ano, 12 eram do 3º ano e 12 do 5º ano, de duas escolas públicas. A partir da entrevista feita com o apoio do jogo Travessia do Rio, as crianças foram indagadas sobre como seria possível formar a soma 8 com dois dados, considerando a seguinte pergunta norteadora: *João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?* (Pergunta 5 do Quadro 1).

As combinações possíveis (*espaço amostral*) para totalizar oito no lançamento de dois dados são cinco: 2 e 6; 6 e 2; 4 e 4; 3 e 5; e 5 e 3. As crianças puderam usar os dados para observar, contar e responder sobre o *espaço amostral* solicitado. Ressalta-se que os dados eram de cores diferentes, de modo a possibilitar que as crianças percebessem que o resultado 2 e 6 se diferencia do resultado 6 e 2, por exemplo.

Observamos que todos os alunos elencaram, ao menos, uma combinação que resultasse em 8. Dos 25% (nove crianças) que escreveram apenas uma possibilidade, sete crianças eram do 1º ano e duas do 3º. Isso evidencia que todas as crianças entenderam que era necessário levantar possibilidade(s) de obter a soma 8 a partir de valores de dois dados.

Algumas crianças, especialmente as mais velhas, sabiam alguns fatos fundamentais da soma 8 e não sentiam a necessidade de utilizar os dados para realizarem a soma, pensavam e já escreviam as respostas. Outras sabiam que era possível obter a soma 8, mas só encontraram os resultados manuseando os dados. Houve, ainda, alguns alunos que apresentaram dificuldades, mesmo usando o suporte dos dados. Necessitaram do incentivo da pesquisadora para que usassem os dados. Assim, eles realizaram muitas tentativas e diversas contagens para encontrar o(s) resultado(s). Em estudos anteriores, de Pessoa e Borba (2009), foram constatadas dificuldades de crianças, especialmente as mais novas, em elencar todas as possibilidades de ocorrência de um evento, usando o raciocínio combinatório, o que foi confirmado também no presente estudo.

Apesar de algumas crianças apresentarem dificuldade em fazer uma lista exaustiva, ou mesmo em encontrar ao menos uma possibilidade de soma 8, todas confirmaram que era possível a ocorrência do evento supracitado e não se negaram a tentar encontrar a resposta. A transcrição da conversa com o aluno Pedro[5] aponta essa perspectiva.

> *Pesquisadora: Como é que faz pra dar 8?*
> *Pedro: É difícil.*
> *Pesquisadora: Mas, tem um jeito de dar 8?*
> *Pedro: Tem.* (Mexe os dados e conta um dado com 3 e outro com 6: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
> *Pesquisadora: 9 é 8?*
> *Pedro: Não.* (Continua as contagens chegando ao resultado 2 e 6 e registra).
> *Pesquisadora: Tem outro jeito de dar oito ou só tem esse jeito?*
> *Pedro: Eu acho que tem outro jeito.*
> *Pesquisadora: Você sabe qual é esse outro jeito?*
> *Pedro: Não.*

O diálogo com Pedro, que é do 1º ano e tem 6 anos de idade, nos remete à reflexão de que os alunos, mesmos os mais novos, têm uma compreensão, ainda que intuitiva, de algumas combinações que

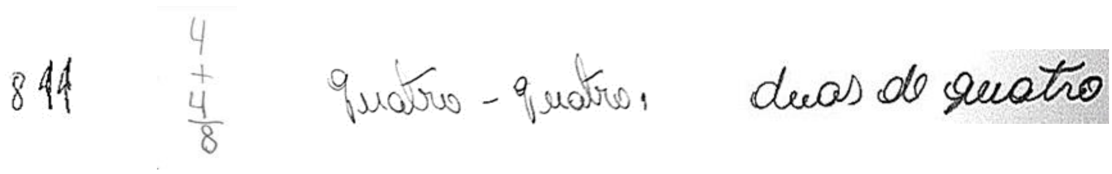
[5]Os nomes das crianças foram alterados para manter o anonimato e preservar a imagem dos menores.

compõem um determinado *espaço amostral*. Algumas dessas intuições evoluem naturalmente com o crescimento e amadurecimento, outras não.

A evolução de intuições primárias são fruto de experiências informais que nem sempre são coerentes e podem conduzir a equívocos, como apontam Bryant e Nunes (2012), citando Fischbein (1987). Para uma evolução de intuições primárias para outras mais elaboradas, as secundárias, é necessário algum tipo de ensino, não apenas a passagem do tempo. Logo, podemos dizer que a escola tem papel fundamental nesse processo.

Pedro percebe que há outros modos de compor o 8 no lançamento de dois dados, mas não sabe como chegar à resposta. Ele precisa de auxílio, de oportunidades para levantar e confrontar suas hipóteses e de tempo para solidificar e ampliar suas intuições.

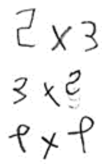
Observamos que a combinação mais frequentemente levantada foi 4 e 4, representada de diversas formas, como exemplificado abaixo nos registros de Ana do 1º ano, Carlos do 3º e João e Elisa do 5º ano, respectivamente, nas Figuras 4a, 4b, 4c e 4d. Cerca de 92% dos alunos pesquisados indicaram como possibilidade de formação do *espaço amostral* da soma 8, essa combinação.

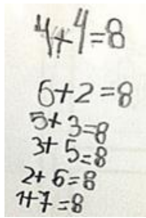


Figuras 4a, 4b, 4c, 4d: Registros de crianças do 1º, 3º e 5º anos para a soma 8, a partir de 4 + 4
Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Acreditamos que a escolha do 4 e 4, independente do tipo de representação escolhida, talvez tenha relação com os trabalhos desenvolvidos na escola ou com a facilidade de memorização de apenas um número que é duplicado. Aproximadamente 56% das crianças que realizaram apenas um registro de combinação da soma 8 optaram por 4 e 4, bem como a maioria dos alunos que realizaram os registros sem o apoio dos dados. Nos parece, então que, ao menos no grupo estudado, esta é a forma mais simples, mais fácil ou mais óbvia.

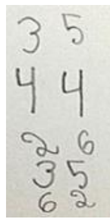
Curiosamente, apenas as crianças do 1º ano (2 de 12) sugeriram as possibilidades 3 + 5 e 5 + 3, aparentemente como possibilidades distintas, observadas nos registros de Stela e Beto, respectivamente, nas Figuras 5a e 5b.





Figuras 5a e 5b: Registros de crianças do 1º ano - possibilidades de soma 8 com 5 + 3 e 3 + 5
Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Vale destacar que a maioria das crianças de 6 anos (1º ano) chegava às respostas a partir do manuseio e contagem nos dados, sendo provável que elas não tenham refletido sobre os resultados que "parecem iguais". Outro fato que concorre para esta conclusão é que outras duas crianças do 1º ano (Rui e Tina) repetiram os resultados: 5 + 3 e 5 + 3, conforme indicado, respectivamente, nas Figuras 6a e 6b, julgando que estavam escrevendo possibilidades distintas, pois apenas contavam nos dados e registravam sem refletir acerca dos outros eventos listados.



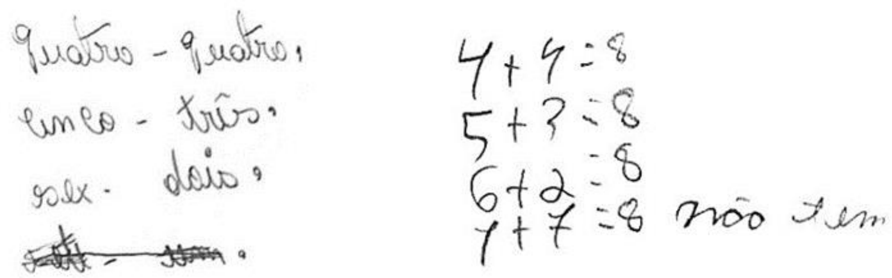
Figuras 6a e 6b: Registro de crianças do 1º ano com evento 3 e 5 repetido
Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Paradoxalmente, os alunos mais velhos do 3º e 5º anos, concluíam equivocadamente que os eventos envolvendo os mesmos números em ordens distintas correspondiam à mesma possibilidade. Alguns falavam, mas não registravam e diziam que já tinham feito "aquele jeito" e o descarte era imediato.

Constatamos que a percepção de eventos distintos dessa natureza, utilizando dados, não é simples para as crianças. Apesar de terem relativa facilidade em elencar algumas possibilidades, elas não conseguiram perceber a diferença dos eventos 3 + 5 e 5 + 3 ou 2 + 6 e 6+ 2, mesmo quando utilizavam dados de cores diferentes. As crianças que eram indagadas diziam que "era a mesma coisa" ou "esse eu já fiz". O uso dos mesmos algarismos que naturalmente tem como resultado um mesmo valor (o 8) se configurou como mesma possibilidade para quase todas as crianças pesquisadas. Como apontado anteriormente, nem sempre as intuições dos alunos são corretas e coerentes, razão pela qual elas necessitam de ajuda para desconstruir alguns conceitos equivocados e construir novos, a partir dos conhecimentos que já possuem.

Embora apenas um aluno tenha elencado todas as combinações possíveis, observamos que metade das 36 crianças entrevistadas encontraram três possibilidades distintas de soma 8, o que para elas, se configurava em *todas* as possibilidades, uma vez que descartavam os eventos que apresentavam ordem diferente e mesmos números (como 2 + 6 e 6 + 2, por exemplo).

Três crianças registraram a possibilidade 7 + 1 (ou 1 + 7), mesmo sendo alertadas que verificassem como seria essa combinação no dado, e se era possível. Uma criança do 3º ano verbalizou a intenção, mas não registrou, dizendo: “se tivesse 7 no dado, seria 7 + 1”. João e André do 5º ano retiram a possibilidade (como apresentado, respectivamente, nas Figuras 7a e 7b), mas Beto do 1º ano resolveu deixar essa combinação impossível, mesmo após a indagação.



Figuras 7a e 7b: Registro de crianças de possibilidade de soma 8, a partir de 1 + 7
Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Para ilustrar a situação, vejamos o diálogo com Beto do 1º ano, que já havia elencado os cinco jeitos distintos possíveis de combinação da soma 8, sem contar, apenas pensando e registrando:

> *Pesquisadora: Tu achas que tem outro jeito?* (de dar 8 na soma de dois dados)
> *Beto: Um mais seis. Não! Um mais sete.*
> *Pesquisadora: E tem sete no dadinho?*
> *Beto: Não. Mas pode ser um mais sete mesmo! (E então registra 1 + 7 na folha (Figura 5b)).*

Observamos que Beto possui intuições avançadas para a idade dele. Ele gostou muito dos jogos e ia além do que estava sendo proposto. Apresentava importantes percepções que nem sempre eram corretas, mas que apontam para um adequado entendimento posterior, caso seja auxiliado nesse processo. É importante que crianças, como Beto, sejam estimuladas a pensarem e descobrirem para que suas ideias sejam confrontadas e elas possam avançar cada vez mais.

Para sintetizar os registros de possibilidades de eventos que compõem o espaço amostral de soma 8 em dois dados, na Tabela1 pode-se observar os resultados encontrados na pesquisa.

	1 possibilidade	2 possibilidades	3 possibilidades	4 possibilidades	5 possibilidades
1º ano	6	1	3	1	1
3º ano	3	3	6	0	0
5º ano	0	4	8	0	0

Tabela 1: Número de crianças, por quantidade de possibilidades de soma 8 em dois dados, por ano
Fonte: Dados da pesquisa (2015)

Como era de se esperar, os resultados apontaram que, em geral, os alunos do 1º ano tiveram mais dificuldade em elencar um maior número de possibilidades do que as crianças do 3º e 5º anos. Metade dos alunos do 1º ano informaram apenas uma possibilidade. Em contrapartida, só nesse grupo, alunos registraram quatro e também cinco possibilidades possíveis de formação de 8 no lançamento de dois dados. A maioria das crianças do 5º ano fizeram três combinações, suprimindo sempre as que julgavam repetidas. No 3º ano, 50% dos pesquisados elencaram 3 combinações e 25% apenas uma, o que exige reflexão, pois esses alunos estão finalizando o Ciclo de Alfabetização e, se consideramos que o 8 é um número que faz parte do cotidiano diário escolar das crianças desde a Educação Infantil, esperávamos que eles tivessem conhecimento de mais de uma possibilidade que totalizasse 8.

Como já pontuado anteriormente, Bryant e Nunes (2012) defendem que a análise do espaço amostral se inicia com uma procura exaustiva de todas as possibilidades e que para tal, há duas exigências intelectuais: eliminar qualquer elemento impossível e listar todos os eventos possíveis.

Considerando tais exigências, podemos afirmar que a maioria dos alunos pesquisados, eliminaram (ou não pensaram) em eventos impossíveis e, os poucos que elencaram o evento 7 + 1, após reflexão, conseguiram perceber que era impossível, que não fazia parte do espaço amostral desejado. Apenas Beto do 1º ano, parece não ter admitido o evento como *impossível.* Por outro lado, esse mesmo aluno foi o único do estudo, com 36 crianças, que conseguiu listar todas as possibilidades possíveis de soma 8, em dois dados.

Ao que parece, há dificuldades, de crianças de anos iniciais, em elencar todos os eventos possíveis para formação do espaço amostral 8, considerando o lançamento de dois dados. Especificamente, como comentado anteriormente, a maior dificuldade observada nesse estudo foi a ausência de percepção de que a ordem, nesse caso, compõe um evento diferente, apesar de totalizar resultados iguais. É pouco provável que apenas com o passar do tempo, os alunos percebam essa diferença, por isso enfatizamos a importância do ensino da Combinatória e Probabilidade desde os anos iniciais. Um dado importante observado na pesquisa é que mesmo as crianças que apresentaram dificuldades, conseguiram apontar um ou mais eventos do espaço amostral em discussão e esse fato, reforça o quão capazes elas podem ser com o desenvolvimento de atividades combinatórias e probabilísticas mais efetivas em sala de aula.

Construindo Árvores de Possibildades para Levantamento de Espaços Amostrais

Azevedo e Borba (2013), em um estudo com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, destacam que, ao construírem árvores de possibilidades, com ou sem o uso de um recurso tecnológico, as crianças conseguem desenvolver seus pensamentos combinatórios. Essa conclusão é derivada da pesquisa que as autoras realizaram com 40 alunos de duas escolas públicas de Recife, divididos em quatro grupos.

O primeiro grupo era constituído por 10 alunos que participaram de atividades em Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades em um ambiente virtual. O segundo grupo era formado por 10 alunos que construíram árvores de possibilidades com a utilização de lápis e papel. O terceiro grupo era constituído por 10 alunos que resolveram problemas multiplicativos (não combinatórios) por meio de desenhos com a utilização de lápis e papel, e o quarto, e último grupo, não participou de nenhuma atividade específica, mas apenas as atividades usuais da sala de aula que estudavam, atividades comuns aos demais participantes. Nos três primeiros grupos, trabalhou-se com duplas de alunos.

Inicialmente, os alunos resolveram uma lista de problemas sem que tivessem participado, ainda, de atividade voltada para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Essa etapa do estudo visava sondar o conhecimento prévio dos alunos sobre a Combinatória. No Quadro 3 tem-se os oito problemas que as crianças resolveram na sondagem inicial. Foram apresentados dois problemas de *produto cartesiano*, dois de *combinação*, dois de *arranjo* e dois de *permutação*.

Produto cartesiano:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Quadro 3: Lista de problemas resolvidos pelos alunos antes e durante a atividade com o uso do software e por meio do lápis e papel.
Fonte: AZEVEDO (2013)

Após a sondagem inicial, o primeiro grupo de crianças utilizou o software educativo chamado *Diagramas de Árbol*. Este software, apresentado em língua espanhola, foi concebido no México e disponibilizado para pesquisa no Brasil pelos autores de pesquisas que o utilizaram naquele país (Sandoval, Trigueiros e Lozano, 2007). Neste software é possível construir árvores de possibilidades virtuais, como pode ser visualizado nas figuras a seguir. Os alunos construíram árvores de possibilidades dos diferentes problemas apresentados na lista do Quadro 3, que envolviam os quatro tipos de problemas combinatórios.

Figuras 8a e 8b: Telas de abertura do software *Diagramas de Árbol*.
Fonte: Aguirre (2005)

A construção da árvore de possibilidades realizada pelo aluno, por meio do software, precisa seguir os passos indicados pelas telas. Na primeira e na segunda tela, indicadas pelas Figuras 8a e 8b observa-se que é preciso escolher a opção “creo un árbol” (criar uma árvore) para iniciar o processo, e, em seguida, marcar a opção “con niveles de elementos diferentes” (se as combinações não envolverem elementos iguais) ou “com niveles de elementos iguales” (se houver repetição de elementos). Em seguida, pode-se indicar a quantidade de etapas de escolhas a serem realizadas (número de variáveis envolvidas) no problema combinatório que se deseja criar a árvore (Figuras 9a e 9b).

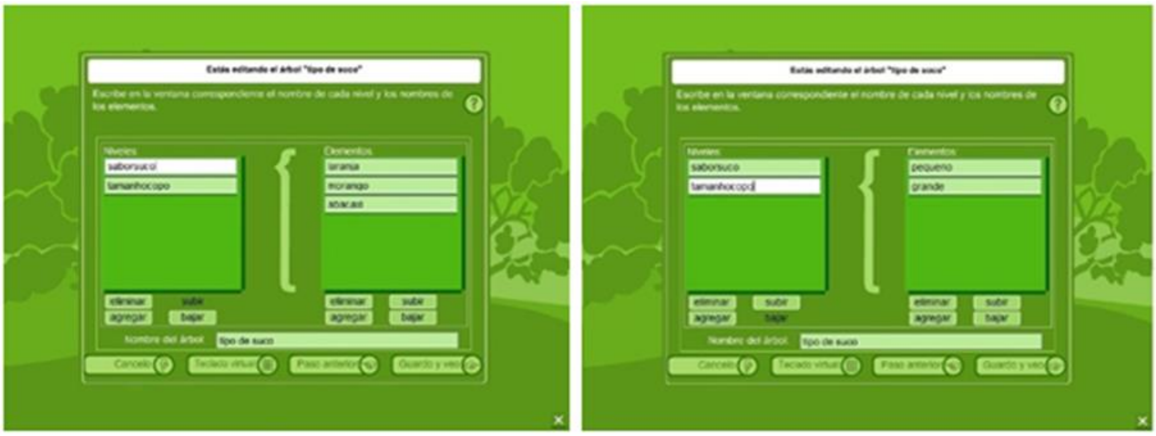


Figura 9a e 9b: Escolha dos níveis para definição de uma árvore de possibilidades numa situação de produto cartesiano.
Fonte: Aguirre (2005)

Após esse procedimento, para um problema de *produto cartesiano*, por exemplo, tem-se a árvore que pode ser visualizada na Figura 10. O problema envolvia a determinação do número de modos distintos de escolha dentre três sabores de suco e dois tamanhos de copo (Problema 1 do Quadro 2). A árvore gerada pelo software mostra as seis possibilidades de combinação de três sabores e dois tamanhos de copo de suco.

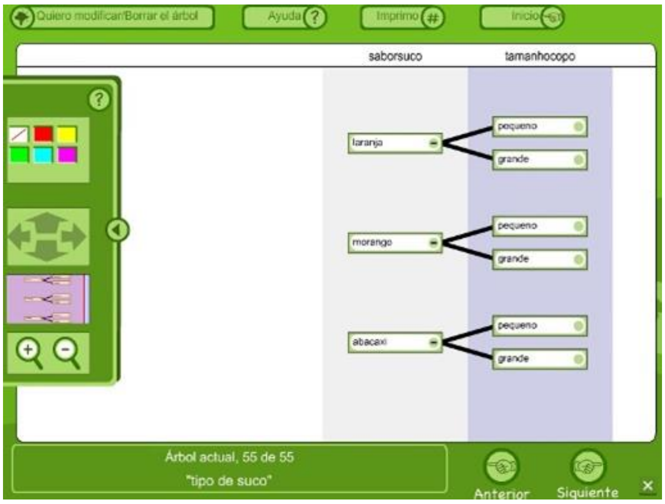


Figura 10: Árvore de possibilidades criada pelo software para uma situação de produto cartesiano.
Fonte: Aguirre (2005)

De modo semelhante ao problema de *produto cartesiano* aqui apresentado, os alunos do Grupo 1 resolveram, com uso do software, problemas também de *arranjo*, *combinação* e *permutação*. As crianças determinavam quantas variáveis estavam envolvidas e quantos elementos constavam de cada etapa de escolha. A partir da entrada dessas informações, o software gerava a árvore correspondente e os alunos interpretavam o diagrama produzido.

Também após o teste inicial de sondagem, o segundo grupo construiu árvores de possibilidades em lápis e papel, resolvendo a mesma lista de problemas utilizadas pelo Grupo 1. As árvores de possibilidades criadas pelo Grupo 2 foram construídas no mesmo formato que no software e tanto na atividade com o Grupo 1, quanto na atividade com o Grupo 2, as mesmas relações presentes nos problemas combinatórios foram destacadas, de modo que as crianças percebessem a importância da escolha dos elementos, bem como se a ordem desses elementos gerava, ou não, novas possibilidades.

O terceiro grupo trabalhou com problemas multiplicativos, mas nenhum desses era de Combinatória. Os problemas de multiplicação e divisão foram resolvidos pelas crianças a partir de desenhos que elas faziam em lápis e papel. Já o quarto e último grupo não participou de atividades diferenciadas além das usuais de sua sala de aula.

Após a realização das atividades com os diferentes grupos, foi solicitado que os alunos respondessem a uma nova lista de problemas combinatórios. Esse novo teste tinha o objetivo de identificar se a resolução dos problemas combinatórios pela construção de árvores de possibilidade dos alunos aumentaria. Além desse teste, nove semanas após as atividades com os grupos foi realizado um novo teste, com o objetivo de verificar se a aprendizagem foi mantida, mesmo que com o passar do tempo não houvesse mais atividades com problemas combinatórios. Na Tabela 2, a seguir, é possível visualizar os resultados em cada um dos três testes realizados.

Grupos	Teste de sondagem	Teste após as atividades	Teste 9 semanas após as atividades
Grupo 1 (software *Árbol*)	4,6	12,1	13,22
Grupo 2 (lápis e papel)	4,8	14,8	16,44
Grupo 3 (Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1	4,0
Grupo 4 (Atividades usuais)	4,9	2,8	4,2

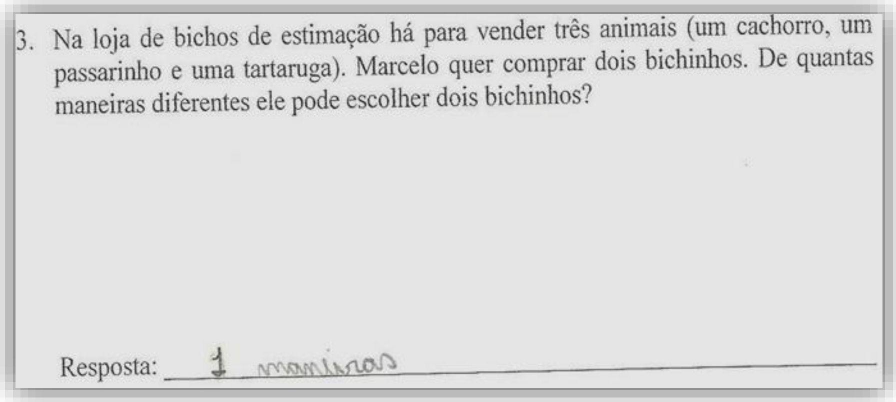
Tabela 2: Média de desempenho por grupo no teste inicial, primeiro teste posterior às atividades e segundo teste posterior às atividades[6].
Fonte: Azevedo e Borba (2013)

Azevedo e Borba (2013) destacam que, os grupos que estudaram Combinatória, tanto aquele que utilizou o software educativo, quanto o que aprendeu por meio do uso de lápis e papel, desenvolveram seus raciocínios combinatórios, uma vez que, antes do ensino a média de acertos em questões combinatórias era muito baixa, e, após as atividades específicas voltadas para o ensino de Combinatória, a média teve um aumento significativo, além de permanecer em crescimento, nove semanas após o processo. Isso não pode ser destacado com o terceiro e quarto grupos de crianças, que não participaram de atividades diretas de aprendizado de Combinatória, pois, estas não avançaram em seus raciocínios combinatórios, deixando evidente que aprender problemas multiplicativos não combinatórios ou não aprender nenhum conteúdo específico não auxilia o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Essa conclusão é ratificada quando as autoras apresentam soluções das crianças ao resolverem os problemas combinatórios antes e após a realização das atividades. Na Figura 11 é possível observar um aluno do Grupo 1, resolvendo um problema de *combinação* antes do processo de ensino com o uso do software *Diagramas de Árbol*. A criança não apresenta de início uma solução correta do problema. Na Figura 12, é

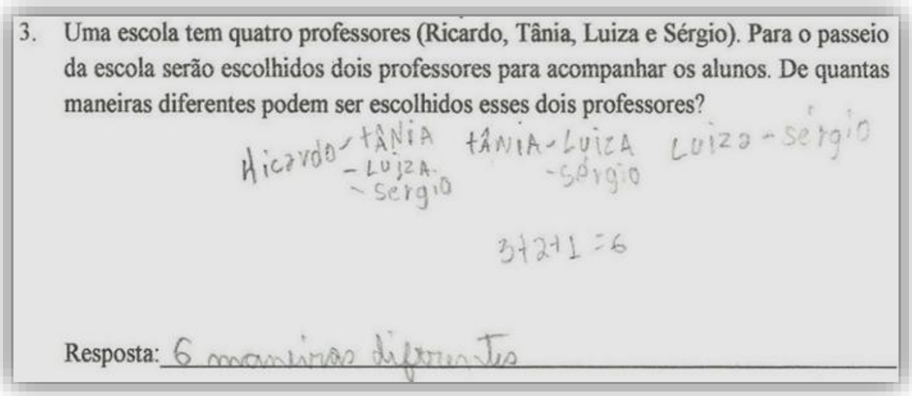
[6]O total de pontos a ser obtido por cada criança no teste era de 32 pontos, sendo 4 pontos para cada uma das 8 questões.

possível observar que o mesmo aluno responde corretamente o problema, construindo uma árvore de possibilidades, após realizar o trabalho com o uso do software. Ressalta-se que o aluno percebe que nesse tipo de problema as ordens invertidas dos elementos (Ricardo – Tânia ou Tânia – Ricardo) não constituem possibilidades distintas e devem ser contadas apenas uma vez. Observa-se na Figura 13 que este aluno permanece respondendo corretamente a situação de *combinação* apresentada, entretanto, por meio de um diagrama, representação não utilizada na intervenção, mas elaborada pelo aluno, demonstrando que o mesmo não decorou um método de resolução, mas, sim, aprendeu a lidar corretamente com as relações contidas nessa situação.


3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

Resposta: 1 maneiras

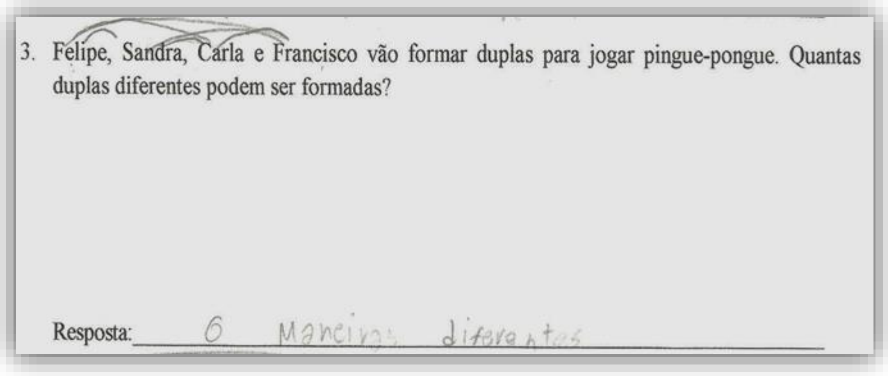
Figura 11: Resposta errada para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 1 antes da realização da atividade com o software.
Fonte: Azevedo (2013)


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Ricardo - TÂNIA - LUIZA - Sergio
TÂNIA - LUIZA - Sérgio
LUIZA - Sergio
3+2+1 = 6

Resposta: 6 maneiras diferentes

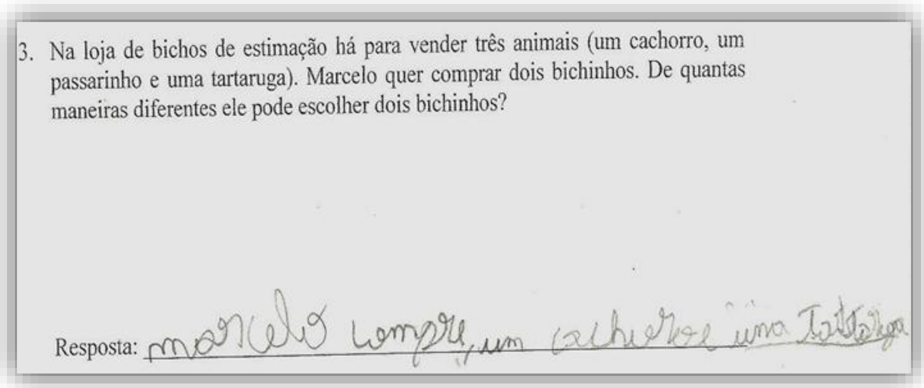
Figura 12: Resposta correta para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 1 após a realização da atividade com o software.
Fonte: Azevedo (2013)


3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

Resposta: 6 Maneiras diferantes

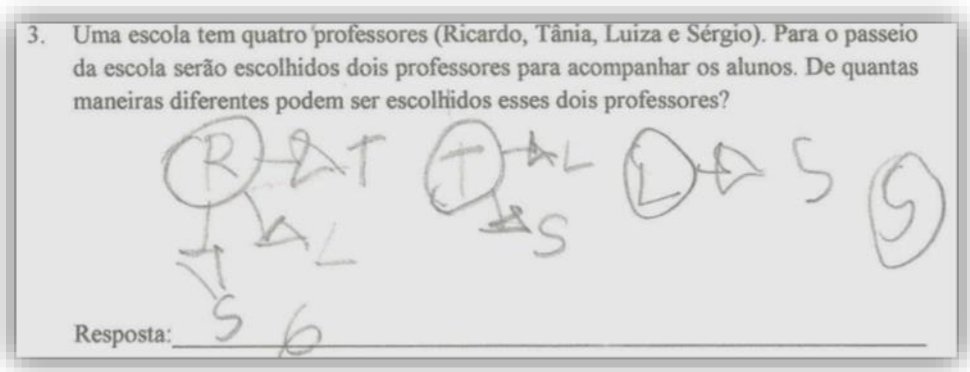
Figura 13: Resposta correta para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 1 nove semanas após a realização da atividade com o software
Fonte: Azevedo (2013)

Com o Grupo 2 (lápis e papel) também foi possível perceber que os alunos melhoraram qualitativamente suas respostas, utilizando árvores de possibilidades para resolver corretamente os problemas apresentados. Na Figura 14 é possível observar a resolução de um aluno do Grupo 2 antes da construção de árvores de possibilidades por meio do uso do lápis e papel. Na Figura 15, nota-se que, após a atividade, o aluno responde corretamente ao problema, assim como nove semanas após, em que este mesmo aluno continua acertando a resposta para esse tipo de situação, que pode ser visualizada na Figura 16.


3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

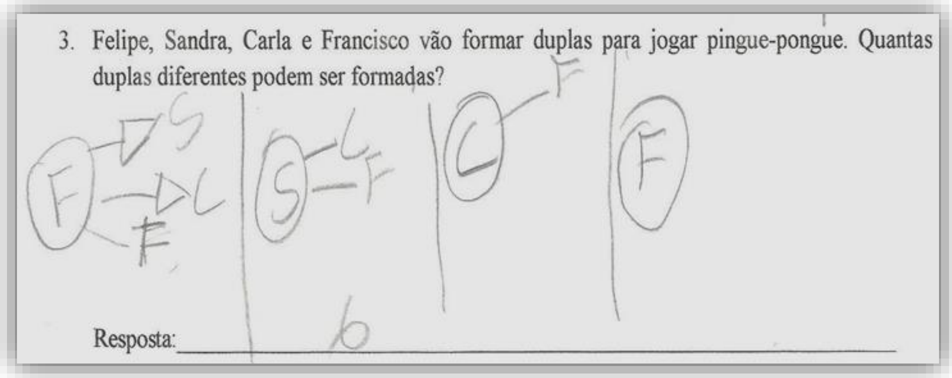
Resposta: marcelo compre, um cachorro e uma Tartaruga

Figura 14: Resposta errada para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 2 antes da realização da atividade com o uso do lápis e papel.
Fonte: Azevedo (2013)


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Resposta: 6

Figura 15: Resposta correta para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 2 após a realização da atividade com o uso do lápis e papel.
Fonte: Azevedo (2013)


3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

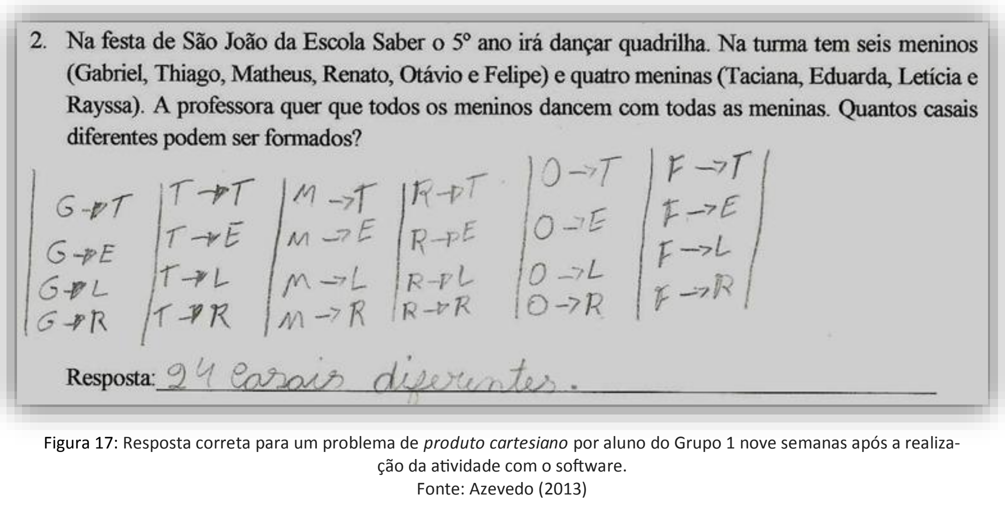
Resposta: 6

Figura 16: Resposta correta para um problema de *combinação* por aluno do Grupo 2 nove semanas após a realização da atividade com o uso do lápis e papel.
Fonte: Azevedo (2013)

O salto qualitativo da aprendizagem dos alunos é destacado pelas autoras Azevedo e Borba (2013), pois, os alunos dos grupos que realizaram as atividades em Combinatória apresentaram maior sistematização nas resoluções das situações. Ou seja, há uma maior organização da situação dada no problema, facilitando a visualização das possibilidades ainda não elencadas e possibilitando o levantamento de todo o *espaço amostral* da situação.

Desse modo, é importante ressaltar que as árvores de possibilidades podem ajudar de forma expressiva no levantamento de todas as possibilidades de uma situação. Esse é passo necessário para a indicação do *espaço amostral* de uma situação probabilística, uma vez que, nessas situações, indicar o número total de possibilidades se faz necessário para que seja encontrada a probabilidade de um dado evento acontecer.

Outro ponto que foi destacado é o fato de que, apesar das atividades serem realizadas por meio da construção de *árvores de possibilidades,* esta não foi o tipo de representação simbólica mais utilizada pelos alunos após o processo de ensino. As autoras concluem que o seu uso na intervenção parece ter feito com que eles entendessem melhor cada tipo de situação combinatória e, assim, fizeram melhor uso de *listagens de possibilidades* nos testes posteriores, como pode ser observado na Figura 17, a seguir. Desse modo, o ensino possibilitou que se fizesse melhor uso das representações simbólicas, em particular das *listagens*, como forma de refletir sobre relações combinatórias.


2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Letícia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

G→T	T→T	M→T	R→T	O→T	F→T
G→E	T→E	M→E	R→E	O→E	F→E
G→L	T→L	M→L	R→L	O→L	F→L
G→R	T→R	M→R	R→R	O→R	F→R

Resposta: 24 casais diferentes.

Figura 17: Resposta correta para um problema de *produto cartesiano* por aluno do Grupo 1 nove semanas após a realização da atividade com o software.
Fonte: Azevedo (2013)

Azevedo e Borba (2013) destacam, ainda, que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (em torno de 10 anos), que tenham acesso a esse tipo de trabalho em sala de aula, são capazes de desenvolver esse tipo de raciocínio de forma sistemática se forem incentivados para que isso aconteça. Inhelder e Piaget

(1976) afirmaram que resoluções sistemáticas espontâneas só começam a ser efetuadas por alunos entre 11 e 12 anos (*combinação*) e 14-15 anos (*arranjo* e *permutação*). Por meio do ensino com árvores de possibilidades, é possível, portanto, antecipar a idade em que acontecem essas sistematizações.

Dessa forma, concordamos com Fischbein (1975), e Fischbein, Pampu e Minzat (1970), que, apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não será suficiente para o aprendizado da Combinatória, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, que pode ser com o uso de um recurso tecnológico ou com lápis e papel. Recomenda-se, assim, o uso da *árvore de possibilidades* e o uso de outras representações simbólicas, desde os primeiros anos de escolarização como meios de auxiliar crianças no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Refletindo sobre as Atividades de Probabilidade e de Combinatória Desenvolvidas com as Crianças

Os estudos aqui relatados, realizados com crianças de anos inicias do Ensino Fundamental, nos trazem evidências de que estudantes em início de escolarização já possuem noções intuitivas referentes a conceitos mais complexos – tais como Probabilidade e Combinatória. Não se deseja, obviamente, que as crianças de anos iniciais lidem com esses conceitos em todas as suas complexidades, mas almeja-se que iniciem o desenvolvimento de seus raciocínios probabilístico e combinatório, possibilitando que a cada nível de ensino se aprofundem em seus conhecimentos desses conteúdos.

As atividades descritas, vivenciadas por crianças de 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental, nos parecem excelentes oportunidades das crianças explicitarem – direta e indiretamente – suas noções referentes a situações probabilísticas e situações combinatórias. Trabalhar com jogos e/ou solicitar que crianças construam diagramas de árvores, virtualmente ou em lápis e papel, são meios eficientes de levá-las a levantarem *espaços amostrais* –necessário ao levantamento de possibilidades. Os resultados dos nossos estudos aqui descritos são evidências de que esses são muito bons recursos de ensino para o entendimento de Probabilidade e de Combinatória.

As situações de jogo que descrevemos são ótimas oportunidades para as crianças pensarem – de modo informal – em noções probabilísticas, e, em particular no levantamento de *espaços amostrais*. Mesmo que não aparentem estar compreendendo plenamente as situações postas, os jogos possibilitam momentos de reflexão e de discussão junto a seus colegas sobre *chance*, *evento impossível* e *pouco provável*, *independência de eventos*, *equiprobabilidade*, *espaço amostral* e *aleatoriedade*.

A construção de diagramas de árvores – como auxílio de software ou em lápis e papel, também se caracteriza como excelente modo de levantamento de possibilidades, em especial por permitir que se levante o *espaço amostral* de modo ordenado e sistemático. Os diagramas de árvores podem ser utilizados nos quatro tipos básicos de problemas combinatórios -– *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações* – possibilitando que as crianças reflitam sobre quando a ordem dos elementos deve, ou não, ser levada em consideração, dentre outras relações combinatórias. A construção de árvores, portanto, possibilita refletir sobre as variadas situações combinatórias e as relações nelas implícitas, bem como chamam a atenção sobre a necessidade da sistematização no levantamento do *espaço amostral*. Os resultados aqui relatados apontam que o uso de árvores por parte das crianças não limitou o uso exclusivamente às mesmas, ao contrário, após as sessões de aprendizado muitas crianças preferiram resolver os problemas por meio de listagens, mas o faziam de modo sistemático, possibilitando levantar espaços amostrais solicitados.

Ressaltamos, assim, que o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e combinatório são importantes ao desenvolvimento geral das crianças, tanto para a vida escolar, quanto para suas vivências extraescolares, mas é importante destacar o papel do ensino nesses desenvolvimentos. As crianças possuem noções intuitivas, mas a instrução é necessária para o desenvolvimento de conceitos referentes à Probabilidade e à Combinatória.

Esperamos, desse modo, ter colaborado para que professores de anos iniciais reflitam sobre a importância de se trabalhar Probabilidade e Combinatória desde o início da escolarização e que as atividades apresentadas possam servir de exemplos e de inspiração para o trabalho a ser desenvolvido em sala de aula junto às crianças.

Referências

AGUIRRE, C. **Diagrama de *Árbol*.** Multimidea. 2005.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades**: É melhor no papel ou no computador? Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2013.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: A construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. In: **Alexandria** - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.6, n.2, p. 113-140, junho 2013.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**: Salvador, 2010 (Palestra).

BATISTA, Rita. BORBA, Rute. **Conhecimento probabilístico de crianças: uma análise considerando o jogo Travessia do Rio**. International Association for Statistical Education - Satellite: Advances in Statistics Education. July 2015, Rio de Janeiro, Brazil. 2015

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Jogos na Alfabetização Matemática. Ministério da Educação. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 22.09.2014.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in Science and Mathematics**. Reidel, Dordrecht, 1987.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational**

Psychology, n. 40, 1970.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco**: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação. UNDIME: PE, 2012.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **O Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica**. Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1. 2010.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **The Origin of the Idea of Chance in Children**. London: Routledge and Kegan Paul, 1975.

SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria; LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais...** 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, n. 1, 1986, p. 75-90.

Capítulo 3

Compreensão de Escala nos Anos Iniciais

Gilda Guimarães[1]
Milka Cavalcanti[2]
Betania Evangelista[3]

A Estatística como ciência busca desenvolver métodos e técnicas de pesquisa para lidar racionalmente com situações sujeitas a incertezas, isto é, situações não determinísticas. Entretanto, não basta compreender conceitos, técnicas e representações isolados, a aprendizagem da estatística requer a apropriação do processo de investigação estatística.

A pesquisa é um processo sistemático que busca gerar conhecimentos novos ou discutir conhecimentos antigos de forma a corroborá-los ou refutá-los. A pesquisa como atividade regular na formação do aluno também pode ser definida como o conjunto de atividades orientadas e planejadas pela busca de um conhecimento novo para o sujeito-pesquisador. Considera-se como fundamental na atitude investigativa a preocupação em formular questões, elaborar hipóteses, escolher amostras e instrumentos adequados para a resolução de problemas, coletar os dados, categorizar e escolher formas de registrar os mesmos para, finalmente, analisar, concluir e levantar novas questões.

É nesse sentido que se defende que a pesquisa deva ser o eixo principal da formação estatística dos alunos, assim como a dos professores, de todos os níveis de ensino (GUIMARÃES; BORBA, 2007). A pesquisa pode abordar diversos campos do saber, contribuindo efetivamente para a uma aprendizagem interdiciplinar.

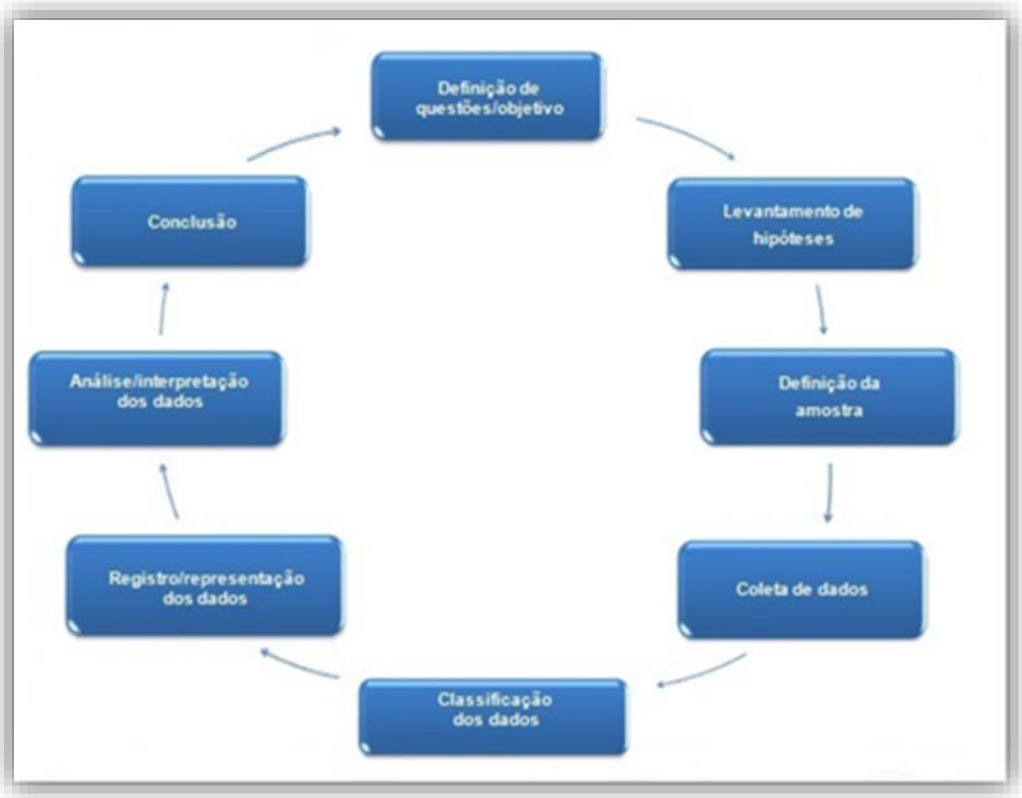
Além disso, ela favorece a interação entre os alunos, com as práticas sociais e com a natureza; incentiva a linguagem oral; amplia o que o aluno tem a dizer sobre variados temas; propicia o contato com representações diversas que resumem informações; favorece a observação e o desenvolvimento do raciocínio.

Entretanto, para compreender como as pesquisas são desenvolvidas é preciso que os alunos participem das mesmas desde seu início até as conclusões, passando por todas as suas fases (GAL; GARFIELD, 1997; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003; BATANERO; DIAZ, 2005; BEN-ZVI, 2005; MAKAR;

[1]Professora da Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco e Coordenadora do Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental – GREF. gilda.lguimaraes@gmail.com
[2]Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. É professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Participa do Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental – GREF. mirgca@gmail.com
[3]Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. É professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Participa do Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental – GREF. mbevangelista@hotmail.com

RUBIN, 2009, FIELDING-WELLS, 2010, entre outros). Como afirmam Guimarães e Gitirana (2006), são nessas situações que os alunos conseguem perceber a função dos conceitos estatísticos.

Uma das formas de se organizar o pensamento estatístico é a realização do ciclo investigativo. Wild e Pfannkuch (1999) afirmam que o ciclo investigativo diz respeito à maneira como o indivíduo age e pensa durante um transcurso de uma investigação. Silva e Guimarães (2013) descrevem o ciclo investigativo envolvendo: elaboração de uma questão/problema, levantamento de hipóteses, definição da amostra/população, elaboração do instrumento e coleta dos dados; classificação dos dados, registro/representação dos dados; análise/interpretação dos dados; conclusões e o levantamento de novas questões.



CICLO INVESTIGATIVO
Fonte: Silva e Guimarães (2013)

Como apresentado, uma das fases do ciclo investigativo é a representação dos dados em gráficos ou tabelas. Gráficos e tabelas apresentam de forma organizada as informações que serão interpretadas para que seja possível buscar responder a questão da pesquisa.

Nesse capítulo, estamos interessadas em refletir sobre essa fase, ou seja, refletir sobre a aprendizagem de representações em gráficos.

Exatamente por essa possibilidade de sintetizar informações é que vemos atualmente a mídia utilizando bastante essas representações. Em um mundo globalizado em que cada vez mais a mídia vem desempenhando um papel de grande relevância na sociedade, passando a ser uma poderosa formadora de opiniões, tentando atrair e conquistar o seu público de todas as formas possíveis, evidenciando a cada dia a interferência desta na formação do sujeito. Hoje, a mídia tem a liberdade de denunciar e derrubar ministros, candidatos e presidentes. As práticas midiáticas não se limitam a apenas transmitir a vida gravada ou “ao vivo e a cores”. "Sabemos que a mídia não transporta a memória pública inocentemente; ela a condiciona na sua própria estrutura e forma”, diz Huyssen (2004).

Monteiro e Ainley (2007) ressaltam que a imprensa, com frequência, faz uso de gráficos estatísticos com intuito de ilustrar os argumentos jornalísticos para o público. Entretanto, afirmam que nem sempre as informações apresentadas pela mídia são repassadas de forma imparcial, visto que os gráficos estatísticos utilizados pelos meios de comunicação podem ser empregados também para enfatizar e/ou disfarçar alguns aspectos da informação.

As escalas representadas nos gráficos, por exemplo, podem fornecer imagens distorcidas sobre uma determinada informação. Cavalcanti, Natrielli e Guimarães (2010), ao analisarem os gráficos veiculados na mídia impressa, considerando três tipos de suportes (um jornal diário, uma revista semanal e uma revista mensal), constataram que 39% desses gráficos apresentavam escalas com proporcionalidades inadequadas, as quais poderiam levar os leitores a compreensões equivocadas da real informação que deveria ser apresentada em tais matérias.

Para que esses erros não passem despercebidos é necessário que haja uma prática de ensino que permita a análise das informações, na qual os leitores possam exercer seu papel perante a sociedade de forma crítica, ponderada e reflexiva. Diante disso, é cada vez mais necessário que os cidadãos tenham um maior conhecimento acerca dos recursos estatísticos, de suas especificidades, para que consigam entender e analisar criticamente as informações mostradas em qualquer tipo de representação gráfica.

Nesse sentido, diversos estudos analisaram o entendimento de alunos e professores, tanto nas atividades que requerem a habilidade de construção, quanto nas de interpretação de gráficos (GUIMARÃES, 2002; LIMA, 2010; SILVA, 2012; LEMOS, 2002; ARTEAGA e BATANERO, 2010) e apontam que as dificuldades para lidar com essa representação estão relacionadas aos aspectos relevantes que a compõem como nomeação dos eixos, títulos, descrição das variáveis e, principalmente, a escala.

O conceito de escala pode ser utilizado em diferentes áreas de conhecimento, como Geografia, Matemática, Cartografia, Engenharia, entre outras. De forma intencional ou não, lidamos constantemente com a noção de escala em nosso dia-a-dia mediante a leitura de mapas, gráficos, planta de imóvel, instrumentos de medições e outros.

A escala gráfica pode ser definida como sendo uma representação gráfica de várias distâncias sobre uma linha reta graduada. Pode ser representada por um segmento reto dividido em submúltiplos da unidade escolhida, graduada da esquerda para a direta, podendo ser unitária (de 1 em 1) ou não unitária (2 em 2; 5 em 5; 10 em 10; e outros).

Friel, Curcio e Brigh (2001), já há algum tempo, argumentavam que muitas vezes os estudantes são capazes de desenhar ou ler uma determinada informação na escala, mas têm pouca ideia de como escolher uma escala adequada para um determinado conjunto de dados a serem representados no gráfico.

Guimarães (2002) argumenta que a leitura de uma escala não é uma tarefa simples, principalmente quando os valores não estão explícitos. Em sua pesquisa com alunos do 4º ano, solicitava que os alunos registrassem quantidades superiores a 30 unidades, mas entregava um papel quadriculado com altura de 10 unidades. A autora observou que os alunos apresentaram dificuldades para construir a escala, pois não era possível estabelecer uma correspondência de uma unidade para um quadrado da malha quadriculada. A Figura 1 mostra a solução de um aluno que pinta um quadrado para cada valor unitário até o esgotamento da quantidade a ser representada, utilizando os quadradinhos que estão próximos.

Figura 1: Exemplo de resposta de aluno que não compreende a função das barras
Fonte: Guimarães (2002)

Além disso, a autora observou que não existe, necessariamente, uma relação entre saber ler e construir uma escala, pois alunos que tiveram um bom desempenho nas questões de interpretação de escala não souberam construir uma escala adequadamente e vice-versa. Acrescido a isso, o fato de estabelecer uma escala adequada não leva a utilizá-la corretamente. Alguns alunos fizeram registros de escala (numeram ao lado da barra), porém, não tinham ligação com os dados representados, demonstrando que os mesmos podiam criar escalas, mas não necessariamente sabiam utilizá-las.

Estudos como os Lima e Magina (2010), Lima (2010) e Silva (2012) também apontam para dificuldades dos alunos em adequar a escala em função das grandezas a serem representadas. Além disso, observaram que os erros cometidos não desaparecem ao longo da escolaridade tanto no ensino regular (alunos do 5º ao 10º ano) como alunos de EJA (anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio). Na Figura 2, o aluno coloca uma escala com os valores na ordem crescente, mas sem proporcionalidade entre os mesmos.

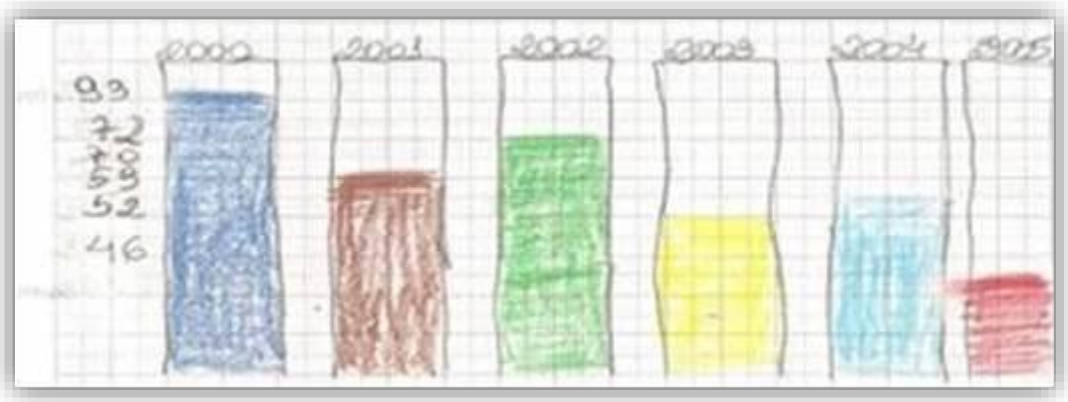


Figura 2: Atividade de construção de gráfico com erro na escala de turma de EJA
Fonte: Lima (2010, p. 122)

Como podemos observar, apesar da importância das escalas nas representações gráficas, elas se constituem como um marcador de dificuldades enfrentadas por alunos de diferentes níveis de ensino, tanto em atividades que requerem a habilidade de construção quando nas que solicitam a interpretação.

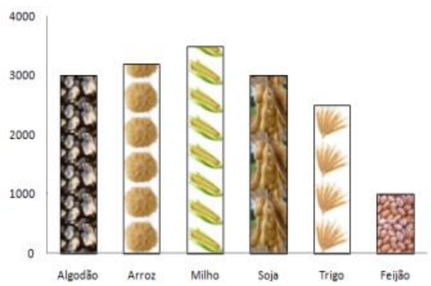
Estudos sobre a compreensão de escalas representadas em gráficos

Buscando exemplificar melhor algumas habilidades relacionadas à compreensão da escala, Cavalcanti (2010) investigou como adultos e crianças dos anos iniciais de escolarização compreendiam escalas representadas em gráficos de barras e de linha. Participaram da pesquisa 152 alunos de escolas públicas da Região Metropolitana do Recife, sendo os mesmos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental e Módulos I-II e III da Educação de Jovens e Adultos.

Foi solicitado que esses alunos resolvessem algumas atividades envolvendo escalas em gráficos. Essas atividades abordavam quatro tipos de variáveis levantadas em estudos anteriores como importantes para a compreensão dos alunos: o tipo de gráfico; o intervalo da escala; a necessidade de o aluno localizar um valor implícito ou explícito na escala; e localizar uma frequência ou uma categoria a partir da escala.

A primeira questão tinha como objetivo analisar a compreensão dos alunos sobre escala em gráficos de barras com escala diferente da unitária (Figura 3).

Quantidade de toneladas de grãos produzidos no Brasil no ano de 2004

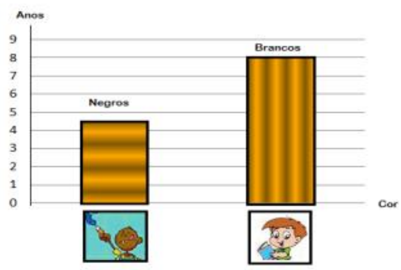


Teste A	Teste B
a) Qual a quantidade de trigo produzida no Brasil? ______________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor implícito na escala)	a) Qual a quantidade de feijão produzido no Brasil? ______________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor explícito na escala)
b) Qual o grão produzido no Brasil que corresponde a 1000 toneladas? ___________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor explícito na escala)	b) Qual o tipo de grão produzido no Brasil que corresponde a 2500 toneladas? ___________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor implícito na escala)

Figura 3 - Atividade de localização de frequência ou de categoria em gráfico de barras
Fonte: Cavalcanti (2010, p.40)

A segunda questão também abordava um gráfico de barras, contudo, este tinha como objetivo verificar a compreensão dos alunos quando a escala é unitária (Figura 4).

Tempo de estudo de negros e brancos

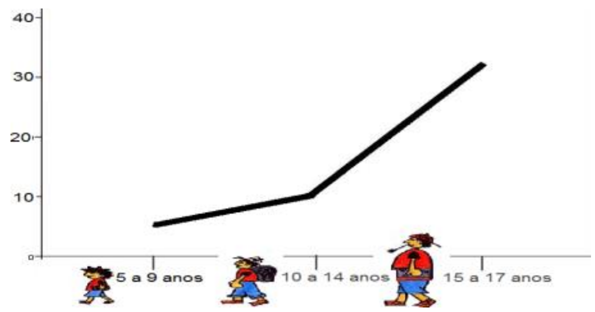


Teste A	Teste B
a) Quantos anos de vida os brancos passam estudando? ___________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor explícito na escala)	a) Quantos anos de vida os negros passam estudando? ___________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor implícito na escala)
b) Quem passa cerca de 4,5 anos de vida estudando? ___________________________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor implícito na	b) Quem passa cerca de 8 anos de vida estudando? ___________________________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor explícito na

Figura 4 - Atividade de localização de frequência ou de categoria em gráfico de barras com escala unitária
Fonte: Cavalcanti (2010, p.40)

A terceira questão apresentava aos alunos outro tipo de gráfico, o de linha. (Figura 5)

Quantidade de crianças que trabalham por idade

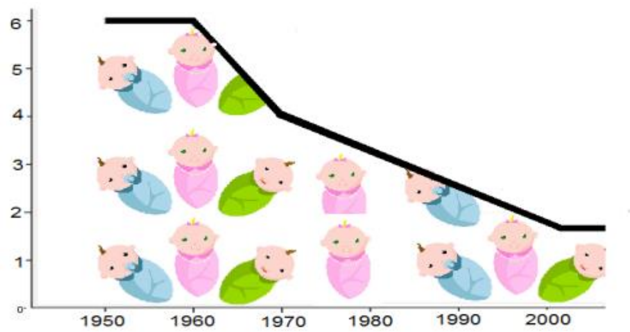


Teste A	Teste B
a) Qual a quantidade de crianças de 10 a 14 anos que trabalha? ______________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor explícito)	a) Qual a quantidade de crianças de 5 a 9 anos que trabalha? ___________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor implícito)
b) Qual a faixa etária de crianças que tem 5 crianças trabalhando? (Localizar categoria a partir da frequência de valor implícito)	b) Qual a faixa etária de crianças que tem 10 crianças trabalhando? (Localizar categoria a partir da frequência de valor explícito)

Figura 5 - Atividade de localização de frequência ou de categoria em gráfico de linha
Fonte: Cavalcanti (2010, p.43)

A quarta questão também apresentava um gráfico de linhas, mas com escala unitária. (Figura 6)

Número de filhos por mulher no Brasil



Teste A	Teste B
a) Quantos filhos as mulheres tinham em 1970? _____________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor explícito)	a) Quantos filhos as mulheres tinham no ano de 2000? ______________________________ (Localizar frequência a partir da categoria de valor implícito)
b) Em que ano nasceram 1,5 crianças por mulher? _______________________________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor implícito)	b) Em que ano nasceram 4 crianças por mulher? _______________________________ (Localizar categoria a partir da frequência de valor explícito)

Figura 6 - Atividade de localização de frequência ou de categoria em gráfico de linha com escala unitária
Fonte: Cavalcanti (2010, p.44)

Como pode ser observado no Gráfico 1, os alunos apresentaram um desempenho bem diferente em função dos valores estarem ou não explícitos na escala. Os sujeitos apresentaram dificuldades quanto à leitura dos valores na escala, quando esses não correspondem a valores explicitados na mesma, demonstrando dificuldades em compreender uma reta numérica. Na questão “a” do teste B, por exemplo, solicita a quantidade de feijão produzido no Brasil que está apresentada no gráfico – 1000 toneladas. Já na questão “a” do teste A, saber a quantidade de trigo produzida no Brasil implica em compreender que o valor está entre 2000 e 3000 toneladas, aproximadamente na metade, ou seja, aproximadamente 2500 toneladas.

Esse resultado também foi encontrado em estudos anteriores como o de Guimarães, Gitirana e Roazzi (2001), Lima e Magina (2004) e, inclusive, o de Lemos e Gitirana (2004), que investigou professores em formação.

Dessa forma, fica posta a grande necessidade de a escola trabalhar de forma sistemática e inter-relacionada a compreensão da grandeza comprimento e escala, pois ambas trabalham com a compreensão de segmento de reta numerada. Assim, discutir as unidades de medida e suas subunidades deve ser associando ao trabalho com escalas apresentadas em gráficos.

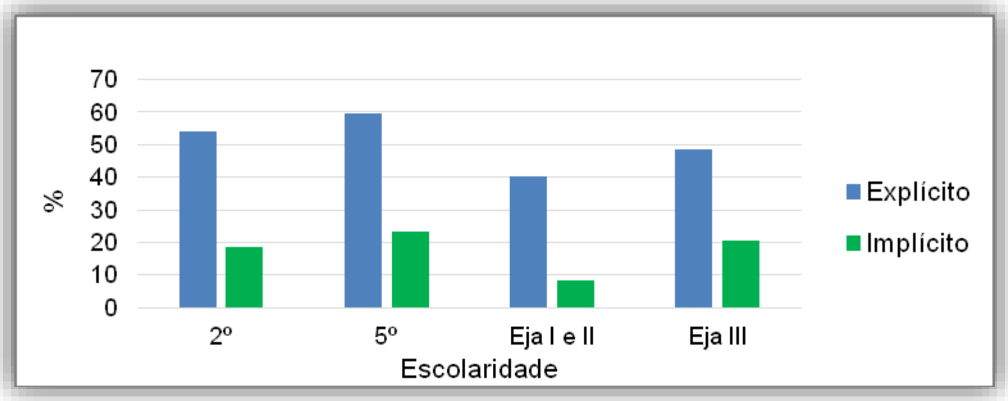


Gráfico 1 – Percentual de acerto em função dos valores explícitos ou implícitos por turma

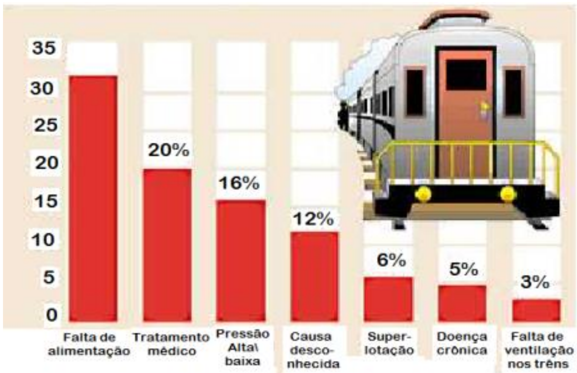
O Gráfico 1 também nos permite observar que a escolarização é importante para a aprendizagem dessa representação. Os alunos do 2º ano apresentam desempenho inferior aos do 5ª ano, da mesma forma que os alunos dos Módulos I e II apresentam desempenho inferior aos do Módulo III.

Entretanto, o fato que nos chamou muita atenção é que a experiência de vida não foi suficiente para a compreensão dessa representação uma vez que os alunos de Eja, adultos com experiência de vida, apresentaram resultados inferiores aos dos alunos do ensino regular. Assim, parece que a experiência de vida, de modo geral, pode não ajudar a compreensão, a não ser que haja o exercício cotidiano de atividades que envolvam escalas (como é o caso de marceneiros, pedreiros...).

Dessa forma, cabe à escola trabalhar de forma sistematizada a compreensão de escalas representadas em gráficos ou não, procurando explorar as diferentes atividades que envolvem o conceito: construir, interpretar, completar, analisar, comparar e outras.

Na quinta questão, Cavalcanti (2010) tinha como objetivo investigar a compreensão dos alunos em um gráfico veiculado pela mídia impressa. O gráfico desta questão era do tipo barra e apresentava escala com valores não unitários. É importante destacar que este gráfico apresenta os valores referentes a cada barra em cima da respectiva barra, como comumente é utilizado por esses veículos de informação. Assim, apagamos um dos valores, o que levava o aluno a precisar compreender a escala para responder e não apenas ler o valor apresentado na mesma.

Causas do mal-estar nos trens



a) Que percentual de pessoas passa mal por falta de alimentação? ________________
(Localizar percentual a partir de categoria de um gráfico da mídia)

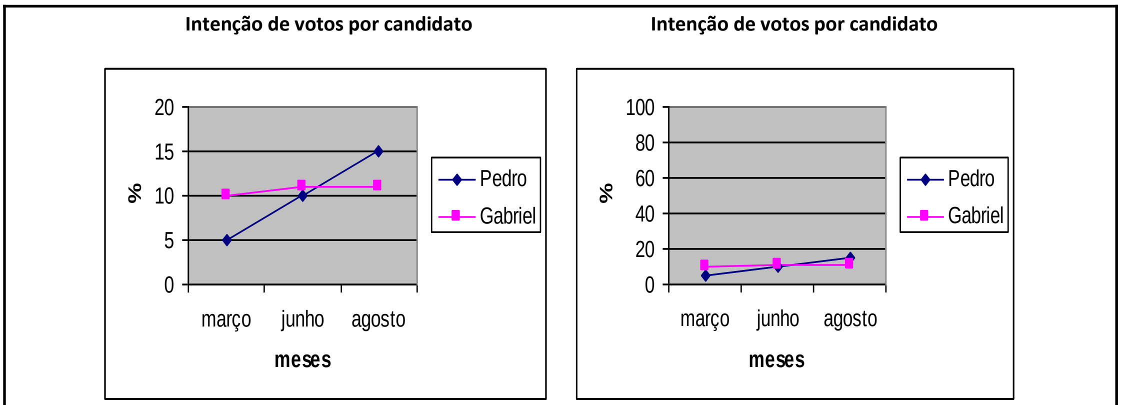
b) Qual a causa do mal estar que corresponde a 6%? _________________
(Localizar categoria a partir de percentual de um gráfico da mídia com valor explícito na barra)

c) Que percentual de pessoas passa mal devido a pressão alta ou baixa?_____________
(Localizar percentual a partir de categoria de um gráfico da mídia com valor explícito na barra)

Figura 7 - Atividade de localização de frequência ou de categoria em gráfico de linha
Fonte: Cavalcanti (2010, p.45)

Nas alternativas "b" e "c", como esperávamos, os alunos apresentaram altos percentuais de acerto (aproximadamente 65%). Já no item "a" o percentual de acerto foi bem pequeno (1,4%). Como os leitores não sabem interpretar uma escala, a mídia acaba por colocar usualmente os valores expressos em cima das barras e os alunos consomem informações muitas vezes deturpadas, de forma acrítica, como afirmamos anteriormente. A compreensão da escala possibilitará a construção de leitores mais críticos.

Na sexta e última questão o objetivo era verificar se os alunos eram capazes de perceber como os mesmos dados apresentados em escalas diferentes aparentava diferenças mais ou menos expressivas. (Figura 8)



Os dois gráficos apresentam a mesma informação. Qual gráfico você acha que Pedro iria escolher para mostrar na sua campanha? Por quê? _______________

Figura 8 - Atividade de comparar gráficos com escalas diferentes
Fonte: Cavalcanti (2010, p.46)

Os alunos de todos os grupos não foram capazes de perceber que a diferença apresentada nos dois gráficos era devido à escala, mas que os dados eram os mesmos.

As autoras concluíram que os alunos apresentaram um baixo desempenho nas atividades propostas no teste. Assim, começaram a pensar os fatores que podiam explicar a dificuldade e levantaram que uma explicação poderia ser o desconhecimento de alunos e professores sobre esse eixo matemático.

Assim, acreditamos ser fundamental que a escola proponha um trabalho com representações gráficas considerando os diferentes tipos de gráficos e as diferentes unidades escalares. Esse trabalho, contudo, deve ser associado à compreensão de diferentes grandezas, principalmente, a grandeza comprimento, discutindo as unidades de medidas e suas subunidades, para que de fato possamos construir cidadãos capazes de serem críticos frente às diversas estratégias utilizadas pela mídia para mascarar, omitir ou manipular as informações.

Escala e livro didático

O livro didático é um importante instrumento para que os professores planejem as suas situações de ensino. Em alguns casos ele é o único recurso do professor, determinando os conteúdos a serem ensinados. Desse modo, acreditamos ser de grande relevância investigar de que forma é abordado o conceito de escala nos livros didáticos.

Alguns pesquisadores (Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques, 2007; Bivar e Selva, 2011; Silva e Guimarães, 2013), vêm analisando coleções de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais e observaram que as mesmas apresentam poucas atividades que levem os alunos a criarem escalas em gráficos. As escalas são apresentadas prontas, cabendo ao aluno apenas completar informações solicitadas.

Na Figura 9 apresentamos um exemplo, no qual o gráfico está pronto, com variáveis, eixos, título e escala determinados, cabendo ao aluno completar com os dados.

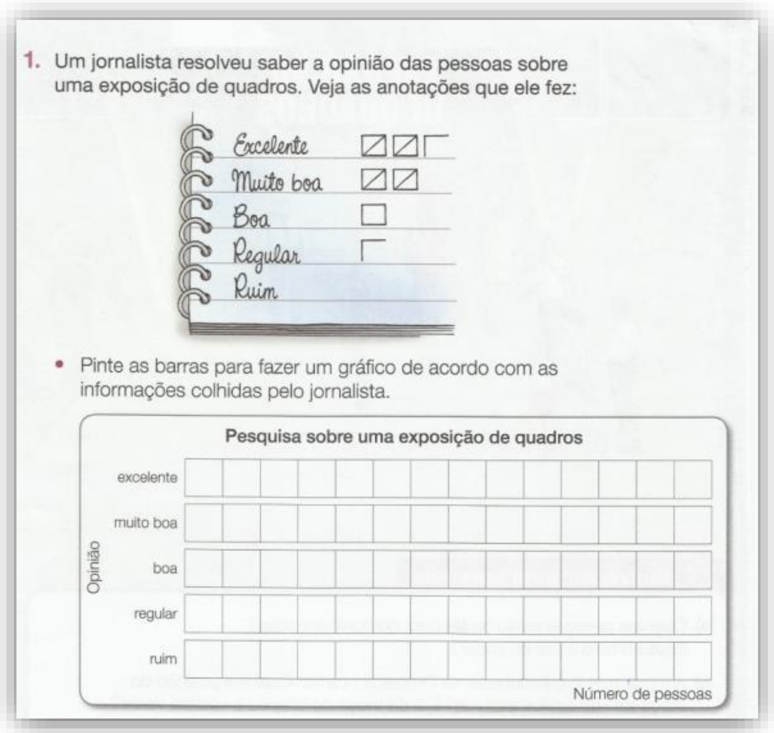


Figura 9: Atividade de completar gráfico
Fonte: Silva e Guimarães (2012, p.81)

Evangelista e Guimarães (2013) resolveram investigar quais eram as atividades propostas em livros didáticos do 4º e 5º anos recomendados pelo PNLD 2013 que trabalhassem com o conceito de escala. Foram encontradas várias atividades tanto em volumes do 4º como do 5º ano, mostrando que em ambos os anos são propostas atividades relacionadas à escala. Eram trabalhadas atividades relacionadas a medidas de comprimento, reta numérica[4], gráfico e a mapas. Assim, a escala está sendo tratada em diferentes eixos da Matemática: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação.

[4]Apesar da representação referir-se a um segmento de reta, sempre é nomeado como reta.

Em relação às atividades com mapas, a grande maioria, apesar de colocar a escala, não faz referência à mesma. (Figura 10).

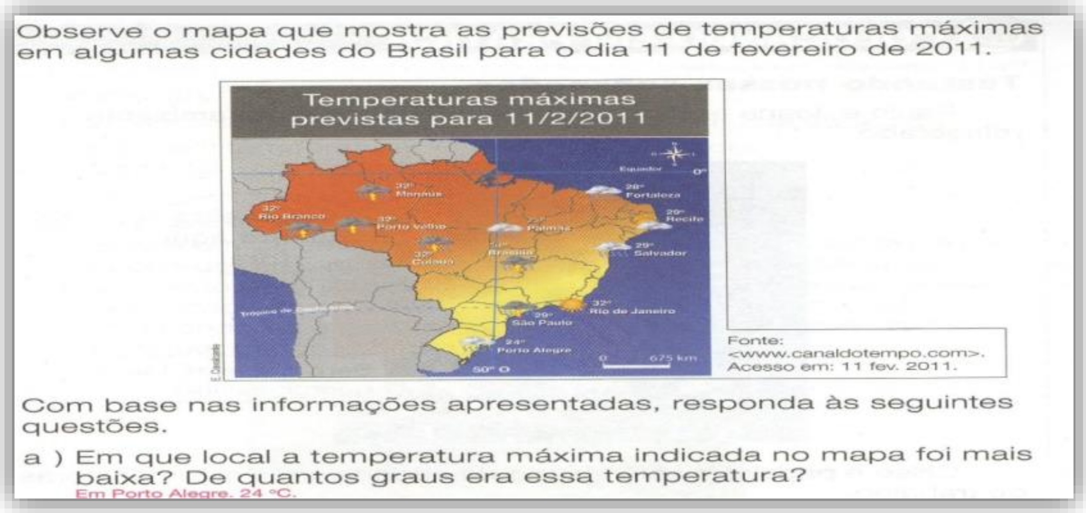


Figura 10: Atividade que apresenta mapa mas não discute a escala
Fonte: Evangelista e Guimarães (2013, pg. 10)

Entre as atividades de medidas de comprimento, foram encontradas atividades de medir, converter em outra unidade, estimar medida, construir instrumento de medida e comparar medidas, sendo mais enfatizada a habilidade de interpretação do que de construção de escala. A Figura 11 apresenta um exemplo de atividade de interpretação de uma medida, com o valor da escala solicitado não explícito.

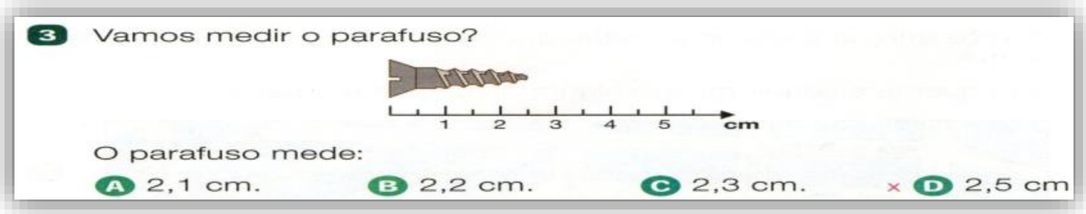


Figura 11: Exemplo de atividade de medir
Fonte: Evangelista e Guimarães (2013, pg. 8)

Nessas atividades a preocupação é em localizar valores não explícitos (Figura 12). Embora não se faça nenhuma relação com as escalas apresentadas em gráficos, é uma boa oportunidade para o professor fazer uma conexão entre os conteúdos ou entre os eixos (grandezas e medidas e tratamento da informação). Entretanto, nos chama atenção o grau de dificuldade bem diferente entre essas e as atividades de escala em gráficos, nas quais as escalas apresentadas costumam ser bem mais simples, apresentando intervalos unitários, de 2 em 2 ou múltiplos de 10. Será que os alunos de fato compreendem essa atividade? Porque será que apresentam tantas dificuldades quando a escala está representada em um gráfico?

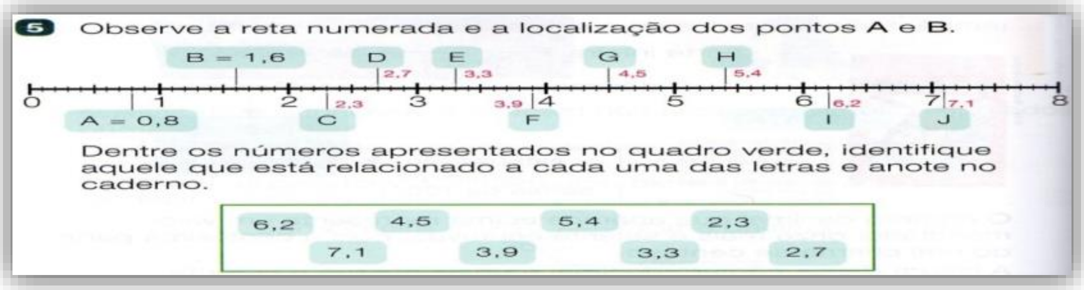
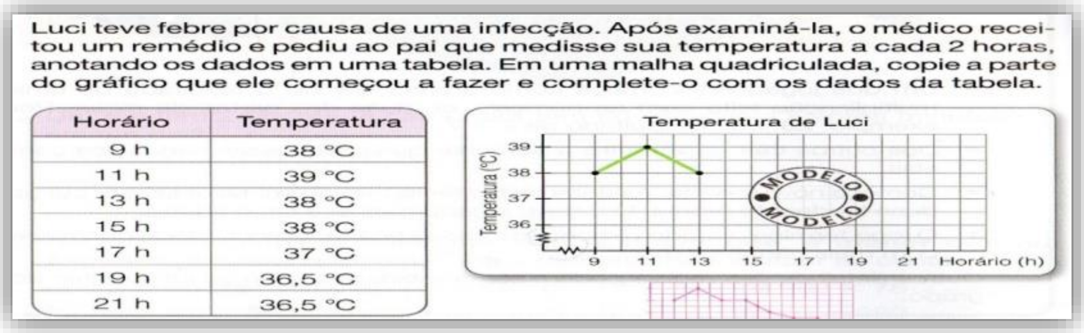


Figura 12: Exemplo de atividade de localizar valores na reta numérica
Fonte: Evangelista e Guimarães (2013, pg. 11)

Nas atividades de escalas representadas em gráficos foram encontradas muitas atividades de interpretação de escala, poucas de construção de escala e algumas de completar gráfico (Figura 13).



Luci teve febre por causa de uma infecção. Após examiná-la, o médico receitou um remédio e pediu ao pai que medisse sua temperatura a cada 2 horas, anotando os dados em uma tabela. Em uma malha quadriculada, copie a parte do gráfico que ele começou a fazer e complete-o com os dados da tabela.

Horário	Temperatura
9 h	38 °C
11 h	39 °C
13 h	38 °C
15 h	38 °C
17 h	37 °C
19 h	36,5 °C
21 h	36,5 °C

Figura 13: Completar Gráfico
Fonte: Evangelista e Guimarães (2013, pg. 11)

Desse modo, observa-se que as atividades de interpretação de escala são mais abordadas do que as demais habilidades. Como interpretar e construir escalas são atividades tão importantes quanto e os alunos desde pequenos são capazes de desenvolvê-las, acreditamos ser fundamental a proposição de atividades de construção de escalas, o que provavelmente ajudará os alunos a compreender melhor como interpretar.

Aprendendo a representar

A partir da possibilidade de ensinar aos alunos o conceito de escalas representadas em gráficos e tendo como base essas atividades dos livros didáticos, Evangelista (2014) realizou um estudo que visava propor um processo de ensino em salas de aula com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. A autora optou por uma intervenção que envolvesse atividades propostas nos livros didáticos considerando esses diferentes eixos (medidas de comprimento/eixo grandezas e medidas; reta numérica/ eixo números e operações e mapas/eixo de espaço e forma), buscando investigar se essas atividades contribuiriam para a aprendizagem sobre escalas representadas em gráficos.

Assim, participaram 69 alunos do 5.º ano do Ensino Fundamental (crianças com aproximadamente 10 anos de idade) de escolas públicas. A pesquisa foi realizada em três etapas (teste inicial, processo de ensino, teste final).

Dessa forma, para avaliar o nível de conhecimento dos alunos sobre escala foi solicitado que respondessem, individualmente, a um teste inicial envolvendo atividades de interpretação e construção de escalas representadas em gráficos de barras e de linhas. Após o processo de ensino foi realizado um outro teste, similar ao inicial, para avaliar possíveis avanços na aprendizagem dos alunos sobre escalas representadas em gráficos de barras e linhas. Abaixo apresentamos as questões usadas no teste final.

Nas questões 1 e 2 dos testes buscamos observar a habilidade dos alunos em representar adequadamente valores na escala em gráfico de barras (Figura 14) e de linha (Figura 15), tendo os mesmos que respeitar a ordem numérica e a proporcionalidades dos valores representados.

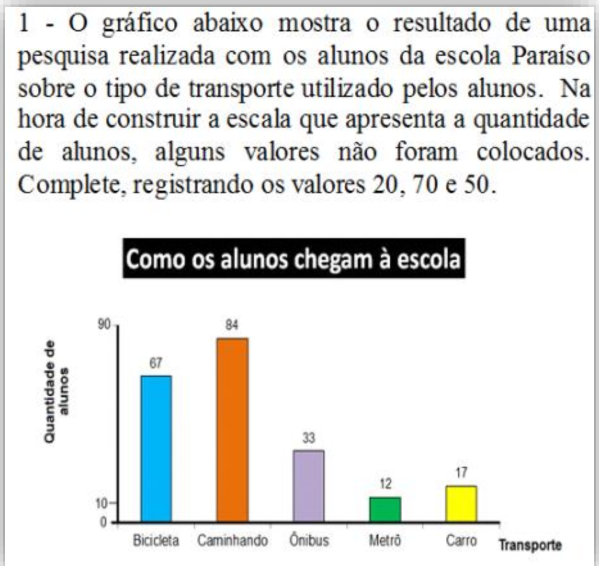


Figura 14: Representar valores na escala em gráfico de barras
Fonte: Evangelista (2014, pg. 52)

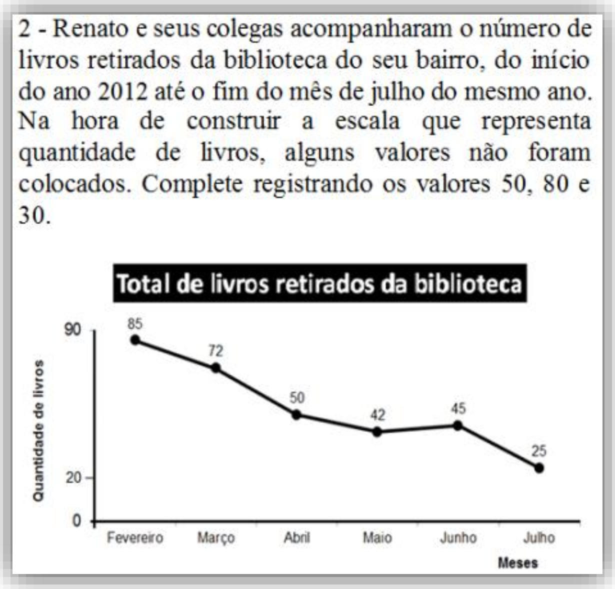


Figura 15: Representar valores na escala em gráfico de linha
Fonte: Evangelista (2014, pg. 52)

As questões 3 e 4 tinham como objetivo explorar a habilidade dos alunos em localizar valores implícitos na escala do gráfico de barras (Figura 16) e no de linha. (Figura 17).

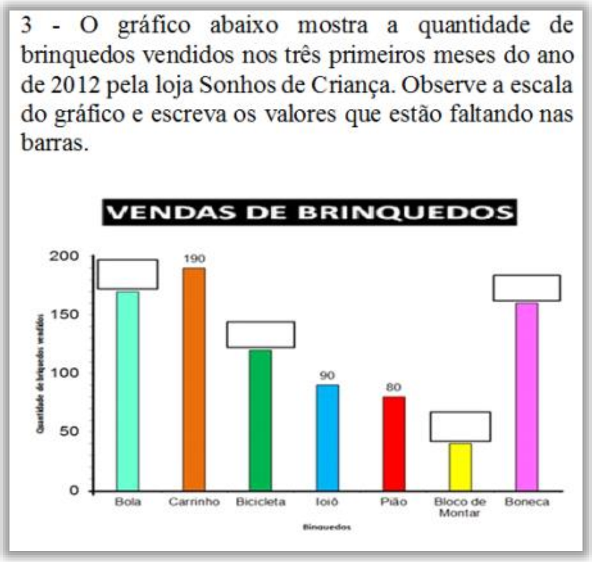


Figura 16: Interpretar valores na escala no gráfico de barras
Fonte: Evangelista (2014, pg. 53)

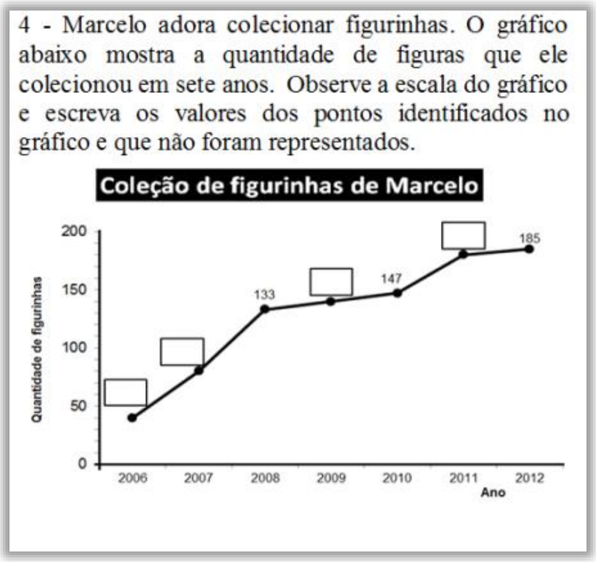


Figura 17: Interpretar valores na escala no gráfico de linha
Fonte: Evangelista (2014, pg. 54)

Na questão 5, (Figura 18), foi solicitado aos alunos que localizassem erros em uma escala/valores expresso em cima das barras. Na questão 6 (Figura 19), buscamos analisar a habilidade dos alunos em estabelecer uma relação entre valores expressos em um gráfico e em uma tabela simples.

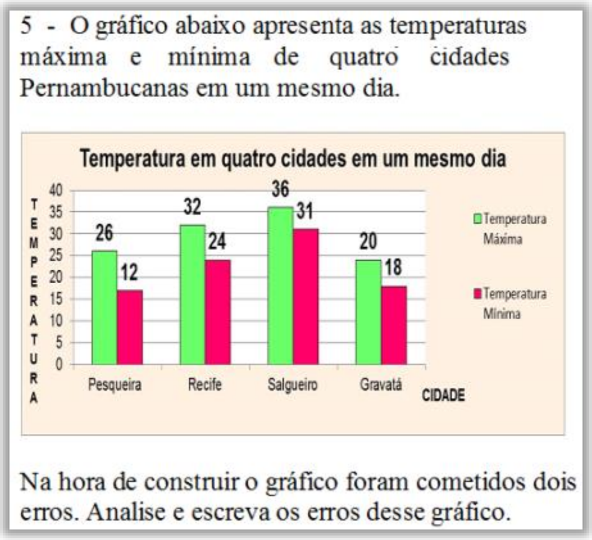


Figura 18: Analisar valores na escala no gráfico de barras duplas
Fonte: Evangelista (2014, pg. 55)

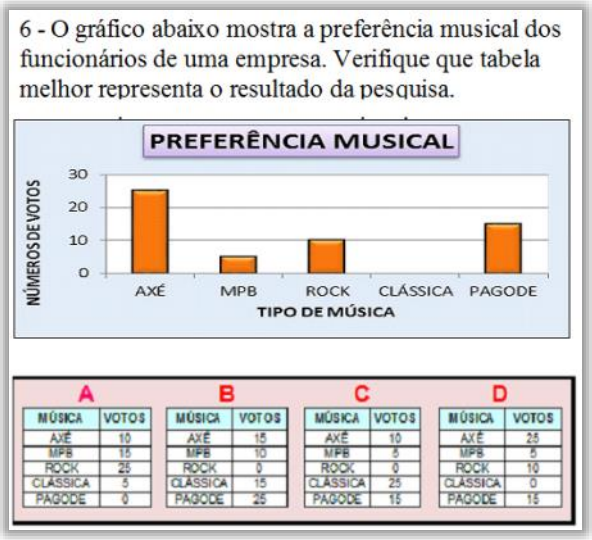


Figura 19: Relacionar valores na escala no gráfico de barras com sua tabela
Fonte: Evangelista (2014, pg. 56)

A questão 7 (Figura 20), teve como objetivo verificar a habilidade dos alunos em comparar gráficos que apresentavam os mesmos dados, mas com escalas diferentes. A questão 8 (Figura 21) foi solicitado aos alunos que construíssem um gráfico de barras a partir de uma tabela.

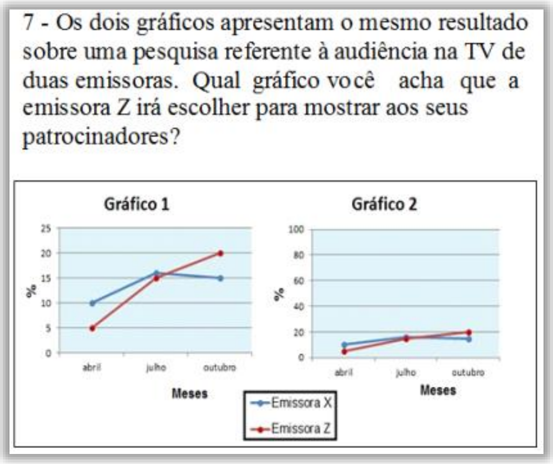

7 - Os dois gráficos apresentam o mesmo resultado sobre uma pesquisa referente à audiência na TV de duas emissoras. Qual gráfico você acha que a emissora Z irá escolher para mostrar aos seus patrocinadores?

Figura 20: Comparar escalas com intervalos distintos
Fonte: Evangelista (2014, pg. 57)


8 - A tabela abaixo mostra o número aproximado de turistas estrangeiros que visitaram alguns países em 2012. Construa um gráfico com os dados da tabela.

Número de turista que visitaram alguns países estrageiros					
PAÍSES	França	EUA	Espanha	China	Brasil
Números de turistas	60	57	45	30	15

Figura 21: Construir de um gráfico a partir de uma tabela
Fonte: Evangelista (2014, pg. 57)

Assim, cada turma de uma escola diferente, no seu turno normal de aula, participou de um tipo de sequência de duas aulas com atividades envolvendo interpretação e construção de escala. Cada turma participou de atividades que envolviam o contexto de medidas de comprimento (MC) ou reta numérica (RN) ou mapas (MP).

Após a execução de cada atividade, era realizada uma correção coletiva no quadro, a qual buscava estimular uma reflexão por parte dos alunos acerca dos valores explícitos apresentados na escala, suas subdivisões e quais poderiam ser os valores intermediários, tendo prioritariamente como referência a metade, metade da metade e intervalos múltiplos de 10 e 5.

Após a realização da intervenção de ensino todos os grupos apresentaram desempenho significativamente superior, evidenciando que a intervenção contribuiu efetivamente na aprendizagem sobre escalas representadas em gráficos, independente do tipo de situação apresentada na intervenção de ensino de cada grupo.

Tais resultados nos parecem muito importantes, uma vez que expressam a facilidade que as crianças apresentam em aprender sobre escalas quando são estimuladas de forma sistemática. Com apenas duas sessões de intervenção, duas aulas de aproximadamente 2 horas, todas as turmas apresentaram um desempenho significativamente superior, com relação ao que tinham anteriormente.

Analisando mais especificamente cada uma das questões, observamos que mais da metade dos alunos já eram capazes, antes da intervenção, de fazerem adequadamente a correspondência entre dados apresentados em um gráfico e em uma tabela como na questão 6. Por outro lado, todos os grupos apresentaram, nas duas fases, muita dificuldade na 7ª questão. Os alunos não foram capazes de perceber que a diferença entre os dois gráficos consistia na manipulação das escalas que apresentavam intervalos distintos. Essa questão, de fato, também foi considerada bem difícil para crianças e adultos, que fizeram parte do estudo realizado por Cavalcanti (2010).

Como diante de uma atividade existe pelo menos uma resposta correta e várias tentativas de acertar, consideramos fundamental sempre olhar o que foi que os alunos fizeram, ou seja, olhar a estratégia de resolução dos mesmos.

Na Figura 22 temos um exemplo de um tipo de estratégia muito utilizada pelos alunos: *representou os valores solicitados na escala do gráfico de barras na ordem em que são apresentados no enunciado da questão.* Nesse exemplo, o aluno compreendeu que deveria representar os valores 30, 50 e 80 na escala do gráfico, mas não considerou nem a grandeza numérica e nem a proporcionalidade dos valores, colocando exatamente como foi apresentado na ordem do enunciado da questão e sem proporção nos intervalos da reta. A partir das aulas, a grande maioria deixou de usar esse tipo de estratégia.

Na Figura 23 é apresentado um exemplo da estratégia *representou os valores solicitados na escala do gráfico na ordem crescente, mas sem proporcionalidade.* Percebemos que o participante se preocupou com a grandeza numérica, colocando-os em ordem crescente, porém não conseguiu respeitar a proporcionalidade entre os mesmos, existindo o mesmo espaço entre 30 - 40 e entre 40 – 60.

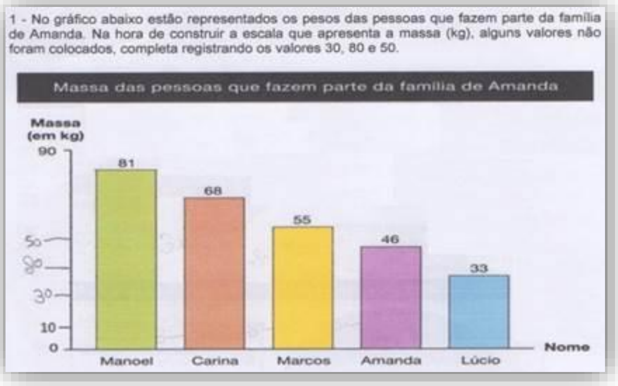


Figura 22: Representou os valores solicitados na escala do gráfico de barras na ordem em que são apresentados no enunciado da questão

Figura 23: Representou os valores solicitados na escala do gráfico na ordem crescente, mas sem proporcionalidade

Alguns alunos utilizam os valores apresentados na escala para preencher os valores solicitados (Figura 24) sem se preocuparem com os valores das barras com suas respectivas alturas, ou seja, barras maiores com os números maiores e barras menores com os números menores. Já na Figura 25 temos um exemplo no qual o aluno, tendo como referência os valores explícitos já representados, coloca o antecessor e sucessor.

Figura 24: Utiliza valores da escala/eixo

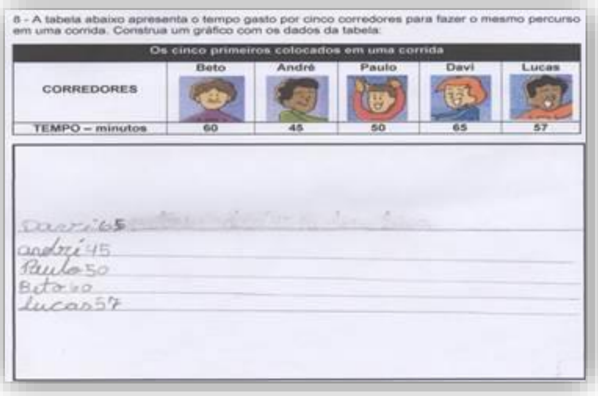
Figura 25: Colocou antecessor e sucessor dos valores apresentados

Representar os valores implícitos, independente do contexto por nós trabalhado em cada turma, foi uma atividade que os alunos apresentaram dificuldades, mas a possibilidade de aprender se levados a refletir de forma sistematizada.

E como os alunos constroem gráficos? Na questão 8, era solicitado que os alunos construíssem um gráfico a partir dos dados apresentados na tabela. Esse tipo de atividade exige que o aluno escolha a escala.

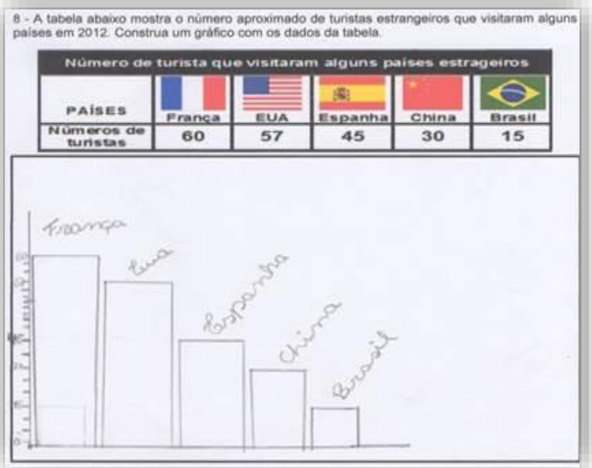
Assim, na Figura 26 apresentamos um exemplo de uma tentativa de um aluno em representar os valores expressões na tabela. Ao responder a questão observamos que o participante não construiu o gráfico solicitado, apenas listou os nomes e o tempo que os corredores gastaram em uma corrida.

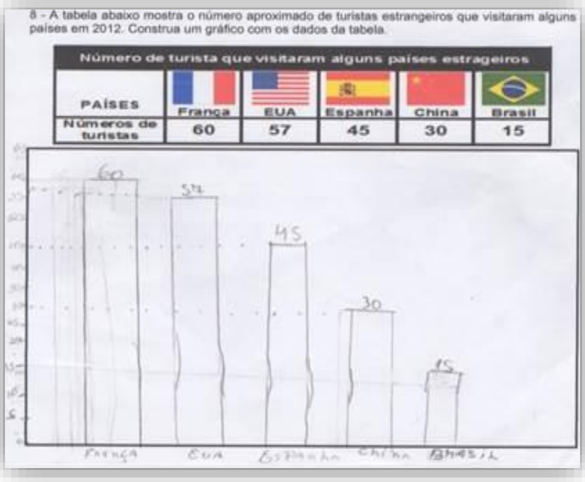
Por outro lado, no exemplo da Figura 27, temos uma produção mais elaborada, embora não correta. O aluno *colocou os valores em cima das barras, mas sem proporcionalidade.* Nesse exemplo, notamos que o participante construiu as barras que representavam o tempo gasto pelos corredores em uma corrida, colocou em cima das barras valores referentes aos tempos, mas não determinou a quem cada barra/tempo se destinava. Também não houve uma preocupação com a proporcionalidade das barras, visto que nas barras de alturas maiores o aluno determinou os valores menores e vice-versa.



Da mesma forma, na Figura 28 temos um exemplo da categoria de resposta *fez barras com escalas, mas sem proporcionalidade.* Nesse exemplo, ao construir o gráfico o aluno não respeitou a proporcionalidade das barras, mas representou em ordem decrescente. Ao analisarmos a construção da escala, percebemos que a graduação inicialmente estava de 15 em 15 unidades, mas entre o valor 45 e 60, o aluno representou o 57 referente ao número de turistas que visitaram o EUA. Além disso, as distâncias entre uma graduação e outra não foram proporcionais.

Apresentamos na Figura 29 um exemplo da estratégia *fez barras proporcionais com escala.* Percebemos que o aluno construiu uma escala graduada de 5 em 5 unidade, teve o cuidado de representar o 0 (zero), bem como utilizou a linha de grade horizontal para determinar a altura das barras. Além disso, representou em cima das barras os valores de cada categoria e teve uma preocupação com a proporcionalidade das barras/escala.





Esses resultados corroboram com estudos anteriores que afirmam que os alunos sentem bastante dificuldade para construir gráficos com escalas proporcionalmente adequadas, como observado por Guimarães (2002) com alunos do 4.º ano, Silva (2012) com alunos do 3.º e 5.º ano de escolarização e Lima (2010) com alunos da Educação de Jovens e Adultos. Entretanto, fica evidente que quando os alunos são levados a refletirem sobre a escala (valores implícitos e explícitos) os mesmos são capazes de construírem escalas com intervalos proporcionais.

Ressaltamos, ainda, que as situações apresentadas na intervenção não levaram a tipos de aprendizagens diferentes. Dessa forma, a capacidade de adaptação dos alunos em estudar escala em atividades de um eixo matemático e transferi-la para outro é evidenciada, uma vez que as situações de intervenção envolviam contextos de medidas, mapas e reta numérica e os testes envolviam representações em gráficos de barra e linha.

Assim, a partir dos resultados constatamos que os alunos inicialmente apresentaram um fraco desempenho, demonstrando dificuldades como já havia sido observado em outros estudos (Guimarães, 2002; Lemos, 2002; Cavalcanti, 2010; Lima, 2010; D'Ambrósio, 2007, INAF, 2011; Silva, 2012, entre outros).

Entretanto, após terem sido submetidos à intervenção de ensino, percebemos que houve um avanço significativo no desempenho dos alunos sobre escalas representadas em gráficos de barras e de linha.

Observamos que os alunos passaram a se preocupar com a sequência da grandeza dos números, mas a proporcionalidade entre os espaços ainda foi uma dificuldade. Por outro lado, muitos alunos passaram a compreender a importância da proporcionalidade expressa em uma escala, realizando as atividades de forma mais adequada, tendo o cuidado de representar, localizar, analisar, comparar e construir escalas corretamente.

Podemos afirmar que é possível promover a aprendizagem dos alunos sobre a compreensão de escala através de diferentes contextos, os quais vêm sendo trabalhados em livros didáticos. Exploramos três situações diferentes (medida de comprimento, reta numérica e mapas) em nossa intervenção de ensino e conseguimos avanços significativos com os três grupos, em pouco tempo, independentemente do tipo de atividade explorada.

Assim, ...

Nesse capítulo, nos propusemos a refletir sobre uma das fases da pesquisa: a aprendizagem de representações em gráficos. Especificamente, analisamos estudos que levantavam a compreensão de adultos e crianças interpretando ou construindo escalas em gráficos de barra ou linha.

A partir do estudo de Cavalcanti (2010), ficou evidenciado que a experiência de vida, de modo geral, pode não ajudar a compreensão de escalas, uma vez que alunos dos anos iniciais apresentaram desempenho superior aos adultos de mesma escolaridade. Dessa forma, a escola precisa trabalhar de forma sistemática e inter-relacionada a compreensão da grandeza comprimento e escala, discutindo as unidades de medida e suas subunidades e associando ao trabalho com escalas apresentadas em gráficos.

Partindo dessa sugestão, Evangelista (2014) realizou um processo de ensino a partir de diferentes contextos encontrados em livros didáticos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental (medida de comprimento, reta numérica e mapas) e concluiu que é possível promover a aprendizagem sobre escalas com alunos dessa faixa etária.

A partir desses resultados, fica explícita a possibilidade de alunos dos anos iniciais compreenderem uma escala, evidenciando-se, assim, a necessidade de um trabalho mais intenso nas escolas relativo ao tema.

Referências

ARTEAGA, P.; BATANERO, C. Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. **Anais...** Lleida: SEIEM, 2010.

BATANERO, C; DIAZ, C. El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In: I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal. **Anais...,** Guimarães, Portugal, 2005.

BEN-ZVI, D.; AMIR, Y. How do primary school students begin to reason about distributions? In K. Makar (Ed.), *Reasoning about distribution: A collection of current research studies*. **Proceedings** of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy (SRTL-4), University of Auckland, New Zealand, 2-7 July, 2005. Brisbane, University of Queensland, 2005.

BIVAR, D; SELVA, A. Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. In XIII CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática, **Anais...** Recife, 2011.

CAVALCANTI, M. R. G. **Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos**. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco. CE, 2010.

CAVALCANTI, M. R. G.; NATRIELLI, K. R. B.; GUIMARÃES, G. L. Gráficos na Mídia Impressa. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 733 a 751, agosto 2010.

D'AMBRÓSIO, U. A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática. In FONSECA, M. C. F. R. (org). ***Letramento no Brasil: Habilidades Matemáticas*****.** São Paulo, Global Editora, 2007.

EVANGELISTA, M. B; e GUIMARÃES, G. L. Analise de atividade de livros didáticos de matemática do 4º e 5º ano que exploram o conceito de escala. In: VII Congreso Iberomericano de Educación Matemática – CIBEM. **Anais...** Montevideo, 2013.

FIELDING-WELLS, J. Linking problems, conclusions and evidence: primary students' early experiences of planning statistical investigations. **Proceedings** of the Seventh International Conference on Teachings Statistics - ICOTS 8, Slovenia, 2010.

FRIEL, S.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. **Journal for Research in Mathematics Education** 32(2), 124-158, 2001.

GAL, I.; GARFIELD, J. Curricular goals and assessement challenges in statistics and education. In. I Gal & Garfield (Eds), **The Assessment Challenges in Statistical Educational** (pp. 37-51) Voorburg: International Statistical Institute, 1997.

GUIMARÃES, G. L. **Interpretando e Construindo Gráficos de Barras**. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V. Atividades que exploram gráficos e tabelas em livros didáticos de matemática nas séries iniciais. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, **Anais...**, Águas de Lindóia, 2006.

GUIMARÃES, G. L.; FERRAIRA, V. G. G.; ROAZZI, A. Interpretando e Construindo Gráficos. In Anais da 24ª Reunião Anual da ANPED – GT Educação Matemática. **Anais...,** Caxambu (MG), 2001. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/ conteudo/producoes/docs_4/interpretando.pdf>. Acessado em 16/04/2012.

GUIMARÃES, G. L.; GITIRANA, V. G. F.; CAVALCANTI, M.; MARQUES, M. Livros didáticos de matemática nos anos iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. In IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Anais...** Belo Horizonte, 2007.

GUIMARÃES, G.; BORBA, R. Professores e graduandos de pedagogia valorizam e vivenciam processos investigativos? **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, v. 17, pp. 61-90, 2007.

HUYSSEN, A. **Seduzidos pela memória**. Editora Aeroplano, Brasil, 2004

LEMOS, M. P. F. de; GITIRANA, G. F. V. A formação de professores através da análise a priori de atividades em interpretação de gráficos de barra. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 2004, Recife. **Anais...** Recife, 2004.

LEMOS, M. P. **Professorandos analisando atividades de interpretação de gráficos de barras**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Federal de Pernambuco. CE, Recife, 2002.

LIMA, I. B. **Investigando o desempenho de jovens e adultos na construção e interpretação de gráficos**. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco. CE, Recife, 2010.

LIMA, R. C. R.; MAGINA, S. M. A leitura de gráficos com crianças da 4ª série do Ensino Fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, **Anais...,** 2004.

LIMA, R. C. R.; MAGINA, S. M. O uso de diferentes escalas na leitura de gráficos por crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM. **Anais...,** Salvador, 2010.

MAKAR, K.; RUBIN, A. A framework for thinking about informal statistical inference.7 **Statistics Education Research Journal**, 8(1), 82-105, 2009.

MONTEIRO, C., AINLEY, J. Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. **International Electronic Journal of Mathematics Education** 2 (3), 188-207, 2007.

PONTES, J. P., BROCARDO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigações matemática na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SILVA, D. B. **Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental**, Dissertação da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

SILVA, E. M. C. **Como são propostas pesquisas nos livros didáticos de Matemática e Ciências dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

SILVA, E. M. C.; GUIMARAES, G. L. . Livros Didáticos Para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental Propõem aos alunos que realizem pesquisas?. In: XV EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, **Anais...**, Campina Grande, 2011.

SILVA, E. M. C.; GUIMARAES, G. L. Perspectivas para o ensino da Educação Estatística. In: XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas, **Anais...**, Curitiba, 2013.

SILVA, M. B. E. **Aprendendo a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção.** Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco. CE, Recife, 2014.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review***, 67*(3), 223-265, 1999.

Capítulo 4

Surdez, Libras e Educação Matemática: O cálculo mental em questão

Clélia Maria Ignatius Nogueira[1]
Maria Emília de Melo Tamanini Zanqueta[2]
Fábio Alexandre Borges[3]

Iniciando a conversa...

A educação de surdos mudou radicalmente nas últimas décadas. Partindo de uma abordagem que praticamente criminalizava o uso de qualquer tipo de sinalização (oralismo), atualmente preconiza uma educação sustentada na língua de sinais (bilinguismo). Durante nossa longa caminhada na educação de surdos, vivenciamos esta profunda mudança paradigmática. Iniciamos nosso percurso quando a filosofia oralista era dominante, em que qualquer comunicação envolvendo sinais era proibida, não apenas como língua veicular da escola, mas também na comunicação coloquial entre os alunos.

O principal objetivo da escola era fazer com que as crianças aprendessem a falar e, assim, os professores dos anos iniciais despendiam a maior parte do horário escolar na árdua e nem sempre exitosa missão de oralização desses alunos. O resultado disso eram aulas em que o diálogo não acontecia. Desprovidos de uma linguagem que lhes permitisse questionar, argumentar ou mesmo entabular uma conversação cotidiana com seus professores e colegas, a maioria dos estudantes surdos se dedicava a copiar o que era passado na lousa. Os professores, cientes do alcance limitado de sua ação pedagógica, também simplificavam ao máximo suas avaliações, quase sempre reduzidas ao esquema de perguntas e respostas previamente ofertadas.

Somente a partir da década de 1980 é que foi entendida a necessidade de reconhecer o verdadeiro valor da cultura e da linguagem surda para o desenvolvimento cognitivo e da identidade dos surdos. Isto porque foi nesta década que foram iniciadas as discussões sobre bilinguismo no Brasil, o que foi caracterizado por Sá (1998) como uma "virada linguística". Esta mudança foi decorrente de diversas

[1]Professora e pesquisadora aposentada da Universidade Estadual de Maringá e em atuação no Centro de Estudos Superiores de Maringá. Membro do GPEMCAM: Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da Universidade Estadual Paranaense/ Campus de Campo Mourão e do GEPSEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão. cminogueira@uem.br

[2]Professora da Rede Estadual de Ensino do Paraná. Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Membro do GEPSEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão e do Projeto e Difusão à LIBRAS/UEM. Email: zanquettamaria@gmail.com

[3]Professor da Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão. Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá. Membro do GPEMCAM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão e do GEPSEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná/Campo Mourão. Email: fabioborges.mga@hotmail.com

[4]Segundo Goldfeld (2002), a filosofia oralista visava "[...] à integração da criança surda na comunidade de ouvintes, dando-lhe condições de desenvolver a língua oral (no caso do Brasil, o português). [...] O Oralismo percebe a surdez como uma deficiência que deve ser minimizada pela estimulação auditiva" (pp.33-34).

pesquisas sobre as línguas de sinais, em suas características linguísticas e em seu potencial cognitivo. Desta forma, foram os membros da academia - linguistas, psicólogos, pedagogos, fonoaudiólogos e estudantes dessas áreas (graduandos e pós-graduandos) - que introduziram novos paradigmas para a educação de surdos, mediante a realização de eventos com apresentação de pesquisas contendo propostas e relatando experiências.

Os surdos, que tanto padeceram no oralismo, seja por identidade, luta, rebeldia, redenção ou libertação, rapidamente levantaram a bandeira pela educação bilíngue proposta pela academia, tornando -se seus defensores, exigindo mudanças educacionais e a oficialização da Libras, o que aconteceu em 2002.

É fato que uma das principais dificuldades da academia é fazer com que seus resultados, teorias, recomendações, atinjam efetivamente a sala de aula, mas, neste caso, seja pela ação efetiva dos movimentos da comunidade surda e a sensibilidade dos governantes, a partir do reconhecimento da Libras como língua oficial em nosso país (BRASIL, 2002) ela vem sendo gradativamente valorizada nos diversos ambientes sociais, em particular no educacional, como principal meio de comunicação entre surdos e entre surdos e ouvintes, sendo esta última forma de comunicação quase sempre garantida pela intermediação de um intérprete.

Com a aceitação dos sinais em sala de aula e com a Libras sendo considerada a língua veicular do conhecimento, é também mediante a atuação de um intérprete que a educação de surdos é efetivada na escola inclusiva, o que acaba restringindo ou mesmo impedindo as trocas dialógicas entre os diferentes atores da educação.

É fato que a comunicação nas aulas de Matemática, em geral, e nos anos iniciais em particular no ensino comum, também deixa a desejar. Segundo D´Antonio (2006), nem toda comunicação se efetiva em compreensão real dos conceitos matemáticos e isto mesmo entre educadores e alunos que comungam de uma mesma língua.

Neste sentido, têm sido realizadas pesquisas em que se busquem estratégias que favoreçam a construção do conhecimento matemático, em que os alunos sejam instigados a elaborar conjecturas, testar, refinar conjecturas anteriores, demonstrar e comunicar seus resultados a seus pares (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Dentre dessas estratégias, encontram-se a Resolução de Problemas, o Uso de Jogos e as Investigações Matemáticas, por exemplo.

Além disso, no caso específico do ensino de Matemática para surdos, pesquisas como as de Tito e Nogueira (1989), Nogueira e Zanquetta (2008), Kritzer (2009) e Nunes, Evans, Barros e Burman (2011) compartilham o resultado de que o desempenho acadêmico dos surdos apresenta desvantagem com relação aos seus pares ouvintes no que se refere à compreensão dos conceitos matemáticos.

Como professores de uma escola bilíngue para surdos, estávamos empenhados em buscar mais da oportunidade de utilizar a Libras como língua veicular. Queríamos extrapolar nossos procedimentos rotineiros de apenas "traduzir" para a Libras estratégias metodológicas pensadas para os ouvintes. Mais ainda, queríamos poder explorar as possibilidades pedagógicas da Libras. Neste sentido, descrevemos abaixo uma de nossas experiências.

O conteúdo a ser ensinado era o Sistema de Numeração Decimal (SND) e Operações e Problemas do Campo Aditivo. Nogueira, Borges e Frizzarini (2013), ao tratarem do ensino de número e do Sistema de Numeração Decimal para surdos, apontam "[...] a necessidade de estratégias metodológicas diferenciadas, particularmente para suprir as lacunas no conhecimento prévio de crianças surdas ocasionadas pela interação prejudicada com o meio" (p.173). Isso se deve, em boa parte, pelo fato de que os surdos são, na maioria dos casos, filhos de pais ouvintes, tendo uma comunicação ainda enquanto crianças prejudicada no período pré-escolarização. Tal prejuízo se deve, entre outros fatores, ao fato de que, no caso de crianças que comungam de uma mesma língua que seus pais, muitos conhecimentos matemáticos já começam a ser elaborados nas situações cotidianas antes mesmo de sua escolarização, como, por exemplo, a sequência das palavras-números, que as crianças já repetem em torno dos três anos de idade. Já os surdos, especificamente aqueles que são filhos de ouvintes, levam para a escola a elaboração destes conhecimentos em um nível anterior aos demais, devido à falta de comunicação e incentivos adequados.

Neste período, participávamos de um grupo de estudos, na Universidade Estadual de Maringá, que envolvia pesquisadores da Educação Matemática, alunos (graduação e pós-graduação) e professores da Educação Básica, de ouvintes e surdos. Discutíamos os resultados de pesquisas realizadas por Gómez (1994), Guimarães (2009), Gonçalves (2008), Parra (1996) e Mendonça e Lellis (1989), que indicam um consenso quanto à importância do cálculo mental para a aprendizagem da Matemática.

Além deste grupo, também participávamos e ainda participamos do GEPSEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Ensino Matemática, da UNESPAR/Campus de Campo Mourão. Este grupo é constituído por professores de Matemática, de surdos e ouvintes, por pesquisadores sobre surdez e ensino de Matemática e por professores surdos que ministram Libras em Instituições de Ensino Superior. As discussões com os professores surdos (em nosso caso) ou surdos adultos, em geral, são fundamentais para o estabelecimento de qualquer ação destinada às crianças surdas, pois eles conseguem o que nenhum professor ou pesquisador ouvinte pode: se colocar efetivamente no lugar da criança e fazer uma análise *a priori* plena das possibilidades e dificuldades da atividade a ser executada.

Considerando nossa preocupação com a questão de se explorar as possibilidades pedagógicas da Libras e o conteúdo a ser ensinado (o SND e o Campo Aditivo), destacamos, desses estudos, a pesquisa realizada por Guimarães (2009), que desenvolve atividades de cálculo mental com o SND e o Campo Aditivo em uma perspectiva dialógica, concluindo, entre outros fatos igualmente importantes, que "[...] a dinâmica instaurada na pesquisa deveria ser incorporada à prática dos professores, pois favoreceu o conhecimento das concepções numéricas dos alunos e contribuiu para o desenvolvimento de um ensino mais efetivo" (p.231).

Desta forma, realizamos uma investigação acerca das possibilidades de uma estratégia metodológica de cálculo mental em uma perspectiva dialógica em Libras, para a construção dos conhecimentos matemáticos relativos ao Sistema de Numeração Decimal e às operações do Campo Aditivo (adição e subtração).

A intervenção foi realizada com três alunos surdos, fluentes em Libras, dos quais dois são também diagnosticados com Transtornos de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) e que faziam uso de medicação. Neste texto eles foram denominados como Luiza, João e Maria, sendo os dois últimos os que apresentam TDAH. Maria não é surda profunda, razão pela qual utiliza frequentemente a oralidade. Acreditamos que ela estava matriculada na escola bilíngue muito mais em função do TDAH do que da surdez.

O conjunto de atividades realizado foi agrupado em dois blocos: o primeiro, do SND, com 15 atividades e o segundo, do campo aditivo, com 17 atividades. As sessões foram de no máximo 15 minutos, considerando o tempo de atenção útil dos TDAH e com frequência de realização em média de duas vezes semanais.

Nossa opção pelo Cálculo Mental no trabalho pedagógico com o SND e com os algoritmos das operações de adição e subtração foi feita, basicamente, porque, segundo Gómez (1994), o cálculo mental concorre para a compreensão e o significado do número, além de favorecer a compreensão de números de ordens altas, ao permitir sua manipulação de forma global e não de forma isolada. Além disso, e ainda segundo Gómez (1994), o cálculo mental colabora para o enriquecimento e flexibilização da experiência e da compreensão algorítmica, ao lidar com regras histórico-culturais relacionadas a propriedades estruturais básicas (associatividade e distributividade). Também busca soluções alternativas e formas abreviadas de cálculo, bem como a atenção aos passos do procedimento.

Como aporte teórico, elegemos a Teoria dos Campos Conceituais - TCC, sobretudo porque se trata de uma teoria cognitivista que permite compreender o desenvolvimento dos conceitos no decorrer da aprendizagem escolar (VERGNAUD, 1990).

A Teoria dos Campos Conceituais e nossa intervenção

A Teoria dos Campos Conceituais foi constituída na tentativa de explicitar os processos da conceitualização das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra (VERGNAUD, 1993). No entanto, outras áreas também podem ser contempladas por meio de uma exploração baseada nos campos conceituais segundo a teoria de Vergnaud, como, por exemplo, o Ensino da Física.

Para Vergnaud (1998), as questões sociais não modificam a natureza do conhecimento matemático em si, mas têm grande influência nas formas desse conhecimento chegar a cada sala de aula, pois cada professor tem sua visão sobre o ensino da Matemática e mesmo sobre a Matemática, e essas influências chegam aos alunos. Sobre o contexto escolar, Vergnaud (2009) considera a atividade infantil sobre a realidade decisiva no processo educativo.

> Os conhecimentos que essa criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói (VERGNAUD, 2009, p.15).

O papel do professor deve ser o de estimular e utilizar essas atividades da criança e, para isso, ele deve ter um conhecimento claro das noções a ensinar, pois só assim poderá compreender as dificuldades deparadas pela criança e as etapas pelas quais esta passa (VERGNAUD, 2009).

Nos anos iniciais de escolarização, a noção de número é considerada a mais importante e, sobre ela, Vergnaud (2009) explicita que:

> Longe de ser uma noção elementar, ela se apoia em outras noções, tais como a de aplicação, de correspondência biunívoca, de relação de equivalência, de relação de ordem. Na criança pequena, ele é indissociável da noção de medida. Enfim, é a possibilidade de fazer adições que dá à noção de número seu caráter especifico em relação às noções sobre as quais ela se baseia (p.125).

Uma novidade na TCC é a definição de conceito como um conjunto de três outros conjuntos, a saber, C = {S,R,I}, onde C representa o conceito em questão, S é o conjunto de situações em que este conceito se aplica; R são as diferentes representações para este conceito e I são os invariantes, ou seja, os procedimentos para aplicação do conceito às diferentes situações.

Assim, a representação escrita do número, por exemplo, não pode ser confundida com o conceito de número. Por exemplo: o número seis pode ser representado de diversas maneiras: 6 em escrita indo-arábica; VI, em escrita romana; seis; ||||||; ****** (dependendo da situação, por exemplo, a indo-arábica para registrar uma quantidade; a escrita romana no mostrador de um relógio, a palavra seis, |||||| ou ******, também para registrar quantidades, etc.). Pode-se ter o mesmo número com todas as suas propriedades (cardinal de conjuntos de seis elementos, número par, múltiplo de três, sucessor de 5, antecessor de 7 etc., que são os invariantes) em cada uma das diferentes representações, pois o número é um conceito do qual existem vários sistemas de escritas possíveis e, no nosso caso, a representação posicional de base dez, o SND, é um desses sistemas (VERGNAUD, 2009).

Vergnaud (1996b, p.13), ainda tratando do contexto escolar, destacou que "[...] um dos problemas do ensino é desenvolver ao mesmo tempo a forma operatória do conhecimento, isto é, o saber-fazer, e a forma predicativa do conhecimento, isto é, saber explicitar os objetos e suas propriedades", e isto poderia ser uma das razões para a dificuldade que as pessoas têm em explicar suas ações: simplesmente fazem. Nesse sentido, entendemos que o cálculo mental apresenta-se como uma estratégia didático-pedagógica que pode favorecer o pensamento reflexivo e, consequentemente, levar o estudante a explicar suas ações.

Sobre a linguagem, o autor entende que esta tem função tripla: "[...] ajuda à designação, e, portanto, à identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da acção" (VERGNAUD, 1996a, p. 180). Dito de outra forma, além da função da comunicação e representação, a linguagem auxilia a organização da ação, a reflexão sobre a ação, a explicá-la e, finalmente, construir e explicitar os conceitos. O autor complementa, ainda, que "[...] A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceptualização e na ação. Sem os esquemas (procedimentos invariantes) e as situações, permaneceriam vazios de sentido" (VERGNAUD, 1996a, p.191).

Vergnaud (1996a, p.180) considera que não são todas as circunstâncias que um sujeito faz acompanhar a sua ação por uma atividade da linguagem, isto acontece "[...] quando tem necessidade de planificar e de controlar uma sequência de ações insuficientemente dominada", ou seja, quando esta ação está automatizada (já existe um esquema consolidado para resolvê-la), a criança não acompanha a realização com palavras, nem mesmo em voz baixa. Por exemplo, crianças de 9 anos resolvem problemas do campo aditivo (de adição ou subtração) de maneira automatizada, sem recorrer à linguagem enquanto atuam.

Mas o mesmo autor destaca que, antes de calcular de forma automatizada, o sujeito, provavelmente em alguma etapa anterior, verbalizou, mesmo que em silêncio, o que deveria fazer, o que favoreceu a realização da resolução do cálculo. Desta forma, a TCC justifica teoricamente o principal objetivo de nossa intervenção: valorizar o diálogo e, assim, explorar as possibilidades pedagógicas da Libras.

A intervenção

As atividades foram elaboradas na forma de uma sequência didática, com o grau de dificuldades hierarquicamente pensado, e organizado lógica e historicamente para favorecer a construção dos conhecimentos em questão.

PRIMEIRO BLOCO: Atividades envolvendo o Sistema de Numeração Decimal
Atividades 1 e 2: Contagem progressiva e regressiva. ***Atividades 3 e 4:*** Leitura dos números expressos em algarismos, utilizando a leitura corrente e reprodução do algarismo por algarismo em Libras. ***Atividades 5 e 6:*** O antecessor e sucessor de um número dado. ***Atividades 7, 8 e 9:*** A que números correspondem os valores abaixo? Ex.: 5 dezenas; Quantas dezenas existem nos números abaixo? E quantas centenas existem nos números abaixo? ***Atividade complementar 1:*** No número 235, qual o valor do algarismo 2? ***Atividade complementar 2:*** Explorar o seguinte questionamento: Qual o maior número que você conhece?; e Qual o maior número que você acha que existe? ***Atividade complementar 3***: Contagem progressiva e regressiva (uma variação das atividades 1 e 2). ***Atividade complementar 4:*** Explorar o seguinte questionamento: Onde você vê ou já viu números "grandes"/"maiores"? Com quem você já conversou sobre esses números "grandes"/"maiores"? ***Atividade complementar 5:*** Contar objetos ***Atividade complementar 6:*** Escolha um número e sinalize para o seu amigo da direita se você quer que ele sinalize um número maior ou menor que o seu.

SEGUNDO BLOCO: Atividades aditivas

Atividade 1: Calcule somas que envolvam somente os algarismos 1 a 9.
Atividade 2: Complete para chegar a dez.
Atividades 3 e 4: Complete para chegar à dezena/centena superior.
Atividades 5, 6, 7 e 8: Conte de n em n, dado n, contagens estas progressivas e regressivas.
Atividades 9 e 10: Some números de dois algarismos com números de um algarismo ou vice-versa e Some números de três algarismos com números de um algarismo ou vice-versa.
Atividade 11: Subtração (operações que envolvem números de 1 a 20)
Atividade 12: Subtraia para chegar à dezena inteira inferior ao número dado.
Atividade 13: Subtraia (números que envolvam no minuendo valores formados até a centena e no subtraendo apenas unidades).
Atividade 14: Calcule a diferença (números que no minuendo não necessitam de decomposições das dezenas em unidades e, por outro, possuem o valor da ordem das unidades ou o valor da ordem das dezenas semelhante ao expresso no subtraendo).
Atividade 15: Somar (números em que as parcelas envolvam até a ordem da unidade de milhar e que as dezenas sejam inteiras).
Atividade 16: Somar
Grupo 1: soma dos algarismos das unidades inferior a 10;
Grupo 2: soma dos algarismos das unidades superior a 10;
Grupo 3: soma dos algarismos das unidades e das dezenas superior a 10.
Atividade 17: Subtrair de uma quantidade (não ultrapassar a ordem da unidade de milhar) um número inteiro nas centenas.

Quadro 1 - Relação das atividades conforme os blocos contemplados

As nove primeiras atividades do Bloco 1 foram adaptadas de Guimarães (2009), sendo as demais denominadas de complementares, elaboradas considerando as particularidades tanto dos sujeitos quanto da língua utilizada na intervenção. A primeira delas foi pensada ao considerarmos as "transparências" dos números de ordem inferior a 1000 em Libras, isto é, estes números são representados em Libras exatamente da forma em que são registrados graficamente, não ocasionando erros lexicais para as crianças, como acontecem, por exemplo, em um ditado de números para crianças ouvintes em que o número 246 pode ser escrito como 200406. Em Libras este número seria sinalizado algarismo por algarismo: 2, 4 e 6, e as crianças certamente escreveriam corretamente: 246.

As demais atividades foram elaboradas após se constatar as dificuldades das crianças na realização de algumas das atividades que foram previamente elaboradas, a partir da pesquisa de Guimarães (2009). Para a consecução de algumas das atividades, tanto das complementares quanto das iniciais, foi necessário o apoio de materiais manipuláveis e recursos virtuais como: Ficha Sobreposta, Jogo do Super Trunfo, pesquisas na internet, Quadro Valor Lugar (QVL), Material Dourado e Jogo do Prato de Papelão, o que não era inicialmente planejado.

Ao serem defrontados com uma nova situação, cada criança, a seu modo, adaptou seus conhecimentos a essa nova situação. Como em muitos desses conhecimentos eles sabiam fazer e não explicitar, consideramos que com as indagações propostas, como: "explique como você pensou ou como você sabe", foram instigados a "pensar" sobre suas ideias e a tomar consciência do seu estilo de pensamento ao fazer reflexões sobre a própria atividade.

A título de exemplo, e pensando em atividades nas quais a exploração dialógica, bem como de questões relacionadas à Libras e à Matemática, ficaram mais evidentes, discutimos neste capítulo apenas 6 (seis) das atividades desenvolvidas, sendo quatro do bloco SND – Atividades 1, 2 e Atividades Complementares 1 e 2 – e duas do bloco Aditivo – Atividades 1 e 3.

As atividades do SND

No primeiro encontro de nossa intervenção, começamos com atividades envolvendo a contagem progressiva e a regressiva a partir de um número dado (entre 1 e 99) e, ao indagarmos "*Como você sabe qual era o próximo número da sequência?*" ou "*Como você pensou*?", obtivemos como respostas: Maria (oralizou): *"Tá na cabeça";* Luísa (sinalizou): *"Eu pensei" e* João também sinalizou *"Eu sei".* Em outro momento***,*** Luísa ***s***inalizou: *"Eu sei, a professora ensinou",* o que indicava que, para números com tal ordem de grandeza, a contagem estava automatizada. Ao avançarmos para números da ordem das centenas, Luísa seguiu sem dificuldades nas duas formas de contagem, entretanto o mesmo não aconteceu com João e Maria, conforme ilustra exemplo a seguir.

Ao ser solicitada a prosseguir a contagem a partir de 798, Maria iniciou sinalizando: "799, 799", e ficou parada por uns instantes, balançando a cabeça como se não soubesse, até que sinalizou *"7100".* Ampliamos o questionamento para o grupo e Luísa sinalizou: *"800*" e João ficou observando um pouco e respondeu *"800".*

Anotamos a resposta de cada um no quadro e realizamos a seguinte indagação: *"Como vocês pensaram para saber o sucessor de 799?"* Todos ficaram observando e responderam *"não sei".* Acreditamos que isso ocorreu porque ainda não haviam identificado a regularidade da série numérica. Maria constatou que sua resposta estava diferente da dos amigos e permaneceu pensativa, com os olhos voltados para o quadro.

Durante o diálogo, indagamos se sabiam o que era unidade, dezena, centena registrando as palavras no quadro, e qual era o sinal para cada um desses termos. Maria (oralizou): "*um, dez, cem";* Luísa e João (sinalizaram): "*1, 10 e 100"* Indagamos: "*Qual o sinal para unidade, dezena e centena?"* Todos sinalizaram: "*1, 10, 100".*

Como os sinais em Libras para a palavra “um” e o numeral 1 são iguais, da mesma forma, para dez e 10 e para cem e 100, registramos no quadro a escrita das palavras um, dez e cem e também os numerais 1, 10 e 100 e indagamos, apontando para as palavras escritas no quadro se o sinal de “1” se referia à palavra “um” ou à palavra “unidade”. Eles responderam *“Sim”* para ambas as palavras; isso se repetiu para dezena e centena. Apresentamos, então, os sinais convencionados para cada termo (unidade, dezena e centena).

Retomamos a escrita das respostas de cada um no quadro, anotando em cima de cada algarismo que constitui o numeral 799 as iniciais de sua ordem correspondente, conforme segue:

CDU
7 9 9

Solicitamos que explicassem novamente como haviam pensado para indicar o sucessor de 799. Luísa respondeu que os números *“continuavam”* e fez o sinal de 1.000 (dando a entender até mil). João e Maria permaneceram quietos. Do registrado, destacamos que Luísa iniciou sua primeira ação em explicitar como havia pensado. Não exploramos nesse exemplo o valor de cada algarismo. Indagamos então como seria para indicar as ordens dos algarismos dos numerais 800 e 7.100. Luísa se antecipou ao grupo e apontou para o zero e sinalizou *“unidade”*, apontou para o outro zero e sinalizou *“dezena”* e apontou para o oito e sinalizou *“centena”*, complementando que 7.100 é outro número e não a sequência de 799. Indagamos que número era e ela respondeu: *“Sete mil e cem”*, (digitalizando algarismo por algarismo em Libras, incluindo o ponto que marca o *“mil”* em Libras).

Ao representarmos o numeral 7.100 no quadro e indicarmos a ordem de cada algarismo, ampliamos e retomamos o vocabulário para as classes dos números e suas respectivas ordens. No final deste encontro, solicitamos para perguntarem aos professores que trabalhavam com a disciplina de Matemática da escola e também para o professor de Libras qual sinal eles usavam para unidade, dezena e centena. O retorno obtido foi de que, para dezena, por exemplo, um professor de Matemática utilizava o mesmo sinal adotado em nossa intervenção (“sinal de grupo e 10”); outro professor utilizava o “sinal de grupo e d” apresentando a influência da Língua Portuguesa pela inicialização, como apontada por Albres (2013), trazendo um traço arbitrário para o sinal. O professor de Libras sinalizou somente “10”, que foi a forma de representação também utilizada pelos alunos, evidenciando não terem se apropriado da representação utilizada pelos professores de Matemática. Ao analisarmos os sinais para esta terminologia utilizados pelos professores, confirmamos os resultados de Zanquetta, Nogueira e Umbezeiro (2013), quando afirmam que não existe uma padronização, nem mesmo na escola pesquisada, dos sinais matemáticos, o que seria necessário para uma comunicação na comunidade escolar sem maiores entraves.

No segundo encontro, continuamos desenvolvendo as **Atividades 1 e 2**, considerando números da ordem das centenas, mas iniciamos a discussão da **Atividade complementar 1.**

A representação dos números em Libras até mil é feita sinalizando algarismo por algarismo, ou seja, é igual à sua representação escrita, então, como identificar se os alunos compreendiam o valor posicional de cada algarismo? Além do mais, esta atividade poderia auxiliar também as hipóteses de Maria quanto à construção do SND (o valor posicional e base decimal), que não tinha sido explorado quando apresentamos os sinais para unidade, dezena e centena. Além disso, para desenvolver a Atividade complementar 1, estaríamos tratando também de outro conceito, o de algarismo, que não sabíamos se era conhecido ou não.

João realizava a contagem a partir de 487, sinalizando lentamente. Quando se aproximou dos "nós" (dezenas ou centenas exatas), parou por uns instantes e prosseguiu a sua contagem; consideramos que ele procurou recuperar na memória a sequência numérica.

Professora: *489: Qual o valor do algarismo 4?*
João: *4.*
Professora: *Você sabe o que é algarismo?*
João: *Não.*
Professora: *Alguém sabe?*
Luísa: *Não.*
Maria: *Não.*

Ao verificarmos que não sabiam o que era algarismo, entendemos que João poderia ter respondido 4 por não ter compreendido o questionamento feito. Escrevemos 444 no quadro e perguntamos: *"Tudo é quatro?".*

Todos responderam: *Sim.*
Professora: *O valor desse 4 é 4?* (apontando para o quatro da unidade)
Todos responderam: *Sim.*
Professora: *O valor desse 4 é 4?* (apontando para o quatro da dezena)

Luísa se antecipou e respondeu rapidamente: *"40".* E continuou sinalizando que já fizeram muitos exercícios desses nas aulas de Matemática.
Professora: *O valor desse 4 é 4?* (apontando para o quatro da centena):
Luísa e ***João*** responderam: *"400",* Maria permaneceu sem se manifestar.

Representamos o número utilizando um QVL, para destacar a posição ocupada pelo algarismo “4” (unidade, dezena e centena), no numeral 444. Em seguida, sinalizamos "444” com a mão direita; e, na sequência, sinalizamos 3 (cardinal) para indicar as três casas decimais, mantendo o sinal e com a mão esquerda representamos 4 e o aproximamos do indicador da mão direita, que estava sinalizando 3, para indicar que este “4” ocupava a posição das unidades (sinalizando “unidade”) e que seu valor era 4; fizemos o mesmo para a ordem das dezenas, aproximando o “4” (sinalizado com a mão esquerda) do dedo médio da direita e sinalizando o “0” no indicador, destacando que o valor deste “4” era 40 . Procedemos analogamente para a centena.

Ao analisarmos o registro no quadro e a explanação realizada, a maneira utilizada para explicar o valor posicional dos algarismos em Libras se sustenta na simultaneidade (possibilidade de se representar mais de um sinal ao mesmo tempo, o que é impossível em uma língua oral, pois não é possível oralizar duas palavras simultaneamente), traço marcante da língua de sinais e da imagem, neste caso a representação no quadro, além de se valer também do referente (apontar o lugar ocupado por um objeto ou pessoa que não está fisicamente presente), outro aspecto relevante da Libras, quando destaca a posição ocupada pelo algarismos “4” do numeral 444. Retomamos o sinal de algarismo com o grupo e o questionamento com o *João.*

> **Professora:** 489: Qual o valor do algarismo 4?
> **João:** 400.
> **Professora:** Como você sabe? (deu uma pausa).

João fez o mesmo procedimento realizado pela professora anteriormente, com exceção de sinalizar unidade, dezena ou centena, na sua explicação. Os três adolescentes não conheciam nem a palavra nem o sinal para “algarismo”. No entanto, constatamos neste excerto que, como explicitado por Luísa, eles faziam atividades semelhantes em sala de aula e João compreendia o aspecto posicional do SND bem como sua base decimal, ou seja, *Em um numeral, cada algarismo representa um número que é múltiplo de uma potência de base 10.*

Entretanto, mesmo compreendendo o valor posicional, João, realizava suas contagens de maneira bastante lenta; ele sempre necessitava de um apoio, na forma de recordar o último número sinalizado, para então prosseguir com sua contagem, conforme ilustra a situação a seguir.

João é solicitado a realizar a contagem a partir de 887, continua sinalizando lentamente algarismo por algarismo em Libras e, quando chega em 898, para de contar e sinaliza que não sabe. Ao retomarmos o último número que ele sinalizou, ele imediatamente retoma a contagem 899, 900, 901. Indagamos: "Como você pensou?". João respondeu: *"Sei, número"*. Quanto à Luísa**,** esta realizou todas as contagens com tranquilidade, mas nas suas explicações de como sabia qual era o próximo número, retomou a sua explicação inicial: "*Eu sei",* o que evidencia o "saber fazer".

Na contagem regressiva notamos as mesmas atitudes. Maria continuava parando quando chegava próxima aos "nós" conforme excerto a seguir: *"204, 203, 202, 202, 201, 201, 201*" e parava, precisando da nossa intervenção para dar continuidade, quando não utilizava uma estratégia equivocada quanto ao SND, precisando de ajuda do grupo. João continuava contando como se estivesse em "câmera" lenta, dando sempre uma breve paradinha próximo aos "nós" e continuava. Luísa contava tranquilamente.

Nas discussões no GEPSEM sobre a Atividade 2, havíamos previsto que na contagem regressiva os sujeitos fariam um intervalo maior nas passagens pelos nós que na contagem progressiva, por não estarem acostumados com tal atividade. Entretanto, isso não ocorreu, pois a "paradinha" aconteceu com a mesma intensidade, na contagem progressiva e regressiva. Uma conclusão possível é que os sujeitos não estavam habituados a realizar contagens tanto progressiva como regressiva. Por isso, consideramos a importância de explorarmos a fala[5] e não apenas a representação escrita da série numérica.

Quanto aos números da ordem dos "milhares", fizemos uma tentativa no primeiro encontro de explorar a contagem a partir de números que envolviam unidade de milhar. Os três sujeitos mostraram-se espantados e a reação foi unânime: nas respostas, em um primeiro momento, tanto o corpo "falou" encolhendo-se na carteira, bem como se manifestaram falando *"Como?"* e *"Não sei".* Esta atitude fez com que recuássemos na apresentação de números desta classe em diante, para uma nova tentativa somente no terceiro encontro.

Neste (terceiro) encontro, ao retomarmos os questionamentos com os nossos sujeitos, somente Luísa e João estavam presentes. O espanto foi ameno em relação ao inicial ao serem solicitados a realizarem a contagem. Consideramos que a prática instaurada nos primeiros encontros permitiu que isso ocorresse. Solicitamos para Luísa realizar a contagem a partir de 1.007; apresentamos algarismo por algarismo o número em Libras. Ela iniciou a contagem: *"1.008, 1.009 (pausa) e 2.000"* e parou. João interveio: *"1.010".* Luísa corrigiu-se, repetindo *"1.010".* Perguntamos para Luísa porque ela mudou de opinião e ela respondeu que 1.010 era o certo. Indagamos por que havia sinalizado 2.000 depois de 1.009, ao que ela respondeu: *"Pensei nove último"* e complementou *"2.000",* caracterizando sua segunda tentativa em explicitar seu raciocínio.

[5]Por entendermos o surdo como a pessoa com uma diferença linguística, consideramos que ele fala, não oraliza, sinaliza, mas fala, isto é, exerce sua língua.

João, embora se saísse melhor auxiliando suas colegas, quando solicitado a realizar contagens a partir da ordem de unidades de milhar, procedia com as mesmas dificuldades, a saber, contagem lenta, precisando de apoio para relembrar o último número contado. E, ao passarmos para a dezena de milhar, ele sequer tentou realizar a contagem. Isso fica evidenciado no exemplo a seguir: quando solicitamos para João iniciar a contagem a partir dos 32.996, ele parou, ficou uns minutos em silêncio e respondeu *"Não sei"* e nem tentou. Luísa interveio, motivando João dizendo "*Que era fácil*" e exemplificou com os números, como: *"96, 97, 98, 99, 100 e 996, 997, 998, 999, 1.000"* e complementou que os números sempre continuavam.

> ***Professora:*** *Como assim, eles continuam?*
> ***Luísa:*** *"0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 acabou 10, 11, 12,13..., 19, acabou 20, 21, 22 continua, continua"*.

No quarto encontro, agora com todos presentes, como Maria não estava no encontro anterior, retomamos a contagem a partir de unidades de milhar. Maria iniciou a contagem, sinalizando a partir de 1.248: "1.249, 1.500". Ao registrar no quadro sua reposta, ela rapidamente falou "1.250".

> ***Professora:*** *Por que você mudou?*
> ***Maria:*** *Porque estou vendo.*

Recorremos novamente ao QVL, explorando ordens e classes, valor posicional de cada algarismo. Luísa, neste encontro, ao realizar a contagem, continuava parando próximo aos nós; algumas respostas nas mudanças de ordem e classe não eram "corretas", mas, mal começávamos questionar, ela se corrigia. João continuava inseguro para realizar a contagem.

Após estes quatro encontros, realizamos uma discussão no GEPSEM sobre a caminhada da intervenção, considerando também as informações prestadas pela equipe pedagógica da escola especial e pelos professores desses sujeitos. Concluímos que, no que se refere à Luísa, tanto as atividades seguintes da sequência didática elaborada, quanto à dinâmica de aplicação, estavam adequadas e ela conseguiria avançar sem grandes dificuldades. Quanto ao João, se conseguíssemos fazê-lo vencer sua timidez e insegurança, ele, mesmo com algumas dificuldades, poderia avançar. Já Maria necessitava de atividades específicas que favorecessem a (re)construção do SND, bem como o "auxílio" de recursos didáticos/ materiais manipuláveis e/ou virtuais.

Ao constatarmos uma não familiarização dos sujeitos investigados com números que envolvessem a classe de milhar em diante, entendemos ser necessário compreender qual conhecimento esses sujeitos, que estavam cursando naquele momento o final do sexto ano de escolarização, possuíam da série numérica, e realizamos a seguinte indagação: "*Qual o maior número que você conhece?".* Esse questionamento às vezes foi substituído por este: *"Qual o maior número que você acha que existe?".* Denominamos esta intervenção de **Atividade complementar 2.**

> ***Professora:*** *Qual o maior número que você conhece?*
> ***Maria :*** *200 mil* (falou).
> ***João:*** *1.003 (um ponto zero zero três).*
> ***Luísa:*** *1 continua* (fez o 1 e o sinal de continuar).
> ***Professora:*** *(*Apontou para *Luísa) O número continua ou para?*
> ***Luísa:*** *Para,* (em seguida) *continua.*

Ao analisarmos os números escolhidos pelos sujeitos surdos individualmente, (João tinha respondido 1.003, Luísa que os números tendiam "*ad infinitum*" e Maria 200.000), percebemos uma "contradição", pois João dava indícios de uma melhor compreensão do SND que Maria. Provavelmente esta "contradição" se origina do fato de Maria, por possuir uma interação auditiva com seu entorno social em função de uma perda moderada, ter tido mais oportunidades de contato com números "altos".

Não foram exploradas nesse encontro as respostas dos sujeitos e solicitamos que conversassem em casa sobre qual o maior número que seus familiares ou amigos conheciam. Nosso objetivo é que trocassem diálogos com seus familiares sobre o que estávamos tratando no contexto escolar. No encontro seguinte, ao retomarmos o questionamento, somente uma aluna tinha conversado a respeito; os outros dois tinham esquecido. Luísa sinalizou que tinha conversado com sua avó em casa e ela falou que os "N*úmeros não tinham fim*". Solicitamos para ela explicitar o que seria "*Não ter fim*" para seus colegas e ela explicou: "*Continua, continua, continua, continua [...]*". Logo em seguida perguntamos para os outros dois qual o maior número que eles achavam que existia.

> ***João:*** *1.003* (um ponto zero zero três).
> ***Maria:*** *Dez mil* (oralizou).

Naquele momento, a explicação de Luísa ainda não fazia sentido para os demais; eles poderiam tê-la repetido, mas mantiveram suas convicções anteriores, com Maria até diminuindo o número anteriormente indicado.

Embora mantivéssemos estas indagações durante o desenvolvimento das diferentes atividades da sequência didática, em quase todos os encontros, e sempre obtivéssemos respostas com as mesmas características, com Luísa indicando ter clareza de que a série numérica "não tinha fim" e os demais admitindo a existência de "um maior número", em um dos encontros com todos os sujeitos presentes, retomamos esta questão. João e Maria continuavam com as mesmas respostas e Luísa respondeu "*1 e continua, continua,* ...". Decidimos intervir mais especificamente nesta questão e registramos *1* no quadro e começamos a colocar algarismos 0 (zero), à direita deste 1, sempre indagando a cada zero registrado qual número havia sido obtido. Em seguida, perguntávamos se era possível acrescentar mais um zero ou se era preciso "parar por ali". Algumas dúvidas foram surgindo quanto à leitura do número, como a retomada do porquê de se separar os algarismos de três em três, se conseguimos realizar a leitura dos números sem o ponto. Nenhum dos sujeitos afirmou que era "preciso parar" de se acrescentar zeros.

Mesmo após a exposição e apresentação dos sinais para trilhão, quatrilhão, etc., aproximadamente 5 meses após nossa intervenção e quando estavam presentes somente João e Maria, novamente a resposta de João para o "maior número que ele conhecia" continuava sendo 1.003 e de Maria 200 mil. Registramos no quadro essas respostas e repetimos o procedimento anterior, de acrescentarmos zeros à direita do número, indagando qual o número resultante e se poderíamos continuar ou parar por ali. Retomamos a leitura com os sujeitos apresentando novamente dúvidas sobre a maneira de se separar cada três algarismos no numeral por um ponto em sua representação escrita. Após a exploração dessas ações, indagamos novamente qual era o maior número que eles conheciam.

João respondeu *"1 e continua",* prolongando o sinal de continua, para indicar que não terminava. Entendemos que os diálogos das atividades propostas até aquele mês possibilitaram e mobilizaram um desequilíbrio e uma ampliação do conhecimento em construção.

Maria, ao final do encontro, também indicava compreender a continuidade da série numérica, entretanto, em encontros posteriores voltou a considerar qualquer número da classe do milhar, indicando a provisoriedade do conhecimento ainda em construção, ou seja, não consolidado. Outra possibilidade é a de que, naquele momento em que indicou uma compreensão acerca da continuidade da série numérica, ela possa ter percebido nossa aprovação em relação a João, quando este demonstrou ter compreendido e simplesmente repetiu a resposta dele por entender que aquela era a resposta "esperada".

Foi somente depois de praticamente mais de oito meses que as respostas de Maria demonstraram o conhecimento consolidado, falando que os "números continuam" e, na maioria das vezes, apontava para o quadro, sinalizando no espaço "*1, 0, 0, 0, 0 e continua*".

Ao analisarmos as respostas dos sujeitos à indagação "Qual é o maior número que existe?" durante o desenvolvimento da pesquisa, até concluírem que a série numérica tende ao infinito, verificamos que Luísa admitiu este fato já na primeira indagação, João somente após cinco meses, quando já haviam sido exploradas as Atividades 1, 2, 3 e 4 e as complementares 1, 2, 3 e 4 e Maria somente após oito meses, época em que já estávamos explorando atividades do bloco aditivo. Esta constatação corrobora, portanto, os resultados de Barreto (2011), uma vez que essas respostas condiziam com um maior conhecimento quanto ao SND.

No segundo mês da nossa intervenção ainda estávamos envolvidos com a **Atividade 1 e 2**. Quando questionada para explicar como "*sabia qual era o número que vinha depois de 999",* Luísa respondeu que depois do 999 vem o 1.000, com a seguinte justificativa: sinalizou 99 (com a mão esquerda), depois justapôs a mão direita ao 99 idealizado no espaço com a mão esquerda e sinaliza seguidamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Sinaliza então "acabou" e , "vem 1.000" (fez sinal por sinal de cada algarismo, incluindo o ponto).

Podemos inferir, após dois meses, com as discussões proporcionadas, que Luísa conseguiu explicitar suas ideias cada vez com mais detalhes. As explicações, se consideradas em seu conjunto, demonstram a construção, passo a passo, do princípio da indução da série numérica, ou seja, *Para descobrir o próximo número basta acrescentar mais uma unidade ao último anunciado.*

Em outro momento, Luísa usa essa mesma explicação, ainda com mais detalhes, sinalizando 990 com a mão esquerda e marca o último zero, paralisando esta mão no espaço, com o sinal zero. Encosta neste "zero" a mão direita e sinaliza 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 deslizando a mão direita verticalmente no espaço, para indicar 991, 992, ...999. Em seguida, acrescenta um zero à direita de onde havia "congelado" a sinalização do 990, substitui cada um dos 9 por zero e sinaliza o "1" mais à esquerda. Luísa explicitou que quando se atinge o número 999, para se alcançar a classe dos milhares o que é preciso fazer é *acrescentar o um como primeiro algarismo e substituir os demais por zero*.

Em uma contagem regressiva a partir do 112, Luísa demonstrou que sua construção do SND estava consolidada, conforme ilustra o excerto a seguir:

> ***Luísa:*** *111, 110, 109, [...] 99, 98, 97,96, 95, 94, 93, 92.*
> ***Professora:*** *Explique como você pensou para saber que número está na sequência regressiva.*
> ***Luísa:*** *Pensei.*
> ***Professora:*** *Explique.*
> ***Luísa:*** *Exemplo 99* (marcou com a mão esquerda o nove que ficou parado e com a mão direita fez rapidamente movimentos descendentes) *"8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0"*. Quando chegou ao zero, explicitou: *Muda 9 para 8* (repetiu com a mão direita) *9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.*

Assim, a propriedade que permite determinar o antecessor de um número, que é retirar uma unidade do último número anunciado, apresenta-se não mais como “saber fazer”, como um conhecimento ainda em construção, mas um “saber explicitado”, ou seja, como um conhecimento consolidado. Desta forma, fica evidente o papel da linguagem como favorecedora da aprendizagem matemática, pois foram os diálogos entabulados que possibilitaram a reflexão que culminou com a consolidação do conhecimento.

Maria é uma aluna que usa a Libras e a Língua Portuguesa oral para se comunicar. Durante a investigação, houve dias em que somente sinalizou, outros em que a oralidade prevaleceu, bem como em alguns dias alternou sinalização e a oralidade, e, ainda, momentos em que usou as duas simultaneamente. Segue um trecho de um dos encontros em que usou a oralidade e a sinalização simultaneamente.

Solicitamos que realizassem a contagem a partir de 971, (usamos em um primeiro momento a oralidade com ela e em seguida olhamos para o ***João*** e para ***Luísa*** e sinalizamos).

Maria oralizou: *“Novecentos e setenta e um*”; simultaneamente representou algarismo por algarismo em Libras: “ *90071*” (nove, zero, zero, sete, um). Continuou a sequência, oralizando e sinalizando ao mesmo tempo, até que***,*** antes da nossa interferência***, Luísa*** intervém: *“Não é 90074”* (nove, zero, zero, zero, sete, quatro), é *“974”* (nove, sete, quatro); *você* (aponta para Maria) *está mostrando outro número*”. Maria parou e oralizou e sinalizou com o auxílio de Luísa: “971, 972, 973, 974”.

Do registro anterior, constatamos que Maria oralizava corretamente a série numérica, mas o mesmo não ocorria com sua sinalização. Isso indica que Maria provavelmente representaria estes números por escrito da mesma forma que sinalizou, o que seria equivalente ao procedimento de uma criança ouvinte, que registra como ouve, ou seja, 900 e 70 e 1.

Como intervenção, exploramos o fato com o registro no quadro dos dois números e solicitamos que *Maria* lesse o número escrito no quadro: 90071. Maria oralizou: *“Novecentos e setenta e um”.* Quando solicitamos para fazer a leitura do número 971, Maria também disse: “*Novecentos e setenta e um*”. Antes de continuar a conversa, compartilhamos sinalizando para Luísa e João o que Maria respondeu e novamente direcionamos a pergunta para Maria: “*Como, iguais os dois números?”* Maria olhou para o quadro, falou baixinho e continuou a conversa, sem uma efetiva compreensão naquele momento, mesmo tendo explorado, por exemplo, com o grupo o valor de cada algarismo, ao considerar o numeral “971”, explorando a leitura do “90071”.

Mesmo explorando as hipóteses de forma dialógica e argumentativa com o grupo em outros encontros, como já explicitado, as respostas de Maria oscilavam ora em respostas consideradas adequadas quanto ao SND, ora em respostas equivocadas. Na busca de um recurso didático que pudesse auxiliar o trabalho com Maria, exploramos o uso das fichas sobrepostas[6], o que acabou resultando eficiente.

As atividades do bloco aditivo

A **Atividade 1** deste bloco se referia aos fatos básicos da adição, ou seja, todas as possibilidades de adições de dois números entre 1 e 9. Constatamos que no início da atividade todos recorreram ao uso da sobrecontagem[7] com o auxílio dos dedos.,. Quanto a isso, Guimarães (2009) aponta que tal opção se deve "por um lado, pelo fato de os números serem pequenos e, por outro, porque os dedos estão incorporados nas práticas de contagem" (p.99). Compartilhamos com a autora a convicção de que o uso do dedo não descaracteriza o cálculo mental, mas apoia as contagens, ordenações e comparações. Também conjugamos com a ideia de que um trabalho "[...] sistemático envolvendo o cálculo mental contribui para o aparecimento de estratégias mais sofisticadas, ligadas às propriedades dos números e operações" (GUIMARÃES, 2009, p.230). Este fato foi comprovado tanto na investigação de Guimarães quanto na nossa.

O uso da sobrecontagem sem o apoio dos dedos também foi uma estratégia utilizada por todos, o que ficou claro quando solicitávamos que explicassem como haviam somado:

> ***Professora:*** *Quanto é 8 + 6?*
> ***Luísa:*** (pausa) *14.*
> ***Professora:*** *Como você pensou?*
> ***Luísa:*** *9, 10, 11, 12, 13, 14.*

Novas estratégias apareceram nas explicações dos sujeitos além da sobrecontagem; por exemplo, recorrer aos resultados disponíveis em seu repertório, como o caso de Maria ter compartilhado "*Igual à tabuada".* Isso ocorreu principalmente nos cálculos que envolviam parcelas iguais.

> ***Professora:*** *Quanto é 7 + 7?*
> ***Maria:*** *14; é fácil, igual à tabuada.*

[6]Conjunto de fichas que permitem representar números, composto de dez quadrados para a ordem das unidades, cada um com um dos algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 0; dez retângulos para a ordem das dezenas, cada um numerado com as dezenas exatas 00, 10,20,30,40,50,60,70,80, e 90 dez retângulos para a ordem das centenas, com as centenas exatas e assim sucessivamente.

[7]É uma contagem a partir de um número determinado, ou seja, uma sobre outra, isto é, a criança já se apropria de uma quantidade e acrescenta a outra. Nesta fase quando a criança atinge a sobrecontagem consideramos que esta deu um passo importante no processo de construção do número aditivo.

João, nas suas explicações, buscou resultados disponíveis em seu repertório, recorrendo ao reagrupamento em torno da decomposição de parcelas iguais e acrescentando 1, conforme relato a seguir:

> ***Professora:*** *Quanto é 8 + 9*
> ***João:*** *17*
> ***Professora:*** *Como você pensou?*

João, simultaneamente, sinalizou 8 com a mão esquerda e 8 com a mão direita, justapondo-as; manteve o 8 sinalizado na mão esquerda e, com a mão direita na mesma altura, sinalizou 16 e, novamente com a mão direita num movimento para cima, sinalizou 17. Inferimos que, embora ele sinalizasse explicitamente adição/mais, igual e mais um, seus movimentos das mãos permitiram a seguinte leitura: 8 + 8 = 16, 16 + 1 = 17. João, ao usar essa estratégia do reagrupamento em torno da decomposição de parcelas iguais e acrescentando 1, não realizou uma organização mental do algoritmo canônico da adição. Destacamos que atividades envolvendo o cálculo mental permitem que outras estratégias sejam utilizadas, como percebemos no desenvolvimento de João, diferentes daquelas mais comuns quando do uso do lápis e papel.

Por estar num contexto no qual o diálogo em Libras flui de maneira satisfatória, constatamos em nossos diálogos um alto grau de simultaneidade, com destaque para o caso das interações com João e Luísa. Nesse sentido, Albres (2013) entende que em um diálogo entre pessoas com maior fluência em Libras, os surdos se utilizam de um alto grau de simultaneidade de sinais, sendo que, em casos contrários (sem a fluência), a sinalização se aproxima mais de uma linearidade, ou seja, o uso sinal a sinal. Tal característica também contribui para pensarmos na importância de que a Libras seja explorada em todo o seu potencial dialógico.

Nas adições propostas, a estratégia de decompor uma das parcelas, transformando-a em uma soma de outras duas parcelas e visando obter uma dezena, foi utilizada pela primeira vez por Luísa nesta atividade, conforme melhor explicitado a seguir:

> ***Professora:*** *Quanto é 7 + 5?*
> ***Luísa:*** *12*
> ***Professora:*** *Como você pensou?*

Com a mão esquerda, Luísa sinalizou “7” e, com a mão direita, mostrou os cinco dedos da mão. Ao aproximar as duas mãos, ela agrupou três dedos da mão direita com o sinal representativo do 7, indicando que sua estratégia foi a de agrupamento de dez como facilitador de seu cálculo mental. Além disso, com o queixo, Luísa apontou para os dois dedos que sobraram dentre os cinco da mão direita. Com o algoritmo a seguir, buscamos representar o raciocínio de Luísa:

$$7 + 5$$
$$7 + (3 + 2)$$
$$(7 + 3) + 2$$
$$10 + 2$$
$$12$$

Guimarães (2009) aponta que, como a base de nosso sistema de numeração é dez, a consideração de tal base facilita a adição, o que ficou explícito na estratégia de Luísa. Quando compartilhamos a estratégia de Luísa com João e Maria, no caso de João, este recorreu a essa estratégia bem como à da compensação, conforme excerto a seguir:

> ***Professora:*** *9 + 7*
> ***João:*** *16*
> ***Professora:*** *Explique como você pensou?*

Após uma pausa, João sinalizou o *"9"* com a mão esquerda e, com a direita, sinalizou o *"7".* Depois disso, ele conservou o sinal da mão esquerda (9) e sinalizou o *"1"* com a mão direita, aproximando ambas as mãos. Na sequência, João mostrou as duas mãos abertas mostrando sete dedos e abaixou um dedo, mantendo seis abertos, sinalizando *"16".* Com o algoritmo a seguir, buscamos exemplificar o raciocínio de João:

$$9 + 7$$
$$(9 + 1) +7$$
$$10 + 7$$
$$10 + (7-1)$$
$$10 + 6$$
$$16$$

Consideramos que João deu indícios do seguinte conhecimento em construção: *quando o número anunciado envolver a soma dos algarismos das unidades superiores a 10, então temos que realizar trocas.* Maria, mesmo tendo compartilhado das estratégias de João e Luísa, ainda permanecia com o uso da sobrecontagem. Não observamos em nenhum momento a necessidade de realizar a contagem desde o primeiro número, estratégia essa apontada no bloco do SND. Consideramos tal fato um avanço, pois, como apontado por Nogueira, Bellini e Pavanello (2013), a criança que não faz o uso da sobrecontagem ainda não tem a compreensão de dezena.

Constatamos que os sujeitos participantes recorreram à propriedade comutativa nas solicitações, contando a partir do maior número, como no exemplo a seguir:

> ***Professora:*** *4 + 7?*
> ***Maria:*** *Oito, nove, dez, onze* (sinalizou e oralizou).
> ***Professora:*** *Por que você começou a contar do 7 e não do 4.*
> ***Maria:*** *Porque é mais fácil.*

Quanto às adições que envolveram a soma dez, João se lembrou de uma brincadeira comum entre seus colegas de sala nas aulas de Matemática. Nessa brincadeira, envolvendo dois participantes, quando um deles mostra as duas mãos com uma determinada quantidade de dedos levantados, o outro participante deve falar o mais rápido possível quanto estaria faltando para se completar uma dezena.

Quando da **Atividade 3**, iniciamos, com os três alunos, com a indagação sobre se *sabiam o que era dezena inteira superior.* Como não conheciam o sinal que estávamos utilizando para representar *dezena inteira*, explanamos com o auxílio do registro no quadro e realizamos algumas atividades, baseando-nos nos números 24, *32 e 45.*

Retomamos o questionamento inicial da **Atividade 3**, ainda em seu enunciado, explanando que os sujeitos precisariam encontrar a dezena superior do número dado. Por exemplo, para o número 24, deveriam encontrar o número que faltava para se chegar a essa dezena inteira superior, a 30. Para Maria ainda prevaleceu o uso da sobrecontagem com e sem o uso dos dedos, porém observamos outras estratégias, como da contagem regressiva.

> ***Professora:*** *27. Qual a dezena superior e quanta falta?*
> ***Maria:*** *(pausa) 3.*
> ***Professora:*** *Como você pensou?*
> ***Maria:*** *(oralizou) Eu sei que é 30 e sinaliza 30, 29, 28.*

Em nossa discussão no grupo GEPSEM sobre a atividade, não consideramos a estratégia da contagem regressiva. Entendemos que as atividades do SND que envolveram a contagem regressiva podem ter auxiliado Maria a utilizar tal estratégia. Consideramos que o conhecimento que estava sendo construído era: *Para descobrir o antecessor de um número basta tirar uma unidade ao último anunciado.*

Constatamos que João respondia à indagação da Atividade 3 com muita rapidez e, quando solicitado a explicar como havia pensado para descobrir o quanto faltava para chegar à dezena superior, ele demonstrou ter mobilizado o seguinte conhecimento: s*ubtrair de uma dezena os valores dos algarismos da ordem das unidades.* Suas respostas variaram em responder que era fácil (apontando que estava "na cabeça") ou recorria à subtração, com o auxílio das duas mãos abertas (retirando a quantidade anunciada). Esta estratégia já fora utilizada nas atividades anteriores.

> ***Professora:*** *33. Qual a dezena superior e quanta falta?*
> ***João:*** *7* (rapidamente).
> ***Professora:*** *Explica como você pensou?*

Na resposta, João mostrou as duas mãos e subtraiu três, sinalizando, por fim, o *"7".* Tal atitude indicou que ele buscou em seu repertório de cálculo uma estratégia mais rápida. Como ele respondia o quanto faltava para a dezena superior sempre considerando 10, perguntávamos constantemente para ele qual era mesmo a dezena superior solicitada, a fim de verificar se ele realmente sabia, pois somente respondia o quanto faltava para completar dez.

Luísa usou a estratégia da sobrecontagem com e sem auxílio dos dedos. Além disso, constatamos que muitos resultados já estavam disponíveis em seu repertório de memória, para determinar quanto faltava para a dezena inteira superior, principalmente quando partia de números na ordem de unidade maior que 7.

Relatamos a seguir o caso de um número apresentado aos participantes e que, para se responder qual seria a dezena superior, havia a necessidade de mudança no algarismo representativo tanto da dezena quanto da centena.

> ***Professora:*** *491. Qual a dezena superior e quanta falta?*
> ***João:*** *Nove.*
> ***Maria:*** *Nove* (sinalizou).
> ***Professora:*** *Qual a dezena superior?*
> ***João:*** (pausa) 5*00.*
> ***Professora:*** *Como sabia?*
> ***João:*** *Acabou o 9, então 0* (indicando o algarismo 9 da dezena) *e acabou o 4, então 5*.

Com a explicação "acabou o 9, então 0" e "acabou o 4, então 5*"*, João explicitou a estratégia apontada nas atividades do bloco do SND incialmente por Luísa, quando esta apresentou que em cada ordem temos dez algarismos. Além disso, ele deixa clara a ideia de compensação, sendo que, com dez dezenas, podemos realizar uma troca por uma centena.

Considerações Finais

A dinâmica dialógica nas atividades com cálculo mental favoreceu a troca de ideias e o desenvolvimento da autonomia dos participantes, proporcionando um avanço qualitativo do raciocínio; aumentou a coragem em enfrentar desafios e criar novos processos de cálculos (novo pelo menos para o aluno); aumentou a capacidade de concentração dos alunos nas aulas; concorreu para a compreensão do conceito e dos diferentes significados do número; favoreceu o domínio de números de ordens elevadas; colaborou para a compreensão e o enriquecimento e a flexibilização dos procedimentos algorítmicos.

De maneira geral, em função da dificuldade de absorver informações diretamente do entorno social, o surdo é mais dependente da escola e, assim, neste contexto precisam que sejam trabalhados conhecimentos que são socialmente transmitidos, como o contato com os números de ordem elevadas.

Ao considerarmos a intervenção proposta com cálculo mental, em que se permitiu falar sobre os números e as operações, constatamos que, de início, Luísa estava em "vantagem" quanto ao conhecimento matemático em relação a João e Maria, porém, no decorrer das atividades, eles, cada um ao seu modo, foram construindo e consolidando o conhecimento e diminuindo a defasagem entre os sujeitos.

Considerando a hipótese de que as línguas de sinais desempenham no desenvolvimento cognitivo dos surdos papel equivalente ao das línguas orais no desenvolvimento cognitivo dos ouvintes, conjecturamos que Luísa apresentou tal superioridade por ser filha de pais surdos, diferentemente dos outros sujeitos, que, como quase 95% das crianças surdas, são filhos de pais ouvintes. Este fato, de que crianças surdas filhas de pais surdos apresentam melhor desempenho em Matemática, foi comprovado por Kritzer (2009), apontando novamente para a importância de se exercitar uma língua.

Conjecturamos que, a partir dos resultados apontados, à luz dos referenciais teóricos adotados, algumas ações, muitas das quais aparentemente óbvias, mas que não são efetivadas em sala de aula, precisam ser consideradas no ensino de Matemática para surdos, como a necessidade de que os professores se aprofundem no estudo da Libras, particularmente em seus aspectos morfológicos, pois não se trata apenas de entender e ser entendido neste idioma, mas de ser capaz de explorar pedagogicamente as possibilidades da língua. Outra recomendação "óbvia" é a de que busquem os sinais já convencionados para os termos matemáticos e que, se isto não existir, que os padronizem, pelo menos em cada contexto escolar, mediante a utilização dos classificadores[8].

No que se refere particularmente ao fazer pedagógico do professor em aulas de Matemática para estudantes surdos, recomendamos: explorar as três formas de representação dos números em Libras; explorar números maiores que a primeira ordem de milhar; passar da numeração falada para a

[8]"Os classificadores são formas que, substituindo o nome que as precedem, podem vir junto com o verbo para classificar o sujeito ou o objeto que está ligado à ação do verbo (FELIPE, 2001, *apud* PEREIRA *et al,* 2011)". "O sistema de classificadores fornece um campo de representações de categorias que revelam o tamanho e a forma de um objeto, a animação corporal de um personagem ou como um instrumento é manipulado (RAYMAN, 1999, *apud* PEREIRA *et al*, 2011)".

representação escrita; contar diferentes objetos; contar tanto progressiva como regressiva, de forma que se perpassem números próximos aos nós (10, 20, 30, ..., 100, 200, ...); trazer os "números da vida" para a escola; contar com intervalos superiores a um, para que os alunos percebam as regularidades existentes e uma prática regular de cálculo mental, de forma dialógica.

No que se refere, de maneira mais ampla, ao ensino de Matemática para surdos, este é um campo que está muito longe de ser totalmente explorado. Entretanto, os resultados alcançados com nossa intervenção permitem vislumbrar as potencialidades de uma exploração pedagógica adequada da Libras como língua veicular do conhecimento escolar, ou seja, a que é utilizada na escola, em todas as situações educativas.

Desta forma, para que efetivamente a mediação escolar do conhecimento matemático promova o desenvolvimento de competências conceituais e o desenvolvimento psicológico do educando surdo, a escola não deve se limitar apenas a "traduzir", para a língua de sinais, metodologias, estratégias e procedimentos da escola comum, pensados para os ouvintes e executados pelo professor de sala de aula, na língua dos ouvintes, mas efetivar a Libras como língua veicular do conhecimento, com exploração plena de suas potencialidades, de maneira a permitir trocas simbólicas e, consequentemente, o avanço qualitativo do pensamento do surdo. Já está mais do que na hora de sairmos da utilização "política" da Libras em sala de aula, com discussões a respeito do direito ao intérprete, de correção diferenciada, da obrigatoriedade da disciplina de Libras nos cursos de Licenciatura (o que é insuficiente), para adentrarmos no terreno da exploração pedagógica das potencialidades desta língua.

Referências

ALBRES, N. A.. **Comunicação em Libras para além do sinais.** IN: LACERDA, C. B. F., SANTOS, L. F (org). Tenho um surdo e agora? Introdução à Libras e educação de Surdos. São Carlos: EdusFSCar, 2013

BRASIL. Lei no 10.436. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – Libras – e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, 24 abr. 2002.

D´ANTONIO, S.R. Linguagem e Matemática: uma relação conflituosa no processo de ensino? 2006. 116 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR. 2006.

GOLDFELD, M. **A criança surda:** linguagem e cognição numa perspectiva sociointeracionista. São Paulo: Plexus Editora, 2002.

GÓMEZ, B. A. **Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo:** Un análisis en la formácion de profesores. Tesis (Doutorado, Departamento de Didáctica de la Matemática), Universitat de Valência. 1994.

GONÇALVES. H. A.. **Educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud.** Tese (Doutorado em Ciências, Sociedade e Educação) - Universidade Federal Fluminense. 2008.

GUIMARÃES, S. D. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande/MS. 2009.

KRITZER, K. L. Barely started and already left behind: a descriptive analysis of the Mathematics ability demonstrated by young deaf. **Journal of Deaf Studies and Deaf Education.** London: Oxford University Press, 2009. p.409-421.

MENDONÇA, M. do C; LELLIS, M. **Cálculo Mental.** Revista de Ensino de Ciências, 22, julho. p. 50-57, 1989.

NOGUEIRA, C. M. I.; BORGES, F. A.; FRIZZARINI, S. T. Os surdos e a inclusão: uma análise pela via do ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In: NOGUEIRA, C. M. I. (Org.). **Surdez, inclusão e matemática.** Curitiba, PR: CRV, 2013. p. 163-184

NOGUEIRA, C. M. I; ZANQUETTA. M. E. M. T. **Surdez, bilingüismo e o ensino tradicional de Matemática: uma avaliação piagetiana**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 30 – jul./dez. – 2008. p. 219-237.

NOGUEIRA C.M. I; BELLINI, M. L; PAVANELLO, R. **O ensino de matemática e das ciências naturais nos anos iniciais na perspectiva da epistemologia genética**. Curitiba, PR: CRV, 2013.

NUNES, T.; EVANS, D.; BARROS, R.; BURMAN, D. Promovendo o sucesso das crianças surdas em Matemática: uma intervenção precoce. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. **Anais**. Recife, 2011.

PARRA, C. **Cálculo mental na escola primária**. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas. Tradução: Juan Acuña Llorens. 2. ed.. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PEREIRA, M.C.C. *et al*...**Libras:** conhecimento além dos sinais. São Paulo: Pearson, 2011.

PONTE, J.P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SÁ, N. R. L. **Educação de surdos:** a caminho do bilingüismo. Niterói: EDUFF, 1999.

TITO, E. L. M.; NOGUEIRA, C. M. I. **As estruturas lógicas elementares e a noção de número em crianças com deficiência auditiva – subsídios para o ensino da Matemática**. 1989. 56p. Relatório Final de Projeto de Pesquisa — Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, p. 133 a 170, 1990

_______________. Piaget e Vygotsky: Convergências e controvérsias. **Revista Geempa,** Porto Alegre, RS, n.2, p. 76-83, nov. 1993.

_____________. A teoria dos campos conceituais. IN: BRUN, J (Direção). **Didática da Matemática**s. Lisboa: Instituto Piaget, p. 155- 217. 1996a.

_____________. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**. n.4, p. 9-19. Porto Alegre,1996b.

_____________. **A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education**. JMB, V17, N2, pp.167-181, 1998

_____________. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

ZANQUETTA, M. E. M. T., NOGUEIRA, C. M. I.; UMBEZEIRO, M. B. Professores de surdos da educação infantil e anos iniciais e as pesquisas de matemática e surdez. In: NOGUEIRA, C. M. I. (Org.). **Surdez, inclusão e matemática.** Curitiba, PR: CRV, 2013. p. 185-212.

Capítulo 5

Discursos de Professores e Futuros Professores dos Anos Iniciais sobre Aprendizagem Significativa em Performance Matemática Digital

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva[1]
Alana Fuzaro de Barros Rodrigues[2]

Performance Matemática Digital e Aprendizagem Significativa

Neste capítulo, apresentamos uma reflexão acerca de discursos de estudantes de graduação em Pedagogia e de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre a noção de *aprendizagem significativa*, envolvendo a análise de *performances matemáticas digitais* (PMD). As PMD analisadas nesta pesquisa foram produzidas com base no desenvolvimento de uma atividade matemática denominada *Fazendo 10*, a qual oferece meios para o estudo de conteúdos como números e operações (campo aditivo e multiplicativo), representação gráfica de pontos no plano cartesiano, equações do primeiro grau, sequências numéricas, dentre outros. O objetivo da análise dos discursos dos professores e futuros professores é aprimorar conceitualmente e metodologicamente o desenvolvimento de atividades baseadas na produção de PMD nos anos iniciais do Ensino Fundamental com relação ao pensamento matemático e ao uso integrado de tecnologias digitais e de artes (performáticas), buscando aprofundamentos pedagógicos com relação à aprendizagem significativa.

Nesse cenário, PMD diz respeito ao uso didático-pedagógico das artes performáticas e das tecnologias digitais em Educação Matemática (SCUCUGLIA, 2012; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Na realidade, a expressão PMD envolve pluralidade semântica, pois refere-se a: (i) uma recente linha de pesquisa em fase de implementação e consolidação na área de Educação Matemática no Brasil; (ii) uma possibilidade metodológica para o ensino de Matemática voltado à inovação educacional-tecnológica-artística; (iii) um tipo de texto ou narrativa matemática, artística e multimodal[3]. Nesse sentido, temos discutido atividades didático-pedagógicas sobre PMD e PMD enquanto narrativas em formato de vídeos digitais (SCUCUGLIA, 2014).

[1]Professor do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista, Campus S. J. do Rio Preto. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), UNESP, Campus de Rio Claro. ricardos@ibilce.unesp.br

[2]Professora da Escola Maria Peregrina, São José do Rio Preto, SP. alanafuzaro@gmail.com

[3]*Multimodalidade* se refere ao processo de comunicação por meio de múltiplos recursos semióticos (WALSH, 2011). Tradicionalmente, a comunicação matemática ocorre por meio da linguagem escrita baseada no uso de textos impressos. Alternativamente, a comunicação baseada no uso de vídeos digitais, por exemplo, pode envolver escrita, gestualidade, oralidade, elementos gráficos e outros tipos de linguagens e modos de comunicação.

As pesquisas sobre PMD têm investigado questões educacionais em diferentes cenários formativos ou ambientes de aprendizagem (de salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental às formações inicial e continuada de professores), as quais exploram diversificados aspectos teóricos e metodológicos (SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2013). Especificamente, as discussões apresentadas neste texto têm como temática fulcral a *teoria da aprendizagem significativa* (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1978), envolvendo a análise de PMD produzidas coletivamente por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sob a orientação de seus professores e dos pesquisadores autores deste capítulo. Tais discussões são parte integrante de uma pesquisa em fase de desenvolvimento intitulada "A imagem pública da Matemática e dos matemáticos na produção de PMD".[4]

Nosso interesse com relação à *aprendizagem significativa* emergiu do fato de tratar-se de uma expressão presente em documentos curriculares nacionais e estaduais da educação infantil e dos anos inicias do Ensino Fundamental. Por exemplo, no documento conhecido como EMAI (*Orientações Curriculares do Estado de São Paulo – Anos Iniciais do Ensino Fundamental – Matemática*), podemos encontrar as seguintes perspectivas: (i) "A aprendizagem requer o envolvimento das crianças em **atividades significativas**" (SÃO PAULO, 2014, p. 9, grifo nosso); (ii) "É na medida em que o aluno se expõe e tanto ele como o seu professor se apercebem dos erros e da sua origem que é possível (...) contribuir para uma **aprendizagem mais significativa**" (SÃO PAULO, 2014, p. 11, grifo nosso).

No documento do Ministério da Educação intitulado *Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil* (BRASIL, 1998), encontramos as seguintes ideias:

> O processo que permite a construção de **aprendizagens significativas** pelas crianças requer uma intensa atividade interna por parte delas. Nessa atividade, as crianças podem estabelecer relações entre novos conteúdos e os conhecimentos prévios (conhecimentos que já possuem), usando para isso os recursos de que dispõem. Esse processo possibilitará a elas modificarem seus conhecimentos prévios, matizá-los, ampliá-los ou diferenciá-los em função de novas informações, capacitando-as a realizar novas aprendizagens, tornando-as significativas (BRASIL, 1998, p. 33, grifo nosso).[5]

Diante de tal interesse, buscamos explorar e investigar possíveis interlocuções entre aprendizagem significativa (AS) e PMD em nossas atividades de pesquisa. Nesse sentido, algumas de nossas questões diretrizes são: Qual a relação entre AS e PMD? É possível desenvolver a AS ao se produzir PMD com estudantes e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Qual o papel da produção de PMD na

[4]Pesquisa financiada pelo *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq / Processo: 484970/2013-5).

[5]É importante mencionar que o fato das expressões *atividades significativas* e *aprendizagens significativas* estarem presentes em documentos curriculares não significa que tais propostas estejam necessariamente embasadas na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Na realidade, o EMAI não faz qualquer referência direta a teoria de Ausubel. No caso do *Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil*, há uma seção no documento sobre aprendizagem significativa, mas não há referência direta à Ausubel no corpo do texto. Há apenas indicação de uma obra de Ausubel nas referências bibliográficas do documento.

formação inicial e continuada de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Como analisar PMD do ponto de vista da AS? Esse é o cenário investigativo abordado neste capítulo. Especificamente, as atividades de pesquisa realizadas neste estudo tiveram como objetivo a análise de PMD com base na elaboração de uma lente teórica sobre a teoria da AS realizada por alunos de graduação em Pedagogia (futuros professores) e por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Aspectos Metodológicos

Embora o objetivo das discussões apresentadas neste capítulo seja específico, cabe mencionar que o objetivo geral da pesquisa em desenvolvimento é investigar a produção de PMD *conceituais*[6] visando a construção de imagens alternativas sobre a Matemática e os matemáticos. As atividades realizadas para o desenvolvimento da pesquisa englobam três cenários principais: (1) a realização de cursos de extensão universitária oferecidos a alunos de graduação, pós-graduação, docentes do ensino superior, pesquisadores, professores e alunos do Ensino Fundamental e Médio; (2) o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas à formação inicial de professores (de Matemática), conduzidas em disciplinas de um curso de graduação em Pedagogia e em disciplinas pedagógicas de um curso de licenciatura em Matemática, e; (3) a realização de atividades de ensino e de formação continuada de professores em uma escola de Educação Básica[7], a qual possui um projeto pedagógico e um ambiente de aprendizagem diferenciados, fundamentados no desenvolvimento da autonomia e da criticidade dos alunos enquanto indivíduos, no desenvolvimento de inteligências múltiplas, na pedagogia de projetos e na interdisciplinaridade curricular (SCUCUGLIA; RODRIGUES, no prelo).

As discussões abordadas neste capítulo referem-se a algumas das atividades realizadas dentro do segundo e terceiro eixos descritos. No contexto do segundo eixo, a primeira etapa do trabalho realizado com os alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental foi conduzida da seguinte maneira: (1) exploração e estudo da atividade matemática intitulada *Fazendo 10* com quatro turmas de estudantes e professores da Escola Maria Peregrina; (2) produção de quatro PMD cinematográficas e uma PMD musical com base no desenvolvimento da atividade matemática[8] *Fazendo 10* em sessões de ensino (atividades em sala de aula de Matemática) orientadas por nós pesquisadores e; (3) discussão/entrevista com os professores das turmas de estudantes sobre as PMD produzidas.

[6]Uma PMD conceitual pode ser entendida como uma PMD "ideal". De acordo com Scucuglia (2012), uma PMD conceitual apresenta surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas.
[7]Escola Maria Peregrina. Anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental.
[8]Neste capítulo, a expressão *atividade* assume, ao menos, dois sentidos: (1) Ação, movimento, realização. Por exemplo: atividade em sala de aula, atividade de pesquisa; (2) Tarefa. Por exemplo: a atividade *Fazendo 10.* Escola Maria Peregrina. Anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental.

A análise investigativa sobre essa primeira etapa de atividades do segundo eixo da pesquisa foi discutida por Scucuglia e Rodrigues (no prelo), no artigo submetido ao VI SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática). Nesse artigo, também descrevemos a natureza pedagógica diferenciada da Escola Maria Peregrina (EMP). A EMP, localizada na cidade de São José do Rio Preto-SP, é fundamentada em uma proposta educacional voltada ao desenvolvimento da singularidade cognitiva/ espiritual dos estudantes em combinação com a efetiva participação de todos os pais/responsáveis, o que viabiliza a consolidação de uma comunidade/identidade escolar/familiar legitimamente social, ética e colaborativa do ponto de vista formativo. Tal proposta, a qual explicitamente tem como gênese uma dimensão religiosa/confessional, apresenta como fundamentos teóricos a *pedagogia de projetos* e as *inteligências múltiplas*, engendrados a diretrizes fulcrais dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Pois, de acordo com a proposta pedagógica da EMP,

> (...) os planejamentos dos conteúdos são inseridos num sistema de ensino em que visa a realização de projetos realizados pelos próprios alunos, de acordo com sua singularidade. O professor assume o papel de mediador da educação, orientando seus educandos em projetos significativos ou aprendizagens significativas para seu processo de ensino-aprendizagem. Cada professor é responsável pela vida escolar de 12 (doze) alunos. Além de orientar os projetos de cada educando, ele acompanha seu desenvolvimento emocional, moral e espiritual (www.escolamariaperegrina.com.br/escola-projeto-pedagogico).

Tendo descrito a proposta pedagógica da EMP, cabe destacar que a segunda etapa de atividades realizadas dentro do segundo eixo da pesquisa em desenvolvimento, a qual é discutida neste capítulo, está baseada na aplicação e análise de um questionário aos professores das turmas de alunos dos anos iniciais da EMP. Além dessas atividades, integramos a presente discussão parte do um trabalho desenvolvido dentro do terceiro eixo, o qual envolve a participação de uma turma de discentes de um curso de graduação em Pedagogia. Portanto, há dois blocos de dados discutidos neste capítulo: um envolvendo professores em formação continuada, e outro, professores em formação inicial.

O questionário elaborado e aplicado aos professores e futuros professores participantes deste estudo é composto pelas seguintes questões[9]:

> 1. De acordo com Pelizzari et. al. (2002), quais são os principais aspectos que caracterizam a ***teoria da aprendizagem significativa*** segundo Ausubel?
> - Elabore categorias (critérios, parâmetros) para analisar uma situação de ensino com relação à teoria da aprendizagem significativa.
>
> 2. Analise do ponto de vista da teoria da aprendizagem significativa a atividade *Fazendo 10* (http://researchideas.ca/wmt/c2c1.html).

[9] O artigo de Pelizzari et. al. (2002) foi disponibilizado aos participantes juntamente com o questionário.

3. Analise as seguintes performances matemáticas digitais (PMD) com relação à aprendizagem significativa:
PMD1: https://youtu.be/Lx3i46oie-s
PMD2: https://youtu.be/D4iojc8ATUo
PMD3: https://youtu.be/hOLiwL40oEI
PMD4: https://youtu.be/Jmx0jqxtEuE
PMD5: https://youtu.be/SpyyMEK616E

Diante da descrição apresentada, podemos considerar que, a noção denominada *estudo de caso* (STAKE, 2005) é uma possibilidade metodológica pertinente ao presente estudo. O objetivo que propusemos foi investigar os discursos de professores e futuros professores dos anos iniciais com relação à análise de PMD do ponto de vista da AS. Os procedimentos realizados ofereceram elementos/evidências para refletirmos, explorarmos e investigarmos possibilidades de interlocução entre PMD e AS. Em outras palavras, a abordagem investigativa realizada na segunda etapa desta pesquisa perpassa sobre os principais fundamentos que caracterizam a ideia de estudo de caso do ponto de vista da metodologia de pesquisa qualitativa. De acordo com Ponte (2006), o estudo de caso:

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (PONTE, 2006, p. 2).

Além da noção de estudo de caso, outra perspectiva metodológica envolvida na pesquisa é a *análise de discursos*. É importante esclarecermos que a concepção de análise de discursos que estamos assumindo é distinta daquela proposta por autores como Faircough (2001). Popularmente, no âmbito das ciências sociais, a *análise (crítica) de discurso* tem como objetivo analisar textos do ponto de vista ideológico, enfatizando o discurso enquanto prática social.

Alternativamente, no escopo da presente pesquisa, a análise de discurso é concebida como um procedimento metodológico interpretativo-descritivo-analítico no qual buscamos identificar e explicitar as principais perspectivas que os participantes apresentam ao responderem o questionário proposto. Na realização da análise dos questionários, buscamos identificar especificidades e similaridades ou padrões nos discursos apresentados pelos professores e pelos graduandos em Pedagogia de modo a compará-los e contrastá-los.

O processo de seleção dos dados apresentados e discutidos neste capítulo está fundamentado na ideia de *amostra por julgamento* (MARSHALL, 1996). De acordo com o autor, nessa perspectiva, “o pesquisador deve selecionar ativamente a amostra mais produtiva para responder à pergunta de pesquisa (...). Durante a interpretação dos dados é importante considerar os sujeitos que dão suporte a explicações emergentes e, talvez mais importante ainda, os sujeitos que discordam" (MARSHALL, 1996, p. 532, tradução nossa).

Ainda nesse cenário analítico, destacamos que a elucidação de *unidades de significado* dentre os diversos discursos é parte fundamental de nosso trabalho interpretativo-analítico. Embora não estejamos nos posicionando fenomenologicamente, corroboramos, em parte, com as perspectivas metodológicas propostas por Bicudo (2011, p. 50), considerando o seguinte:

> Tomamos as descrições apresentadas como relatos de experiências vividas, entendendo-as como um texto e o lemos muitas vezes, com a finalidade de compreender o que está sendo dito pelo sujeito e, focando a interrogação diretriz da investigação, destacamos Unidades de Significado. Estas são unidades que fazem sentido para o pesquisador, sempre tendo como norte o que perguntado. Conforme compreendemos e temos efetuado e orientado nossas pesquisas, as Unidades de Significado se constituem pontos de partida das análises, busquem elas pela estrutura do fenômeno, busquem pelo dito em textos que mostrem significados em relação à pergunta formulada e ao fenômeno sob investigação (BICUDO, 2011, p. 50).

Por se tratar da realização de atividades de pesquisa com grupos distintos de professores do ponto de vista formativo – professores em formação continuada analisando PMD de seus próprios alunos e professores em formação inicial analisando PMD de alunos "desconhecidos" –, optamos em desenvolver uma análise comparativa entre os discursos explicitados por cada grupo. Esclarecemos que nessa etapa da pesquisa participaram quatro professores e 24 estudantes de graduação. Além disso, os questionários foram aplicados em cada turma em momentos e situações distintas. Os professores receberam via e-mail o questionário e o artigo de referência (PELIZZARI et. al., 2002) em formato eletrônico e tiveram cinco dias para refletir sobre as questões. No sexto dia, realizamos uma reunião com duração de uma hora para discutirmos coletivamente cada questão do questionário. Ao final da reunião, cada professor entregou o questionário respondido de forma escrita. Diferentemente, os estudantes de graduação responderam o questionário em sala de aula em um encontro com duração de aproximadamente quatro horas. Essa diferença é levada em consideração em termos de análise de dados.

Neste texto, optamos em apresentar as respostas dos participantes às questões do questionário articuladas a considerações analíticas fundamentadas na literatura. Devido ao número de participantes em cada grupo, optamos em apresentar os discursos de todos os professores e selecionar alguns dos discursos dos futuros professores, mediante as concepções analíticas mencionadas (BICUDO, 2011; MARSHAL, 1996; STAKE, 2005). Os discursos foram selecionados de modo a indicar concepções comuns dentre os diferentes discursos, bem como concepções peculiares que identificassem aspectos de concordância e discordância com relação à interlocução entre AS e PMD.

Além dos questionários respondidos, os quais consideramos a principal fonte de dados neste estudo, outro recurso utilizado para produção de dados foi a elaboração de *notas de campo*, criadas durante o desenvolvimento das atividades em cada encontro. Com as notas de campo, pudemos identificar e descrever concepções significativas (questionamentos, dúvidas, conjecturas, opiniões, inferências, etc.) dos participantes ao dialogarmos coletivamente acerca de cada uma das questões do questionário. Utilizamos também alguns registros fotográficos de conteúdos escritos elaborados durante os encontros.

Do ponto de vista ético, todos os participantes estavam cientes de que a aplicação do questionário seria parte de uma pesquisa e que a participação era voluntária, sem prejuízos de carga horária didática ou profissional. Foi oferecida a opção de anonimato na divulgação/publicação científica dos conteúdos dos questionários em relatórios, artigos, livros, etc. Devido ao fato de alguns participantes optarem pelo anonimato, decidimos em manter neste texto o anonimato de todos os participantes. Optamos em utilizar as iniciais dos nomes dos participantes para apresentar as transcrições no texto.

A visão dos professores e dos futuros professores sobre AS

Como explicitado no questionário proposto aos participantes da pesquisa, optamos em explorar a noção de AS a partir do artigo elaborado por Pelizzari, Kriegl, Baron, Fink e Orocinski (2002). Embora essa seja uma fonte secundária sobre a teoria da AS, no momento da elaboração do questionário, consideramos o referido artigo um texto que apresenta de maneira simplificada uma boa síntese sobre a AS de acordo com Ausubel. Ou seja, consideramos esse um texto adequado aos nossos interesses em termos de exequibilidade didática e de pesquisa.

No livro intitulado Psicologia Educacional, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) apresentam a teoria da AS. Com base no estudo desse livro, podemos dizer que a AS é uma perspectiva complexa, elaborada e fundamentada com base em múltiplos conceitos. Diante de tal complexidade, e considerando-se a exequibilidade de aplicação do questionário no escopo metodológico da pesquisa, optamos em não propor a análise da fonte primária sobre AS que estamos investigando. Tanto os graduandos como os professores apresentaram suas respostas individuais de diferentes maneiras: (i) citação literal (fichamento) de trechos do artigo; (ii) trechos parafraseados do artigo; (iii) expressões-chave que descrevem concepções do texto. Com relação ao grupo de professores, apresentamos no Quadro 1 as respostas individuais sobre a primeira pergunta do questionário[10]: De acordo com Pelizzari et. al. (2002), quais são os principais aspectos que caracterizam a teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel?

Quadro 1: Respostas Individuais dos Professores sobre Aprendizagem Significativa
Professora G: *Valorizar os conhecimentos prévios dos alunos;* *Construção de estruturas mentais;* *Descobrir e redescobrir outros conhecimentos;* *Aprendizagem prazerosa e eficaz;* *Participação ativa do sujeito;* *Processo de modificação do conhecimento;* *Reflexão específica sobre a aprendizagem escolar e o ensino;* *O aluno precisa ter uma disposição para aprender;* *O conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo;* *Aprendizagem por descoberta e aprendizagem receptiva;* *Enriquecimento da estrutura cognitiva do aluno;* *Lembrança posterior dos conhecimentos;* *Estímulo para experimentar novas aprendizagens;* *Potencializa a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil (articulação dos conhecimentos);* *Facilita a "reaprendizagem";* *Atividade auto-estruturante;* *Reelaboração pessoal.*
Professora F: *Relação com o conteúdo prévio do aluno;* *Disposição para aprender;* *Estímulos para aprender;* *Experimentar novos modos de aprendizagem;* *Facilitar a aprendizagem e assim a fixação;* *Conteúdo escolar significativo para o aluno.*
Professora M: *São dois, os alunos precisam ter uma disposição para aprender e o conteúdo escolar ser significativo. Quando os alunos aprendem por meio de projetos, automaticamente, já se faz algo significativo e prazeroso. Além de promover sempre o avanço da aprendizagem, em que este se dispõe a buscar o conhecimento. Busca incessante do saber por que deseja aprofundar sobre o conceito do seu interesse. Há de se destacar a questão motivacional do aluno em querer aprender em um ambiente favorável e significativo.*

Do ponto de vista interpretativo-analítico, podemos considerar que dentre as concepções presentes nos discursos dos professores ao sistematizarem aspectos fundamentais que caracterizam a AS segundo Ausubel, algumas das perspectivas emergentes perpassam sobre as seguintes ideias encontradas no artigo de Pelizzari et. al. (2002):

[10]Esclarecemos que um dos quatro professores não respondeu a primeira questão.

> A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele **a partir da relação com seu conhecimento prévio**. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva (...). Para que a aprendizagem significativa ocorra é preciso entender um processo de modificação do conhecimento, em vez de comportamento em um sentido externo e observável, e reconhecer a importância que os processos mentais têm nesse desenvolvimento (...). Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma **disposição para aprender**: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, **o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo**, ou seja, ele tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio (PELIZZARI et. al., 2002, p. 38, grifo nosso)[11].

Com relação ao grupo de futuros professores, apresentamos no Quadro 2 algumas das respostas individuais sobre a primeira questão do questionário:

Quadro 2: Algumas Respostas Individuais dos Graduandos em Pedagogia sobre Aprendizagem Significativa
L1: *A aprendizagem significativa parte dos conhecimentos prévios dos alunos juntamente com suas estruturas cognitivas para que ocorra a interação com novos conhecimentos. Para que isso ocorra são necessários fatores como o ensino de conteúdos significativos através de descobertas ("surpresas") e a disposição do aluno em aprender tais conteúdos.*
J1: *A aprendizagem significativa envolve incorporar um novo conhecimento potencialmente significativo logicamente e psicologicamente, às estruturas de conhecimento de um aluno de modo a existir significado para ele por estar relacionado com conhecimentos prévios. Ela se opõe à aprendizagem mecânica, visto que nesta última os conteúdos a serem memorizados estão desvinculados dos conhecimentos prévios.* *Critérios que serão usados para avaliar as atividades seguintes: 1) significado lógico; 2) significado psicológico; 3) Descoberta versus recepção e 4) Relevância versus memorização.*
B: *O sujeito aprendiz deve ter participação ativa no processo de aprendizagem (...) Elementos essenciais: disposição para aprender; o conteúdo deve ser significativo; deve-se interagir os "velhos" conteúdos com os "novos" conteúdos; aprendizagem por descoberta; modificação e reflexão, autonomia.*
A1: *(...) disponibilidade do aluno para aprender e (...) a nova aprendizagem tem que fazer sentido ao aluno dentro das experiências anteriores que cada um teve. (...) A parte cognitiva é uma rede de significações hierárquicas que varia em grau de complexidade entre a quantidade de conceitos presentes e utilizados para a aquisição de um novo conceito.*
A2: *Para que haja uma aprendizagem significativa, é necessário que o aluno associe suas experiências com o conceito que está sendo ensinado, se tornando uma descoberta. Ou seja, para que a aprendizagem significativa aconteça, também é necessária a motivação por parte do aluno, para que ele faça essas associações. A função do educador, portanto, seria estimular as associações e descobertas.*
J2: *(...) A aprendizagem significativa se diferencia da aprendizagem memorística, que é a forma mecânica e repetitiva, as informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes na estrutura cognitiva, e logo são esquecidos. (...)*

[11]"Neste processo a nova informação interage em comum à estrutura de conhecimento específico, que Ausubel chama de conceito '**subsunçor**'. Esta é uma palavra que tenta traduzir a inglesa 'subsumer'" (PELIZZARI et; al. 2002, p. 38, grifo nosso).

D: *Modificação do conhecimento* *Reflexão sobre a aprendizagem* *Conteúdo significativo* *Aprendizagem descoberta/receptiva* *Filtragem dos conteúdos* *Interação conhecimento prévio / conteúdo de aprendizagem* *Aluno como parte integrante* *Saber fazer / aprender a aprender*
H1: *(...) Disposição prévia do aluno em querer aprender, pois caso contrário irá realizar de forma mecânica uma memorização daquele conceito; e também deve existir um sentido, um "por quê" da exposição daquele assunto que faça alguma relação de significado para o aluno, é um processo bastante peculiar e individual onde cada um irá ressignificar a sua maneira.*
H2: *(...) para uma aprendizagem significativa é preciso que o professor entenda e saiba antes quais são os conhecimentos prévios que seu aluno já possui sobre determinado assunto para então seguir com seu objetivo de ensinar-lhe mais, isso quebra a teoria de que o aluno é tábua rasa ou recipiente vazio que o professor deve preencher. (...) Uma das vantagens da aprendizagem significativa é que com ela o aluno aumentará sua capacidade cognitiva de aprender conteúdos.*
M1: *(...) este tipo de aprendizagem respeita e conduz o aluno a se sentir parte [do] novo conhecimento. Com a palavra, o professor diminui a distância que existe entre a prática e a teoria, fazendo com que o aluno se desafie, reflita e conheça melhor a sua realidade.*
T1: *Aprendizagem significativa; Conhecimentos prévios levados em consideração; Interação entre novas informações e conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva; Processos mentais; Disposição para aprender; Conteúdo lógica e psicologicamente significativo; Rede hierárquica de conhecimentos conceituais; Aprendizagem por descoberta; Aprendizagem repetitiva; Aprendizagem significativa por percepção verbal; Modificação mútua da estrutura cognitiva inicial e do novo conteúdo; Saber, saber fazer, aprender, aprender a aprender; Auto estruturação significativa; Modificação dos esquemas cognitivos do sujeito; Participação ativa do sujeito; Reelaboração pessoal; Mapas conceituais; Comunicação eficaz professor-aluno; Termos familiares; Construção da sociedade do conhecimento.*

Além dos aspectos destacados pelos professores, os futuros professores também mencionaram as seguintes perspectivas discutidas por Pelizzari et. al. (2002):

> Ausubel propõe distinguir dois eixos ou dimensões diferentes que originarão, a partir dos diversos valores que possam tomar em cada caso, a classes diferentes de aprendizagem. • Aprendizagem significativa • Aprendizagem memorística. O primeiro é o eixo relativo à maneira de organizar o processo de aprendizagem e a estrutura em torno da dimensão **aprendizagem por descoberta**/ aprendizagem receptiva (...). Ao contrário, o segundo eixo remete ao tipo de processo que intervém na aprendizagem e origina um *continuum* delimitado pela aprendizagem significativa, por um lado, e pela aprendizagem mecânica ou repetitiva, por outro (...). Quanto mais se **relaciona o novo conteúdo** de maneira substancial e não arbitrária com algum aspecto da **estrutura cognitiva prévia** que lhe for relevante, mais próximo se está da aprendizagem significativa. Quanto menos se estabelece esse tipo de relação, mais próxima se está da aprendizagem mecânica ou repetitiva (PELIZZARI et. al., 2002, p. 39, grifo nosso).

Durante os encontros, após terem elaborado suas respostas individualmente, os participantes de cada grupo dialogaram sobre suas ideias, de maneira a sintetizar uma resposta coletiva à primeira questão do questionário. No Quadro 3, apresentamos a síntese de cada grupo sobre a primeira questão:

Quadro 3: Respostas Coletivas de Cada Grupo sobre Aprendizagem Significativa	
Professores	***Futuros Professores***
♦ *Desafio do conhecimento;* ♦ *Situações de aprendizagem do cotidiano;* ♦ *Disposição para aprender;* ♦ *Conteúdo significativo;* ♦ *Valorizar os conhecimentos prévios;* ♦ *Descobrir e redescobrir;* ♦ *Aprendizagem prazerosa e eficaz;* ♦ *Modificação do conhecimento;* ♦ *Reflexão específica escolar;* ♦ *Enriquece a estrutura cognitiva;* ♦ *Lembrança posterior;* ♦ *Atividade auto estruturante.*	♦ *Conhecimentos prévios;* ♦ *Disposição para aprender;* ♦ *Conteúdo significativo;* ♦ *Relação entre conhecimentos novos e conhecimentos já conhecidos (interação);* ♦ *Continuum;* ♦ *Aprendizagem por descoberta;* ♦ *Conflito cognitivo e equilíbrio;* ♦ *Modificação e reflexão;* ♦ *Autonomia;* ♦ *Integração.*

Além das perspectivas já indicadas acerca do texto de Pelizzari et. al. (2002), podemos incluir o seguinte trecho do artigo em termos dos principais aspectos apontados pelos grupos de professores e futuros professores na caracterização da AS em seus discursos:

> Ausubel apresenta uma aprendizagem que tenha como ambiente uma comunicação eficaz, respeite e conduza o aluno a imaginar-se como parte **integrante desse novo conhecimento** através de elos, de termos familiares a ele. Através da palavra, o educador pode diminuir a distância entre a teoria e a prática na escola, capacitando-se de uma linguagem que ao mesmo tempo desafie e leve o aluno a refletir e sonhar, conhecendo a sua realidade e os seus anseios (PELIZZARI et. al., 2002, p. 41, grifo nosso).

Identificamos, portanto, uma significativa semelhança entre os discursos dos professores e dos futuros professores com relação à construção de uma perspectiva teórica sobre AS. Em grande parte, atribuímos essa semelhança ao fato da construção teórica ter sido concebida com base em um texto simplificado, o qual apresenta uma (breve) síntese sobre a teoria da AS segundo Ausubel. Por um lado, notamos que em ambos os grupos, o papel do professor no processo de aprendizagem significativa não foi destacado com notoriedade. Em contraste, identificamos diferenças ou especificidades nos discursos emergentes em cada grupo. Dentre os professores, por exemplo, foi estabelecida uma relação entre AS e "situações de aprendizagem do cotidiano" e "aprendizagem prazerosa". O estabelecimento de tal relação, provavelmente, tem origem na experiência docente constituída na EMP, a qual está fundamentada na pedagogia de projetos e no desenvolvimento de inteligências múltiplas. Dentre os futuros professores, notamos que expressões como "estruturas cognitivas", "conflito cognitivo" e "equilíbrio" foram recorrentes nos discursos. Acreditamos que o uso desses termos está associado ao fato dos futuros professores estarem em processo de consolidação de familiaridade acerca das teorias de Piaget e Vygotsky, as quais são estudadas em disciplinas do curso de graduação em Pedagogia, do qual são discentes.

Com base em Ausubel, Novak e Hanesian (1980), podemos ainda identificar aspectos em comum como também ressalvas ou considerações críticas em relação às ideias apresentadas por Pelizzari et. al. (2002). Nos discursos dos professores e futuros professores, notamos que “os conhecimentos prévios dos alunos” e a “disposição para aprendizagem”, por exemplo, foram aspectos bastante enfatizados. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980):

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às **informações previamente adquiridas pelo aluno** através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum *aspecto relevante existente* na **estrutura cognitiva do aluno**, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição. A aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma **disposição para a aprendizagem significativa** (...) e que o **material** aprendido seja **potencialmente significativo** (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 34, grifo nosso).

Como mencionado, por se tratar de uma síntese consideravelmente simplificada, alguns aspectos no texto de Pelizzari et. al. (2002) podem fomentar incoerências e/ou reducionismo conceitual. Visando aprimorar o desenvolvimento de atividades futuras de nossas pesquisas com relação a construção de uma lente teórica sobre AS em PMD, discutiremos outros aspectos fulcrais da teoria da AS em seções seguintes deste capítulo.

A Atividade Fazendo 10

No endereço http://researchideas.ca/wmt/c2c1.html, podemos acessar a versão mais atual da atividade *Fazendo 10*, criada por George Gadanidis. No referido endereço, que apresenta os conteúdos em língua inglesa, encontramos inicialmente quatro seções propostas para o desenvolvimento da atividade, seguidas por dois vídeos explicativos e um objeto virtual interativo. Com base nas informações apresentadas nos vídeos, nota-se que a atividade pode ser desenvolvida, tanto no quarto ano do Ensino Fundamental, como no primeiro e segundo anos[12].

Tal atividade, já descrita por Scucuglia e Rodrigues (no prelo) no contexto da presente pesquisa, explora conteúdos em álgebra (*missing numbers*[13]), de modo a relacionar diferentes blocos de conteúdos, como, (i) probabilidade (jogar dados para completar a primeira parcela da expressão ___ + ___ = 10 e

[12]Neste caso, estamos considerando a similaridade entre o currículo de Matemática de Ontário, no Canadá, e o currículo de Matemática do Estado de São Paulo em termos de conteúdo. Ressalvas são necessárias se considerarmos comparativa e literalmente a categorização dos blocos de conteúdos matemáticos e os processos pedagógicos matemáticos (habilidades) presentes em cada um dos currículos.
[13]“Números faltando”, “números que faltam”, “números omitidos”, etc. Exemplo: ___ + ___ = 10.

descobrir a segunda parcela; (ii) geometria (obter pares ordenados a partir de cada expressão e representá-los no plano cartesiano e representar as expressões com blocos manipulativos). Na Figura 1, apresentamos alguns dos elementos que compõem a atividade *Fazendo 10*:

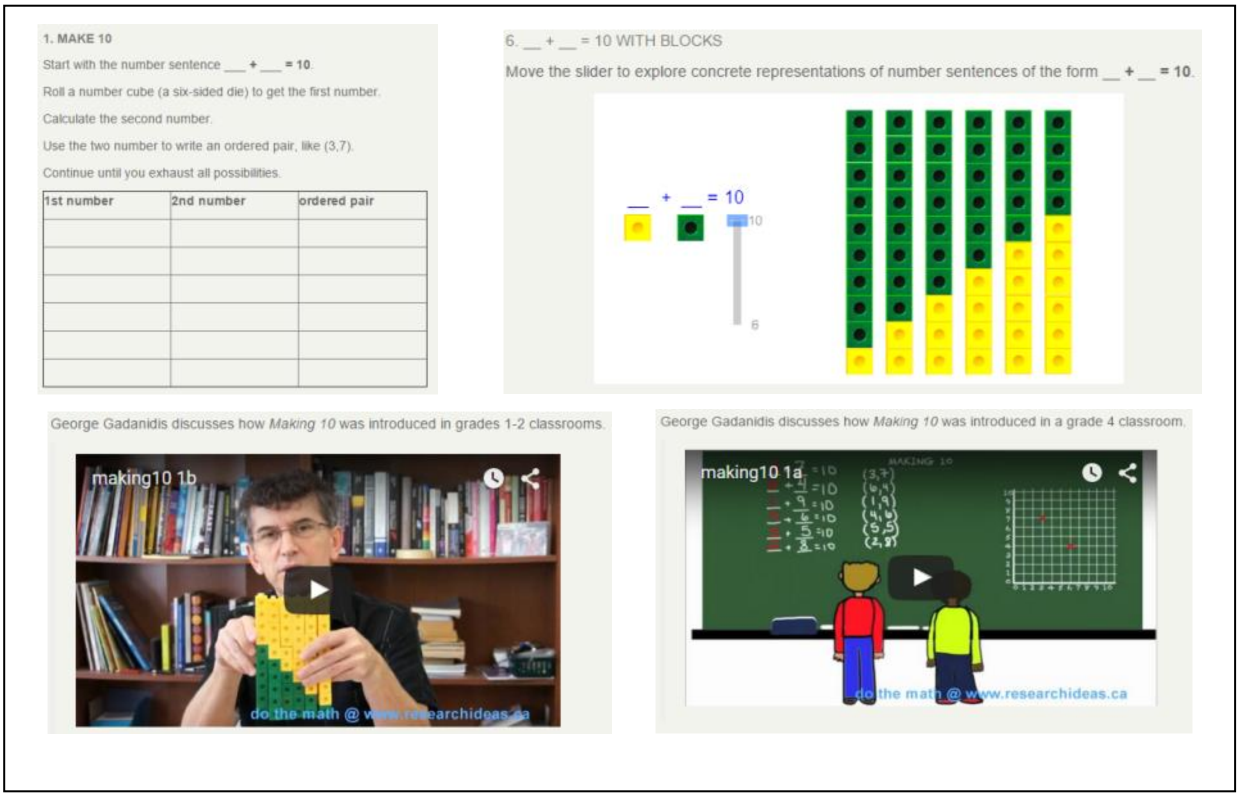


Figura 1: A Atividade *Fazendo 10* (www.researchideas.ca/wmt/c2c1.html)

A segunda questão do questionário aplicado aos participantes propôs uma análise da atividade *Fazendo 10* com relação à AS, especificamente, com base nos aspectos explicitados na primeira questão do questionário. Por se tratar de uma atividade originalmente elaborada em língua inglesa, auxiliamos os professores na tradução dos conteúdos durante os encontros. No Quadro 4, apresentamos as respostas dos professores acerca da segunda questão do questionário:

Quadro 4: Respostas dos Professores sobre a Atividade Fazendo 10
Professora G: *Por meio do vídeo "Fazendo 10", podemos observar que as atividades propostas valorizam os conhecimentos dos alunos, pois partem dos números (de 0 a 10) já conhecidos por eles; as atividades permitem que a criança descubra e redescubra conhecimentos matemáticos (adição e multiplicação)*[14]*, como a reta que se forma no gráfico; incentiva a participação ativa do sujeito e torna a aprendizagem prazerosa e eficaz por meio dos jogos com os dados e dos blocos de encaixar, enriquecendo a estrutura cognitiva do aluno; e potencializa a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil. Nesse sentido, percebemos que as atividades propostas condizem com a teoria da aprendizagem significativa.*

[14] Na atividade, a multiplicação foi explorada a partir das representações retangulares formada com os blocos para contagem do número total de blocos. Por

Professora F: *A atividade "Fazendo 10" é uma aprendizagem significativa, pois o aluno participa ativamente, jogando o dado, construindo seu conhecimento, analisando na prática. O aluno aprende de maneiras novas, isso auxilia na disposição em aprender e o conteúdo se torna significativo para ele.*
Professora M: *A aprendizagem foi significativa e prazerosa com os alunos, porque alguns já possuíam os conhecimentos prévios e outros não. Percebi que aqueles que não sabiam sobre conceito e com a música foram se interagindo com o mesmo e este passou a ser interessante ao aluno. A questão musical e a filmagem foram pontos essenciais para o dinamismo em sala e para aguçar ainda mais os alunos na aprendizagem. Conseguiram memorizar o conceito e depois alguns alunos já faziam diversas associações possíveis com as questões abordadas. Foi fantástica essa atividade proposta.*
Professora I: *Analisando a atividade "fazendo 10", no ponto de vista da teoria de aprendizagem significativa. Vejo que acaba acontecendo essa aprendizagem devido a questão do trabalho da memorização e a forma que esse novo conteúdo vai sendo incorporado nas estruturas do conhecimento do aluno. Sendo até mesmo de uma forma bastante lúdica, por mais que tenha repetição. Mas os materiais utilizados no desenvolvimento favorecem assim a aprendizagem significativa.*

No Quadro 5, apresentamos algumas das respostas dos futuros professores acerca da segunda questão do questionário:

Quadro 5: Algumas Respostas dos Graduandos em Pedagogia sobre a Atividade Fazendo 10
D: *Para a realização desta atividade o aluno desenvolveu alguns aspectos da aprendizagem significativa, pois esta proporcionou ao aluno uma atividade por descoberta, na qual ele participa ativamente da construção do novo conhecimento na interação com o conhecimento prévio.*
L1: *A atividade Fazendo 10 iniciava-se utilizando do conhecimento prévio dos alunos sobre Matemática, enfatizando a questão descoberta dos números que estavam faltando para que isso levasse os alunos a refletirem e descobrirem quais números encaixariam. Além disso, houve uma conexão dos conteúdos da atividade inicial até a atividade final, adquirindo conceitos novos e interligados para o ensino dos alunos.*
L2: *A atividade Fazendo 10 se enquadra em alguns aspectos da teoria da aprendizagem significativa como, por exemplo, a aprendizagem por descoberta (...), além da relação com conhecimentos prévios (...).*
J1: *A atividade foi desenvolvida com base em um significado lógico (fundamento), mas não leva em conta o gosto da criança pela atividade, o interesse que tal atividade desperta. Houve preocupação com os alunos descobrirem o padrão ao invés de receber este conhecimento pelo professor, ou pelo livro, porém não houve preocupação pela relevância que este conhecimento pode ter na realidade em que cada aluno está (relevância psicológica).* *Pergunta extra: Esta atividade oferece meios para a aprendizagem significativa. Por que?* *Não. Não porque por mais interessante que seja, e até acertando que apesar da atividade ser uma só para todos os alunos de uma turma indiscriminadamente, leva-se em conta os conhecimentos prévios dos alunos, essa atividade não leva em conta a realidade na qual o aluno está inserido. Trabalhar com blocos e gráficos é interessante à primeira vista, mas não está relacionado com conhecimentos prévios, nem com a realidade da criança, o que seria responsável por tornar o conteúdo relevante.*
A1: *A atividade Fazendo 10 tem alguns elementos que constituem a teoria da aprendizagem significativa, como a aprendizagem por descoberta (a informação não é dada e sim descoberta pelo aluno ao lançar os dados), a autonomia do aluno. Também contribui para a modificação e reflexão da atividade, e a ressignificação do conhecimento.*

C1: *A atividade Fazendo 10, no ponto de vista da aprendizagem significativa explora o fator do conflito, no qual ela apresenta ao aluno uma situação algébrica problema criada pelo aluno ao jogar o dado, o que o aproxima do conteúdo e posteriormente estabelece conexões com outras áreas como a aplicação em gráficos.*
G: *A atividade Fazendo 10 oferece meios para uma aprendizagem significativa, pois trabalha-se um conceito de álgebra e equações e descobre-se um padrão para se relacionar à outras áreas com uma participação ativa dos alunos. Nessa atividade os alunos realizam aprendizagem por si próprios, são consideradas as estruturas cognitivas do aluno, de modo a ampliá-las a partir de um desiquilíbrio e assim, o aluno é obrigado a buscar novamente um equilíbrio em suas ideias. Além disso, os alunos realizam a atividade por meio de descobertas – o padrão linear – e de repetições. Quando os alunos desenvolveram um conceito foram capazes de estabelecer relações entre diferentes objetos, o que nos leva a compreender o motivo de considerar tal atividade como desenvolvida a partir da teoria da aprendizagem significativa.*
T1: *A atividade Making 10 inicia-se com uma proposta bastante acessível e simples para o aluno, o que não o intimida, não associa a Matemática ao sentimento de impotência. Além do mais, dialoga com os esquemas já existentes por apresentar, a princípio, conceitos básicos da Matemática. Ao inicia-la, o aluno começa estruturar sua atividade cognitiva e, ao longo da atividade, descobrirá a formação de um padrão, que causará surpresa. Essa revelação causa euforia no aluno, marcando-o positivamente.*
T2: *(...) É possível observar a relação entre os conteúdos e áreas do conhecimento trabalhando a álgebra, leitura e construção de gráfico, números e operações, uso de jogos fazendo raciocínio lógico na observação de padrões. Essa atividade propôs novos conteúdos e buscou no aluno conhecimentos prévios enriquecendo as estruturas cognitivas do aluno. Objetivou também a descoberta, além disso, conteúdo significativo e lógico.*
B: *A atividade Fazendo 10 é sim uma demonstração de aprendizagem significativa pois podemos ver uma série de características listadas na questão 1. Por exemplo, as operações envolvidas (álgebra) possuíam um sentido, ou seja, não era simplesmente some 3 e 7 e veja que o resultado é 10, mas sim era uma forma de fazer os alunos descobrirem isso a partir dos diferentes resultados dos dados. Isso torna a aprendizagem mais significativa e autônoma de forma a integrar os conhecimentos prévios dos alunos com os novos conhecimentos.*

Ao analisarmos os discursos dos professores e futuros professores acerca de suas concepções sobre a atividade *Fazendo 10* do ponto de vista da AS, notamos que a maioria deles considera que a atividade assume um *caráter potencialmente significativo*, ou seja, oferece meios para o desenvolvimento da AS, parcialmente ou integralmente. Especificamente, é destacado que a atividade oferece possibilidades para a *aprendizagem por descoberta (surpresa)*, que considera os conhecimentos prévios dos alunos e fomenta a participação ativa deles no engajamento ao processo de aprendizagem. Identificamos apenas um discurso mais enfático no qual um futuro professor (J1) argumenta sobre a não sinergia plena entre AS e a natureza pedagógica da atividade *Fazendo 10*. Nesse sentido, é possível notar algumas diferenças nos discursos dos professores e dos futuros professores.

Analiticamente, é importante discutirmos dois aspectos. Primeiro: a aprendizagem significativa e a aprendizagem por descoberta são dois tipos diferentes de aprendizagem. Embora exista complementariedade entre esses dois tipos de aprendizagem, tal simbiose conceitual é consideravelmente complexa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Outro aspecto mencionado superficialmente pelos participantes, mas discutido intensamente por eles durante os encontros, foi o papel da *memorização* na AS. Com base nas diferentes interpretações do artigo de Pelizzari et. al. (2002), alguns participantes disseram que a memorização não condiz com a AS, outros disseram que a memorização é parte da AS. Uma concepção muito relevante sobre AS, mas que não foi mencionada no texto, diz respeito à classificação de diferentes tipos de memorização. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), há uma distinção entre memorização significativa e memorização mecânica, sendo a primeira um atributo importante ao processo de AS.

Dentre tais conceitos, podemos destacar que, inicialmente, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) estabelecem uma distinção qualitativa entre os dois tipos de aprendizagem: (i) aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta e (ii) aprendizagem automática (por decoração) e aprendizagem significativa. Não encontramos em Ausubel, Novak e Hanesian (1980) um contraste entre AS e *aprendizagem memorística* literalmente da forma como propõem Pelizzari et. al. (2002).

No contexto da concepção que consideramos fonte primária: "Na aprendizagem receptiva (automática ou significativa) todo o conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado sob a forma final" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 20). Em contraste, na aprendizagem por descoberta, "o conteúdo principal daquilo que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 20).

Nessa perspectiva, podemos ter tipos de aprendizagens baseadas na combinação das quatro categorias dispostas axialmente duas a duas, ou seja: (a) aprendizagem automática por recepção; (b) aprendizagem significativa por recepção; (c) aprendizagem automática por descoberta e (d) aprendizagem significativa por descoberta. A relação entre os tipos de aprendizagem pode ser representada imageticamente da seguinte maneira (Figura 2):

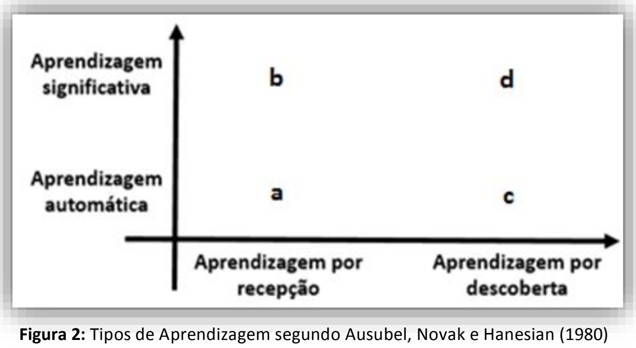


Figura 2: Tipos de Aprendizagem segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980)

O segundo aspecto que consideramos relevante explorar é o seguinte: nesse cenário, por estarmos analisando a natureza pedagógica de uma atividade matemática, podemos destacar algumas concepções de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) sobre *material significativo*. Essa concepção perpassa, relativamente, a noção de *conteúdo significativo* discutida por Pelizzari et. al. (2002)[15]. Pois, de acordo com os primeiros autores,

> A aprendizagem significativa não deve ser interpretada simplesmente como a aprendizagem de material significativo. Na aprendizagem significativa, estes materiais são apenas *potencialmente* significativos. Se *já* forem significativos, o objetivo da aprendizagem significativa – ou seja, a aquisição de novos significados – se completa por definição antes mesmo de qualquer tentativa de aprendizagem. De fato, na grande maioria das tarefas de aprendizagem potencialmente significativas, as *partes componentes* do material são também significativas; entretanto, nesses casos, a tarefa como um todo é apenas potencialmente significativa. (...) Isso nos leva a uma distinção importante entre aprendizagem *significativa* de material *potencialmente* significativo e aprendizagem *automática* de tarefas que contenham elementos já *significativos* (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 42, grito dos autores).

Nesse sentido, podemos considerar que, mesmo não tendo sido concebida ou elaborada (rigorosamente) com base na teoria da AS, a atividade *Fazendo 10* apresenta elementos enquanto material potencialmente significativo, ou seja, oferece meios para que a AS seja desenvolvida. No entanto, a atividade não garante que a AS seja desenvolvida, pois ela pode ser realizada de maneira automática, mesmo havendo possibilidade de descoberta. Portanto, é relevante que se faça uma análise das PMD baseadas na realização da atividade *Fazendo 10* para que se possa analisar aspectos emergentes com relação a AS. Foi por esse motivo que propusemos a terceira questão do questionário.

A Análise das PMD

Propusemos aos participantes da pesquisa analisar cinco PMD produzidas a partir do desenvolvimento da atividade *Fazendo 10* com quatro turmas de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Cada uma das quatro primeiras PMD apresentam algumas atividades performáticas realizadas por cada turma de estudantes ao explorarem a atividade. A quinta PMD diz respeito a uma performance musical realizada pelas quatro turmas sobre um aspecto abordado no estudo da atividade *Fazendo 10*. Na Figura 3, apresentamos imagens capturadas de cenas de cada uma das quatro primeiras PMD produzidas:

[15]Como mencionado, uma das condições para haver AS é a seguinte: "o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio" (PELIZZARI et. al., 2002, p. 38).

Figura 3: Imagens capturadas das PMD 1-4.[16]
Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

No Quadro 6, apresentamos as respostas dos professores acerca da terceira questão do questionário:

Quadro 6: Respostas Individuais dos Professores sobre a Análise das PMD

Professora G:

- *Após presenciarmos pessoalmente e assistirmos aos vídeos referentes às performances matemáticas digitais (PMD), notamos que algumas ideias da atividade "Fazendo 10" foram exploradas nas PMD, como: o uso de blocos de encaixar com cem peças que formam um quadrado para facilitar a aprendizagem da adição e da multiplicação a partir dos números naturais de 0 a 10; a repetição da soma dos números que resultam a 10.*
- *Observamos que vários aspectos nas PMD caracterizam a aprendizagem significativa, como valorizar os conhecimentos prévios dos alunos (números já conhecidos por eles e as relações que os alunos estabelecem com o formato do bloco de encaixar quando este apresenta a sequência dos números naturais de 1 a 10); a descoberta e redescoberta dos conhecimentos matemáticos relacionados à adição e multiplicação; a participação ativa da criança no processo de ensino-aprendizagem; a aprendizagem prazerosa, lúdica e eficaz por meio dos blocos de encaixar e da música; a capacidade de aprender outros conteúdos de uma maneira mais fácil, pois a partir da quantidade de blocos encaixados na base e na altura do quadrado, os alunos descobriram e aprenderam também sobre a propriedade comutativa; e a repetição da letra da música que leva a criança a refletir sobre as possibilidades de se aprender a adição e a multiplicação "Fazendo 10".*
- *As atividades com os jogos de dados ou cartas para completar as lacunas da operação que resulta em 10 e fazer a mesma atividade com outros resultados além do 10, utilizando os números naturais; a construção do gráfico para que as crianças descobrissem a reta e estabelecessem as relações de adição e multiplicação entre os números naturais de 0 a 10 (pares ordenados); e o uso de blocos virtuais.*

Professora F:

- *A ideia de que várias combinações podem dar o mesmo resultado. Os alunos construíram seus conhecimentos e foram se desenvolvendo.*
- *Conhecimento prévio, conteúdo significativo ao aluno, novas maneiras de aprender. O fato de o próprio aluno construir seu aprendizado facilita na fixação;*
- *Construir a reta teria sido uma atividade excelente, pois os alunos teriam uma aprendizagem significativa de interpretação de dados, gráficos, informações.*

[16]As imagens utilizadas na Figura 1 foram obtidas com consentimento dos responsáveis dos estudantes para uso enquanto dados da pesquisa e sua divulgação pública em relatórios, artigos, livros, etc.

Professora I: *Foi trabalhada a ideia de realizar uma atividade de matemática com prazer, introduzindo a música, trabalhando assim de uma forma bem lúdica a questão da memorização dos alunos, trazendo assim uma aprendizagem significativa, tirando a Matemática somente do papel, mas trazendo para o dia-a-dia, pois todos nós cantamos, e porque a teoria da Matemática também não pode se transformar em música. Outra abordagem interessante foi a questão da filmagem, trazendo a questão de se criar um filme e dos instrumentos musicais, trabalhando assim várias habilidades dos alunos.* ♦ *Baseado na teoria de aprendizagem significativa, não consigo encontrar aspectos que descaracterizam essa forma de aprendizagem do desempenho de Matemática, fazendo 10. Por mais que ela traz um grau de repetição, porém a forma que a repetição acontece é bastante criativa, trazendo assim um novo modo de enfrentarmos a aprendizagem sobre a Matemática.* ♦ *Como disse na anterior não consigo ver outras ideias para ser exploradas sobre a aprendizagem significativa. Pois analisando os vídeos foi visto que ela foi trabalhada da melhor forma, levando as crianças a terem prazer sobre aquele conhecimento prévio do assunto.*
Professora M: ♦ *[Foram explorados] conceitos matemáticos como noção de dezenas, adição e subtração, números inteiros. E tantos outros, pois o aluno tendo conhecimento desta base ele poderá obter diversos e novos conceitos matemáticos. A questão das formas geométricas também poderia ter sido explorada com esta atividade.* ♦ *Os aspectos que caracterizam a aprendizagem é que diante das questões musicais os alunos usaram dos que já tinham de conhecimento prévios, no caso os números, para construir novos conhecimentos. E até ter uma nova estratégia de poder memorizar os conceitos. Assim, a aprendizagem foi prazerosa e interativa. Não observei nenhum aspecto que descaracterize a aprendizagem significativa.* ♦ *De acordo com cada faixa estaria a exploração poderia ser adequada para aprofundar os conceitos da Matemática. Como valor posicional, outras operações matemáticas, etc. Porque para o aluno essa aprendizagem torna-se viva e significativa para o aluno.*

No Quadro 7, apresentamos as respostas dos futuros professores acerca da terceira questão do questionário:

Quadro 7: Algumas Respostas dos Graduandos em Pedagogia sobre a Análise das PMD
B: *(...) sabemos que foram usadas as ideias do lançamento dos dados e do plano cartesiano. Tais informações não estão contidas nos vídeos, mas acredito que seria importante fazê-lo.*
M2: *(...) Embora as crianças "decoraram" as frases das sequências dos números naturais, mesmo parecendo algo mecanizado, as crianças têm contato com essa parte considerada "complexa" para sua idade e, aos poucos, começam a assimilar o que elas estão falando.*
N: *Nota-se que o conhecimento prévio da criança foi trabalhado, pois as crianças ao explorarem a forma triangular que estava em mãos compararam a objetos que já conheciam (chapéu, escada). Houve uma interação da nova informação com o conhecimento prévio que possuíam.*
M1: *Em todos os vídeos foi possível identificar a disposição das crianças para aprender (...). Nos vídeos algumas crianças não conseguiram reproduzir manualmente os sinais matemáticos e também não conseguiram reproduzir em parlavras os termos corretos que o professor ensinou.*
G: *(...) Penso que nenhum aspecto descaracteriza a aprendizagem significativa nas PMD.*
C2: *(...) Faltou a parte do gráfico e de jogar os dados, mas o conteúdo do vídeo foi decidido pelos estudantes o que atribuiu significação ao conteúdo e participação ativa dos alunos como vemos na aprendizagem significativa.*

J1: *Não. Pelo que entendi da teoria de Ausubel não houve aprendizagem significativa. No decorrer da atividade, houve significado lógico (...). Mas faltou significado psicológico: por que tal atividade seria interessante para a criança? Pela música? Será que a música é suficiente para fazer com que a atividade tenha significado psicológico para aprender segundo a teoria de Ausubel, que envolve solução de problemas, criatividade e pensamento, (...)?*
H1: *Os aspectos que caracterizam a aprendizagem significativa nas PMD são o fator surpresa ou a descoberta no aprender, a relação de conceitos (soma e multiplicação), figura geométrica e a integração dessas ideias.*
A1: *Podemos observar que há por parte dos alunos a disposição para aprender, o elemento da integração, aprendizagem por descoberta e a relação de conceitos novos com conhecimentos prévios (...).*
T1: *As ideias utilizadas foram os espaços em branco, isto é, "quanto falta para completar 10?". Acredito que houve aprendizagem significativa na forma com a qual o conteúdo foi transmitido, ou melhor, construído pelas crianças juntamente com o professor. A utilização do material interessante, a filmagem, a música, são elementos psicologicamente relevantes, capazes de marcar a aprendizagem, que será lembrada com carinho e alegria no futuro. Os conceitos (material; soma; multiplicação) estão bem relacionados entre si, e no nível do conhecimento dos alunos, provocando elos entre termos familiares e conhecimento aprendido. Também observamos a percepção verbal através da repetição. Acredito que os espaços em branco (___ + ___ = 10) são uma boa ideia para iniciar a atividade antes de partir para o material colorido.*
L1: *(...) As PMD demonstram muito bem as ideias da aprendizagem significativa, considerando que foi uma amostra dos resultados, não possibilitando a visualização do processo dessa aprendizagem que deve ter sido realmente interessante.*
H2: *(...) Há também a surpresa e a descoberta que as crianças fazem ao se deparar com um objeto que as ajudam a somar e multiplicar. Portanto, há muito sobre a disposição dos alunos para aprender, há conteúdos significativos, aprendizado por descoberta e reflexão.*
J2: *(...) A participação ativa das crianças na aquisição do conhecimento matemático é autônoma e facilita a aprendizagem de maneira que não será esquecido a longo prazo. A música é inovadora e entusiasma os alunos na atribuição do conteúdo e na estruturação dos conhecimentos. É uma forma de aprendizagem que as crianças gostam muito (...).*
D: *(...) O que pode ter descaracterizado [a AS] é o fato de a repetição não ter levado o aluno* à r*eflexão que se esperava, o que não significa que ela não promoveu nenhuma aprendizagem.*

Ao analisarmos os discursos dos professores e futuros professores acerca de suas concepções sobre as PMD do ponto de vista da AS, notamos que, no geral, é possível identificar aspectos que caracterizam o desenvolvimento da AS nas PMD. Assim como na análise da atividade *Fazendo 10*, foram destacados os seguintes aspectos: aprendizagem por descoberta (surpresa), relação do novo conteúdo com conhecimentos prévios dos alunos e disposição para aprendizagem. Algumas ressalvas foram apontadas, principalmente com relação ao fato de não haver no vídeo o registro de atividades envolvendo a utilização de dados e a representação gráfica de pares ordenados no plano cartesiano. Esses aspectos, componentes importantes da atividade *Fazendo 10*, foram explorados pelos alunos em atividades prévias a produção das PMD, mas não foram exibidos nos vídeos. Nos próximos cursos sobre a atividade *Fazendo 10* buscaremos explorar esses aspectos na produção das PMD.

Além disso, outro fato que causou inquietações aos praticantes ao analisarem as PMD foi com relação à natureza da fala dos estudantes, a qual pareceu ser "repetitiva" ou "decorada". Na opinião de um dos futuros professores, esse foi um dos principais aspectos que descaracterizou (plenamente) o desenvolvimento da AS nas PMD.

Tais discursos nos levam a discutir dois aspectos mais específicos, que podem nos permitir analisar de modo mais refinado a AS em PMD. Esses aspectos são: (i) tipos de aprendizagem significativa e (ii) tipos de memorização. Embora esses aspectos não tenham sido explorados no artigo de Pelizzari et. al. (2002) e, portanto, não foram explorados pelos participantes da pesquisa, acreditamos que, além dos aspectos já elaborados sobre AS, podemos aprimorar nossas lentes teóricas de modo que possamos vislumbrar diferentes nuances da AS em PMD. Assim, podemos reorganizar reflexivamente nossas atividades futuras de ensino e pesquisa envolvendo a produção de PMD.

Acreditamos que as PMD devam explicitar o desenvolvimento da atividade *Fazendo 10* de maneira global, ou seja, que a audiência possa vislumbrar nas PMD todo o processo de explicação da atividade, incluindo as ações com os dados, o preenchimento dos valores para __ + __ = 10, a elaboração dos pares ordenados, a representação dos pares no plano cartesiano, a surpresa em perceber a formação da representação de uma reta, a exploração de outros valores como __ + __ = 8 e __ + __ = 6 e a elucidação de conjeturas e ideias emergentes ao longo do processo de investigação da atividade.

Além disso, retomaremos com maior intensidade as discussões com relação a imagem pública da Matemática e dos matemáticos, pois essas temáticas são centrais ao escopo geral de nossa pesquisa em andamento. Ou seja, ao mesmo tempo em que buscaremos aprimorar conceitualmente a produção de PMD no sentido de se explicitar claramente o desenvolvimento da atividade matemática investigada e o pensamento matemático coletivo de estudantes-professores-pesquisadores, enfatizaremos a construção de imagens alternativas sobre a Matemática e os matemáticos nas PMD, seja por meio da música, do cinema ou da poesia.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980) existem três tipos de AS: representacional, conceitual e proposicional. A *aprendizagem significativa representacional* diz respeito ao aprender o significado de símbolos particulares, de palavras ou símbolos unitários. *Aprendizagem significativa conceitual* refere-se aos atributos essenciais do conceito que são adquiridos por meio da experiência direta e através de estágios sucessivos de formulação de hipóteses, teste ou generalização. *Aprendizagem significativa proposicional* fundamenta-se na aprendizagem do significado de ideias expressas por grupos de palavras combinadas em sentenças. Especificamente, "a aprendizagem proposicional é também um tipo extremo de (...) aprendizagem por descoberta (ativa)" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 51). A diferença entre aprendizagem proposicional receptiva e aprendizagem proporcional por descoberta reside no seguinte fato: "se o conteúdo principal do material a ser aprendido vai ser apresentado ao aluno ou pode ser descoberto por ele" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 51).

Poderíamos, dessa forma, analisar novamente os dados de pesquisa referente ao processo de produção das PMD e as próprias PMD visando interpretar os diferentes tipos de aprendizagens significativas. Mais ainda, pretendemos aprimorar conceitualmente nosso entendimento sobre a ideia de memorização em AS, explorando uma distinção entre memorização significativa e memorização automática (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980), as quais desempenham diferentes papéis junto aos diferentes tipos de aprendizagens combinadas apresentadas na Figura 2.

Comentários Finais

Neste capítulo apresentamos discussões baseadas em parte de nossas atividades de pesquisa, visando explorar possíveis interlocuções entre Aprendizagem Significativa (AS) e Performance Matemática Digital (PMD). Para isso, aplicamos um questionário junto a um grupo de professores dos anos iniciais e outro grupo de futuros professores (alunos de graduação em Pedagogia). O questionário é composto por três questões. Na primeira os participantes analisaram um artigo sobre AS (PELIZZARI et. al., 2002) e apresentaram aspectos fundamentais que caracterizam a AS de acordo com o texto. Em seguida, com base nos parâmetros criados na primeira questão, os participantes analisaram a atividade matemática *Fazendo 10* (segunda questão) e cinco PMD criadas por estudantes dos anos iniciais sobre a atividade *Fazendo 10* (terceira questão) sob nossa orientação enquanto professores-pesquisadores

Embora o artigo de Pelizzari et. al. (2002) seja uma síntese simplificada sobre a teoria da AS em relação a diversos conceitos apresentados por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), os participantes puderam identificar alguns aspectos-chave que caracterizam a AS como a disposição para aprendizagem, a relação entre novos conhecimentos e conhecimentos prévios dos alunos, a aprendizagem por descoberta, dentre outros. Especificidades conceituais sobre AS não foram exploradas pelos participantes da pesquisa, mas foram apresentadas por nós, autores deste texto.

Além disso, embora a atividade *Fazendo 10* e a produção das PMD não tenham sido originalmente desenvolvidas com base na teoria da AS, o discurso dos professores e futuros professores revelou a existência de aspectos que caracterizam a AS na análise desses materiais educacionais. Por exemplo, a ideia de *descoberta* em AS está diretamente relacionada com a ideia de *surpresa*, *heurística* e *experimentação com tecnologias*, as quais são concepções discutidas em PMD (BORBA; SCUCUGLIA, GADANIDIS, 2014). Em contraste, ressalvas e/ou elementos que descaracterizam a AS foram apresentados pelos participantes na análise das PMD (ver comentários pertinentes do graduando J1).[18]

Consideramos que diversos aspectos essenciais da AS são relevantes no escopo da perspectiva sobre aprendizagem matemática que temos construído no âmbito da pesquisa em PMD. Utilizaremos os discursos dos (futuros) professores e as discussões aqui apresentadas para fomentar nossas futuras atividades didático-pedagógicas e de pesquisa no que se refere à utilização e produção de PMD nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Finalmente, consideramos muito importante que professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental busquem desenvolver a atividade *Fazendo 10* em suas aulas de Matemática e outras atividades baseadas na produção de PMD. Por ser uma ideia recente em Educação Matemática, é fundamental que professores e pesquisadores busquem realizar atividades dessa natureza para que PMD intensifique sua consolidação enquanto linha pesquisa e/ou metodologia didático-pedagógica, a qual fomenta a interdisciplinaridade Matemática-Artes-Tecnologias, promovendo a formação de cenários de aprendizagem que oferecem meios para a aprendizagem, a produção de conhecimentos, a ludicidade educativa, a criatividade, o desenvolvimento de diferentes tipos de inteligências e o prazer em realizar a atividade escolar.

Referências

AUSUBEL D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. 2.ª ed. Rio de Janeiro: Editora Intreramericana Ltda. 1980.

[18]Os comentários são: (1) (...) *por mais interessante que seja, e até acertando que apesar da atividade ser uma só para todos os alunos de uma turma indiscriminadamente, leva-se em conta os conhecimentos prévios dos alunos, essa atividade não leva em conta a realidade na qual o aluno está inserido. Trabalhar com blocos e gráficos é interessante à primeira vista, mas não está relacionado com conhecimentos prévios, nem com a realidade da criança, o que seria responsável por tornar o conteúdo relevante.*

(2) *(...) não houve aprendizagem significativa. No decorrer da atividade, houve significado lógico (...). Mas faltou significado psicológico: por que tal atividade seria interessante a criança? Pela música? Será que a música é suficiente para fazer com que a atividade tenha significado psicológico para aprender segundo a teoria de Ausubel, que envolve solução de problemas, criatividade e pensamento, (...)?*

BICUDO. M.A.V. Pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análises. In BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.** São Paulo: Cortez, p. 53-77, 2011.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de Aula e Internet em Movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

ESCOLA MARIA PEREGRINA. **Projeto Pedagógico Escola Maria Peregrina.** <www.escolamariaperegrina.com.br/escola-projeto-pedagogico> Acesso em maio de 2015.

FAIRCLOUGH, N. **Discurso e mudança social.** Brasília: Editora UNB, 2001.

MARSHAL, M. N. Sampling for qualitative research. **Family practice.** V.13, n. 6, p. 522-525, 1996.

PELIZZARI, A.; KRIEGL, M. D.; BARON, M. P.; FINCK, N. T. L.; DOROCINSKI, S. I. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. **Revista PEC**, v.2, n.1, p. 37-42, 2002.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática.** v. 19, n. 25, p. 105-132. 2006.

SCUCUGLIA, R. **On the nature of students' digital mathematical performance.** 2012. Tese (Doutorado em Educação). University of Western Ontário, London, 2012.

SCUCUGLIA, R. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Boletim de Educação Matemática.** v. 28, p. 950-973, 2014.

SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. Performance Matemática: Tecnologias Digitais e Artes da Escola Pública de Ensino Fundamental. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. S. S. (Org.). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, p. 325–363. 2013.

SCUCUGLIA, R.; RODRIGUES, A. F. B. A produção de performances matemáticas digitais nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: **Anais do VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. No prelo.

SÃO PAULO (Estado). **Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: anos iniciais do Ensino Fundamental – Matemática**. São Paulo: FDE, 2014.

STAKE R. E. Qualitative case studies. In: N. K. Denzin; Y. S. Lincoln (eds.). **The Sage handbook of qualitative research** (3ª. ed.), Thousand Oaks: Sage Publications, pp. 433-466, 2005.

WALSH, M. **Multimodal Literacy: Researching classroom practice.** Australia: Primary English Teaching Association, 2011.

Capítulo 6

Literatura Infantil e Matemática: Possibilidades para Ampliar o Trabalho com os Diferentes Significados das Frações

Angélica da Fontoura Garcia Silva[1]
Ruy Cesar Pietropaolo[2]
Tânia Maria Mendonça Campos[3]

Introdução

Apresentamos neste artigo parte do estudo de uma formação continuada com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, cuja finalidade foi a reflexão sobre as possibilidades de iniciar os processos de ensino e aprendizagem dos números racionais na representação fracionária por meio de situações que envolvessem os significados parte-todo e quociente.

Esse processo formativo, realizado no âmbito do projeto Observatório da Educação[4] do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo, contou com a presença de 18 professoras de escolas públicas da região metropolitana da cidade de São Paulo, além dos três pesquisadores e quatro mestrandos.

Nesse processo, as professoras participantes puderam vivenciar e discutir a utilização de diferentes recursos para o ensino das frações nos anos iniciais, sobretudo a literatura infantil. Além disso, as professoras puderam comparar o desempenho de seus alunos na resolução de algumas situações com resultados de pesquisas já realizadas sobre a aprendizagem do tema.

Para este artigo, analisamos apenas as discussões e reflexões das professoras acerca da introdução da representação da fração por meio da ideia de quociente e a utilização de livro de literatura infantil como material de apoio. Durante a formação coletamos as atividades por elas desenvolvidas e protocolos de seus alunos de modo a analisar as respectivas estratégias para a resolução das atividades propostas. Além disso, transcrevemos os depoimentos das professoras ao longo do processo e também imediatamente após seu final.

Depois de um ano da conclusão do processo formativo, observamos as aulas introdutórias de frações ministradas por três das docentes participantes aos seus novos alunos em que houve a aplicação

[1]Professora do curso de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. angelicafontoura@gmail.com
[2]Professor do curso de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. rpietropaolo@gmail.com
[3]Professora do curso de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. taniammcampos@hotmail.com
[4]Projeto financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

de um conjunto de atividades elaborado durante o decorrer do curso – em especial, as situações relacionadas ao livro infantil.

Para mostrar a relevância da temática escolhida discutimos neste texto a relação entre literatura infantil e Matemática além de questões concernentes às indicações contidas nos currículos oficiais e em pesquisas da área sobre a introdução ao estudo da representação fracionária nos anos iniciais.

A literatura infantil e a Matemática

A contextualização da Matemática não é um tema novo. Entretanto, não é difícil observar que o trabalho com certos conceitos matemáticos continua a ser realizado em muitas salas de aula com foco nos procedimentos, sem uma maior preocupação em desenvolvê-los de forma contextualizada. Afinal, desde o início da escolarização as noções e procedimentos matemáticos são apresentados de uma forma distante da linguagem cotidiana.

Para este estudo pensamos no contexto da literatura para ensinar matemática por acreditar que essa conexão pode ajudar os estudantes a refletir matematicamente sobre um tema. Concordamos com Machado (1991) no que concerne à necessidade de reconhecer a importância da impregnação entre esses dois campos: Língua Materna e Matemática. Segundo esse autor

> entre a Matemática e a Língua Materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerarem-se estes dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo nas funções que desempenham uma complementaridade nas metas que perseguem uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário reconhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino de Matemática (MACHADO, 1991, p. 10).

Acreditamos, igualmente, que a literatura infantil pode ser um elo entre a Matemática e a forma de pensar dos alunos uma vez que crianças, em geral, são criativas e imaginativas. Nesse sentido, a literatura infantil pode aproximá-las de situações que, tratadas ao nível estritamente matemático, estariam muito longe da sua realidade.

Não observamos indicações em documentos oficiais federais para a utilização da literatura infantil como um dos recursos nas aulas de Matemática. Entretanto, consideramos que se trata de material que pode favorecer o que os autores desse documento chamam de “atividade importante”. As orientações contidas nos PCN (BRASIL, 1997) consideram “um aspecto muito peculiar” dos anos iniciais “a forte relação entre a língua materna e a linguagem matemática" (BRASIL, 1997, p.46). Os autores discutem as similaridades entre a aprendizagem dessas duas linguagens:

> Se para a aprendizagem da escrita o suporte natural é a fala, que funciona como um elemento de mediação na passagem do pensamento para a escrita, na aprendizagem da Matemática a expressão oral também desempenha um papel fundamental. Falar sobre Matemática, escrever textos sobre conclusões, comunicar resultados, usando ao mesmo tempo elementos da língua materna e alguns símbolos matemáticos, são atividades importantes para que a linguagem matemática não funcione como um código indecifrável para os alunos. (BRASIL, 1997, p.47)

Frações: orientações oficiais para seu ensino

Documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), indicam como objetivos do ensino de Matemática no segundo ciclo do Ensino Fundamental (3.ª e 4.ª séries): "Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social" (BRASIL, 1997, p. 55) e "resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais" (p. 56). Assim, segundo as orientações apresentadas nesse documento, o estudo dos números racionais deve ter início a partir do 4.º ano do Ensino Fundamental, sempre garantindo que esse trabalho seja feito em situações contextualizadas.

Os PCN propõem que, nesse ciclo, sejam trabalhados os seguintes conteúdos relacionados ao tema "números racionais na representação fracionária":

> • Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário.
> • Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso freqüente.
> • Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
> • Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
> • Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão.
> • Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária.
> • Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional.
> • Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais (BRASIL, 1997, p. 57 -59)

Analisando essas orientações podemos observar que um trabalho com a literatura infantil poderia favorecer de imediato o desenvolvimento do primeiro conteúdo, ou seja, o reconhecimento de números racionais no contexto diário, uma vez que a literatura poderia aproximar ainda mais o contexto escolar do mundo infantil. Quanto aos demais conteúdos prescritos para os anos iniciais, esses poderiam também, a nosso ver, ser compreendidos mais facilmente pelos alunos se o professor problematizasse adequadamente as situações a eles por meio de contextos em que as crianças pudessem dar significado aos conceitos.

Além disso, analisando os conteúdos descritos anteriormente observamos que nessas orientações oficiais há uma preocupação com a compreensão de alguns dos significados do número racional – quociente, parte-todo e razão –, assim como uma ênfase na importância do trabalho com suas representações: fracionária e decimal (p. 54). Neste estudo, reiteramos que analisamos somente dois desses significados, que apresentamos a seguir:

> *A relação parte-todo se apresenta ... quando um todo se divide em partes (equivalentes em quantidade de superfície ou de elementos). A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.*
> *Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro (a : b = a / b com b $\neq$ 0). (BRASIL. 1997, p.68)*

Além das definições, encontramos nesse mesmo documento a discussão acerca da distinção entre esses dois significados. Os autores criaram duas situações que poderiam ser representadas por uma mesma fração: $\frac{2}{3}$. Para diferenciar os dois significados os autores afirmam que na relação parte-todo a "ideia de dividir um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes" não é a mesma situação na qual se pretende "dividir 2 chocolates para 3 pessoas".

Dessa forma, os autores do documento sugerem um trabalho em que aqueles conteúdos abordados, como números naturais, operações, medidas, etc., sejam ampliados de tal forma que os alunos possam estabelecer relações, aperfeiçoar procedimentos e, assim, construir novos conhecimentos. O que se recomenda como forma de abordagem dos números racionais é a exploração de situações-problema que levem os alunos a perceber a insuficiência dos números naturais e a necessidade de criação de outro tipo de números para resolver determinadas situações.

Estas orientações chamam a atenção, também, para alguns obstáculos que as crianças enfrentam quando raciocinam sobre números racionais como se fossem números naturais (BRASIL, 1997, p. 66). Como exemplos de dificuldades relacionadas à representação fracionária, podem ser observados:

> • o aluno pode estar acostumado ao fato de que cada número natural é representado por um único símbolo. Já o número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; Como exemplo, podemos tomar $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{6}{24}$, que são representações diferentes de um mesmo número racional;
> • se ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> • se no conjunto dos números naturais pode-se falar em sucessor e antecessor, no conjunto dos números racionais isso não é possível.

É importante salientar que tais indicações são também observadas em diferentes pesquisas e, durante o processo formativo, nossa reflexão sobre o currículo favoreceu também a discussão sobre tais dificuldades.

Destacamos, finalmente, a importância que os PCN atribuem a uma organização de ensino que propicie aos alunos experiências envolvendo diferentes significados e representações dos números racionais, em uma sequência de trabalho que possa se consolidar em anos posteriores, com a finalidade de ampliar e aprofundar esse conhecimento. Nesse sentido, consideramos que a experiência aqui relatada possa ajudar o professor nessa tarefa.

Reflexões explicitadas durante o processo formativo

Reiteramos que a coleta de dados deste estudo foi realizada tanto no processo formativo, quanto em entrevistas e observações da prática de três das professoras participantes.

Cabe salientar que no início da formação, as professoras participantes, afirmaram trabalhar somente com o significado parte-todo. Tal informação foi confirmada, pois, ao discutirem situações-problema nas quais solicitávamos a indicação da fração representante, as docentes utilizavam, também, apenas esse significado. Dessa forma, durante as sessões de formação procuramos favorecer a reflexão sobre situações de ensino que, trabalhadas em sala de aula, pudessem permitir aos alunos vivências de diferentes significados dos números racionais a partir da representação fracionária. Procuramos apresentar ainda, a pedido do grupo de professores, possibilidades de tratamento metodológico interdisciplinar para o desenvolvimento dos significados selecionados.

Antes de realizar o trabalho com a literatura infantil, discutimos com os professores durante as sessões de formação, apoiados nos estudos de Streefland (1984, 1991) e Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans, Wade (2007), a possibilidade de introduzir frações utilizando o significado quociente (nesse primeiro momento ainda sem utilizar a literatura infantil).

Para esse trabalho, discutimos com as professoras participantes do processo formativo uma sequência de situações-problema elaborada por Nunes et al (2007). Cabe ressaltar que essa sequência foi desenvolvida com o propósito de estimular a discussão de alunos a respeito das relações entre quantidades em situações que envolvem a divisão de modo a favorecer a compreensão do significado de quociente da fração. Além disso, segundo esses autores, a partir dessa compreensão por parte das crianças, o professor poderia ensinar a representação fracionária utilizando o significado quociente.

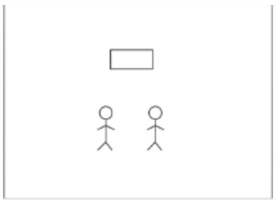
Para aprofundar no processo formativo a discussão sobre o ensino desse significado, solicitou-se às professoras que aplicassem em suas escolas a referida sequência. Os resultados dessa aplicação foram amplamente discutidos nas sessões de formação subsequentes.

No entanto, é importante destacar que neste artigo não apresentamos integralmente nem a sequência, nem as discussões do grupo realizadas após a aplicação das atividades. Optamos por analisar os resultados da aplicação de apenas uma das situações, que fora posteriormente selecionada pelas professoras para compor um conjunto de atividades a serem desenvolvidas pelos seus alunos, após a leitura e discussão do livro de literatura infantil.

Na Figura 1apresentamos a situação como foi elaborada por Nunes et al (2007).

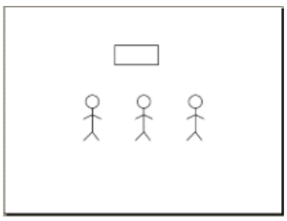
Para desenvolver a sequência proposta por Nunes e colaboradores, partimos de problemas nos quais a finalidade era favorecer a compreensão dos alunos dos anos iniciais a respeito das relações entre quantidades numa situação que envolvia divisão.

Como a sequência apresentada por Nunes *et al* (2007) não é o foco deste artigo e devido ao fato de os professores investigados, em suas aulas, terem utilizado com seus alunos somente a atividade que envolve a representação fracionária, expomos somente essa parte da sequência:



- Vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu.

Um chocolate dividido igualmente para duas crianças. Escrevemos 1 porque é um chocolate, depois fazemos um traço para indicar a divisão, e em baixo escrevemos 2, porque é o número de pessoas recebendo chocolates. Esse número é lido como um meio.



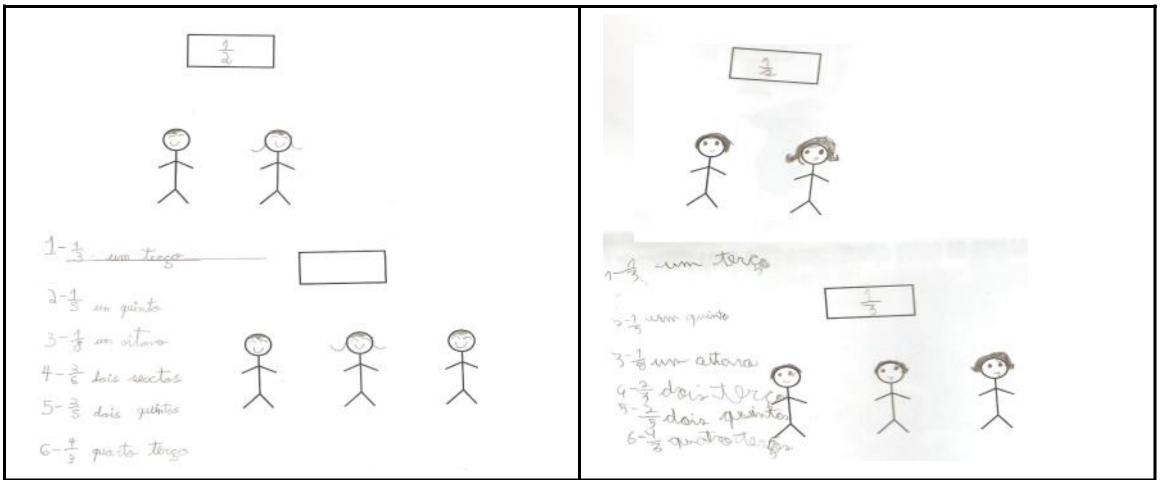
1. **E se o chocolate fosse dividido igualmente para 3 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ___________________**
2. **Se fosse um chocolate dividido igualmente para 4 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ____________________**
3. **Se fosse um chocolate dividido igualmente para 5 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ____________________**

4. **Se fosse um chocolate dividido igualmente para 8 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ___________________**
5. **Se fossem 2 chocolates divididos igualmente para 3 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ____________________**
6. **Se fossem 2 chocolates divididos igualmente para 5 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ____________________**
7. **Se fossem 4 chocolates divididos igualmente para 3 crianças, como vamos escrever com números a quantidade que cada um recebeu? Como vamos dizer esse número? ____________________**

- Esses números são chamados frações. Eles indicam que fizemos uma divisão e quanto cada um vai ganhar nessa divisão.

Figura 1: Situação proposta por Nunes et al (2007) com a finalidade de promover o ensino da representação fracionária a partir da ideia de divisão.

É importante salientar que durante o processo formativo, as professoras participantes aplicaram essa proposta a seus alunos e, segundo suas percepções, afirmaram que naquele momento não haviam "encontrado dificuldades em representar as frações a partir da apresentação dela [referindo-se à representação da fração] por meio do quociente [referindo-se às situações envolvendo o significado quociente ensinadas por ela]" (Professora Orquídea[5]). Observaram ainda que a maioria dos estudantes representou a fração até mesmo sem a repartição, como podemos observar na Figura 2:



Aluno 1- 5º Ano- Professora Dália	Aluno 2- 5º ano- Professora Rosa

Figura3: Representação das frações apresentadas pelo Alunos 3 da Professora Dália

Ao observar o que foi apresentado nesse protocolo, a professora Dália e os demais professores observaram, que apesar do aluno 3 não encontrar dificuldades para representar as frações ditadas, ele não representou a divisão ditada pela professora: "um chocolate dividido igualmente para duas crianças" e sim dois dividido por um. No entanto, realizou corretamente a partição e distribuiu os pedaços para cada criança. Já para representar o "um terço" fez somente a partição e a representação e, nas demais; possivelmente não sentiu mais a necessidade de representar a partição, escrevendo corretamente a fração correspondente a cada uma das situações ditadas. Durante o processo formativo esse fato chamou a atenção da Professora Dália que afirmou:

[5]Utilizamos nomes de flores para todas as professoras a fim de garantir o anonimato das participantes.

> (...) é incrível que, na pressa, muitas vezes a gente não se atém às dificuldades encontradas pelas crianças. Assim que eu retomar isso, quero chamar mais a atenção da sala sobre essa divisão, pois como mais ninguém fez a continha, ou melhor, quase ninguém (risos) eu quero ver se todos entenderam. Vou representar esse caso na lousa e discutir com a sala (Professora Dália).

Durante a análise dos protocolos os professores perceberam, por exemplo, que o aluno 2 foi o único a representar a divisão sugerida na situação. Os professores perceberam que muitos alunos de Dália não sentiram necessidade de representar as repartições, havendo, no entanto, alunos que as representaram em níveis diferentes como podemos observar na Figura 4:

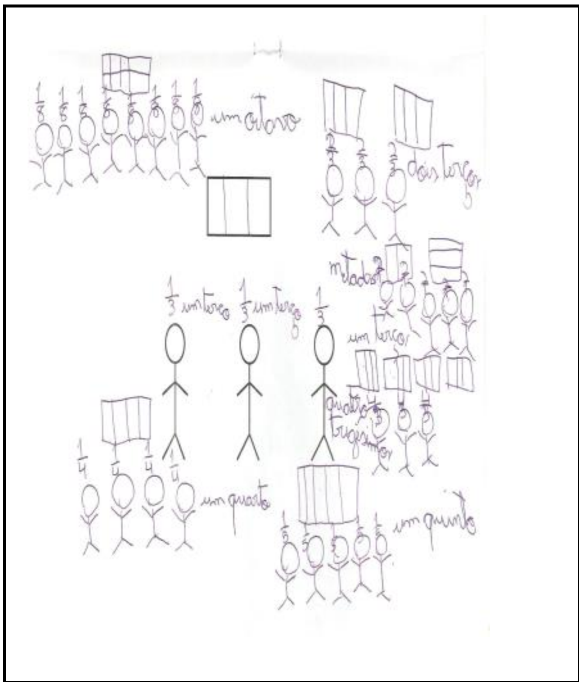
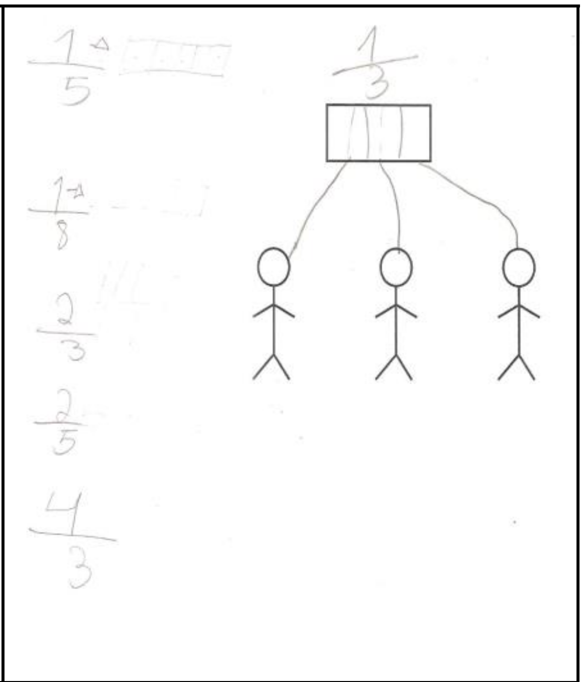
	
Aluno 4- 5º ano- Professora Dália	Aluno 5- 5º ano- Professora Dália

Figura4: Representação das frações apresentadas pelos Alunos 4 e 5 da Professora Dália

Analisando esses protocolos observamos que o Aluno 4 representou grande parte das frações também por figuras; já o aluno 5 representou a partição da fração um terço e um quinto e, depois, não sentiu necessidade de representar do mesmo modo as demais.

A necessidade de um novo olhar para a ideia de partição foi observada também na análise de protocolos da professora Orquídea. Neles a professora verificou que os alunos representaram as frações por meio de figuras e, além disso, o grupo que analisou os protocolos da professora também observou que alguns tinham dificuldades que não foram observadas pela professora durante a correção. Na Figura 5 podemos observar a representação dos alunos 6 e 7 dessa professora:

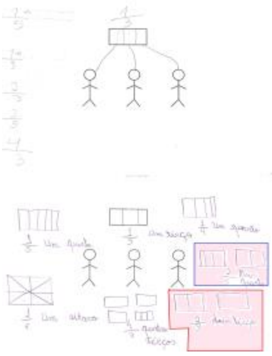
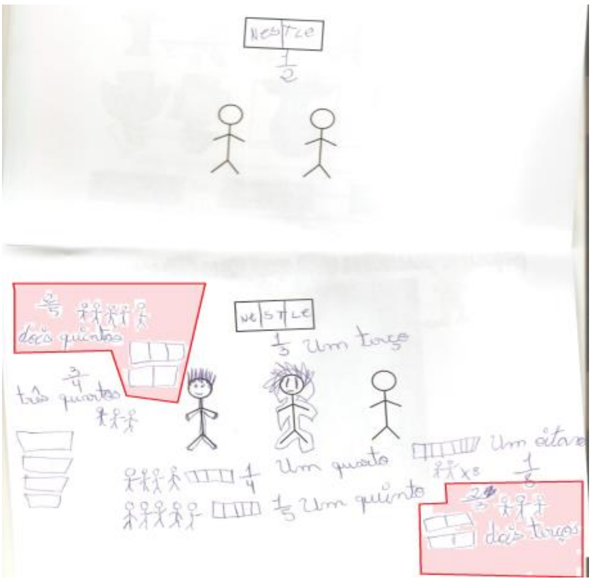
	
Aluno 6 - 5º ano – Profa. Orquídea	Aluno 7- 5º ano- Profa. Orquídea

Figura5: Representação das frações apresentadas pelos Alunos 6 e 7 da Professora Orquídea

Esses dois protocolos apresentados pela professora Orquídea sugerem que, no geral, seus alunos indicaram corretamente a quantidade de chocolates que seria dividida, mas houve certa dificuldade em dividir o inteiro em pedaços de mesma área e na quantidade indicada no denominador: o Aluno 6, por exemplo, ao representar a fração $\frac{2}{5}$ representa dois chocolates divididos em partes distintas, o primeiro em três partes iguais e o segundo em duas. Esse aluno cometeu o mesmo equívoco ao representar $\frac{2}{3}$, representou o primeiro chocolate dividido em duas partes iguais e o segundo chocolate em 1 parte. O mesmo ocorre com o Aluno 7.

Depois de discutir o ocorrido ao aplicar a sequência proposta por Nunes *et al* (2007), o grupo solicitou aos pesquisadores que discutissem outros procedimentos metodológicos que levassem os alunos a usar a partição. Dessa forma, optamos por utilizar o livro de literatura infantil *"O pirulito do pato"* de Nilson José de Machado (2003) conforme a capa apresentada na figura 6 apresentada à seguir:

Figura 6: Capa do livro: *O Pirulito do Pato*

Acreditávamos que o texto do livro favoreceria a contextualização, uma vez que o autor conta a história de dois patinhos que ganham um pirulito da mãe e têm que dividi-lo de formas diferentes à medida que vão chegando seus amiguinhos. Essa escolha também foi justificada por permitir a associação do pedaço do pirulito ao denominador da fração e a compreensão da relação de ordem de frações unitárias. Além disso, poderia favorecer a apresentação da fração com significado quociente na medida em que o professor problematizasse a situação por meio da alteração da quantidade de pirulitos e/ou de patinhos.

Depois de analisar o texto do livro, as professoras perceberam que a leitura realizada pelos alunos lhes permitiria desenvolver noções referentes às frações a partir de situações propostas ao longo da história e que possibilitariam que elas problematizassem cada situação. Essa leitura foi complementada com a reapresentação e dramatizações por grupos de professores. A seguir apresentamos na figura 7 imagens das representações realizadas pelas professoras.

Figura7: Representações da história preparadas pelas professoras durante a sessão de formação

A análise do livro permitiu que as professoras fizessem considerações como as que seguem:

> - O professor pode aproveitar para introduzir a forma como tratamos as frações [referindo-se à introdução da linguagem matemática] que aparecem na história. (Professora Rosa)
> - "Isso", afirmou a pesquisadora e complementou "o que mais?"
> - Podemos introduzir frações como meio, um terço, um sexto. (Professora Margarida)
> - Podemos aproveitar ainda para discutir frações equivalentes, como quantos meios pirulitos é preciso para formar um pirulito inteiro; quantos terços de pirulito é preciso para formar um inteiro, quantos sextos...? (Pesquisadora)

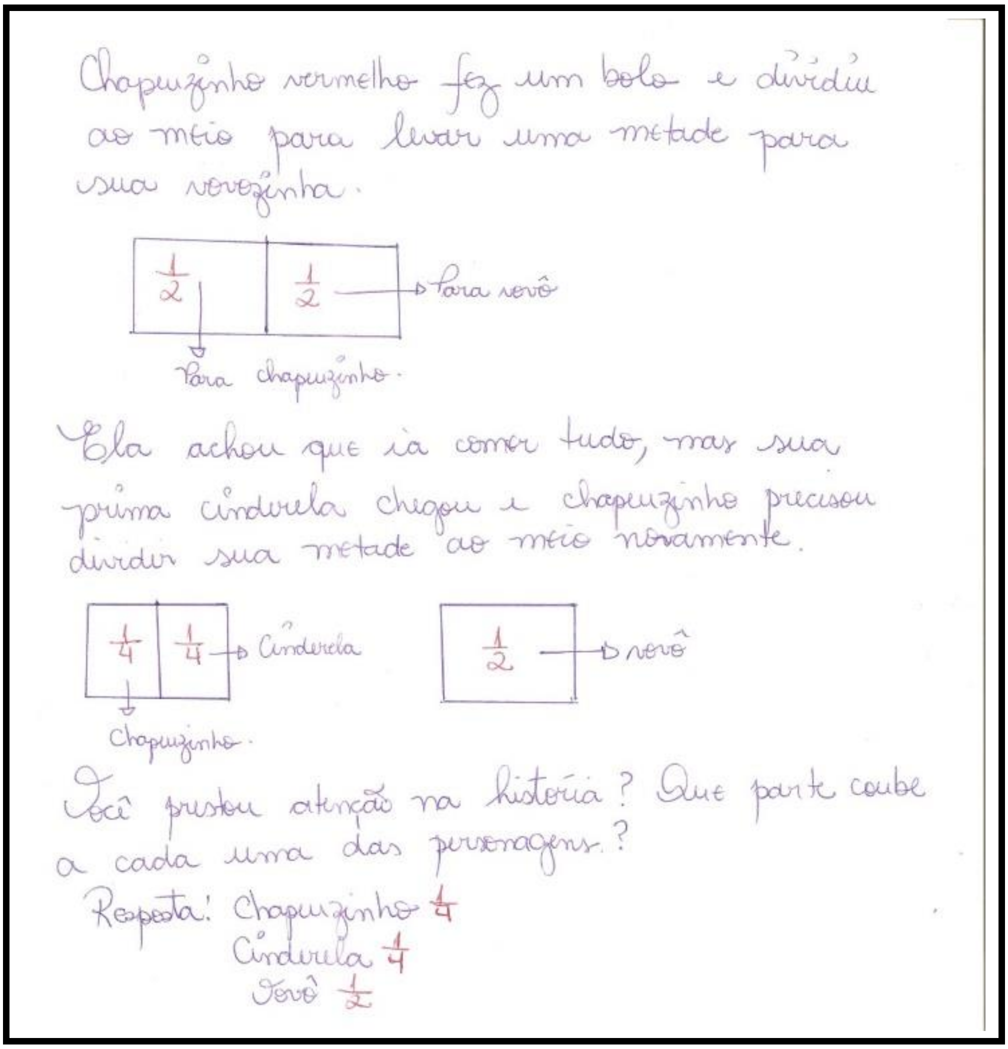
Essa discussão permitiu que retomássemos com o grupo as recomendações dos PCN a respeito de dificuldades enfrentadas por alunos quando precisam compreender que "(...) cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$, são diferentes representações de um mesmo número" (BRASIL, 1997, p.64).

Conforme observou a Professora Cerejeira a respeito das orientações curriculares discutidas em outra sessão de formação,

> - Isso mesmo, mas lembrei de uma coisa que vimos outro dia: o PCN diz que é para priorizarmos frações como meio e quarto, poderíamos reescrever histórias com essas frações. (Professora Cerejeira)

Em razão da observação feita, resolvemos propor que escrevessem outras situações similares à do livro. As professoras participantes do processo formativo reuniram-se em grupos e elaboraram algumas situações. Aqui apresentamos uma das histórias criadas e as discussões que se derivaram dessa criação.

Um dos grupos criou a seguinte história como podemos observar na figura 8:


Chapeuzinho vermelho fez um bolo e dividiu ao meio para levar uma metade para sua vovózinha.

Ela achou que ia comer tudo, mas sua prima cinderela chegou e chapeuzinho precisou dividir sua metade ao meio novamente.

Você prestou atenção na história? Que parte cabe a cada uma das personagens?

Resposta: Chapeuzinho 1/4
Cinderela 1/4
Vovô 1/2

Figura8: História criada por um dos grupos de professoras durante a sessão de formação

Durante a sua apresentação o grupo informou que pensaram no bolo, porque seria mais fácil de desenhar e porque, segundo o grupo, "as crianças enxergam melhor as frações". Ao finalizar a apresentação perguntamos qual seria o propósito do grupo e os professores participantes responderam:

> - Queríamos que as crianças indicassem que fração cada parte representa. (Professora Gardênia)
> - Será que as crianças conseguiriam perceber que a metade da metade é um quarto? (Professora Palma)
> - Eu acho que sim, se não poderíamos fazer com papel e elas perceberiam que cabem quatro partes no todo. (Professora Gardênia)
> - Achei o exemplo interessante, mas gostaria de colocar em discussão o questionamento que vocês fizeram: "que parte coube a cada uma das personagens?", e se uma criança respondesse que a Chapeuzinho e a Cinderela receberam metade da metade, vocês considerariam a resposta certa ou errada? (Pesquisadora)
> - Bem, ela estaria respondendo o que está no problema, não o que nós perguntamos. (Professora Rosa)
> - Mas a criança estaria errada? (Pesquisadora)
> - Eu acho que não estaria, mas nós queríamos que eles olhassem para o bolo todo. (Professora Gardênia)
> - Então, tá. E vocês acham que perguntando que parte coube a cada uma das personagens isso estaria claro? Será que não falta nada? (Pesquisadora)

Esclarecemos que havia necessidade de identificar a unidade de referência na questão. Ou seja, se havia intenção de que o estudante reconstruísse a unidade de referência, seria necessário perguntar que fração de bolo representaria a parte que coube a cada uma das personagens.

Em seguida, procuramos explorar um pouco mais as problematizações que poderiam ser utilizadas quando o professor trabalhasse com o livro *Pirulito do Pato* como, por exemplo, relacionar a parte que coube aos personagens Dino e Zinho com um pirulito inteiro e com meio pirulito.

Para chamar a atenção do grupo para a possibilidade de explorar a compreensão da relação de ordem, retomamos as considerações feitas pelos autores dos PCN, relativas à aprendizagem dos números racionais, que, muitas vezes, supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais. Por exemplo, um dos entraves que devem ser enfrentados em relação à comparação entre números racionais é utilizar nela as relações entre números naturais. Assim, "acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ " (BRASIL, 1997, p. 64).

Propusemos a releitura da história e a observação e registro do que ocorria quando apareciam as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Discutimos a importância de analisar o tamanho do pedaço de pirulito à medida que o denominador aumentava, destacando o papel importante do professor nesse momento, uma vez que é necessário sistematizar as observações dos estudantes.

Além das discussões aqui relatadas, durante a formação também foram analisadas possibilidades de trabalho com os discos de frações, com Tangram e mosaicos, cujos resultados não são apresentados aqui em virtude do espaço destinado à apresentação deste estudo.

O professor relata o seu trabalho em sala de aula

Como mencionamos anteriormente, este artigo apresenta também a análise dos depoimentos de professores dados logo após o término do processo formativo. Inicialmente são explicitadas as reflexões dos professores a respeito de sua prática, que não tivemos oportunidade de observar. São percepções sobre o ocorrido em suas salas após haverem ministrado uma aula sobre frações em que utilizaram, dentre outras estratégias, a Literatura infantil, foco deste estudo.

Para a entrevista, elaboramos uma questão com o objetivo de ouvir a descrição das próprias professoras a respeito de sua prática após a intervenção. Acreditamos ser possível detectar as “teorias defendidas”, expressão que estudos como os de Schön (1983) utilizam quando se referem ao discurso dos sujeitos pesquisados. Pretendíamos ainda observar, nos discursos dos participantes, o que esse autor chama de reflexão sobre a ação (*reflection-on-action*), ou seja, a reconstrução mental da ação para tentar analisá-la retrospectivamente.

Observamos, em todas as respostas, uma descrição de experiências consideradas positivas pelos professores. Um exemplo é o relato feito pela Professora Lírio:

> Foi muito gratificante e prazeroso porque, como já falei, as crianças puderam interagir mais, vendo coisas que aconteciam no dia a dia. [...] que elas já utilizavam fração e não sabiam que estavam lidando com fração quando estavam lidando com pizza. Então, eles puderam trazer para o cotidiano, a compreensão deles foi muito mais fácil. [...] quando eles construíram o livrinho deles, eles reconstruíram. A gente trabalhou o livro: “O *Pirulito do Pato*”, quando fizeram a parte do teatrinho e representaram tudo o que foi visto no livro. Depois eles desenharam então, eles participaram de uma forma muito gostosa. [...] as crianças gostaram muito, participaram, entenderam o que é mais importante. Eles trabalharam com os discos de fração, [...]montaram e tiveram bastante noção do que é 1/4 e do que é 1/8 e que tudo aquilo lá fazia parte de um todo. [...] eu acho que a compreensão deles foi muito melhor e através de tudo isso os resultados foram mais significativos do que antigamente, porque você trabalhava de uma forma que você dava o conteúdo, cobrava ali através de atividades repetitivas e a criança nem sempre entendia, assimilava o que você estava dando. Ele estava fazendo mecanicamente. Agora não, eles entenderam realmente. Então eu achei que isso foi uma parte bem, vamos dizer importante do trabalho porque a criança estava entendendo (Professora Lírio).

Analisando tanto o relato da Professora Lírio como o depoimento dos demais professores, percebemos que a avaliação positiva esteve muito ligada ao encaminhamento metodológico do conteúdo:

> [...] Nós começamos com o livro: lemos, fizemos a dramatização (o teatrinho). Eles adoraram. A partir dali eles já começaram a entender fração. Fizemos na sala com os papéis, depois que já haviam entendido o que é a representação em partes iguais [...] e daí para parte teórica foi muito mais fácil. As perguntas que surgiram, o entendimento deles, foi tão bom que eu nunca havia trabalhado assim: de surgir perguntas, sabe? De haver interesse. Por que 2/8 pode ser 4/16? (Professora Violeta).
>
> Então, primeiro a leitura do livro de literatura. Trabalhamos com dramatização [...]. Então, quando chegou o final, todos já haviam entendido porque todos participaram da dramatização. Trabalhamos também com o papel parte-todo: eles cortaram, fizeram também o pirulito (Professora Amaranto).
>
> Ah! Foi ótimo aquele trabalho lá com o livro de literatura infantil. Não é o único paradidático, é? [...] Eu adorei o Tangram. [...] Aí eu olhei para ele (o aluno) e ele disse: Eu consegui fazer, professora. Num outro que não tem risco, ele disse, consegui fazer esse também. [...] Mas eu gostei, muito de trabalhar com o livro "O *Pirulito do Pato*", com o Tangram. Foi muito bom mesmo (Professor Rosa).

Tais depoimentos parecem valorizar a participação ativa do aluno. A nosso ver, os professores indicaram o uso de materiais manipuláveis como pedagogicamente ricos para as aprendizagens e a literatura como um ótimo contexto, pois puderam observar grande envolvimento das crianças. Quanto à utilização da literatura infantil, há indícios de que os professores encontraram nessa alternativa o que Machado (1991) chama de "essencialidade da impregnação".

Além disso, as professoras, a partir das reflexões feitas durante o processo, indicaram o envolvimento do grupo na busca e troca de informações, conforme pode ser observado nos textos a seguir:

> E com o novo, com o inovador, com as perguntas e o interesse da sala... Eu até chamei uma colega para ver.
>
> – Rosana, vem ver o interesse.
>
> Em seguida a Luisa chamou, por isso que eu disse que houve interação entre a gente porque a Luisa falou:
>
> – Ana Júlia, eles estão perguntando coisas de fração – aí a gente vai repartir, vai mostrar, aí a gente fez a pizza na lousa [...] (Professora Acácia)
>
> [...] Eles viram o livro "O *pirulito do pato*". Eu já havia trabalhado essa folha. Aí, eles diziam: Nossa, é mesmo... acontece isso mesmo, dá isso mesmo. Eu saí para conversar com as meninas sobre o livro, pois eu estava ainda com algumas dúvidas. Aí saí de sala em sala perguntando para todo mundo o que já havia trabalhado. [...] Nós trocamos bastante experiência com relação a isso... (Professora Bromélia).
>
> Nesse ano trabalhei com frações que estava no conteúdo de 4.ª série [5.º ano], e também é a primeira vez que trabalho nessa série [ano]. Com a ajuda dos colegas montamos uma sequência didática e iniciei o trabalho com a utilização do livro "O *pirulito do pato*", depois, algumas atividades do livro didático de Oscar Guelli (Professora Camélia).

Como pudemos observar nos depoimentos aqui apresentados, a colaboração e a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da representação fracionária dos números racionais desempenhou também um papel importante nesta pesquisa.

Notamos o cultivo da reflexão como uma prática social, por meio da qual, segundo Zeichner (1993), "grupos de professores podem apoiar e sustentar o crescimento uns dos outros" (ZEICHNER, 1993, p. 23). Sobre esse tema, o autor complementa:

> A definição de desenvolvimento do professor, como uma atividade que deve ser levada a cabo individualmente, limita muito as possibilidades de crescimento do professor. Uma das consequências deste isolamento dos professores e da pouca atenção dada ao contexto social do ensino no desenvolvimento dos professores é que estes acabam por ver os seus problemas como só seus, sem terem qualquer relação com os dos outros professores ou com a estrutura das escolas e os sistemas educativos (ZEICHNER, 1993, p. 23).

Foi possível perceber ainda durante o desenvolvimento deste estudo o crescimento da disposição manifestada pelos professores de estudar de forma coletiva – o que pode ter uma relação com a troca de experiências observadas durante o processo formativo. Parece-nos haver indícios de que os sujeitos envolvidos demonstraram reconhecer que "o processo de aprender a ensinar se prolonga durante toda a carreira do professor" (ZEICHNER, 1993, p. 17), apontado pelo autor como mais uma característica da reflexão.

Análise da prática pedagógica das professoras: observação in loco

Decorrido um ano do processo formativo, realizamos entrevistas com três docentes que lecionavam em anos diferentes (3º, 4º e 5º ano) em diferentes escolas. Assistimos às aulas que essas professoras haviam preparado para introduzir o ensino de frações em suas classes. Isso nos permitiu perceber contribuições da formação na prática pedagógica dessas docentes, como a opção por introduzir fração por meio da exploração do livro de literatura infantil *"O pirulito do pato"* de autoria de Machado (2003).

Para melhor compreensão do leitor sobre a análise dessa fase da investigação, achamos importante descrever um pouco o que observamos no desenvolvimento dessa atividade.

De maneira geral, as três professoras iniciaram a aula utilizando-se das estratégias utilizadas no processo formativo: após a leitura do livro pelos alunos, retomar a história do livro por meio do *Power Point*. Passado esse primeiro momento, as professoras Áster e Rosmaninho convidaram os alunos a interpretarem a história da divisão do pirulito. Para tanto, ofereceram papel com desenhos representando as partes em que o pirulito havia sido dividido e tesoura para que eles fizessem o recorte das partes de acordo com o contado na história, conforme retratam a figura 9 apresentada a seguir:

Figura9: Imagens vídeo: alunos realizando a atividade sugerida pela professora Aster

Na sequência as professoras continuaram o ensino do tema em questão. Um aspecto nos chamou a atenção: percebemos que as três professoras conseguiram reunir as ideias contidas nos significados parte -todo (esse era o significado trabalhado na história) e quociente. Observemos como isso ocorreu a partir do ensino na descrição a seguir:

> Existe uma coisa que se chama fração. Dá para a gente mostrar essa divisão do pirulito com números agora. A gente fez com papel e agora a gente vai fazer com números. Então olha só: quantos pirulitos tinham? (Professora Aster).

Nesse momento as crianças respondem que havia um pirulito. A professora segue o ensino, fazendo o registro na lousa:

> Um pirulito. Então olha: o número 1 [apontando para o registro que ela fez na lousa] [...] esse tracinho que a prô vai colocar aqui olha, ele significa dividido [apontando mais uma vez para o registro feito na lousa] (Professora Aster).

A professora reinicia a leitura, apontando para os registros contidos na lousa, conforme imagens a seguir:

"Então olha: um pirulito dividido..." (Professora Áster), conforme podemos observar na figura 10 apresentada a seguir.

Figura10: Imagens vídeo: professora *Áster*[6] promovendo o ensino da representação fracioná-

[6]As imagens apresentadas neste artigo foram autorizadas pela professora conforme TCLE.

A professora dá continuidade reforçando a pergunta: "*um pirulito dividido para quantos patinhos?"* (Professora Áster).

Quando as crianças respondem, a professora registra o algarismo dois, concluindo a representação da fração $\frac{1}{2}$. Em seguida, faz a leitura da representação fracionária, como mostra a figura 11:

Figura 11: Imagem vídeo: professora *Aster* promovendo o ensino da representação fracionária.

Feito o registro da primeira quantidade fracionária, a professora segue problematizando, fazendo o registro de novas frações. Vejamos alguns trechos de como ela prosseguiu no ensino:

> *[...] se eu fosse dividir um pirulito para quatro crianças, como que eu iria colocar aqui?* [referindo-se à forma de como fazer o registro da fração] *Eu tenho um pirulito, como que eu mostro aqui em números?[...] Olha um pirulito* [referindo-se ao registro que fez na lousa] *[...] como que é o dividido?* [referindo-se ao registro do traço que indica divisão] (Professora Áster).
> *[...] em cima eu coloco o número de quê? De patinhos ou de pirulito?* [e faz o registro na lousa] *[...] E isso aqui? O quê que é esse traço? O que significa ele? [...] Então é o número de pirulito dividido por...* [referindo-se ao registro da fração $\frac{1}{4}$] (Professora Áster).

Vale ressaltar que a todo instante ela reforça a divisão do pirulito em partes iguais (ideia do parte-todo). Após registrar a representação de diferentes frações, a professora faz a ilustração com desenhos (ideia do parte-todo), como podemos observar na figura 12:

Estratégia de ensino semelhante foi observada nas aulas das professoras Rosmaninho e Magnólia.

A professora Magnólia, por exemplo, durante o ensino, faz alguns questionamentos às crianças: "[...] como é que eu escrevo um inteiro dividido em dois? [...] se for dividido em três? [...] dividido em quatro? [...] divido em cinco? Em seis? Se dividido em sete? E em dez?" (Professora Magnólia).

A Professora Rosmaninho, antes de iniciar o registro das quantidades fracionárias que apareciam na história, fez junto com as crianças o recorte do que representava cada parte (ideia de parte-todo). A figura 12 mostra essa cena.

Figura 12: Imagens vídeo: Alunos realizando atividade sugerida pela ***Professora Rosmaninho***

Em seguida, iniciou o registro e procedeu o ensino: "[...] e como que eu represento aqui? Um pirulito dividido por três? Como é que eu faço? Como é que eu ponho?" [referindo-se à forma de como escrever a representação da fração](Professora Rosmaninho).

As crianças responderam que ela deveria escrever o algarismo um (1) e indicar a divisão com um traço abaixo do algarismo. A professora então questiona: "Ah! Se eu colocar esse risco assim, significa que é dividir?" (Professora Rosmaninho). As crianças confirmam.

A professora inicia o registro na lousa, sempre dialogando com os alunos: "Este um aqui em cima significa que eu tenho um pirulito. Aqui significa o quê? Esse risco. Esse risco significa o quê? [...] Um pirulito dividido por... dois" (Professora Rosmaninho), conforme ilustram a figura 13:

***Figura 13*: Imagem vídeo: *Professora Rosmaninho* realizando o ensino**

A professora dá continuidade ao ensino exemplificando a divisão do pirulito entre as crianças, de modo a fazer a representação de várias frações. Um ponto interessante, observado na aula da Professora Rosmaninho, e que não foi explorado nas aulas das demais professoras, é que ela iniciou o ensino sobre a equivalência entre as quantidades fracionárias, uma vez que durante a construção das representações fracionárias, chamou a atenção dos alunos para a correspondência existente entre as partes que representavam terços e sextos do pirulito de maneira que eles puderam perceber que um terço representa o mesmo que as duas partes de um sexto: "[...] então foi um sexto. Significa que tanto o Mateus como a Sabrina receberam um sexto do pirulito [...] essas duas partes juntas é uma parte dessa? [referindo aos pedaços de sextos e terços]"(Professora Rosmaninho).

Discussão dos resultados

Frente às informações produzidas ao longo da investigação, podemos destacar dois aspectos que consideramos essenciais, confirmando o já descrito anteriormente. O primeiro se refere ao fato de que, antes da formação, as professoras, participantes deste estudo, apresentavam conhecimento limitado sobre os significados das frações, pois trabalhavam apenas o significado parte-todo, desconhecendo outros significados como quociente e razão e utilizando apenas a partição na resolução de qualquer situação. Esses aspectos também são apontados em outras pesquisas como a de Garcia Silva (2007), Monteiro Cervantes (2010), Pinheiro (2014) dentre outras. Percebemos, porém, que ao participar da formação, as docentes superaram, pelo menos em parte, tais dificuldades e ampliaram seus conhecimentos, conforme se expressou uma delas, dizendo que "[...] não compreendia o que significava parte-todo, quociente e razão, pois eu nunca havia aprendido e agora eu percebo claramente o significado de cada um deles." (Professora Rosmaninho).

O segundo aspecto está relacionado à metodologia. Observamos que as limitações do conhecimento do conteúdo também reduziam as possibilidades metodológicas das professoras uma vez que elas abordavam o tema quase que exclusivamente por meio de situações parte-todo e focavam no procedimento de dupla contagem. Após a formação observamos a utilização de diferentes recursos como a literatura infantil, por exemplo, com suporte de materiais manipuláveis. Finalmente, podemos concluir que a mudança de concepção quanto a esses três aspectos refletiu diretamente na mudança da prática pedagógica das docentes investigadas.

Ao analisar o observado nas aulas, pudemos perceber que, de maneira geral, as professoras introduziram a fração por meio de uma situação parte-todo, mas diferentemente do que ocorria antes da participação no processo formativo, acrescentaram à apresentação da representação fracionária o uso da linguagem do significado quociente. Assim, podemos afirmar que houve, para esse grupo de professoras, a preocupação em relacionar os conhecimentos das ideias contidas em um significado e no outro.

Os resultados evidenciados corroboram a base teórica adotada em nosso trabalho de pesquisa. Ou seja, o conhecimento que combina o domínio do conteúdo matemático com a compreensão de questões relacionadas ao ensino de tal conteúdo, neste caso, sobre os diferentes significados da fração e seus invariantes, é fundamental para a eficácia no ensino da Matemática (Ball, Thames e Phelps, 2008; Shulman, 1986).

Podemos afirmar também que alguns conhecimentos como *Conhecimento de Conteúdo e de Ensino* (capacidade de relacionar diferentes significados e elaborar estratégias de intervenção) foram desenvolvidos pelas professoras no decorrer da formação. Acreditamos, porém, que o conhecimento profissional das professoras será ampliado ao longo do tempo à medida que elas, no contexto de outras formações, dialoguem com diferentes experiências vivenciadas "no contexto das escolas em que lecionam e com as turmas que vão encontrando." (SERRAZINA, 2013, p. 79).

As evidências aqui descritas foram percebidas quando analisamos as contribuições da formação reveladas no trabalho desenvolvido pelas professoras em sala de aula, tanto logo após a formação e como um ano após a intervenção. Foi possível perceber *in loco*, analisando as atividades desenvolvidas pelas professoras na prática, que elas relacionaram as ideias presentes nos dois significados da fração que foram abordados durante as sessões de formação: parte-todo e quociente.

A partir da análise da observação dessa atividade, pudemos concluir que o processo formativo, de maneira geral, trouxe contribuições para o desenvolvimento profissional docente dos sujeitos investigados, posto que modificaram sua prática por meio da abordagem do conceito de fração utilizando e estabelecendo relações importantes sobre ideias contidas nos dois significados discutidos na formação. Além disso, as professoras perceberam as potencialidades pedagógicas do uso da literatura infantil em sala de aula.

Agradecimentos:

Não podemos deixar de registrar um agradecimento especial a Capes que, a partir de iniciativas como a do Programa Observatório da Educação, proporcionou a oportunidade de viabilizar este estudo e a elaboração deste artigo por meio do projeto número 19378/2012.

Referências

BALL, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? In: **Journal of Teacher Education**. V. 59, n. 5, 2008, p. 389-407.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

GARCIA SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente**: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. 2007. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 2. ed. São Paulo: Editora Cortez, 1991.

MACHADO, N. J. **O pirulito do pato**. São Paulo: Scipione, 2003.

MONTEIRO CERVANTES, P. B. **Uma formação continuada sobre as frações.** 2010. 86 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P.; PRETZLIK, Ú.; BELL, D.; EVANS, D.; Wf.ADE, J. La compréhension des fractions chez les enfants. In: M. MERRI (Ed.). **Activité humaine et conceptualisation** (p 255-262). Toulouse: Presses Universitaires du Mirail, 2007.

PINHEIRO, M. G. C. **Formação de Professores dos Anos Iniciais:** conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração. 2014. 204 f. (Mestrado em Educação Matemática)– Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

SCHÖN D. A. **The reflective practitioner**: how professionals think in action. London: Temple Smith Read, 1983.

SERRAZINA, M. L. O Programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. **Revista da Investigação às Práticas**, Lisboa, Escola Superior de Educação, CIED, n. 3, v. 2, 2013, p. 75-97.

SHULMAN, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**. American Educational Research Association, 1986, p. 1-24.

STREEFLAND, L. Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards … a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment. **Educational Studies in Mathematics**, 15(4), p. 327-348.1984.

STREEFLAND, L. **Fractions in realistic mathematics education**: a Paradigm of Developmental Research. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers. 1991.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores**: ideias e práticas. Lisboa: EDUCA, 1993.

Capítulo 7

Práticas Interdisciplinares: Opções de Aprendizagem Matemática Significativa

Ana Maria Carneiro Abrahão[1]

Introdução

No século XXI já não é mais modismo, mas reconhecida, a necessidade de se desenvolver, particularmente nos anos iniciais da escolarização, a construção da educação matemática mais crítica e integrada à realidade (BISHOP, 2005 e SKOVSMOSE, 2000). Vários caminhos têm sido escolhidos por docentes ansiosos por dinamizar sua prática pedagógica e, particularmente nos anos iniciais, desenvolver um processo educativo mais significativo ou mais contextualizado. A interdisciplinaridade tem sido uma opção, um caminho e muitas vezes o ponto de partida para o planejamento pedagógico ou institucional. Muitos artigos e trabalhos de pesquisa presentes nas produções acadêmicas e científicas nacionais e internacionais (FAZENDA, 2000 e D´AMBRÓSIO, 2012) sinalizam as dinâmicas formativas pautadas na vivência do trabalho coletivo e interdisciplinar. Um dos 5 eixos do Plano Nacional de Pós-Graduação (2011 -2020) aprovado pela Capes contempla a multi e a interdisciplinaridade como importantes temas da pesquisa (BRASIL, 2015).

Seguindo a tendência proposicional de desenvolvimento de uma sólida formação teórica e prática dos profissionais por meio de um currículo integrado e interdisciplinar, os documentos oficiais que orientam as práticas docentes explicitamente recomendam "a docência como ação educativa e como processo pedagógico intencional e metódico, envolvendo conhecimentos específicos, interdisciplinares e pedagógicos" (BRASIL, 2015, p.22). O Parecer CNE/CP no. 2/2015, que trata das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica, menciona inúmeras vezes as palavras "interdisciplinaridade" e 'interdisciplinar", destacando que a melhoria da formação de profissionais do magistério consiste na garantia das práxis como expressão da articulação entre teoria e prática e na integração da interdisciplinaridade curricular.

> A base comum nacional (LDB), definida no documento da Conae 2010, deve voltar-se para a garantia de uma concepção de formação pautada tanto pelo desenvolvimento de sólida formação teórica e interdisciplinar em educação de crianças, adolescentes, jovens e adultos(as) e nas áreas específicas de conhecimento científico (BRASIL, 2015, p.7) [...] Visando garantir diretrizes nacionais articuladas à trajetória das instituições formadoras, define-se que os cursos de formação inicial, respeitadas a diversidade nacional e a autonomia pedagógica das instituições, constituir-se-ão dos seguintes núcleos: I - núcleo de estudos de formação geral, das áreas específicas e

[1]Professora da Graduação em Ensino de Matemática, Departamento de Didática, Pedagogia, CCH, UNIRIO, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – EDMAT. anaabrahao@edmat.com.br

> interdisciplinares, e do campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais (BRASIL, 2015, p.27) [...] considerando a docência como ação educativa e como processo pedagógico intencional e metódico, envolvendo conhecimentos específicos, interdisciplinares e pedagógicos. (BRASIL, 2015, p.38)

Mas, qual o entendimento que se tem de interdisciplinaridade e de um trabalho interdisciplinar que garanta a aprendizagem matemática? Abordagens interdisciplinares podem ajudar os professores dos anos iniciais e da Educação Infantil a estudar e a ensinar matemática de forma significativa?

Pensando nessas questões é que selecionamos apresentar caminhos de reflexão sobre a interdisciplinaridade, a educação e algumas possibilidades de desenvolvimento de formação matemática significativa de pedagogos. Para isso, destacamos quatro propostas que aconteceram nesse contexto no curso de Pedagogia da UNIRIO, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, entre 2013 e 2015. Após apresentar um olhar sobre a interdisciplinaridade na educação brasileira atual, vamos relatar duas experiências vivenciadas em turmas do curso de Pedagogia que tem como foco a formação de futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil. Essas experiências serviram, até certo ponto, de base para o desenvolvimento de duas pesquisas de Trabalho de Conclusão de Curso que serão relatadas em seguida e nos dão subsídios para a conclusão desse texto.

A educação matemática e a interdisciplinaridade

O termo 'interdisciplinaridade' surgiu na França e na Itália em meados do Século XX. Chega ao Brasil por Georges Gusdorf ao final da década de 60 e influencia o pensamento de muitos educadores, entre eles Ivani Fazenda e Hilton Japiassu. Desde então, passa a influenciar na elaboração de leis que regem a educação brasileira, tais como: a Lei de Diretrizes e Bases (LDB - Lei nº 9394/96), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica e o Plano Nacional de Livro Didático (PNLD).

> Com o objetivo de favorecer a atribuição de significados aos conteúdos matemáticos, dois princípios têm assumido particular destaque no ensino atual: o da contextualização e o da interdisciplinaridade. O primeiro deles estabelece a necessidade de o ensino da Matemática estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, enquanto o segundo defende um ensino aberto para as inter-relações entre a Matemática e as outras áreas do saber científico ou tecnológico. No entanto, não se pode esquecer que as conexões internas entre os conteúdos matemáticos são, também, formas de atribuir significados a esses conteúdos. Noutros termos, atividades de articulação entre conceitos e procedimentos no interior da própria Matemática são também indispensáveis. (BRASIL, 2015a, p.17-18)

Buscando definir interdisciplinaridade surgiram nomeações como pluri, multi, inter e transdisciplinaridade, que foram se caracterizando ao longo do tempo e de acordo com as diferentes abordagens pedagógicas, pelo nível de coordenação e cooperação entre as disciplinas. Entretanto, parece não haver definição ou definições que contemplem a riqueza do trabalho interdisciplinar.

> “tudo parece estar ainda em construção e qualquer demanda por uma definição unívoca e definitiva deve ser a princípio rejeitada, por tratar-se de proposta que inevitavelmente está sendo construída a partir das culturas disciplinares existentes e porque encontrar o limite objetivo de sua abrangência conceitual significa concebê-la numa óptica também disciplinar.” (THIESEN, 2008, p.5)

Apesar de todas essas terminologias, para cada estudo cabe definições e interpretações diversas. Depende das possibilidades de articulações entre os especialistas ou entre as disciplinas, mas sempre na busca de respostas e do conhecimento mais holístico. A supressão do monólogo e consequente instauração do diálogo podem eliminar as barreiras entre as disciplinas; “disciplinas dialogam quando as pessoas se dispõem a isso” (FAZENDA, 2003, p.50). Para Japiassu (1976) e D´Ambrosio (2007) a interdisciplinaridade surge contra um saber “engaiolado” por métodos e resultados bem definidos e rigorosamente organizados para lidar com questões bem específicas, um saber fragmentado e pulverizado numa multiplicidade crescente de especialidades, em que cada uma se fecha como que para fugir ao verdadeiro conhecimento.

> Ao longo da história humana a “disciplinarização” dos conhecimentos tem produzido especialistas, que mergulhados no seu recorte de realidade, extraem conhecimentos cada vez mais extensos sobre um aspecto cada vez mais restrito dessa mesma realidade, fazendo com que cada ciência em particular, ao mesmo tempo em que avança nas suas especificidades, também apresenta limitações em suas possibilidades de estabelecer uma visão mais totalizadora da realidade cognoscível. Desse modo, a interdisciplinaridade é uma exigência natural e interna das ciências no sentido de uma melhor compreensão da realidade que elas nos fazem conhecer. Impõe-se tanto à formação do homem quanto às necessidades de ação (FAZENDA, 2003, p.43).

Não se pretende defender que a especificidade deve ser abandonada, pelo contrário, precisa ser garantida paralelamente à sua integração no todo harmonioso e significativo, no saber reorganizado. Thiesen discute como a interdisciplinaridade surge como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem:

> Sobretudo pela influência dos trabalhos de grandes pensadores modernos como Galileu, Bacon, Descartes, Newton, Darwin e outros, as ciências foram sendo divididas e, por isso, especializando-se. Organizadas, de modo geral, sob a influência das correntes de pensamento naturalista e mecanicista, buscavam, já a partir da Renascença, construir uma concepção mais científica de mundo. A interdisciplinaridade, como um movimento contemporâneo que emerge na perspectiva da dialogicidade e da integração das ciências e do conhecimento, vem buscando romper com o caráter de hiperespecialização e com a fragmentação dos saberes. (Thiesen, 2008, p.4)

Sob a concepção da abordagem interdisciplinar de Fazenda (1999), o conhecimento interdisciplinar não finaliza na sala de aula, mas ultrapassa os limites do saber escolar e se fortalece na medida em que ganha amplitude e significação na vida social. “A interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ao contrário, mantém sua individualidade” (BRASIL, 1997, p. 89). “O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com os outros conhecimentos” (BRASIL, 1997, p. 88). Machado (1993) traz algumas reflexões que merecem destaque nesse texto.

> Quando nós, professores, fazemos o planejamento semestral do que vamos trabalhar em uma determinada disciplina, é bastante provável que desenvolvamos um trabalho linear, mesmo que façamos interligações com outras disciplinas do curso. Isso é quase uma regra para os planejamentos das disciplinas matemáticas, principalmente porque há uma interpretação de que muitos conteúdos precisam de precedentes, de pré-requisitos e isso geraria uma obrigatoriedade de currículo linear. Na verdade, é necessário refletir com mais vagar sobre tais ordenações, examinando criticamente sua contingência ou seu caráter necessário, que parece estar restrito a situações não muito numerosas, nem de longe justificando a rigidez das seriações e das retenções que são juradas em seu nome. (MACHADO, 1993, p. 30)

Japiassu (1976) destaca ainda:

> [...] do ponto de vista integrador, a interdisciplinaridade requer equilíbrio entre amplitude, profundidade e síntese. A amplitude assegura uma larga base de conhecimento e informação. A profundidade assegura o requisito disciplinar e/ou conhecimento e informação interdisciplinar para a tarefa a ser executada. A síntese assegura o processo integrador. (p. 65-66)

Trazendo à reflexão Machado (1993), a Matemática é uma disciplina que tem sido marcada pela organização formal dos conteúdos curriculares, obedecendo a uma ordem necessária para a apresentação dos assuntos e sugerindo que a ruptura da cadeia sequencial de apresentação de conteúdos seria fatal para a aprendizagem. Em combinação com a teoria construtivista e psicogenética de Jean Piaget, a não-abordagem de um tema A impossibilitaria o tratamento do tema B, retendo-se o aluno no ponto A.

> Essa nos parece ser a chave para a emergência, na escola ou na pesquisa, de um trabalho verdadeiramente interdisciplinar: a ideia de que conhecer é cada vez mais conhecer o significado, de que o significado de A se constrói através de múltiplas relações que podem ser estabelecidas entre A e B, C, D, E, X, T, G, K, W, etc. estejam ou não as fontes de relações no âmbito da disciplina que se estuda. Insistimos: não se pode pretender conhecer A para, então, poder-se conhecer B, ou C, ou X, ou Z, mas o conhecimento de A, a construção do significado de A, faz-se a partir das relações que podem ser estabelecidas entre A e B, C, X, G, ... e o resto do mundo. (MACHADO, 1993, p.31)

A pedagogia e a interdisciplinaridade

Embora a matriz curricular persista como instrumento de organização e de controle conforme afirmam Lopes e Macedo (2002) e Freudenthal (1991), o trabalho polivalente do professor dos anos iniciais e da Educação Infantil favorece práticas interdisciplinares que possibilitam a interação com a realidade e a inversão da prática baseada na transmissão de conteúdos para a prática onde a busca por questionamentos é constante. Conforme destacado por Fazenda (2000), D`Ambrósio (2012) e Thiesen (2008), vimos que é quase impossível encontrar uma definição de interdisciplinaridade, assim como explicar métodos possíveis para desenvolver ações interdisciplinares. Entretanto, se queremos construir ações pedagógicas na matemática escolar que vão além das disciplinares e que não gerem empobrecimento do conhecimento escolar, nem pobreza teórica ou conceitual, sugere Fazenda (2012) que façamos uma profunda imersão nos conceitos do currículo escolar e da didática. A interdisciplinaridade requer a conjugação e a interação de diferentes saberes disciplinares - saberes da experiência, saberes didáticos, metodológicos e saberes teóricos, mesmo que direta ou indiretamente, de acordo com Machado (1993), permaneça no centro das atenções a ideia de disciplina.

Ao colocarmos foco nas ações interdisciplinares no curso de Pedagogia, é mister pensar que a organização da formação curricular pela constituição de disciplinas que se estruturam de modo relativamente independente e com um mínimo de interação intencional e institucionalizada se torna um problema na formação dos pedagogos. Isso porque o professor dos anos iniciais vivencia cotidianamente a necessidade pedagógica de trabalhar com as variadas disciplinas escolares de forma integrada e precisaria de práticas que o pudessem ajudar na sua ação polivalente junto aos anos iniciais e à Educação Infantil.

As sugestões de propostas que aqui apresentamos desafiaram professores formadores e pedagogos em formação a articularem a matemática a diferentes disciplinas ou a contextos variados, relacionando-as às práticas escolares em busca de uma aprendizagem significativa. Com esse tema, esperamos estar oferecendo ao leitor opções para desenvolver seu processo pedagógico de criação e estabelecer um repertório de ações interligadas para sua atuação docente.

Os trabalhos que trazemos têm como pano de fundo o estudo de conceitos de geometria. Esse campo foi selecionado por várias razões. Uma delas porque pesquisas têm apontado e temos constatado ao longo de nosso magistério que esse conteúdo tem sido pouco explorado no cotidiano da sala de aula tanto nos cursos de formação de professores quanto nos anos iniciais. Mesmo com as novas edições de livros didáticos aprovados pelo PNLD, há pouca articulação dos conteúdos de Espaço e Forma com os demais campos da Matemática e a geometria ainda é negligenciada nas instituições de formação.

> [...] escassez de atividades relacionadas à área de geometria verificada em nossa formação acadêmica, mais especificamente nas aulas das disciplinas de metodologia de Ensino da Matemática I e II e nas observações feitas nas escolas, através da disciplina de Pesquisa e Prática Pedagógica do curso de Pedagogia, da Universidade Federal de Pernambuco. Durante o nosso curso, percebemos a pouca atenção dispensada a essa área [...] (BRITO, E. C. P M., SANTOS, L. F., GUIMARÃES, G., 2007)

Outra razão é por conta das inúmeras possibilidades de articulação interdisciplinar que esse conteúdo curricular favorece. A geometria pode ser observada analisando objetos de decoração, utensílios, cerâmicas, cestarias, enfeites, a pintura corporal dos povos de diversas culturas, os movimentos dos corpos celestes, a arquitetura, pinturas, esculturas, tapetes, mosaicos, vitrais e, principalmente a natureza. Pode ser articulada com História, Ciências, Artes, Educação Física e pode contemplar diferentes componentes curriculares.

Para Freudenthal (1991), a geometria é uma das melhores oportunidades para aprender como matematizar a realidade, visto que as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Perceber as diferenças, similaridades e as propriedades dos objetos geométricos por meio de contextos e ambientes específicos podem ajudar no desenvolvimento da linguagem geométrica, a recriar a nomeação dos objetos geométricos e a aprender a matematizar o mundo.

> Verbalização impulsiona abstração. Mas abstração começa mais cedo, tão cedo quanto a linguagem, ou até mais cedo. [...] no mundo de hoje há uma necessidade de termos topográficos tipo encima e embaixo, esquerda e direita, dentro e fora. Ideias geométricas, entretanto, têm sido formalmente e intuitivamente sugeridas com uma força visual e palpável que atrasa, se não impede, sua verbalização. [...] Abstrações geométricas dependem de contextos geométricos. (FREUDENTHAL, 1991, p.65)

Segundo Fonseca (2009, p.46) “É no exercício de observação das formas geométricas que constituem o espaço, e na descrição e comparação de suas diferenças, que as crianças vão construindo uma imagem mental, o que lhes possibilitará pensar no objeto na sua ausência”. Freudenthal (1991), Pires, Curi e Campos (2000), entre outros, defendem que os conceitos geométricos devem acontecer mediante atividades que envolvam observação, análise e comparação de diferentes atributos presentes em diferentes objetos geométricos. Complementando, o PNLD traz que

> O pensamento geométrico surge da interação espacial com os objetos e com os movimentos no mundo natural e desenvolve-se por meio das competências de localização, de visualização, de representação e de construção de figuras geométricas. A geometria tem um papel importante para a leitura do mundo, em especial, para a compreensão do espaço que nos circunda. Mas não se pode restringir a sua abordagem ao uso social e é preciso cuidar de construir, de modo gradual, com o aluno, o conhecimento das propriedades das figuras geométricas e da organização lógica dessas propriedades. (BRASIL, 2015a, p.16)

A geometria, a pedagogia e práticas interdisciplinares

Os trabalhos aqui apresentados são resultado de estudos e pesquisas realizados com e por pedagogos em formação, alguns já professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil. São experiências de caráter interdisciplinar vividas no âmbito da universidade e/ou dentro das escolas, utilizando recursos disponíveis nas instituições ou criados pelos estudantes. Vamos refletir sobre possibilidades encontradas para adaptar a prática pedagógica à dinâmica interna da escola e desenvolver conceitos geométricos de forma significativa, contextualizada e articulada a outros componentes curriculares.

1ª. Proposta: A criação de livros paradidáticos por pedagogos em formação

Esse trabalho apresentou dois grandes desafios. Para os docentes formadores o desafio foi proporcionar momentos onde os estudantes do curso de Pedagogia pudessem vivenciar aprendizagem matemática em contextos interdisciplinares. Para os estudantes o desafio foi estudar as formas geométricas em matemática, relacioná-las com ciências e produzir artesanalmente livros paradidáticos de caráter interdisciplinar, envolvendo quatro áreas do conhecimento: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências e Artes.

A partir de uma disciplina optativa oferecida no curso de Pedagogia os quatro professores planejaram e ministraram, juntos, todas as aulas. A geometria da natureza, a geometria criada pelo homem, as diversas cores, os desenhos, as diferentes interpretações e representações dos seres vivos e de suas formas foram estudadas, trabalhadas e cada história criada narrada em forma de um livro. Seguindo o pensamento de Barthes (1988, p.99): “A interdisciplinaridade consiste em criar um objeto novo que não pertença a ninguém. O texto é, creio eu, um desses objetos”. Ao criar o texto, no caso o livro paradidático, um objeto novo, os estudantes foram além da concepção disciplinar.

O trabalho desenvolvido nesse projeto não teve um caráter linear, muito pelo contrário. As atividades que antecederam a confecção dos livros ajudaram na formação individual e coletiva. Os estudantes tiveram uma oficina com um escritor, fizeram um percurso por uma trilha observando a geometria da natureza, estudaram conteúdos de geometria plana e espacial, conceitos básicos de artes e tópicos fundamentais para produção de diferentes tipos de narrativas textuais. A seguir, comentários de algumas produções.

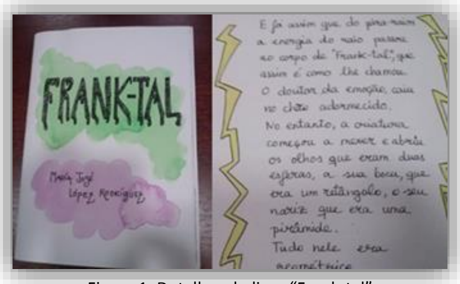


Figura 1: Detalhes do livro “Frank-tal”
Fonte: Arquivo pessoal

Com base nos conceitos de figuras tridimensionais e figuras planas, Maria José criou a história de “Frank-tal" (Figura 1), uma criatura composta de figuras geométricas tridimensionais, mas cujos sentimentos eram convertidos em representações geométricas planas. As figuras tridimensionais, palpáveis e presentes no corpo real do monstro se diferenciavam das figuras bidimensionais, que surgiam no mundo imaginário, como era o caso da sequência de quadrados inscritos que surgiam e brilhavam quando a amiga do monstro sorria e caminhavam em tamanhos decrescentes até alcançar o coração de Frank-tal.

Safira, Vânia e Renata criaram o livro de título “Árvore quadrada” (Figura 2). Como podia uma árvore ter esse nome, se uma árvore nunca pode ser quadrada, já que ela é tridimensional? O livro incluía o estudo de diferentes cilindros analisando os troncos de inúmeras árvores e discutia sobre as diferenças entre cilindros e prismas. Na verdade, o tronco da árvore lembrava mais um paralelepípedo e olhando de longe, uma face lembrava um retângulo não quadrado.

Figura 2: Detalhes do livro “Árvore Quadrada”
Fonte: Arquivo pessoal

Fatima e Rejane optaram por um livro de charadas em forma de versos que orientava o olhar do leitor para as possibilidades de representação de animais utilizando o Tangram (Figura 3). Durante o estudo, aprimoraram seus entendimentos dos nomes dos polígonos, suas semelhanças e diferenças. Na construção do Tangram exploraram os conceitos de diagonal, vértice, ângulos, paralelismo e perpendicularismo. Apesar de terem vivenciado um progresso conceitual e de nomenclatura da geometria, a narrativa textual do livro construído privilegiava versos e rimas da língua portuguesa. O trabalho com os polígonos ficava evidenciado na composição e montagem de figuras de animais utilizando as peças do Tangram. O livro podia ser montado de forma a lembrar um prisma de base triangular.

Figura 3: Composição de imagens do livro "Quem está faltando na fazenda?".
Fonte: Arquivo pessoal

Joana Joaninha foi o livro criado por Ana e Luciana. Contava a história de Maria uma menina que morava na cidade e tinha ido passar as férias escolares no sítio da vovó. Lá ela conhece uma joaninha que lhe ensina muita geometria. A discussão de simetria da natureza e da simetria matemática é um conceito abordado no período de confecção desse livro. Na primeira página há um prefácio incluindo o conteúdo matemático explorado no livro e ao final um plano de atividades, incluindo um jogo de trilha para ser jogado pelos alunos (Figura 4).

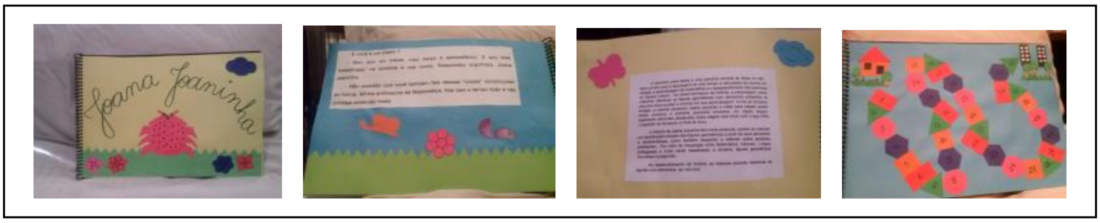


Figura 4: Detalhes do livro "Joana Joaninha"
Fonte: Arquivo pessoal

O grupo de Simone criou o livro "Abacaxi, o rei da feira?", que explorava as diferentes formas geométricas das frutas e legumes, com destaque especial para as formas hexagonais do abacaxi, mas não deixando de comentar as inúmeras frutas esféricas e as características físicas e nutritivas dos alimentos (Figura 5). As reflexões geométricas se voltaram sobre o rigor da geometria construída pelo homem e as ideias e sugestões geométricas presentes na natureza. Assim, o morango, apesar da sua linda aparência, não teria forma piramidal, porque suas formas são arredondadas e não tem faces e nem arestas. A ideia da estrela que surge ao cortar a carambola levou à discussão sobre os pentagramas e os polígonos estrelares regulares.

Figura 5: Detalhes do livro “Abacaxi, o Rei da Feira”
Fonte: Arquivo pessoal

Essas são algumas das criações dos pedagogos em formação. A produção final dos paradidáticos revelou as suas capacidades de criatividade e de articulação entre diferentes componentes curriculares ao ter por objetivo e desafio explorar o tema formas geométricas. Tal prática interdisciplinar evidenciou que a formação de um conceito é feita por meio de uma rede de significados. Assim, por exemplo, puderam observar a forma esférica de frutos presentes na natureza e perceber que a perfeição da esfera é uma criação matemática. Mais do que isso, a representação naturalista dos frutos esféricos e a representação idealista da esfera matemática, ainda se complementariam com a representação expressionista, lúdica, da forma esférica que tem olhos, que fala e que está presente em livros infantis. A interdisciplinaridade permitiu que os estudantes percebessem os significados matemáticos dos conceitos geométricos e como eles se distinguem das interpretações cotidianas.

Por meio de atividades apropriadas e adaptadas ao nível dos pedagogos em formação, criou-se um contexto acessível, interessante e estimulante. Entretanto, como sugere Bishop (1999, p.137), a atenção processual não estava no entorno, nem nos materiais e nem nos livros em produção, mas nos conceitos naturais, matemáticos e lúdicos empregados para explicar o entorno. É nessa abordagem interdisciplinar que se constituiu a aprendizagem matemática significativa inserida na constituição da aprendizagem ampla e holística do conhecimento.

2ª. Proposta: Visitas às exposições

Após uma visita ao Centro Cultural Banco do Brasil para ver a exposição de Wassily Kandinsky, *Tudo começa num ponto,* grupos de estudantes da Pedagogia criaram planos de aula com atividades matemáticas que poderiam ser desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e na Educação Infantil. Gabriela, Luiza e Renata fizeram um trabalho para que os alunos percebessem a diferença entre figuras planas e tridimensionais, relacionando o concreto do cotidiano com o abstrato da pintura. A atividade foi dividida em duas partes, a primeira foi realizada com alunos da Educação Infantil do ISERJ, Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro, e a segunda aconteceu com alunos do PIBID/Ensino Fundamental, 4º ano da Escola Francisco Alves. Nas duas práticas as estudantes iniciaram a conversa sobre o que é arte e mostraram alguns objetos do cotidiano dos alunos com formas geométricas. Em seguida, as estudantes apresentaram para as duas turmas algumas obras de Kandisnky (Figura 6), a fim de serem identificadas figuras em forma de círculos, quadrados, retângulos e triângulos ou outras formas geométricas que eles conhecessem.

Figura 6: Fotos de obras de Kandinsky
Fonte: Sites variados da internet

Depois dessa conversa inicial, propuseram para as crianças a criação de uma obra de arte da turma, "Circularidade", para expor na escola, inspirando outros alunos a fazerem o mesmo. A proposta de inspiração para os dois grupos de estudo foi a obra "Círculos" de Kandisky (1942) que pode ser observada junto às criações das turmas na Figura 8. O processo de trabalho das crianças pode ser observado na Figura 7. Para as pedagogas em formação, ao final os alunos puderam reconhecer formas geométricas presentes na obra de Kandinsky, identificar formas geométricas em objetos de uso cotidiano e como aprender geometria pode ser mais fácil do que parece.

Figura 7: Alunos trabalhando nas suas criações "Circularidade"
Fonte: Arquivo das pedagogas em formação

Figura 8: Da esquerda para a direita: A obra "Círculos" de Kandinsky (1942), Produção "Circularidade" da Educação Infantil e Produção "Circularidade" da turma do 4º. Ano do Ensino Fundamental
Fonte: Arquivo das pedagogas em formação

Iniciar a aprendizagem da ideia de circularidade por meio da leitura das imagens presentes nas obras de um pintor e por meio da comparação com outras formas geométricas, também presentes nas obras artísticas, pode ser um dos primeiros passos para o desenvolvimento conceitual de círculo. De acordo com Vigotski (2003), o desenvolvimento do conceito ou do significado da palavra círculo pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais, como atenção deliberada, a guiada pelo docente estagiário para observar as formas geométricas nas obras artísticas, como abstração e memória lógica para diferenciar as formas geométricas entre si e a capacidade para comparação e diferenciação.

> A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo. (VIGOTSKI, 2003, p.104)

O conceito não pode ser transmitido pelo professor ao aluno, mas a sua constituição pode ser iniciada pelo próprio aluno por meio de atividades interdisciplinares. Além da observação, comparação e diferenciação, a proposta de desenhar círculos e criar sua obra de arte levou as crianças a estabelecerem conexões perceptivas mais evidentes e imediatas com o entorno espacial.

> Em matemática, o desenho também está relacionado com a redução do entorno, a escala, e este processo, por si mesmo, apresenta algumas ideias importantes: modelos, razões, proporções, etc. Sem dúvida, a atividade de desenhar em geral talvez seja a mais poderosa para transmitir valores relacionados com a interação matemática/entorno (BISHOP, 1999, p.135).

Assim, por meio da interdisciplinaridade com produções artísticas, o aluno desenvolve a imaginação e a abstração e, mais do que construindo, vai constituindo significativamente seus conceitos matemáticos. O produto acabado, em si, não é o mais importante, como alerta Bishop (1999). Matematicamente pensando, o mais importante é a educação matemática, é o plano, é a estrutura, a forma imaginada, a relação espacial percebida entre o objeto e o propósito, a forma abstrata e o processo de abstração.

3ª. Proposta: A produção de paradidáticos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Ana Cristina foi aluna da disciplina optativa sobre os paradidáticos relatada na 1ª. Proposta. Seu trabalho está indicado nas Referências, ao final desse texto, como SANTOS, A. C. C. L. A partir dessa experiência vivida na sua formação, ela decidiu defender sua monografia de conclusão de curso trabalhando conceitos matemáticos junto a seus alunos – uma turma de 4º. ano de escola pública na cidade do Rio de Janeiro. Ela percebeu a dificuldade que muitos tinham com a aprendizagem de geometria. Eles já haviam sido seus alunos no ano anterior, mas ela não gostava de matemática e não sabia como ajudá-los. Depois de ter cursado as disciplinas de matemática no curso começou a sentir mais confiança e mais segurança. Decidiu ajudar as crianças a aprenderem geometria. Seu estudo objetivou investigar se uma proposta interdisciplinar que utilizasse livros de literatura infantil na prática pedagógica para ensinar matemática poderia gerar um processo de ensino-aprendizagem dinâmico, contextualizado e significativo.

Para desenvolver seu trabalho Ana pensou em mudar a lógica escolar de ”cumprir o programa” e de procurar encontrar respostas certas no menor espaço de tempo possível, utilizando o livro didático ou somente o caderno pedagógico oferecido pela Secretaria Municipal de Educação como os únicos recursos pedagógicos. Partindo da concepção de que o aluno aprende não apenas pela dimensão cognitiva, mas também pela afetiva e motora, Ana percebeu que tais práticas reprimem a espontaneidade, a iniciativa e não estavam contribuindo para o ensino de nenhuma disciplina, muito menos de matemática, em que a construção de um conceito acontece no decorrer de um longo período, dos estágios mais intuitivos aos mais formais.

Para construir conceitos básicos, presentes nas atividades de diferenciação das figuras geométricas (planas e sólidas), Ana planejou uma sequência de cinco atividades por um período de aproximadamente quatro semanas, totalizando oito encontros. Optou por formar trios de alunos, buscando a integração mais apropriada. Observou e registrou em diário de campo o desenvolvimento das atividades e as respostas dos estudantes.

A sequência didática teve início com uma avaliação diagnóstica envolvendo uma revisão sobre sólidos geométricos, conteúdo presente no caderno pedagógico e no livro didático. Ela percebeu que muitos alunos apresentaram dificuldade em nomear os sólidos geométricos, confundindo várias vezes círculo com esfera, retângulo com paralelepípedo e nem todos sabiam nomear propriedades das figuras.

Em seguida, aconteceu a leitura individual e coletiva de livros paradidáticos. Ana selecionou alguns títulos que pudessem estabelecer relações com a vivência do aluno dentro e fora da escola. A escolha foi feita mediante a análise de aspectos que considerava pertinentes tais como: conteúdos matemáticos, temas transversais e interação com outras áreas do conhecimento (FAZENDA, 1994); a presença de elementos lúdicos, a diversidade de registros de representações e os tipos de ilustrações utilizadas, bem como a oportunidade de participação do leitor na construção do próprio conhecimento (DALCIN, 2007).

Para tanto foram explorados os títulos: *Travessuras de Triângulo* (CÃNDIDO, 1997), *Círculos, cilindros & esferas* (PATILLA, 1995) e *A história estranha de Eduardo Peçanha* (SANTOS, 2012) que abordam conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em diferentes narrativas. Com base na classificação de Dalcin (2002), Ana dividiu os livros paradidáticos que utilizou em sua pesquisa em duas categorias: narrativa ficcional e abordagem pragmática. Os paradidáticos da primeira categoria são os livros que contém uma história de ficção na qual os elementos matemáticos vão aparecendo. É o caso dos livros *Travessuras de Triângulo* e *A história estranha de Eduardo Peçanh*a. Os paradidáticos considerados de abordagem pragmática são os livros que apresentam capítulos teóricos com atividades práticas sem um enredo único. É o caso do livro *Círculos, cilindros & esferas*.

A leitura dos livros foi alternada com atividades concretas presentes nas sugestões complementares dos livros paradidáticos. Assim, os alunos tiveram oportunidade de se familiarizar com os livros, ouvindo e manuseando os mesmos em diferentes momentos. A confecção de mosaico e do disco giratório (Figura 9), bem como o reconhecimento de figuras geométricas a partir de outras e montagem de móbile foram algumas das atividades feitas pelas crianças. O trabalho foi feito de forma coletiva para possibilitar a discussão, trocas de experiências e permitir o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, como investigação, inferência, reflexão e argumentação. Ana organizou planos de aula para cada atividade a ser desenvolvida na seguinte sequência: Plano I - Regiões planas e seus contornos; Plano II- Polígonos; Plano III - Formas geométricas planas e espaciais; Plano IV- Círculo e esfera e Plano V- Produção de livro. Ana considerou a etapa que envolveu construir outras figuras a partir do triângulo e nomear e destacar propriedades das figuras geométricas, muito importante para a aprendizagem progressiva dos conceitos matemáticos trabalhados (Figura 10) como também para a produção textual do livro.

Figura 9: Descobrindo a geometria nas atividades práticas I
Fonte: Acervo da professora Ana

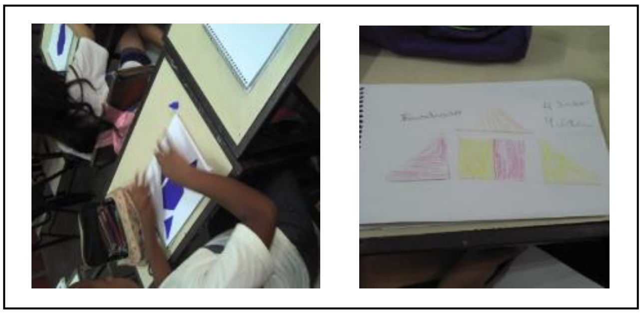


Figura 10: Descobrindo a geometria nas atividades práticas II
Fonte: Acervo da professora Ana

Após essas fases os alunos iniciaram a escrita do livro. Foi sugerido aos alunos que trocassem ideias sobre a história que gostariam de escrever e que, em grupo, escrevessem um pequeno texto em que definissem: local, personagens, acontecimento gerador da narrativa, clímax e desfecho. Nesse momento também foram provocados a utilizar os conteúdos de geometria trabalhados nas atividades iniciais. Para melhor entendimento dos alunos, foram oferecidos diferentes títulos para consulta, inclusive os escolhidos anteriormente para as atividades introdutórias. Quatro produções dos alunos estão aqui contempladas: *Natureza, Amazônia, Os três incríveis e A pipa* (Figura 11).

Figura 11: Fotos das capas dos livros criados pelas crianças
Fonte: Acervo da professora Ana

Para a análise da evolução da aprendizagem de geometria em articulação com outras disciplinas foram estabelecidas as seguintes categorias: 1- A organização textual (estrutura, coerência, coesão, ortografia); 2- A articulação estabelecida entre os conhecimentos de geometria e outras áreas da Matemática e de outros campos de conhecimento; 3- Capacidade de perceber regularidades e diferenças nas diferentes representações das figuras utilizando o vocabulário próprio da geometria; 4- Articular conhecimentos matemáticos próprios para aplicá-los a uma situação nova.

Na organização textual, além da motivação da maioria dos alunos e da diversidade de gênero (poesia, terror e suspense, preocupação ecológica e preservação ambiental), Ana observou duas dificuldades das crianças: transpor os conhecimentos matemáticos adquiridos para a linguagem escrita e organizar o texto respeitando critérios necessários para a compreensão sequencial da narrativa. Este fato contribuiu para o entendimento de que muitas dificuldades de interpretação de comandos e enunciados presentes em diferentes exercícios matemáticos estão relacionadas ao distanciamento entre o ensino de matemática e a língua materna. A mediação da língua materna funciona como uma ponte que possibilita o encontro com diferentes discursos.

> É como se as duas disciplinas, apesar da longa convivência sob o mesmo teto – a escola – permanecessem estranhas uma à outra, cada uma tentando realizar sua tarefa isoladamente ou restringindo ao mínimo as possibilidades de interações intencionais. (MACHADO, 2001 p.15).

Após terem estruturado a história, prosseguiram na produção das ilustrações, de forma a completar o texto escrito, contextualizando-o. Tal fato contribuiu para a reflexão de como os alunos se apropriam de diferentes representações durante a aprendizagem, transitam entre a oralidade, registro escrito, desenhos, construções concretas para expressar os conhecimentos adquiridos. Ana identificou problemas em relação à coesão e a ortografia em diferentes graus nos diferentes grupos.

A articulação da geometria com outros campos da Matemática e com outras áreas de conhecimento aconteceu durante toda a sequência didática introdutória e envolveu conhecimentos de Português, Literatura, Artes, Ciências, Geografia e História. Os livros produzidos pelos alunos também apresentaram aspectos que demonstram essa conexão tais como: as regiões geográficas, questões ambientais escolhidas, o uso de elementos naturais (fogo, gelo, água, prata, ouro, diamante) e temas transversais relacionados à ética e ao meio ambiente.

A evolução da utilização da linguagem matemática geométrica foi percebida desde o início até a análise dos livros produzidos. Todos os grupos conseguiram nomear e diferenciar as figuras geométricas nas narrativas produzidas. Houve tendência em utilizar os sólidos, talvez por serem mais próximos do mundo real, como apresentado por Freudenthal (1991), mas figuras planas também foram representadas. Observações como: "Não está igual, o lado de cima não está do mesmo tamanho", ou "Não deu certo, quando colei percebi que está torto", ou então "Ficou esquisito, o mosaico está cheio de buracos", "Vou fazer outro, está parecendo um quadrado e não um retângulo [não quadrado]" revelou percepções que provavelmente não perceberiam se não experimentassem diferentes representações. A verbalização durante as atividades ofereceu oportunidades de se desenvolver uma linguagem geométrica significativa e de introduzir gradualmente os nomes, as definições e as propriedades das figuras.

As observações sobre a verbalização trazidas por Ana, reforça o pensamento de Vigotski (2003) sobre a evolução histórica da linguagem. A própria estrutura do significado de uma palavra da linguagem geométrica e a sua natureza psicológica sofrem mudanças. A partir de generalizações primitivas, a princípio oportunizada na conexão interdisciplinar, o pensamento verbal eleva-se ao nível dos conceitos mais abstratos. "Os significados das palavras são formações dinâmicas, e não estáticas. Modificam-se à medida que a criança se desenvolve; e também de acordo com as várias formas pelas quais o pensamento funciona" (Vigotski, 2003, p.156).

Ana ainda reporta que a transferência da aprendizagem aconteceu na produção de um novo livro, quando os alunos puderam aplicar conhecimentos prévios e novos em sua construção. Em todos os livros, o conteúdo trabalhado esteve presente de forma diferenciada, porém satisfatória e os alunos conseguiram relacionar conhecimentos de geometria às narrativas.

Para Ana, a análise desse estudo mostrou que os livros paradidáticos podem contribuir com a proposta interdisciplinar, pois permitem articular a Matemática com outras áreas de conhecimento, principalmente com a Língua Portuguesa e originam um processo educativo prazeroso e efetivo. O que acontece é que ao escrever, como indica Vigotski (2003), a criança precisa se desligar do aspecto sensorial da fala e simbolizar a imagem sonora e toda a experiência vivida em sala de aula por símbolos escritos. Incorporando a matemática nessa narrativa, a qualidade abstrata da escrita exige uma significação matemática mais intelectualizada. "Mas, do ponto de vista da psicologia, o significado de cada palavra é uma generalização ou um conceito. E como as generalizações e os conceitos são inegavelmente atos de pensamento, podemos considerar o significado como um fenômeno do pensamento" (VIGOTSKI, 2003, p.151). Assim, ao escreverem matemática em atividade interdisciplinar as crianças estão trabalhando na evolução do significado das palavras, de conceitos matemáticos.

4ª. Proposta: A linguagem das artes presente nos livros didáticos de matemática

Andrea também cursou a disciplina optativa descrita na 1ª. Proposta e optou por fazer a sua monografia investigando atividades matemáticas dos livros didáticos que possuíam articulação com artes. Seu trabalho também está indicado nas Referências, ao final desse texto, como SILVA, A M. Andrea analisou oito livros didáticos de matemática dos anos iniciais com autores, editoras e anos de produção variados. A metodologia adotada para tal fim procurou responder com que frequência e de que forma as Artes, em suas quatro linguagens - teatro, música, dança e artes visuais, apareciam de modo interdisciplinar com a matemática ao longo dos livros didáticos escolhidos para o estudo. Os resultados apontaram 42 atividades com artes visuais, 9 atividades com música, 8 atividades envolvendo teatro e 4 atividades com dança. Tais atividades se entrelaçavam com conceitos de simetria, vistas, figuras planas e tridimensionais, bem como com suas propriedades, linhas, pontos, itinerários e vários outros objetos matemáticos. A seguir apresentamos apenas alguns exemplos do olhar interdisciplinar e da interpretação que Andrea deu para algumas atividades de geometria presentes nos livros didáticos de matemática analisados.

Andrea identificou poucas atividades envolvendo dança. Entretanto, esse tema poderia ser mais explorado nos livros didáticos pois a dança favorece a reflexão sobre a exploração do espaço e todo o complexo movimento dos dançarinos no palco. Também encontrou poucas referências para a utilização da linguagem da arte cinematográfica que pudessem ajudar a explorar a geometria do espaço, mas destacou a discussão sobre ampliação e redução de objetos que poderia ser abordada na indicação/exibição dos filmes "Querida, encolhi as crianças" (1989) e "Querida, estiquei o bebê" (1992) (BIGODE E GIMENEZ, 2008, p.13).

Andrea comentou que para criar a sensação de tridimensionalidade, “transformando” as figuras planas em sólidos geométricos (Figura 12), os autores retomam o conceito cinematográfico dos irmãos Lumiere, em que o movimento “quadro-a-quadro” de uma figura plana cria a sensação de que as imagens em movimento estão bidimensionais ou tridimensionais (dependendo do efeito dado por filtragens, “como óculos 3D”). Desta forma, um triângulo simula ser um cone e um retângulo simula ser um cilindro.

Figura 12: Sensação Tridimensional
Fonte: Bigode e Gimenez, 2008, p.172

O teatro também entra no contexto da aprendizagem do espaço. Com a atividade “Vamos ao teatro” os estudantes conhecem os nomes dos espaços internos de um teatro e o conceito de disposição retangular das cadeiras de cada setor na plateia. A construção de mapas e de referenciais pode ser explorada na atividade que evidencia a disposição do palco e das poltronas em um teatro (BIGODE E GIMENEZ, 2008, p.48). Ao abordarem a “História do teatro” e a definição de “teatro”, “anfiteatro” e “circo” os autores aliam a linguagem teatral à linguagem matemática e ambas enriquecem a interdisciplinaridade construída pelas culturas aqui tratadas (Figura 13).

Figura 13: Teatro, anfiteatro
Fonte: Bigode e Gimenez, 2008, p.58

Ao desafiar o educando para que realize a localização cartográfica do teatro, do cinema, do museu e da escola, comparando as suas distâncias (Figura 14), os autores indicam locais de exibições das linguagens teatrais, de dança, música, artes visuais e cinematográficas ao percurso escolar. Além de trabalhar itinerários, essa atividade pode gerar o interesse de se conhecer tais espaços na vida real. Um recurso teatral, a dramatização, é usado por Smole, Diniz e Marim (2008, v.4. p.173) na atividade onde os estudantes são convidados a se imaginarem como uma esfera, cilindro ou cone e a partir daí deverão criar e escrever uma história. A leitura de livros no campo da arte literária, como “A viagem de Lisa, de Paul Maar” ajuda e complementa a compreensão do estudo.

Figura 14: Espaços teatrais no itinerário (mapa)
Fonte: Bigode e Gimenez, 2008, p.58

Linhas verticais, horizontais e inclinadas podem ser discutidas quando os estudantes são convidados a analisar as cordas dos instrumentos musicais (Figura 15).

Figura 15: Instrumentos musicais
Fonte: Aidar, 2011, v.3, p.149

Ainda pensando na Música, Andrea destacou a atividade que trata das linhas da arquitetura. O Taj Mahal, na Índia (Figura 16), onde além do estudo das linhas, o estudante pode ser convidado a ouvir a versão da música "Taj Mahal", de Jorge Benjor. Ainda destaque para a "Opera" da cidade de Sidney, Austrália e o "Teatro Amazonas", construído em 1896, em Manaus, Amazonas, onde muitas peças musicais são apresentadas. Na atividade a imagem indica a ideia de vista aérea de uma região e pode levar o estudante a apreciar o trabalho da arte da arquitetura.

Figura 16: Taj Mahal, Opera e Teatro Amazonas
Fonte: Aidar, 2011, v.3, p.108 e p. 247.

Nas artes visuais, a simbiose matemática-artes está presente em várias atividades em todos os anos escolares. Linhas não retas são exploradas por meio das obras de artes de um povo chamado "Quiocos", oriundos do país africano Angola. Em sua cultura, os Quiocos também têm o hábito de desenhar malha pontilhada na areia, chamada de "Sonas". A atividade estimula os alunos a criarem "Sonas" (Figura 17). Com a obra "Conqueror", de Paul Klee (1930), também se pode explorar o ensino de linhas verticais, horizontais e inclinadas (Figura 18). A obra "Composição com Vermelho, Amarelo e Azul" (1939/1942), de Mondrian (Figura 19), auxilia na compreensão do uso das linhas retas e dos ângulos retos, assim como na introdução do conceito de linhas perpendiculares.

Figura 17: Objetos de Arte dos Quiocos, Sonas e Malha
Fonte: Aidar, 2011, v.1. p.118-120

Figura 18: "Conqueror", de Paul Klee (1930)
Fonte: Aidar, 2011, v.3. p.109

Figura 19: "Composição com Vermelho, Amarelo e Azul, Mondrian, (1939/1942)
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5. p.257.

Figura 20: "Metaesquema" de Helio Oiticica, 1958
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5. p.262

"Metaesquema" (1958) (Figura 20), do artista brasileiro Hélio Oiticica, traz um contexto para o trabalho com quadriláteros e as diferenças entre eles.

Ao abordar as formas geométricas planas por meio da obra "A gare" (Figura 21) e "O Mamoeiro" (Figura 22), ambas de Tarsila do Amaral (1925), os educandos não apenas observam na pintura quais as formas geométricas presentes, mas são estimulados a fazer colagens inspirados na referida obra para posterior exposição em classe. Dependendo da atividade, é possível, ainda, explorar conceitos como "dentro", "fora", "na frente", "atrás", "à esquerda", "à direita", "em cima", "embaixo".

Figura 21: "A gare", Tarsila do Amaral, 1925
Fonte: Aidar, 2011, v.1, p.117

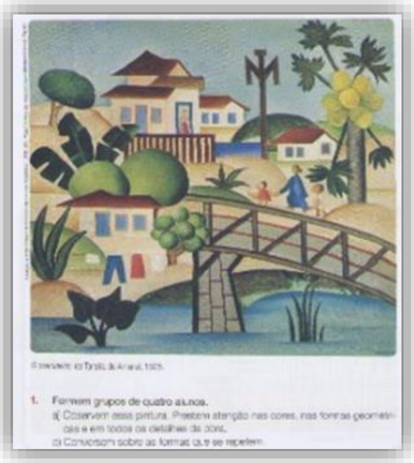


Figura 22: "O Mamoeiro", Tarsila do Amaral, 1925
Fonte: Aidar, 2011, v.3, p.164

A partir da observação das obras, os alunos podem utilizar instrumentos geométricos como compasso e régua para fazerem suas próprias criações, como sugerem Smole, Diniz e Marim, (2008) na página 252 do volume 5, e ainda explorar a comparação e as diferenças entre o paralelogramo e o retângulo, dúvida recorrente nos anos iniciais e posteriores.

Conceitos de figuras não planas podem ser compreendidos com as atividades de gravuras feitas em madeira (cedrinho) e/ou "silkscreen" (Aidar, 2011, v.2. p.44-45). O conceito de superfícies planas e não planas é explorado na atividade com a escultura "Os guerreiros - os Candangos", de Bruno Giorgi, localizada em Brasília, no Distrito Federal, além de "Fita", de Franz Weissmann, São Paulo (Figura 23).


Figura 23: Esculturas - "Fita" de Franz Weissmann e "Os Guerreiros" de Bruno Giorgi
Fonte: Aidar, 2011, v.2. p.46

A linguagem das artes visuais se mostra retratada na obra "A lição" (2002), de Regina Silveira (Figura 24), inspirando os estudantes a observarem as semelhanças e as diferenças entre as figuras geométricas espaciais, bem como as diferentes "vistas".

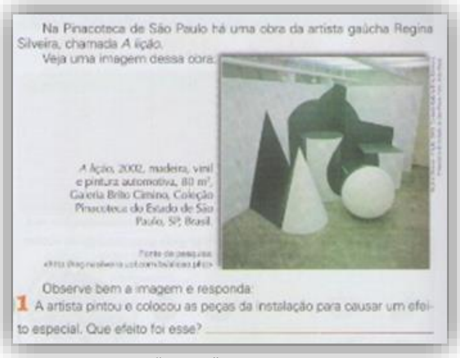


Figura 24: "A lição", Regina Silveira, 2002
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5, p.30

Duas obras de Escher trazem reflexão sobre figuras geométricas espaciais (Figura 25): "Mão com esfera reflectora" (1935) e "Estrelas" (1948). Pela observação das obras, os estudantes verificarão quais figuras planas formam as figuras geométricas espaciais ali retratadas, sem prejuízo de se aprender os nomes das respectivas figuras. Também como ilustrativa das figuras geométricas é a obra "Composição" (Figura 26).

Figura 25: Obras de Escher
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5. p.82

Figura 26: "Composição" de Milton DaCosta, 1942
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5. p.199

Para contextualizar e auxiliar na compreensão do conceito de círculo e circunferência a obra "No quadro Negro" (Figura 28) e "Sobre pontas" (Figura 27), ambas de Wassily Kandinsky, são abordadas por diferentes autores de livros didáticos e em diferentes anos escolares. Também as obras "Joie de vivre" (1930), de Robert Delaunay e "Sem título" (1970), de Charoux são incluídas por Smole, Diniz e Marim (2008, v.4. p.245) para o estudo de figuras circulares, bem como o desenho artístico, para explorar os conceitos de diâmetro e semicírculo.

Figura 27: "Sobre pontas", Kandinsky, 1928
Fonte: Smole, Diniz e Marim, 2008, v.5. p.160

Figura 28: "No quadro negro",
Kandinsky, 1923
Fonte: Bigode e Gimenez, 2008,

O trabalho de Andrea ainda evidencia como as artes são um recurso para trabalhar aspectos da simetria e da padronização. Tal abordagem fica evidente nas atividades apresentadas por Bigode e Gimenez (2008, p.188) e por Smole, Diniz e Marim (2008, v.3. p.59) com a obra “Sem Título”, de Alex Flemming (1992). O conceito de translação pode ser explorado nas obras “Céu e água” (1938) e “Horseman” (1946), de Escher, apresentadas por Smole e Marim (2008, v.3. p.246). Ainda presente nos livros didáticos estão painéis e mosaicos artísticos, tais como a Cerâmica Babilônica de dragão no Portal de Ishtar (2000 a.C.), a Cerâmica do Século XIV de mesquita da Cidade de Tashkent, Uzbequistão (AIDAR, 2011, v.3. p.126), a Cerâmica de uma Igreja do Centro Histórico de Salvador, na Bahia (1702 d.C.) e a Cerâmica portuguesa no Centro Histórico de São Luis, Maranhão (AIDAR, 2011, v.3. p.127).

As atividades matemáticas que convidam os estudantes às situações da vida real, conforme Skovsmose (2000), podem oferecer diferentes recursos para reflexões sobre a matemática. Assim, ler e criar quadros, completar malhas geométricas, pinturas, desenhos, desmontar e montar embalagens, construir figuras geométricas utilizando instrumentos geométricos, individualmente e em grupo, são atividades que podem facilitar verificar as semelhanças e diferenças, identificar e classificar objetos geométricos.

Concluindo o pensamento

As práticas aqui apresentadas revelam que ao articular diferentes disciplinas, o professor se depara com a necessidade da escolha de um eixo, geralmente temático, comum, para nortear a sua atuação didática e procurar alcançar os objetivos que a sua proposta contemple. Ao integrar as disciplinas na busca por desenvolver estudos sobre determinados objetos do conhecimento, no caso objetos matemáticos, o professor caminha por reflexões mais holísticas e desmistifica a visão do conhecimento fragmentado.

O que aqui foi apresentado é apenas algumas possibilidades de se estudar, ensinar e aprender matemática nas escolas de forma diversificada e articulada aos demais componentes curriculares da escola básica. Os relatos aqui trazidos revelam estudos e experiências recentes, vividas entre 2013 e 2015. A abordagem interdisciplinar que aqui apresentamos mostra fortes conexões da geometria com as demais disciplinas e com as formas tradicionais das artes visuais, como a pintura, escultura, desenho, gravura, mas também com a arquitetura e com as artes já decorrentes dos avanços tecnológicos e transformações estéticas como a fotografia, artes gráficas, cinema, televisão, teatro, dança, vídeo e computação. Além das abordagens presentes em livros didáticos e das sugestões complementares a partir deles, apresentamos possibilidades de se estudar a geometria por meio de projetos organizados no âmbito da própria instituição de ensino. Vimos também que a geometria tem possibilidades de conexões com a biologia e as ciências da natureza. E, como não podia deixar de ser, a conexão da matemática com a linguagem, com a literatura, com a comunicação escrita. A nossa tradição disciplinar tem se valido das contribuições metodológicas para, como diz D´Ambrósio (2012), satisfazer o cumprimento de um programa, para atender requisitos mínimos, para nos aculturarmos. Com isso, vamos perdendo nossa identidade cultural. A interdisciplinaridade tem sido um caminho para a aprendizagem contextualizada, significativa e se apresenta como mais um caminho para solucionar problemas novos e enfrentar, criticamente, novas situações.

Referências

AIDAR, Marcia Marinho. **A Aventura do Saber : Matemática**, 1º. ano/v.1, São Paulo: Leya, 2011

______ **A Aventura do Saber : Matemática**, 2º. ano/v.2 – 1ª. ed. - São Paulo: Leya 2011

______ **A Aventura do Saber : Matemática**, 3º. ano/v.3 – 1ª. ed. - São Paulo: Leya, 2011

BARTHES, Roland. **O Rumor da Língua.** São Paulo, Brasiliense, 1988

BIGODE, Antonio Jose Lopes e GIMENEZ, Joaquim. **Matemática do Cotidiano & suas Conexões**, 4º. ano, 3ª. serie/v.4, 1ª. edição, São Paulo: FTD, 2008.

BISHOP, Alan J. **Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática.** Universidad del Valle. Colombia. 2005.

_______, Alan J. Enculturación matemática. La educación Matemática desde una perspectiva cultural. **Temas de educación.** Barcelona: Paidós, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília, 1997.

_______. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica.** Parecer CNE/CP nº 2/2015, de 09 de junho de 2015.

_______. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2016: Alfabetização Matemática e Matemática: Ensino Fundamental anos iniciais. – Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2015a. 322 p. Acesso a : il.file:///C:/Users/Lenovo/Downloads/pnld_2016_alfabetizacao-matematica-e-matematica.pdf em 25 de setembro de 2015.

BRITO, E. C. P M., SANTOS, L. F., GUIMARÃES, G. Geometria E Arte: Uma Relação Possível. **Cadernos de Trabalhos de Conclusão do Curso de Pedagogia**. V.2. Centro de Educação. UFPE, 2007.

CÂNDIDO, Suzana Laino. **Travessuras de triângulo***.* Ilustrações Girotto e Fernandes. São Paulo: Moderna, 1997.

DALCIN, Andréia. Um olhar sobre o paradidático de matemática. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v. 15, n. 27 – jan./jun. – 2007

D´AMBRÓSIO, U. **Transdisciplinaridade**. São Paulo, Palas Athena, 174 pg., 3ª. Ed. 2012.

_____________. **Educação Matemática: da Teoria à Prática.** Campina, SP: Papirus, 2007. 15ª Edição.

FAZENDA. I. C. A. **Práticas interdisciplinares na escola***.* São Paulo: Cortez, 1999.

_____________. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa.** Campinas, SP: Papirus. 6ª. Ed. 2000.

_____________. **Interdisciplinaridade: Qual o sentido?** / Ivani Fazenda – São Paulo: Paulus, 2003.

_____________. **Interdisciplinaridade**. GEPI.v.1, N.2, São Paulo: PUCSP, 2012

FONSECA, Lêda Maria da. **Leitura de imagens e formação de leitores**. In: Lúcia Pimentel Góes; Jakson de Alencar. (Org.). A alma da imagem: a ilustração nos livros para crianças e jovens na palavra de seus criadores. – São Paulo: Paulus, 2009, p.107.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting Mathematics Education**: China Lectures. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber.** Rio de Janeiro: Imago, 1976.

LOPES, Alice C.; MACEDO, Elizabeth. **A estabilidade do currículo disciplinar: o caso das ciências.** In: LOPES, Alice C.; MACEDO, Elizabeth (Org.). Disciplinas e integração curricular: história e políticas. Rio de Janeiro: DP&A, 2002. p. 73-94.

MACHADO, Nilson J Interdisciplinaridade e Matemática. **Pro-posições.**Volume.4, n.1(10). Páginas 24-34, 1993.

___________, **Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. -5ed- São Paulo: Cortez, 2002.

MIANI, Marcos. **Matemática** (Coleção Matemática), 2º. ano, 1ª. serie/v.2 - 1 edição - São Paulo: Editora do Brasil, 2005

PATILLA, Peter. **Círculos, cilindros & esferas***.* Tradução Valentim Rebouças- São Paulo: Moderna, 1995.

PIRES, C.,CURI, E. & CAMPOS, T. - **Espaço e forma**: São Paulo, PROEM Editora. 2000.

SILVA, A. M. **A Deus-a-arte na escola. Como a matemática influencia a criatividade artística e vice-versa.** Monografia de conclusão de curso de Pedagogia. Rio de Janeiro: UNIRIO, 2014.

SANTOS, A C C L. **Livros paradidáticos: recurso para a educação matemática nos anos iniciais.** Monografia de conclusão de curso de Pedagogia. Rio de Janeiro: UNIRIO, 2014.

SANTOS, Gilberto Santos. **A história estranha de Eduardo Peçanha.** Ilustrada por Romont Willy – São Paulo: Globo, 2012.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, São Paulo, n. 14, 2000, p. 66-91.

SMOLLE, K. C. S; DINIZ, M. I. de S. V.; MARIM, V. **Saber Matemática**, 3º. ano, 2ª. serie/ v.3 - São Paulo: FTD, 2008

______ **Saber Matemática**, 4º. ano, 3ª. serie/v.4, São Paulo: FTD, 2008

______ **Saber Matemática**, 5º. ano, 4ª. serie/v.5, São Paulo: FTD, 2008

THIESEN, Juares da S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**. Volume 13, n.39. Páginas 545-554, 2008.

VIGOTSKI, Lev, S. **Pensamento e Linguagem.** 2ª. edição. São Paulo: Martins Fontes. 2003.

Capítulo 8

A Comunicação e a Interpretação do Espaço por Crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Algumas Considerações

Edda Curi[1]
Solange de Fátima Mariano[2]

Introdução

Pesquisas realizadas nos últimos três anos, no âmbito do Grupo de Pesquisa CCPPM (Conhecimentos, Crenças e Práticas de Professores que ensinam Matemática) da Universidade Cruzeiro do Sul, revelam que as atividades relativas às Relações Espaciais propostas em livros e em materiais didáticos produzidos recentemente não contemplam as três competências básicas do domínio do Espaço: a comunicação, a representação e a interpretação do Espaço. Os estudos realizados no referido Grupo revelaram que essas três competências, quando desmembradas, facilitam ao professor na seleção e organização das atividades a serem desenvolvidas. Mostraram ainda que nem sempre o professor tem clareza sobre a diferença entre essas competências. Decorrentes dessas pesquisas foram defendidas, em 2015, uma tese de doutorado e uma dissertação de mestrado profissional.

Para o texto deste livro, apoiamo-nos nos dados da dissertação de mestrado acima citada. O objetivo é apresentar algumas sequências de atividades desenvolvidas com crianças de 8-9 anos, abordando duas entre as três competências já citadas: a de comunicação e a de interpretação do Espaço. Além das atividades, comentamos e analisamos teoricamente as resoluções das crianças, com base nos estudos de Piaget e Inhelder (1993), Saiz (2006) e Curi (2013).

A revisão bibliográfica mostra que há poucos estudos sobre esse assunto, que permitam aos professores analisarem a produção de seus alunos. As pesquisas realizadas pelo Grupo CCPPM mostram anecessidade de o professor aprofundar seus estudos teóricos para que possa fazer essa análise. As sequências foram desenvolvidas nos anos de 2013 e 2014, pela professora pesquisadora Solange de Fátima Mariano, com seus alunos do 3º ano do Ensino Fundamental, estudantes de uma escola da rede pública municipal de São Paulo, localizada na Zona Leste da capital, na Vila Califórnia. A turma, composta por 30 alunos, estava alfabetizada, era participativa e se envolvia facilmente nas atividades, interagindo ativamente nas discussões.

Professora dos Programas de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e em Ensino de Ciências da Universidade Cruzeiro do Sul; edda.curi@gmail.com
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul; solafamariano@gmail.com

A importância do ensino do tema Relações Espaciais se dá no momento em que a criança precisa compreender, além de descrever e representar, o mundo em que vive. Para isso, é necessário que ela saiba se localizar no espaço, movimentar-se nele e dimensionar sua ocupação, além de descrever e representar posições e movimentos. Esse conhecimento se adquire na escola, mas cabe destacar que ainda há certo abandono do trabalho mais efetivo com a exploração do Espaço, talvez porque sua inserção nos currículos seja recente.

Segundo Curi (2013), é necessário um conhecimento escolar intencional e sistematizado para que a criança se aproprie das formas de interpretação e representação do Espaço. A autora analisou a abordagem de conteúdos e habilidades relativas ao Espaço e suas relações em documentos curriculares recentes. No estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), das Orientações Curriculares do Estado de São Paulo (2012) e da Prefeitura de São Paulo (2007), a autora observou que nos dois documentos mais atuais, esse tema é mais detalhado do que no mais antigo.

Para a autora, nos dois documentos mais recentes, as propostas de expectativas de aprendizagem envolvendo esse tema estão encadeadas verticalmente do 1º ao 5º ano, possibilitando ampliação dos conhecimentos das crianças e desenvolvimento de competências geométricas, como as de leitura e interpretação de representações do Espaço, as de comunicação oral ou escrita de posições e movimentos no Espaço e as de construção de representações que indiquem Relações Espaciais. Para a autora, os documentos curriculares apontam para o desenvolvimento dessas três competências ao tratarem o tema, focalizando trabalhos orais, leituras de mapas, ou ainda, a elaboração de trajetos (CURI, 2013, p. 22). Ela considera, porém, que faltam discussões de noções importantes, como a de referencial, de objeto de referência, e das especificidades dos conteúdos de localização e de movimentação, entre outras. Destaca ainda que por ser um conteúdo novo para os professores, há necessidade de mais aprofundamento teórico nas orientações didáticas apresentadas nesses documentos.

Apresentação e análise de algumas sequências de atividades

Este item será dividido em duas partes. Na primeira, apresentaremos sequências de atividades que envolvem a competência de comunicação. Segundo Saiz (2006), para que haja comunicação são necessárias duas pessoas, uma que comunica a informação sobre o Espaço e a outra que decodifica a informação comunicada. Essas sequências foram filmadas e analisadas.

Para as análises dos vídeos, utilizamos alguns dos procedimentos metodológicos indicados por Powell, Francisco e Maher (2004) sobre a utilização de vídeos em pesquisa. Após assistirmos várias vezes a essas filmagens, selecionamos alguns episódios que focalizavam a comunicação espacial. Em nossas análises, buscamos identificar nos intercâmbios orais das crianças as relações existentes na construção da noção espacial, denominadas por Piaget e Inhelder (1993) topológicas, projetivas e métricas.

Na segunda parte, apresentaremos sequências de atividades que envolvem a competência de leitura e interpretação do Espaço. Essas sequências foram organizadas com base em material institucional desenvolvido pela Secretaria Municipal de Educação de São Paulo e denominado Caderno de Apoio e Aprendizagem. Os protocolos das crianças foram comentados e analisados teoricamente.

A Comunicação Revelada nos Vídeos

Serão apresentadas e analisadas três sequências de atividades: *Festa da Primavera, Percursos na Sala de Aula e O Robô Esperto*.

Sequência 1- Festa da Primavera

A primeira sequência foi planejada para atender à Expectativa de Aprendizagem de: *Interpretar e representar a posição de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis.* Essa sequência era composta por duas atividades: *Como chegar ao sítio e Mapa das barracas da festa.* A sequência foi desenvolvida em cinco aulas.

Para realizar a primeira atividade, foi feita uma exploração oral da interpretação do Espaço em que as crianças observaram um croqui e identificaram alguns pontos que serviriam de referência no trajeto da escola ao sítio. O objetivo era realizar uma sondagem oral sobre os conhecimentos prévios das crianças envolvendo localização espacial.

A conversa foi iniciada dizendo que a Festa da Primavera seria realizada no sítio de uma professora, que fica próximo da escola, e que para chegar da escola ao sítio a professora fez um croqui apresentado na figura 1, ou seja, o "esboço do desenho de um percurso" com alguns pontos de referência para que os convidados não se perdessem.

Para ter certeza de que todos compreenderam o trajeto para chegar ao sítio, foram feitas algumas perguntas para serem respondidas oralmente. Foi solicitado que ficassem bem de frente ao croqui. As questões foram:

> *De frente para o croqui, o que está à sua direita? O que está à esquerda da ponte? O que está à sua esquerda, o hospital ou a escola? O que diz a seta da estrada: vire à direita no final da estrada ou vire à esquerda no final da estrada? Qual a localização da ponte em relação ao hospital e à escola?*

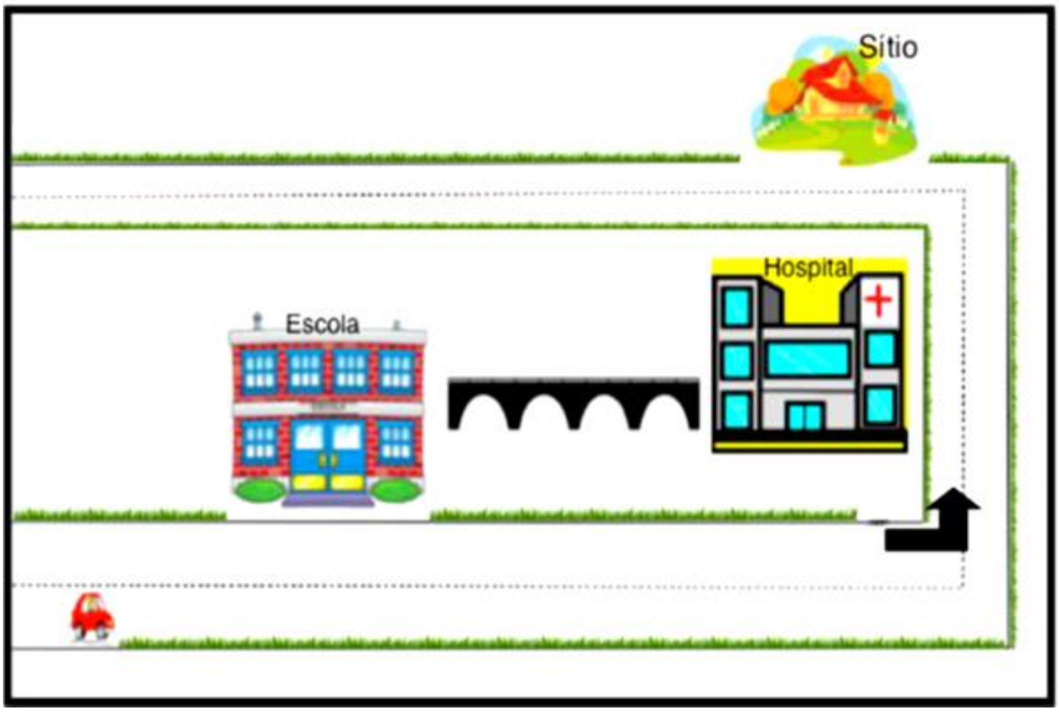


Figura 1- Croqui da Festa da Primavera
Fonte: Acervo da professora

A participação das crianças se deu de forma espontânea; as intervenções foram realizadas no momento em que havia respostas diferentes em relação ao mesmo ponto de referência. Foi necessário realizar intervenções mais diretas propondo movimentos corporais das próprias crianças, para que buscassem utilizar seu corpo para realizar o mesmo percurso do carro, por exemplo. Foram detectadas dificuldades das crianças em usar os termos direita e esquerda e na percepção de mudança do objeto de referência: ora o próprio corpo (o que está à sua direita), ora um objeto externo ao corpo (o que está à direita da ponte).

A segunda atividade denominada *Mapa das barracas da festa* se refere à exploração da competência de Representação do Espaço.

O objetivo era que as crianças lessem e interpretassem as comandas da atividade e construíssem um mapa representando a localização das barracas no espaço delimitado de uma folha de papel. Como a atividade foi filmada, destacaremos algumas explicações orais das crianças sobre as representações que fizeram.

Foi explicado que teriam que fazer um mapa das barracas de brincadeiras e de comidas que encontrassem no sítio. E que, para isso, eles teriam que ler as instruções e fazer o desenho das barracas no espaço demarcado na folha que estavam recebendo.

ATIVIDADE 2 - MAPA DAS BARRACAS DA FESTA

CHEGAMOS AO SÍTIO PARA A FESTA DA PRIMAVERA. FAÇA UM MAPA DE LOCALIZAÇÃO DAS BARRACAS NO SÍTIO CONFORME AS INSTRUÇÕES:
O LOCAL DAS BARRACAS É RETANGULAR
DO LADO ESQUERDO DA ENTRADA ESTÃO AS BARRACAS DE CACHORRO QUENTE, PIPOCA, ALGODÃO DOCE E MILHO VERDE.
DO LADO DIREITO DA ENTRADA ESTÃO AS BARRACAS DE PESCARIA, JOGO DE BOLAS NA TRAVE, JOGO DA ARGOLA.
AO FUNDO ESTÃO OS BANHEIROS.
DO LADO ESQUERDO DO BANHEIRO ESTÁ A BARRACA QUE VENDE AS FICHAS DA FESTA.

Figura 2 – Atividade 2
Fonte: Acervo da professora.

Foi realizada uma leitura coletiva das instruções. Surgiram alguns questionamentos, como:

"Professora, posso colocar o portão de entrada em qualquer lugar?"
"Precisa escrever os nomes das barracas?"

Durante as discussões foram estabelecidos alguns combinados com os alunos a respeito dessas dúvidas. Houve necessidade de se fazerem os combinados porque as crianças receberam a folha apenas com um retângulo desenhado e não havia nenhum ponto de referência para o início do trabalho, ou seja, o portão não estava localizado. Dessa forma, dependendo do lugar que desenhassem o portão, a posição das barracas iria se alterar no desenho.

No decorrer da atividade, foram feitas algumas observações e questionamentos sobre a localização das barracas. Houve necessidade de se fazerem intervenções, mas sempre questionando as crianças sobre a interpretação da informação da atividade. As crianças comparavam seus desenhos e discutiam sobre a localização das barracas.

Para encerrar, houve socialização dos desenhos e discussão coletiva sobre as diferentes localizações das barracas e as sinalizações que apareceram nos mapas.

Como já foi dito, usamos estudos teóricos para analisar as falas das crianças gravadas nos vídeos sobre suas representações.[3]

A aluna A1, ao explicitar sua representação do espaço destinado às barracas e ao banheiro, fez a seguinte explicação:

> *"Ele passa pela entrada, pelas barracas, segue reto e desce as escadas e vai em frente. Mais adiante, abre uma portinha e entra no banheiro"* (aluna A1,vídeo).

A fala dessa criança apresenta noções de anterioridade e profundidade, conforme estudos de Piaget e Inhelder (1993). Percebemos noções de anterioridade da criança quando ela descreveu o percurso: *ele passa pela entrada, pelas barracas, segue reto, vai em frente.*

Sua descrição mostra a ordem e a sucessão dos objetos no espaço, analisando e destacando o que vem depois do quê. Percebemos que a criança tem noção de profundidade quando ela se referiu à necessidade de descer a escada. A criança está em fase de domínio do vocabulário espacial, no entanto, ainda usa expressões vagas, como *segue reto, vai em frente*. Nesse sentido, ao se tratar de vocabulário específico para noções espaciais, Saiz (2006) afirma que localizar-se no espaço significa ser capaz de utilizar um vocabulário que permita diferenciar e interpretar informações espaciais, o que não foi o caso dessa criança.

A aluna A2 comentou:

> *"Porque à esquerda do portão ou da porta da entrada, sempre a esquerda dele vai ser a sua direita, e a sua esquerda vai ser a direita dele"* (aluna A2, vídeo).

Ela explicitou a noção de lateralidade em sua fala e mostrou que já superou a fase de egocentrismo. Saiz (2006) explica que a criança inicia utilizando preferencialmente uma das mãos. Quando a criança reconhece direita e esquerda de outro corpo ou objeto a partir do seu próprio corpo, mostra evolução na construção do conceito de lateralidade, que se considera um avanço da orientação espacial. Segundo Piaget e Inhelder (1993), a criança, nessa fase, compreende que os próprios objetos estão à direita/esquerda uns dos outros, ao mesmo tempo em que tem uma orientação em relação a ela mesma. O egocentrismo não se mostra mais presente em sua comunicação.

A aluna A3 percebeu seu erro na colocação do portão de entrada e fez uma reflexão sobre as consequências desse erro.

[3]Embora os pais dos alunos tenham assinado autorização para que pudessem participar das filmagens, optamos por não apresentar o nome do aluno para lhe garantir o anonimato.

"Eu desenhei o portão da entrada errado, professora, encostado, assim, na margem; eu não consigo desenhar as barracas do lado direito e esquerdo do portão"(alunaA3, vídeo).

Ao fazer essa justificativa, observamos indícios da relação euclidiana, nomeada nos estudos de Piaget e Inhelder (1993). A criança percebeu que a localização do portão estava muito próxima à delimitação do espaço reservado para a representação das barracas, justificando o porquê de não conseguir desenhar as barracas do lado direito do portão. Segundo os autores, as relações euclidianas têm por base a noção de distância e permitem situar os objetos, uns em relação aos outros.

As colocações desses alunos mostram suas aprendizagens sobre anterioridade e profundidade. Há indícios de compreensão de lateralidade com reversibilidade e indicações de compreensão das relações euclidianas.

Sequência 2- Percursos na sala de aula

Essa sequência foi desenvolvida no espaço da sala de aula. O objetivo era que as crianças elaborassem informações com uma linguagem apropriada de localização, o que possibilitaria o desenvolvimento da competência de comunicação referente à orientação espacial. Essa sequência atende à Expectativa de Aprendizagem: *Interpretar e representar a movimentação de uma pessoa no espaço*. A sequência foi desenvolvida em seis aulas.

A seguir, apresentaremos cada atividade da sequência e analisaremos algumas colocações dos alunos.

A primeira atividade dessa sequência, denominada *Atento ao comandante,* tinha como objetivo que as crianças se apropriassem dos termos referentes à localização e aos deslocamentos de um percurso. A atividade se iniciou com uma conversa com as crianças, explicando que receberiam informações sobre como se movimentar na sala e que realizariam o que era proposto nas informações recebidas.

O aluno que iniciou a atividade foi escolhido pela professora. As crianças deveriam prestar atenção às informações dadas pelo colega para indicar o percurso, pois o próximo aluno que comandasse o trajeto teria que se utilizar dessas informações e modificá-las para que os colegas fizessem novo percurso. Isso permitiu que as crianças tivessem a oportunidade de se apropriarem de variados exemplos de movimentação e de vocabulário adequado.

Durante as atividades houve momentos de discussão sobre os percursos realizados. Nesses momentos, foram realizadas intervenções sobre o uso dos termos corretos para informar sobre um dado percurso. Também foram feitas intervenções sobre os deslocamentos realizados, se estavam atendendo ou não às comandas corretamente.

A seguir, apresentaremos um diálogo entre duas crianças que mostra uma discussão sobre o percurso.

> *"- Eu falei para você virar para a direita, e você não virou."*
> *"- Mas eu virei."*
> *"- Mas você não virou completamente, tinha que virar mais." (*diálogo 1, vídeo)

Essa discussão revela que as crianças ainda não sentiram necessidade de colocar um referencial para situar o "vire à direita", que pode ser à direita de quem está falando ou à direita de algum objeto, ou ainda, à direita do aluno que está realizando o percurso, de acordo com Saiz (2006) no seu texto: À direita de quem?

A segunda atividade, *Meu amigo comandante,* tinha como objetivo que as crianças informassem os trajetos dos percursos que seriam realizados. Alguns alunos foram escolhidos para serem comandantes e teriam que usar termos de deslocamento e de localização. Quem estava recebendo as informações também teria que ficar atento para fazer o percurso corretamente.

Ao planejarmos essa atividade, antecipamos alguns equívocos que poderiam ocorrer durante a transmissão e recebimento das informações, o que provavelmente seria percebido de imediato pelos alunos que estivessem realizando a atividade; isso porque não houve mudança de organização do espaço da sala de aula propositalmente. Ou seja, se a informação não fosse transmitida com precisão, ou interpretada corretamente, os alunos colidiriam com os móveis, o que seria uma excelente oportunidade de discussão sobre os motivos por que isso aconteceu.

Ao término da atividade, foi aberta uma discussão sobre a responsabilidade da transmissão de uma informação sobre um percurso a outra pessoa, e sobre a importância desse tipo de comunicação no seu contexto diário.

A seguir, apresentaremos algumas das falas dos alunos com as análises teóricas. A primeira é do aluno A4 que mostra que tem noção de lateralidade:

> *"Rafael, você precisa falar se é para virar para a sua direita ou para a direita da carteira. Isso está deixando a Vitória confusa!"* (aluno A4, vídeo).

O aluno A4, ao que parece, mostrou compreender que quando se refere às informações sobre direita (ou esquerda), é necessário que haja uma relação com um objeto de referência, ou seja, "à direita de quem"?

Como é possível observar, essa criança apresentou uma comunicação pautada no desenvolvimento da lateralidade, já apresentou uma percepção de que a orientação espacial se dá no corpo e com o corpo.

Do ponto de vista matemático, esse aluno mostrou clareza na distinção entre direita e esquerda e teve apropriação da proporção de distância de diferentes pontos de vista quando afirmou que o amigo deveria dizer à direita de quem para realizar o percurso.

Para Piaget e Inhelder (1993), quando a criança reconhece os diferentes pontos de vista e a noção de proporção e distância, há um avanço das relações projetivas para as relações euclidianas. Para Saiz (2006), a criança apresenta um avanço na construção matemática do espaço ao abandonar o sistema de referência centrado em seu próprio corpo.

A colocação do aluno A5 mostra sua reflexão ao perceber seu erro e aponta para um avanço na aprendizagem.

> *"Professora, eu não fiz errado, não! Eu só me confundi um pouco, ele mandou virar para minha esquerda e eu virei para a minha direita, mas eu corrigi rapidinho quando eu percebi que estava errado! "* (aluno A5, vídeo).

Com base nos estudos teóricos, podemos afirmar que quando a criança apresenta essa reversibilidade em espaço geométrico, ela demonstra um avanço em suas aprendizagens espaciais. De acordo com Piaget e Inhelder (1993), a criança que realiza a reversibilidade de forma apropriada exprime um avanço cognitivo, pois apresenta uma reflexão lógicomatemática do espaço vivenciado.

O aluno A6 apresentou uma descoberta decorrente de uma evolução da noção de lateralização para lateralidade. Segundo Saiz (2006) a noção de lateralização envolve elementos de posição direita ou esquerda usando como referencial seu próprio corpo, a noção de lateralidade envolve elementos de posição direita ou esquerda de outro objeto ou pessoa a partir do seu próprio corpo, o que significa que o lado direito da pessoa ou objeto coincide com seu lado esquerdo.

> *"Eu sei porque o João bateu nas carteiras! Ele virou para a esquerda, e não para a direita; quando ele deu 2 passos à frente, ele esbarrou na carteira. Agora ele não consegue terminar o percurso!"* (aluno A6, vídeo).

Segundo os estudos de Piaget e Inhelder (1993), essa criança se encontra na relação projetiva do espaço topológico, pois, em sua fala apresentou uma liberação do egocentrismo para a descentralização. Para os autores, com isso, a criança considera a direita e esquerda do outro como ponto de referência e não mais seu próprio corpo.

Para Saiz (2006), quando a criança consegue projetar sua direita e esquerda a partir de outro ponto de referência que não a do seu próprio corpo, demonstra a evolução da lateralização para a lateralidade.

Sequência 3- O robô esperto

A terceira sequência*,* composta por três atividades, teve como objetivo utilizar vocabulário adequado no uso da malha quadriculada.

Essa sequência atendeu à Expectativa de Aprendizagem de *interpretar e representar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço.* A seguir, apresentaremos as atividades dessa sequência.

A primeira atividade, *Comandando o robô,* teve como objetivo desenvolver a competência de comunicação em um espaço diferente da sala de aula. A finalidade era que as crianças percebessem que sua comunicação precisava ser diferente da anterior por causa do espaço em que a atividade seria desenvolvida. Inicialmente, foi explicado aos alunos que um pesquisador construiu um robô que anda de acordo com as ordens recebidas de um comandante e que eles iriam brincar de robô.

Ficou combinado que nessa atividade, o deslocamento seria realizado em um espaço quadriculado e diferente da sala de aula. Alguns alunos questionaram o porquê de o chão ser quadriculado, então, foi explicado que as informações seriam dadas para andar contando a quantidade de quadradinhos, e não passos, como na atividade anterior.

As crianças não sabiam dizer se havia um espaço na escola com o chão quadriculado. Então, foi realizado um passeio pelos espaços da escola a fim de que as crianças observassem em qual poderia ser desenvolvida a atividade. As crianças localizaram dois ambientes, o pátio e a quadra, e decidiram que a atividade seria realizada no pátio.

A informação inicial foi:

Ande 3 quadradinhos em frente, ande em frente mais um quadradinho. Marque o ponto a que chegou.

Repetimos esse processo várias vezes com variação das informações, mudando os termos de deslocamentos como, por exemplo: *siga em frente, depois, vire à sua direita e, em seguida, à sua esquerda, e também modificando a quantidade de quadradinhos andados.*

Durante o desenvolvimento da atividade as crianças ficaram muito preocupadas em não errar a quantidade de quadradinhos nem sair do espaço reservado, pois, na anterior, as crianças tinham um ponto de referência inicial, e nesta, isso não ocorreu, o que gerou certa confusão.

Essa atividade mostra a importância de um ponto de referência inicial para que as crianças se baseiem nesse ponto para iniciar o trajeto. Como afirma Saiz (2006), o sistema de referência egocêntrico se modifica com o passar do tempo, e a criança começa a incorporar novos referenciais fixos, objetivos, favorecendo a descrição da localização ou o percurso em relação a outros objetos que não o seu próprio corpo.

Então, foi combinado um ponto de partida do robô. Depois disso, as crianças se sentiram mais seguras em se deslocar conforme as informações recebidas.

A segunda atividade foi denominada *De cá para lá*. Tinha como objetivo que os alunos desenvolvessem a competência de se comunicarem de forma clara e precisa ao comandarem o robô.

Nessa etapa, foram escolhidos alguns alunos para serem os comandantes e outros para serem os robôs. Foi explicado para as crianças que, ao transmitirem as informações, teriam que utilizar termos apropriados usados para localização.

No começo, as crianças se perderam um pouco na elaboração das informações. Acreditamos que isso se deu pelo fato de que tiveram que realizar uma adaptação entre mandar andar em passos e em quadradinhos. A fala da criança exemplifica essa dificuldade:

" Mas precisa andar dentro dos quadradinhos? "
" Eu não entendi, professora, quando eu viro, é para sair do quadradinho? "(aluno A7, vídeo).

A insegurança das crianças com a mudança da magnitude do espaço, ou seja, do mesoespaço – sala de aula – para o macroespaço – pátio da escola – mostra que é preciso que o professor trabalhe com espaços de "tamanhos diferentes", o que corrobora os estudos de Galvez (1985) sobre micro, meso e macro espaço. Para micro espaço se refere àquele contemplado em sua totalidade, como, por exemplo, uma folha de sulfite. Para o meso espaço, destaca o espaço em que são necessários pequenos deslocamentos, como, por exemplo: a sala de aula, o pátio da escola. O macro espaço é o espaço em que é impossível obter uma percepção direta de sua totalidade, como, por exemplo, o quarteirão e o bairro.

Essa atividade tinha um obstáculo a mais para quem foi o comandante pelo fato de que, para transmitir uma comanda eficiente, era necessária uma interpretação do espaço a ser usado. As crianças teriam que andar na malha quadriculada e obedecer à limitação do quadriculado, enquanto no percurso realizado na sala de aula, as crianças se preocupavam com a quantidade de passos, e não com "o tipo do espaço" que usava um quadriculado.

A atividade gerou muita discussão sobre os termos utilizados, sobre pontos de referência e se o percurso estava de acordo com a informação ou não. As crianças se sentiram à vontade em intervir nas informações dadas pelo colega, e nos percursos, colocavam-se no lugar dos amigos para demonstrar como achavam que era o correto.

O comentário do aluno A8mostra que o mesmo percebeu a diferença entre as medidas dos passos e dos quadradinhos, e que isso interferiu no percurso.

> *"Ela andou três passos e eu falei: ande três quadradinhos! Então, ela não está fazendo o percurso certo."* (aluno A8, vídeo).

Essa fala mostra que a criança tem noções de distância, proporção, "tamanho" do espaço, características da noção espacial projetiva e euclidiana.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), as relações construídas pela criança, que levam em conta relações entre objetos, considerando vários pontos de vista, são denominadas Relações Projetivas. Para o autor, as Relações Métricas se caracterizam pela percepção da criança em diferenciar "tamanhos", e ainda, alteração de medidas.

A fala do aluno A9mostra que o mesmo apresenta o domínio da lateralidade, e ainda, que tem a percepção da alteração das medidas.

> *"Eu pedi: ande 4 quadradinhos e vire para a sua direita; ela andou 2 quadradinhos para a direita e continuou reta, ela tinha que se virar assim."* (aluno A9, vídeo).

Quando o aluno A9falou ao colega "vire para sua direita", mostrou que conseguia se colocar na posição do colega e que não usava mais o próprio corpo como objeto de referência.

Segundo Saiz (2006), quando a criança usa seu próprio corpo como referencial, descreve a posição de objetos ou pessoas com relação à sua própria orientação. Não é o caso do aluno A9. De acordo com a autora, esse aluno já incorporou referencial fixo, no caso, a própria colega, conseguindo descrever o percurso em relação a ela.

Com relação à lateralidade, Saiz (2006) destaca que quando a criança tem o domínio da lateralidade, reconhece as noções de direita/esquerda de outro objeto ou pessoa a partir do seu próprio corpo, o que significa que quando ela se olha no espelho, o lado direito de sua amiga refletida coincide com a sua esquerda. Dessa forma, a autora conclui que os deslocamentos para a direita e esquerda já não se mantêm constantes, mas se modificam de acordo com o objeto de referência utilizado.

No caso do aluno A9, o objeto de referência era a sua colega, que, na atividade, representava o robô.

O aluno A10 reconheceu que o trajeto feito pela colega que representava o robô não estava de acordo com a informação e disse:

> *"Está errado. Eu falei: vire para sua direita, e ela andou para frente e não andou nos quadradinhos."* (aluno A10, vídeo).

Esse trecho revela as aprendizagens do aluno A10, pois o conhecimento dessa criança para usar a noção de lateralidade sinaliza, de acordo com Saiz (2006), um avanço na construção do espaço projetivo. A autora lembra que as expressões direita/esquerda devem ser acompanhadas do objeto de referência, como fez o aluno ao dizer "*Vire para sua direita*."

Segundo Saiz (2006), saber comunicar a localização no espaço e ser compreendido requerem a compreensão do vocabulário utilizado. No caso do aluno A10, seu vocabulário não foi compreendido pelo colega receptor.

A autora comenta que formular a descrição de localização ou movimentação no espaço para que outro entenda não é fácil para as crianças. Afirma ainda que seria inútil dar e receber informações se não houvesse a lateralidade desenvolvida. Ao que parece, é o caso do aluno A10 e sua colega.

Saiz (2006) destaca que para que haja intercâmbios orais numa situação de comunicação, é preciso dois participantes em que um deles resolve uma tarefa indicada pelo outro. Tem que haver uma comunicação correta e uma interpretação correta do que foi comunicado.

Ao final da atividade, foi realizada uma discussão para esclarecer dúvidas sobre os termos utilizados e sobre a movimentação durante o percurso.

Terminada a discussão coletiva, elaboramos um fechamento com os conteúdos que foram apresentados durante todas as sequências. Saiz (2006) destaca que o vocabulário específico relativo ao espaço pode ser adquirido em atividades que explorem a oralidade, em que as crianças sejam capazes de perceber onde a comunicação falhou.

Para a autora, o momento das discussões da atividade no coletivo permite ao professor fazer as intervenções necessárias para o avanço das crianças, discutindo o vocabulário de forma significativa, sem memorização.

Leitura e Interpretação de Representações do Espaço

Conforme Curi (2013), as aquisições das competências envolvendo Relações Espaciais não possuem uma hierarquia rígida para serem desenvolvidas. Sabemos, porém, que a exploração oral é anterior a qualquer tipo de representação gráfica, assim como a Interpretação do Espaço é anterior à Construção da Representação do Espaço. No entanto, essas competências, muitas vezes, se sobrepõem ou estão interligadas, como, por exemplo, na interpretação de um trajeto, a criança pode dar informações orais. Quando as crianças realizam atividades de interpretação do Espaço, também se comunicam oralmente ou por escrito por meio de um texto. Logo, o trabalho com a interpretação do Espaço envolve também a comunicação espacial, pois as crianças usam uma determinada terminologia para fazerem a referida interpretação.

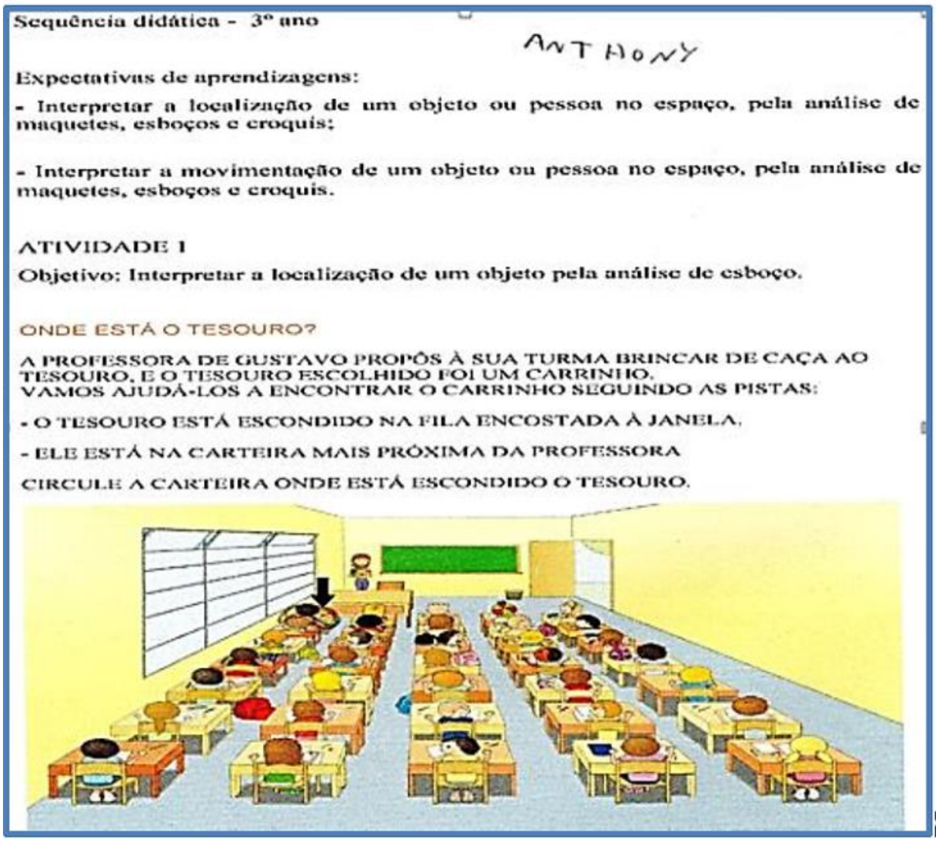
A seguir apresentamos as sequências de atividades que envolvem leitura e interpretação de representações do espaço.

Sequência 1- Onde está o tesouro?

As atividades propostas nessa sequência envolveram leitura e interpretação do mesmo espaço em croquis de uma sala de aula, planta de uma escola e no bairro. Todos esses espaços foram apresentados para as crianças em folhas de sulfite, configurando a análise de um micro espaço. A sequência foi desenvolvida em quatro aulas.

Na figura 3mostraremos uma atividade dessa sequência retirada do material didático da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo – SME, denominado Caderno de Apoio e Aprendizagem de Matemática – 3º ano, por nós adaptado.

Seu objetivo era que as crianças lessem as informações e as interpretassem para localizar a carteira em que o tesouro estava escondido.



Sequência didática - 3º ano

ANTHONY

Expectativas de aprendizagens:

- Interpretar a localização de um objeto ou pessoa no espaço, pela análise de maquetes, esboços e croquis;

- Interpretar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço, pela análise de maquetes, esboços e croquis.

ATIVIDADE 1

Objetivo: Interpretar a localização de um objeto pela análise de esboço.

ONDE ESTÁ O TESOURO?

A PROFESSORA DE GUSTAVO PROPÔS À SUA TURMA BRINCAR DE CAÇA AO TESOURO, E O TESOURO ESCOLHIDO FOI UM CARRINHO.
VAMOS AJUDÁ-LOS A ENCONTRAR O CARRINHO SEGUINDO AS PISTAS:

- O TESOURO ESTÁ ESCONDIDO NA FILA ENCOSTADA À JANELA.

- ELE ESTÁ NA CARTEIRA MAIS PRÓXIMA DA PROFESSORA

CIRCULE A CARTEIRA ONDE ESTÁ ESCONDIDO O TESOURO.

Figura 3 – Atividade 1 de interpretação do Espaço
Fonte: Caderno de Apoio e Aprendizagem – SME/SP

Nessa atividade, os alunos não tiveram dificuldades em assinalar a carteira localizada na fileira da janela perto da professora, conforme explicitado na figura 3.

Foi feita a leitura da comanda e algumas crianças explicaram o que era para fazer.

Ao que parece, os alunos tinham apercepção de que a localização na sala de aula organizada em fileiras e linhas dependia de duas informações, uma relativa à fileira, e a outra, nesse caso, ao invés de citar a linha, foi indicada a proximidade da professora.

A segunda atividade tinha como objetivo a entrega de um tesouro encontrado para um colega que se sentava na 5ª carteira da terceira fileira. Para realizá-la, as crianças teriam que usar as duas referências indicadas, a ordem das carteiras e a indicação da fileira. A comanda foi lida e discutida pela turma.

Como a disposição das carteiras da sala representada no croqui é igual ao espaço real da sala de aula, as crianças se levantavam e se deslocavam até a frente das carteiras e faziam a contagem das fileiras e das carteiras.

Cabe destacar que a comanda se referia à 3ª fileira e não dizia se era a partir da porta ou da janela. Como a sala tinha 5 fileiras, a escolha do objeto de referência, nesse caso, não interferiu.

Os alunos que participaram da pesquisa não levantaram essa dúvida, não perguntaram "a partir da janela ou da porta", talvez influenciados pela atividade anterior, que tinha a fileira próxima da janela como referência. No entanto, para localizarem a carteira na fileira, algumas crianças contavam de frente para trás, e outras, ao contrário. As figuras 4 e 5 a seguir apresentam uma resolução correta na figura 4, e a outra, a contagem de forma contrária na figura 5.

Figura 4 – Atividade 2 de interpretação do Espaço
Fonte: Arquivo da professora

Figura 5 – Atividade 2 de interpretação do Espaço
Fonte: Arquivo da professora

Esse mapa tem a mesma disposição geométrica da sala de aula real, ou seja, um espaço vivido pelos alunos. No entanto, eles iriam analisar o espaço representado e teriam que utilizar sua capacidade de se deslocar mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista.

Para que haja essa inter-relação entre interpretar o espaço perceptivo e o espaço representativo, é preciso que as relações do espaço topológico já estejam estruturadas, pois há a utilização das relações de vizinhança, separação e ordem ou sucessão.

Observamos que para a interpretação desse mapa, as crianças se utilizaram das relações projetivas de esquerda/direita, na frente/atrás, embaixo/em cima, pois estas permitem a coordenação dos objetos entre si num sistema de referencial móvel, pelo ponto de vista do observador, mostrando a liberação do egocentrismo.

A terceira atividade, apresentada a seguir, teve duas etapas: primeiramente, as crianças interpretaram o espaço do mapa da escola, e depois, interpretaram o espaço de um bairro representado em um croqui. Também essas atividades foram retiradas do Caderno de Apoio e Aprendizagem de Matemática do 3º ano.

A atividade 3 tinha como objetivo analisar os conhecimentos acerca das estruturas das relações topológicas, projetivas e euclidianas na comunicação escrita, além de analisar os conhecimentos da linguagem espacial. Os alunos tinham que interpretar a representação do espaço de uma escola num croqui e indicar o percurso do portão da entrada até a sala de aula.

As crianças estavam sentadas individualmente e cada uma delas possuía uma cópia da atividade proposta na figura 6. Foi realizada uma leitura coletiva da comanda, e depois, eles trabalharam sozinhos. Não foram feitas intervenções durante a execução da atividade, pois a intenção era que eles conseguissem colocar em prática suas aprendizagens anteriores.

Para finalizar, foi solicitada a leitura de alguns textos escritos pelas crianças. Após a leitura, foram pontuadas as observações a respeito das escritas, com o propósito de que na próxima atividade, as crianças avançassem nessa habilidade. A seguir, apresentaremos algumas resoluções com comentários.

Figura 6: Protocolo da atividade 3
Fonte: Arquivo da professora

Na figura 6, é possível perceber o caminho de setas feito pelo aluno com a indicação correta, indicando o percurso do portão até a sala de aula de número 5.

Na figura 7 é possível perceber outro traçado correto do percurso do portão até a sala 5.

Figura 7: Protocolo da atividade 3
Fonte: Arquivo da professora

Os protocolos dos alunos das figuras 6 e 7 foram acompanhados da descrição do percurso.

Na figura 6 o aluno A10 escreveu: “do portão vai reto, passa pela árvore e vira à esquerda, vai reto, passa pela diretoria, vai reto, vai até o fim do banheiro masculino, vira à direita e vai reto e chegou”.

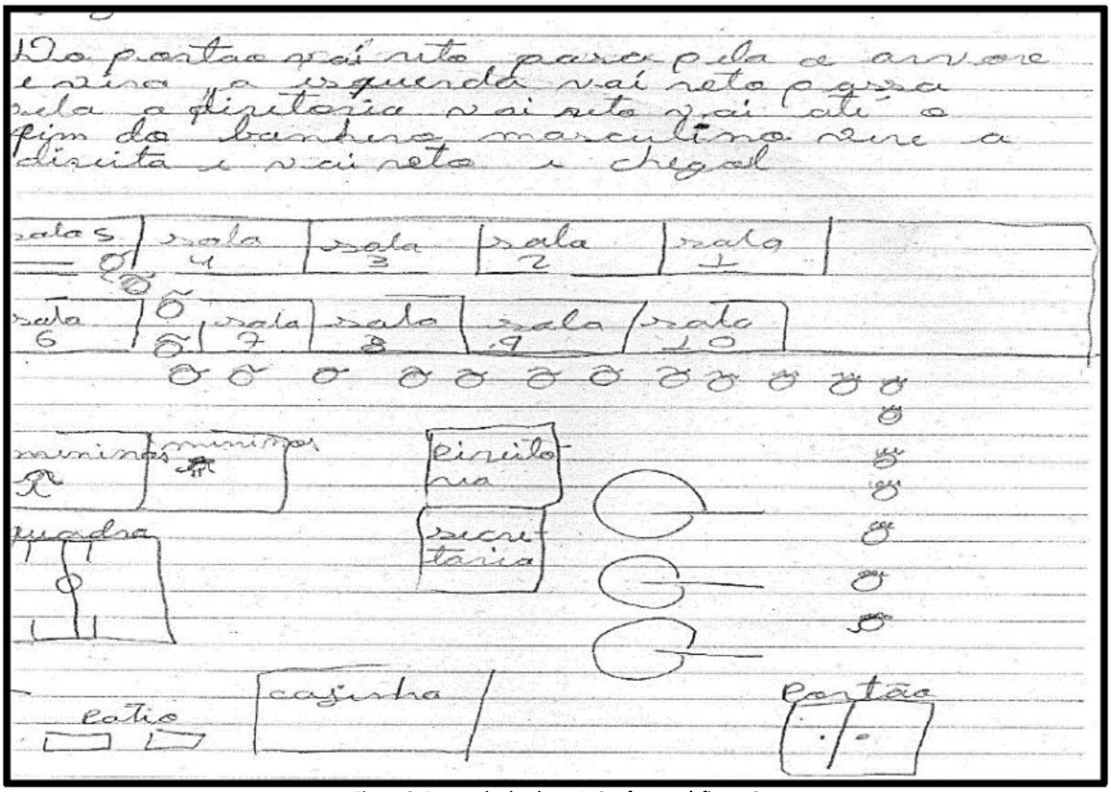


Figura 8: Protocolo do aluno A10 referente à figura 6
Fonte: Arquivo da professora

Quando o aluno A10 descreveu o caminho referente à figura 6, apontou pontos de referência que serviriam de apoio para mudar de direção, o que pode ser observado quando a criança diz: "*passa pela árvore e viro à esquerda*." Ela também mostra o desenvolvimento da lateralidade, destacando os termos de posição direita e esquerda em sua descrição.

O aluno A11 escreveu: " Eu entrei pelo portão, segui em frente, passei pela cozinha, sigo em frente passo pela diretoria, pela secretaria, viro à direita, sigo em frente, viro à esquerda, sigo em frente, viro à direita e cheguei...."

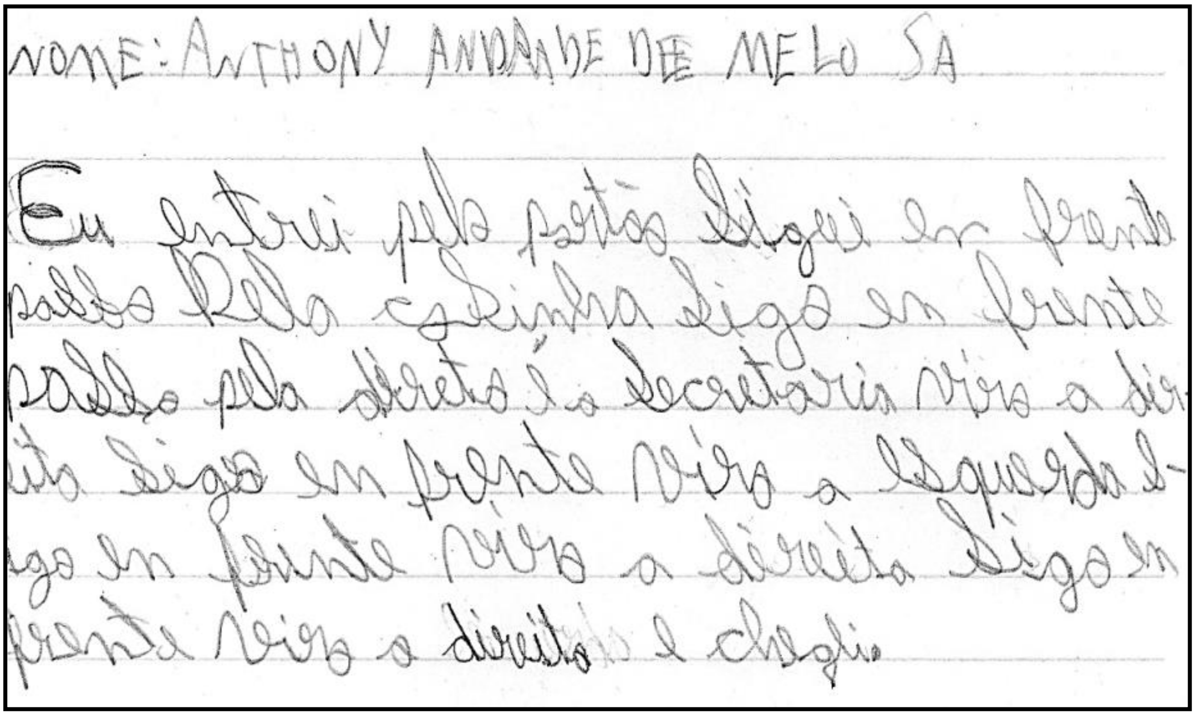


Figura 9: Protocolo do aluno A11 referente à figura 7
Fonte: Arquivo da professora

Quando o aluno A11descreveu seu trajeto referente à figura 7, ele iniciou corretamente, indicando a cozinha e a secretaria como pontos de referência e mostrando, inclusive, noção de lateralidade quando disse "*passa à direita da secretaria*."

Mas, dessa parte da descrição em diante, que requer que a criança mude de posição para identificar se viraria à direita ou à esquerda, ele mostrou dificuldades com a lateralidade. Enquanto o percurso estava na mesma posição da criança observadora, ela percebia com mais clareza quando deveria virar à direita ou à esquerda.

Na atividade da figura 10, as crianças tiveram que observar e interpretar o croqui de um bairro, indicando um percurso com pontos de referência para que outra pessoa chegasse a um determinado lugar. Para essa atividade, as crianças estavam sentadas em duplas, mas cada criança tinha uma cópia da atividade.

A intenção foi promover um intercâmbio oral entre as duplas acerca dos termos usados em deslocamentos, pontos de referência e indicação do percurso. Durante a execução da atividade não foi realizada nenhuma intervenção por parte da professora. Depois de sua finalização, foram escolhidos alguns protocolos que foram exibidos no telão. Em seguida, fez-se uma discussão coletiva dos textos, com intervenções da professora quando necessário. A seguir, apresentaremos alguns protocolos referentes à atividade, com comentários.

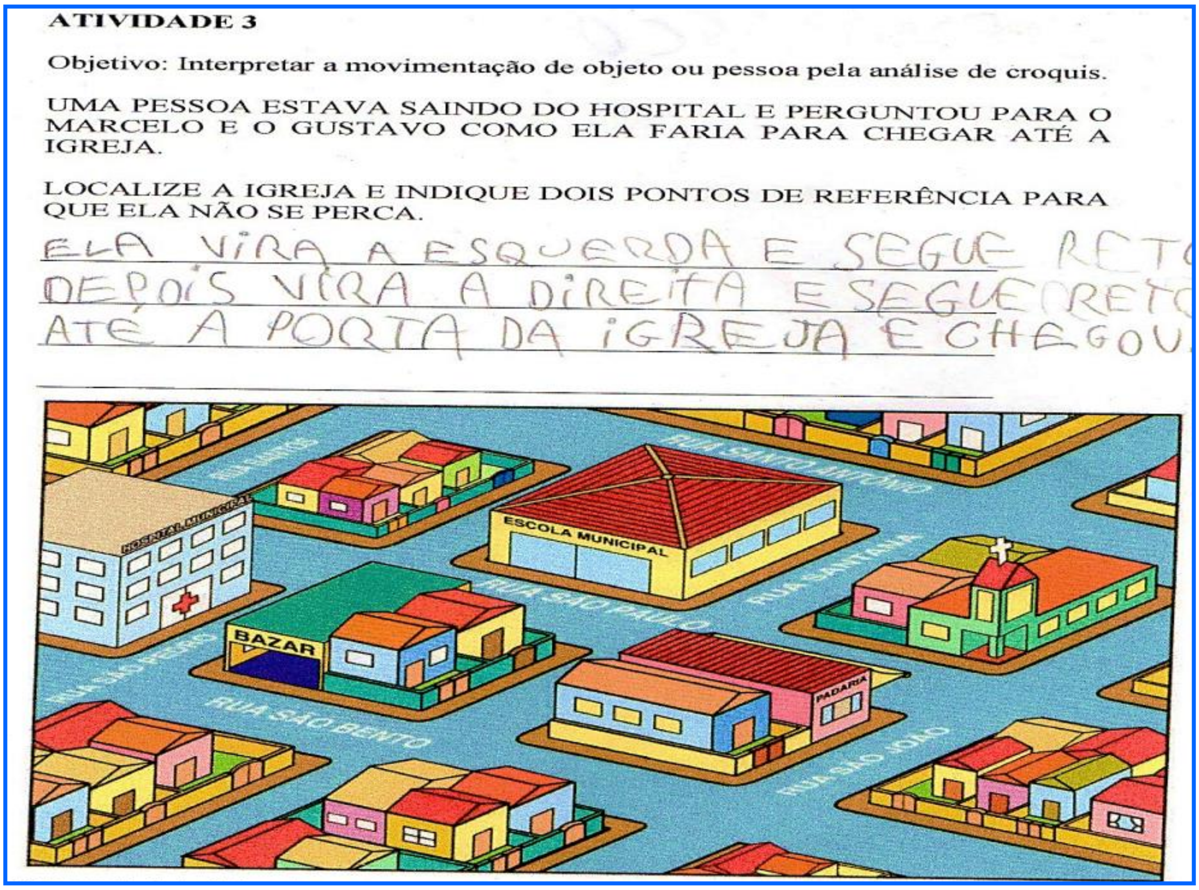
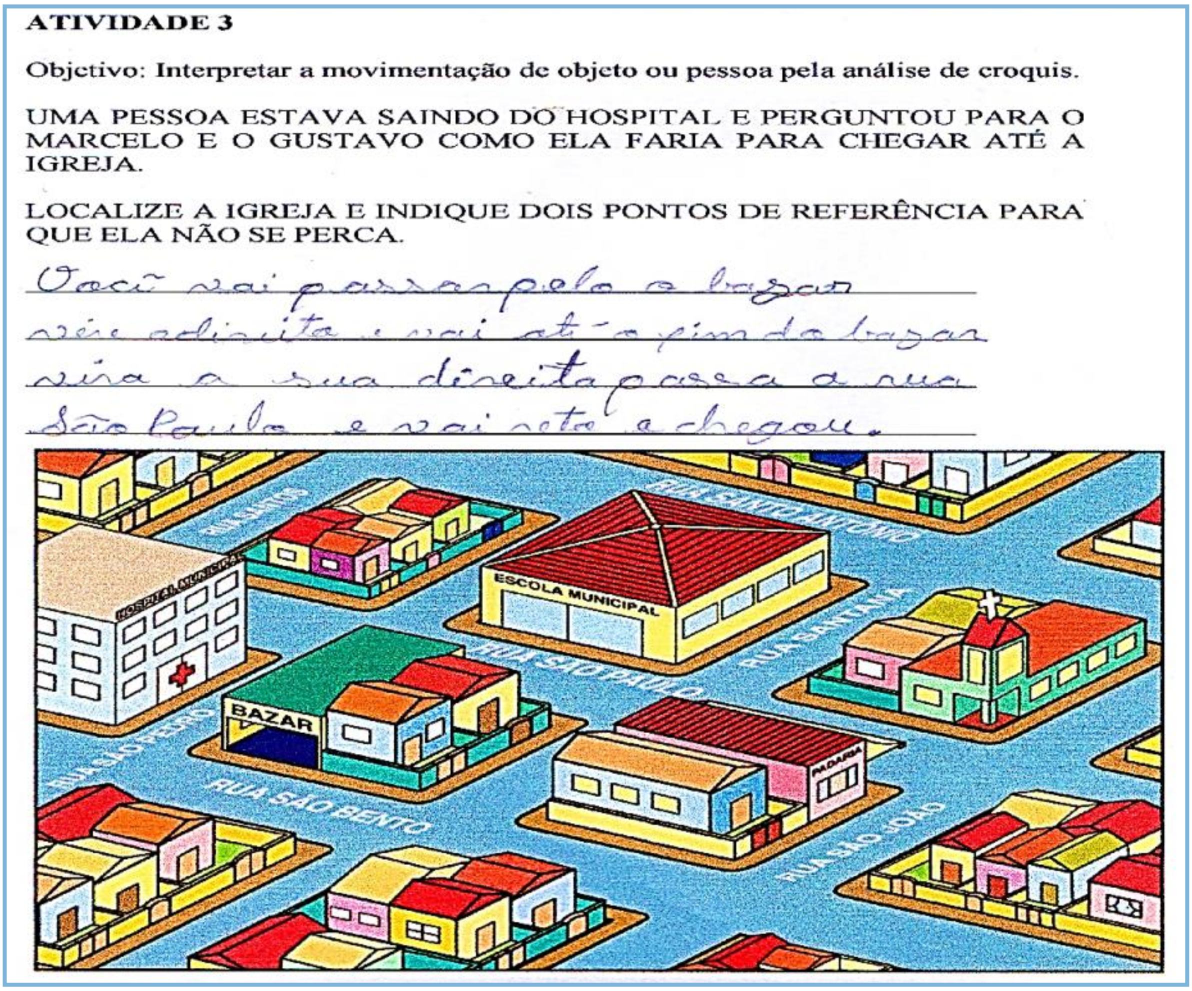


Figura 10: Parte b da atividade 3
Fonte: Arquivo da professora

Como é possível perceber, essa criança descreveu corretamente o percurso. Para fazer essa descrição, provavelmente ela deve ter raciocinado que saindo do hospital, de costas para ele, deveria caminhar à sua esquerda e depois virar à sua direita.

Mesmo usando seu corpo como referência, o que parece ter acontecido, a criança raciocinou numa posição diferente daquela que estava observando a folha de papel, o que dá indícios de que ela tenha o domínio da lateralidade, corroborando estudos de Saiz (2006), que afirma que a orientação espacial se dá “no” corpo e “com” o corpo.

O próximo protocolo da figura 11 indica dois pontos de referência (o bazar e a Rua São Paulo), conforme solicitado na comanda.


ATIVIDADE 3

Objetivo: Interpretar a movimentação de objeto ou pessoa pela análise de croquis.

UMA PESSOA ESTAVA SAINDO DO HOSPITAL E PERGUNTOU PARA O MARCELO E O GUSTAVO COMO ELA FARIA PARA CHEGAR ATÉ A IGREJA.

LOCALIZE A IGREJA E INDIQUE DOIS PONTOS DE REFERÊNCIA PARA QUE ELA NÃO SE PERCA.

Você vai passar pelo o bazar
vire a direita e vai até o fim do bazar
vira a sua direita passa a rua
São Paulo e vai reto e chegou.

Figura 11: Protocolo de aluno
Fonte: Arquivo da professora

Essa criança, ao fazer a descrição do percurso, parece ter se colocado também de costas para o hospital e seguiu passando em frente ao bazar até a Rua São Paulo; só que, para pegar essa rua, deveria virar à esquerda, e não à direita.

Embora a criança mostrasse não ter a noção de lateralidade, indicou os dois pontos de referência, conforme solicitado na comanda.

Nas duas atividades analisadas, as crianças tiveram que dispor de uma organização e orientação do Espaço.

Na primeira atividade, percebemos que as propriedades das relações topológicas estão presentes na comunicação escrita das crianças ao interpretarem visualmente o Espaço. Observamos que, simultaneamente, a criança percebe a relação de separação e vizinhança, compreendendo que os objetos ocupam posições distintas no Espaço. Além disso, as crianças utilizaram termos próprios referentes às Relações Espaciais, apontaram pontos de referência ao descreverem o trajeto e mantiveram a relação de vizinhança ao indicá-los. Indicaram com marcas próprias do percurso, como setas, e se utilizaram do conceito de lateralidade ao apontarem à direita e à esquerda do ponto de referência utilizado no percurso.

Na segunda atividade, as crianças foram colocadas numa situação de emissor de uma mensagem. Precisaram demonstrar suas habilidades de interpretação e comunicação para transmitirem a mensagem ao receptor.

Um dos pontos fortes dessa atividade foi a solicitação para que as crianças percebessem a importância da comunicação nas Relações Espaciais, ou seja, que não confundissem quem estava recebendo a mensagem, além de estarem envolvidos no real contexto social do uso desse conteúdo.

Segundo Saiz (2006), elaborar uma linguagem apropriada e interpretar as referências dadas é extremamente importante para uma comunicação de informações e para evoluir em suas conceituações sobre um tema tão complexo.

Considerações Finais

As competências de comunicação, interpretação e representação do Espaço foram utilizadas para selecionar e organizar as sequências de atividades. No entanto, ao desenvolvê-las, observamos que, muitas vezes, essas competências são imbricadas e que uma atividade com um objetivo, por exemplo, de desenvolver a competência de interpretação de um trajeto permite também desenvolver a competência de comunicação quando a criança descreve esse trajeto e se utiliza de vocabulário adequado para essa interpretação.

As atividades desenvolvidas permitiram abarcar os dois conteúdos relativos a esse tema: a localização e a movimentação. Propiciaram ainda a utilização pelas crianças de procedimentos próprios de cada um desses conteúdos, diferenciando a realização de um percurso da localização de um objeto.

As atividades permitiram ainda às crianças observarem o espaço perceptível da sala de aula ou do quadriculado da escola, por exemplo, e realizarem as atividades no espaço representativo, analisando, algumas vezes, representações desses espaços apresentados na folha de papel. Exploraram ainda micro, meso e macroespaço com procedimentos próprios para cada tipo de Espaço.

A diversidade de atividades desenvolvidas permitiu uma análise das aprendizagens das crianças em relação aos conteúdos apresentados, ao tamanho do Espaço e às competências envolvidas.

A análise realizada mostra que as crianças apresentam noções de anterioridade e profundidade no sentido de Piaget e Inhelder (1993), o domínio gradativo do vocabulário espacial, passando do uso de terminologia mais genérica (segue toda vida, vai reto) para o vocabulário mais específico (siga em frente). Várias crianças desenvolveram a noção de lateralidade e outras estão a caminho de interiorizar essa noção, além de revelar que várias delas deram indícios de compreender relações projetivas e euclidianas. A compreensão das relações projetivas é decorrente das noções de lateralidade. Mostram avanços na interpretação do Espaço quando usam outros objetos de referência que não seja seu próprio corpo. Usam vocabulário adequado quando interpretam informações sobre o Espaço.

Com essas análises, buscamos esclarecer como se deu o desenvolvimento da comunicação espacial e o avanço de um vocabulário que permitiu diferenciar e interpretar informações espaciais das crianças participantes da pesquisa.

Com relação à leitura e interpretação de representações do Espaço, a análise mostra que na representação da sala de aula organizada em fileiras e linhas, as crianças perceberam a importância de dois referenciais na representação do plano.

Na atividade que envolve o mapa da escola, as crianças desenharam o percurso corretamente, mas nem todos descreveram esse percurso de forma adequada. Enquanto podiam se colocar na mesma posição em que estavam nas carteiras, descreveram o trajeto corretamente. Quando a colocação no percurso não tinha a mesma posição da criança, houve dúvidas com relação à lateralidade.

Na atividade que envolve o mapa do bairro, a maioria das crianças descreveu corretamente um possível trajeto do hospital até a igreja, e algumas crianças indicaram inclusive pontos de referência.

A pesquisa mostra a presença das propriedades das relações topológicas na descrição das crianças ao interpretarem visualmente o Espaço. Nesse processo as crianças usaram vocabulário adequado relativo às relações espaciais e utilizaram marcas próprias como setas para indicar o percurso. Utilizaram a lateralidade ao indicarem à direita ou esquerda de um ponto de referência utilizado no percurso.

O estudo de pesquisas sobre o ensino das Relações Espaciais, a realização de pequenas pesquisas com alunos com base nas investigações já existentes, a análise dos dados dos alunos e a tomada de decisões subsidiaram as intervenções da professora pesquisadora. A compreensão do pensamento dos alunos ao desenvolverem atividades de Relações Espaciais e a discussão de seus procedimentos permitiram avanços nas aprendizagens dos alunos e também nas práticas da professora. Consideramos que a apropriação das pesquisas estudadas e o desenvolvimento de pesquisas com as crianças proporcionaram segurança para novos trabalhos e para o crescimento profissional da professora.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** v.3. Brasília, DF, 1997. 42 p.

CURI, E. O currículo prescrito e avaliado pelo Saeb no que se refere ao tema relações espaciais: algumas reflexões in: CURI, E. VECE, J. P. **Relações espaciais** e práticas educativas de professores que ensinam matemática. São Paulo: Editora Terracota, 2013.

GALVEZ, G. **El aprendizage de laorientación em elespacio urbano**. Uma proposición para La enseñanza de La geometria em La escuela primaria. Tese de doutorado. México, 1985.

INHELDER, J; INHELDER, B. **A representação do espaço pela criança**. Porto Alegre, RS: Artmed, 1993.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema,** v. 17, n. 21, p. 81-140, Unesp: Rio Claro, 2004.

SAIZ, I.A direita de quem? Localização espacial na Educação Infantil e séries iniciais, In: PANIZZA, M. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e séries iniciais: análise e propostas.** Porto Alegre, RS: Artmed, 2006. p. 143-166.

SÃO PAULO (Estado). **Orientações curriculares de Matemática** – 1º ao 5º anos. EMAI. São Paulo, 2012.

SÃO PAULO (Município). Secretária Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica**. Cadernos de apoio e aprendizagem: Matemática** – 1º ao 6º anos. Caderno do Aluno. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010a.

__________. Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem: **Matemática** – 1º ao 6º anos. São Paulo, 2007.

Capítulo 9

"Vai" e "Empresta": A relação entre o Conceito e o Procedimento, entre o Ensino e a Aprendizagem

Leila Pessôa Da Costa[1]
Regina Maria Pavanello[2]

Introdução

Todo professor enfrenta um enorme desafio para que os alunos se apropriem do conhecimento produzido pela humanidade, desafio no qual está envolvida a concepção que o professor tem acerca de como ocorre o processo de ensino e de aprendizagem e do conhecimento que ele, professor, tem do conteúdo a ser ensinado.

Para Brousseau (2008) fazem-se necessárias algumas condições para que o conhecimento matemático se efetive, das quais uma se relaciona a uma nova forma de olhar para o erro do aluno: não como algo imprevisível, mas como um elemento valioso no processo da aquisição do saber.

Tal ideia foi o ponto de partida para analisarmos, na pesquisa de doutoramento da primeira autora, as possíveis contribuições de um processo de reflexão sobre a prática em sala de aula de dez professoras de 4ºs e 5ºs anos do Ensino Fundamental em relação ao conteúdo números e operações, reflexão esta que teve como ponto de partida os erros encontrados na produção de seus alunos e o conhecimento necessário às professoras para intervir na aprendizagem desses alunos.

Com relação ao processo de reflexão, vários autores têm introduzido alguns conceitos, entre eles o de "profissional reflexivo" (SCHÖN, 1992) que ecoa, segundo o próprio autor, mesmo que de forma diferenciada, pensamentos expressos nas obras de escritores como Léon Tolstoi, John Dewey, Alfred Schutz, Lev Vygotsky, Kurt Lewin, Jean Piaget, Ludwig Wittgenstein e David Hawkins, que possuem tradição do pensamento, epistemológico e pedagógico (*apud* SCHÖN, 1992, p. 80).

A investigação da prática proposta por Schön (2000) se fundamenta em quatro aspectos: **conhecer na ação; reflexão na ação, reflexão sobre a ação** e a **reflexão sobre a reflexão na ação**.

[1]Professora Adjunta do Departamento de Teoria e Prática da Educação da Universidade Estadual de Maringá. Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática. dacosta.leila@gmail.com
[2]Professora Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas. Professora convidada do Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. reginapavanello@hotmail.com

O **conhecer na ação** está relacionado ao saber fazer revelador do saber tácito implícito em nossas ações e que diz respeito “[...] às sequencias de operações e procedimentos que executamos; aos indícios que observamos e as regras que seguimos; ou aos valores, as estratégias e aos pressupostos que formam nossas ‘teorias’ da ação” (SCHÖN, 2000, p. 31).

A **reflexão na ação** é o pensar “[...] retrospectivamente sobre o que fizemos, de modo a descobrir como nosso ato de conhecer-na-ação pode ter contribuído para um resultado inesperado” (SCHÖN, 2000, p.32). É uma reflexão que pode ocorrer após o fato ou em uma pausa no meio da ação e tem uma função crítica, pois questiona tanto a estrutura de pressupostos do ato de conhecer na ação, reestruturando as estratégias utilizadas, como a forma de compreender ou conceber os problemas; enfim, se relaciona a dar uma nova forma a esse saber.

A **reflexão sobre a ação** é o momento que se dá depois da prática, quando revisitamos a ação e retomamos nosso conhecimento na ação, analisando-o com vistas à ampliar a conscientização da ação.

A **reflexão sobre a reflexão da ação** permite a nós, professores, refletir sobre o momento da reflexão na ação, evidenciando qual o significado ou significados que atribuímos ao ocorrido. E é essa experiência reflexiva que pode mudar a atuação profissional, tornando-a mais significativa à medida que reconstrói qualitativamente o saber e, consequentemente, o saber fazer.

No projeto de pesquisa empreendido, nos propusemos investigar as possíveis contribuições de um processo de reflexão sobre a ação/prática de professoras, que denominamos de formação na docência, por ser um processo que ocorre durante a atuação desses profissionais, diferentemente daquele que denominamos de formação da docência, que se refere ao processo de formação acadêmica do profissional para o exercício docente.

Nesse processo, a reflexão tem como objetivo atribuir um sentido ao que se faz, seja durante o desenvolvimento da ação – reflexão na ação, ou posteriormente, sobre a ação, como um instrumento rico para a aprendizagem, em especial para a articulação entre a teoria e a prática, a qual se vai consolidando com a **reflexão sobre a reflexão da ação.**

As ações reflexivas com as professoras perpassaram por esses quatro eixos, não de forma equitativa, mas sempre que necessário face ao movimento empreendido e ao objeto de conhecimento.

Em relação aos alunos, a **reflexão sobre a ação** nos permitiu verificarmos seus **conhecimentos na ação**, a partir da descrição e da análise das estratégias que utilizaram com vistas a compreender o conhecimento edificado e a reconstrução necessária para a sua apreensão.

Da pesquisa

Elegemos como objeto de conhecimento para ser apreendido e ensinado, numa relação docente/ discente, um dos eixos avaliados na Prova Brasil[3] (PB): Números e Operações (BRASIL, s/d) e, neste capítulo, discutiremos o processo de reflexão empreendido na pesquisa em relação ao cálculo de uma adição ou de uma subtração de números naturais.

Nesse caso, consideramos que esse cálculo envolve números de uma mesma ordem ou de ordens diferentes, intercalando zeros ou com zeros finais, com vistas à compreensão dos processos envolvidos e com foco na utilização das técnicas operatórias, como um dos descritores avaliado na PB.

Participaram desse estudo professoras[4] de duas escolas da rede municipal de ensino de um município situado na região noroeste do Estado do Paraná, escolas por nós denominadas de Escola A e Escola B[5]. Na Escola A contamos com a participação de duas docentes atuantes em 4ºs anos e duas em classes de 5º ano que foram denominadas de P1A, P2A, P3A e P4A respectivamente e, na escola B, com três professoras com classes de 4ºs anos (P1B, P2B, P3B) e duas com classes de 5ºs anos (P4B e P5B).

Ambas as escolas se situam em pontos periféricos do município: um na região norte e outro na região sul; contudo, apesar de estarem em locais distintos geograficamente, não apresentavam discrepâncias significativas em relação ao espaço físico e a disponibilidade de material. O único diferencial observado entre elas está relacionado à condição sócio- familiar dos alunos por elas atendidos: no caso da Escola A, a clientela é proveniente de famílias com baixíssimo poder aquisitivo, que atuam na informalidade ou em subempregos, e residem em casas e terrenos cedidos pela Prefeitura, enquanto as famílias dos alunos da Escola B, apesar de pertencerem a um grupo de baixa renda, possuem empregos mais estáveis e moradias próprias.

[3]Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - Anresc (também denominada "Prova Brasil"): trata-se de uma avaliação censitária realizada bianualmente envolvendo os alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas públicas. Participam desta avaliação as escolas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados, sendo os resultados disponibilizados por escola e por ente federativo.
[4]Utilizamos nesse estudo o gênero feminino ao nos referirmos a essas profissionais, pois o universo pesquisado foi composto por mulheres.
[5]Para conseguir a participação de 10 sujeitos na pesquisa, número esse que considerávamos necessário para sua realização, a SEDUC designou as duas escolas que participariam do estudo.

A violência do bairro em que está situada a Escola A acaba incidindo no tempo de permanência dos profissionais que atuam na escola. Os gestores atuantes na Escola B estão há mais tempo nela do que os da Escola A, o mesmo ocorrendo com as professoras.

Por serem escolas situadas na periferia do município, não são as primeiras a terem suas classes escolhidas pelas professoras da rede, de modo que acabam, muitas vezes, por não terem seus quadros de professores completados.

Não ficou claro para nós se, na atribuição de classes às professoras, é considerada a preferência destas ou as necessidades da rede, mas o lugar em que atuam repercute na avaliação que a SEDUC faz, formal ou informalmente, de cada professora. Contudo não nos cabe aqui aprofundar essa questão, mas salientar o fato de o contexto social no qual a escola se insere marca sobremaneira a forma como o trabalho é desenvolvido e concebido pela equipe da escola e pela SEDUC. Pudemos perceber que, embora as duas escolas participem de um mesmo sistema de ensino, recebam as mesmas orientações e estejam comprometidas com a boa qualidade da educação que promovem, o trabalho nelas desenvolvido não ocorre da mesma maneira.

O movimento inicial para a aproximação com as professoras foi à análise de atividades elaboradas por elas para serem realizadas pelos alunos, análise esta que teve como objetivo não só verificar o tipo de atividades que estavam sendo desenvolvidas, mas também como os alunos as executavam.

Constatamos que o tema Número e Operações (NO) foi aquele a que as professoras dedicaram um maior tempo de ensino, em especial o ensino das quatro operações.

As primeiras atividades dos alunos sobre esse tema com as quais tivemos contato estavam corrigidas pelas professoras ou pelos alunos, pelo fato das docentes acreditarem que eles assim deveriam ser apresentados à pesquisadora e aos demais leitores, entre eles a pedagoga da escola, as supervisoras da SEDUC e os pais dos alunos. Esse procedimento reforça a crença de que toda produção do aluno deve ser corrigida antes de socializada, um procedimento comum na prática escolar em que o erro é visto como algo destinado a ser sistematizado, caso não seja corrigido, e que implica em tê-lo como referência para a avaliação do trabalho do professor, muitas vezes classificando-o entre aqueles que acompanham ou não acompanham o desenvolvimento do aluno.

O Caderno de Classe das professoras foi outro material ao qual recorremos para verificar as atividades propostas para os alunos em relação ao tema NO. Nele as professoras anotam o planejamento diário das atividades, registrando os exercícios dados, colando as folhas distribuídas, etc. Em geral, esses registros não mostram diferenças significativas nas atividades desenvolvidas em diferentes turmas de um mesmo ano.

As Reuniões de Planejamento foram outros momentos que possibilitaram perceber a dinâmica do trabalho, visto ser neles, na maioria das vezes, que as orientações são apresentadas e as dúvidas evidenciadas.

Nessas reuniões, em ambas as escolas, pudemos perceber não ter havido uma avaliação diagnóstica que subsidiasse a elaboração do planejamento ou que justificasse a opção por determinados procedimentos metodológicos:

> *Dentro desta proposta eu posso passar operações assim, soltas? (PB1).*
> *Não pode! ((risos)) Só se for situação problemas (PB3).*
> *Eu faço para casa, às vezes, é bom evitar. (PB3).*

Essas falas mostram que as professoras gostariam de trabalhar "as contas soltas", os algoritmos especificamente, talvez por acreditarem que o treino e a exercitação do algoritmo seja a metodologia mais adequada para que os alunos conseguirem dominá-las, além de evidenciar as dificuldades que os alunos apresentam.

Acreditamos, sim, que, tendo compreendido determinado procedimento, se faz necessário exercitá-lo para poder dominá-lo e realizá-lo com tranquilidade, mas o exercício sem a compreensão das ações envolvidas nesse procedimento acaba por confundir os alunos, como observaremos na sequência das ações desenvolvidas por uma aluna (Figura 1), na execução do algoritmo relativo à multiplicação:

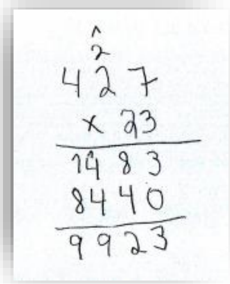


Figura 1: Produção de aluna do 5º ano: sequência das ações na execução do algoritmo.

> A: multiplico o 3 pelo 7 e somo o resultado ao número 2 (dezenas do multiplicador), tenho 23, coloco o 3 e vai 2. Multiplico o 3 pelo 2 e somo o que foi e dá 8. Multiplico o 3 pelo 4, dá 12 e somo o 2 e dá 14. Depois coloco o zero embaixo do 3 e multiplico o 2 pelo 7, dá 14, coloco o 4 e vai 1, multiplico o 2 pelo 2 e dá 4 (não faz o reagrupamento), depois multiplico o 2 pelo 4 que dá 8. Depois somo tudo. (Aluna do 5º ano da Escola B).

Observamos a utilização desse procedimento pela aluna em diferentes momentos (DA COSTA, 2015, p. 177) e percebemos que ela mantém sempre a mesma ordem na execução do algoritmo da multiplicação. Ao empreendermos com ela o processo reflexivo sobre as ações que utilizava para a resolução do algoritmo, a aluna respondia sempre que 'não sabia fazer, por isso fazia desse jeito'.

Percebemos pela resposta dada que seu conhecimento estava apoiado no fato de ser necessária uma ordem na execução do algoritmo e que esse algoritmo é composto de ações de multiplicação e de adição. Ao conceber a necessidade de uma ordem para a resolução do algoritmo, acabou estabelecendo uma sem considerar o conceito subjacente a cada ação desenvolvida.

A preocupação das professoras em relação às "contas" mostrou-nos que elas estavam sensíveis ao fato de os alunos não compreenderem os algoritmos, mas não conseguiam identificar o que ocasionava essas dificuldades.

É necessário salientar que o algoritmo é uma das ferramentas possíveis de serem utilizadas na resolução de problemas, contudo, embora não seja a única, é a mais valorizada pela escola, tanto que outras são abandonadas ou pouco exploradas, entre elas o desenho, o uso de material manipulável, a linguagem oral, enfim, qualquer recurso que permita a outra pessoa compreender o que queremos comunicar ao realizarmos uma operação.

Enquanto os algoritmos possam ser vistos como ferramenta na resolução de problemas, eles não devem ser abordados tendo como preocupação apenas a apreensão dos procedimentos a serem executados na sua resolução, mas também visando a compreensão dos conceitos subjacentes às ações executadas. Além disso, o uso dessas ferramentas na resolução de problemas implica também compreender quando emprega-las, dar sentido a sua utilização, e isso só é possível a partir das situações problemas. No entanto, por não ser esse o foco deste trabalho, não nos aprofundaremos nas distintas situações que compõem o campo conceitual das estruturas aditivas.

Em relação aos algoritmos destacamos que as dúvidas relacionadas a essas dificuldades foram observadas tanto entre as professoras da Escola B como as da Escola A e, para poder discutir as questões relacionadas a essas dificuldades, procedemos a uma avaliação diagnóstica com todos os alunos dos 4ºs e dos 5ºs anos, cujo objetivo era o de identificar a natureza dos possíveis erros apresentados por eles em relação a esse tema. Essa proposta tinha por objetivo evidenciar às professoras a importância da avaliação diagnóstica como instrumento para a seleção e a organização dos procedimentos e recursos necessários ao ensino.

O exame da produção dos alunos confirmou os resultados obtidos por eles na PB a que se submeteram: dificuldades em relação ao conteúdo avaliado nos descritores escolhidos como base para nossa pesquisa e, em especial, no desenvolvimento dos algoritmos da adição e da subtração.

Algumas das dificuldades apresentadas são esperadas quando do início da aprendizagem desses conteúdos, mas elas já deveriam ter sido sanadas em alunos dos anos observados em nossa pesquisa. Isso nos faz refletir serem essas dificuldades que, ao persistirem ao longo dos anos, acabam gerando problemas para as crianças, os quais, podem leva-las a se afastarem desse objeto de conhecimento.

Observamos que esses problemas persistem e são semelhantes em ambos os anos de ensino, como mostra o Quadro 1 com relação aos algoritmos da adição e da subtração.

4º ano	5º ano
♦ Resolução do algoritmo: aspectos gerais ♦ Algoritmo da adição com agrupamento[6] ♦ Algoritmo da subtração com desagrupamento[7]. ♦ O papel do zero ♦ Tentativas de articular ao processo de pensamento a sequência do algoritmo	♦ Algoritmo da adição com agrupamento[8] ♦ Algoritmo da subtração com desagrupamento[9] ♦ Algoritmo da multiplicação com 1 e 2 algarismos no multiplicador. ♦ Compreender a ordem que está sendo multiplicada ♦ Trocando a posição dos algarismos no número ♦ O papel do zero ♦ Tentativas de articular ao processo de pensamento a sequência do algoritmo

Quadro 1: Dificuldades apresentadas pelos alunos dos 4ºs e 5ºs anos relacionadas à utilização dos algoritmos
Fonte: DA COSTA, 2015, p. 172.

De forma geral, observamos algumas incorreções na produção dos alunos tal como apontado por Dockrell, Mcshane (2000) e Batista (2009), entre elas:

- Copiar errado o número ao armar o algoritmo, escrevendo, por exemplo, 59 ao invés de 89.
- Após realizar o agrupamento, não fazer o transporte correto: ao multiplicar (2 x 6, por exemplo) ou somar um número (6 + 6) ou transportar o valor incorreto (o 2 ao invés do 1).
- Errar no cálculo/contagem ao adicionar ou subtrair um número do outro.
- Não finalizar o algoritmo.

[6]Também conhecido como ‘com reserva’ ou ‘vai um’.
[7]Também conhecido como ‘empréstimo’.
[8]Também conhecido como ‘com reserva’ ou ‘vai um’.
[9]Também conhecido como ‘empréstimo’.

Em relação ao algoritmo da adição com agrupamento (‘reserva’ ou ‘vai um’), tanto na ordem das unidades como na das dezenas ou centenas quando o aluno deve transportar (reservar) para a ordem seguinte o agrupamento realizado (‘vai um’), observaram-se várias incorreções, tais como:

- Ao ‘montar a conta’ (colocar os números verticalmente) não obedecer a ordem/classe do número. Por exemplo, 23 + 5:

2 3
5 +

- Ignorar o agrupamento realizado na ordem anterior, ao adicionar as parcelas:

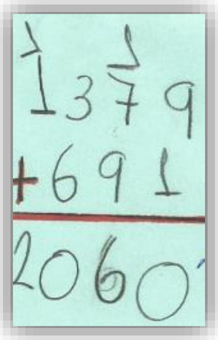


Figura 2: Produção de aluno do 5º ano: ignora o agrupamento realizado na ordem anterior

- Ignorar uma das ordens ao adicionar as parcelas, sem concluir a operação

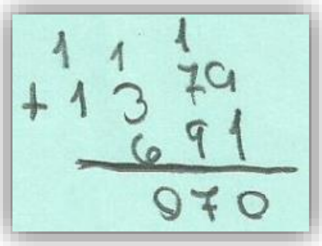


Figura 3: Produção de aluno do 5º ano: ignora uma das ordens ao adicionar as parcelas, sem concluir a operação

- Ignorar o agrupamento realizado na ordem anterior ao adicionar as parcelas e somar o agrupamento realizado na ordem anterior. Por exemplo, ao colocar no total o número 2, soma o número 1 da primeira parcela ao 1 do agrupamento realizado em ordens anteriores a que está somando[10], como se observa abaixo:

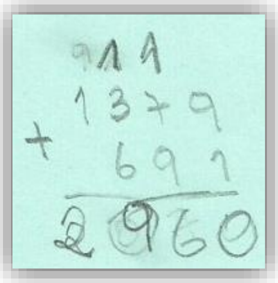


Figura 4: Produção de aluno do 5º ano: ignora o agrupamento realizado na ordem anterior ao adicionar as parcelas e somar o agrupamento realizado na ordem anterior

[10]A explicação anotada no texto foi a dada pelo aluno após a realização do algoritmo.

- Ignorar o agrupamento realizado na ordem anterior e fazer uso da adição e da subtração. Por exemplo, ao invés de somar o 3 e o 6 na ordem da centena, subtrai do número 6 o 3 e soma-o a quantidade anotada no agrupamento anterior, que não foi utilizado na ordem da dezena[11]

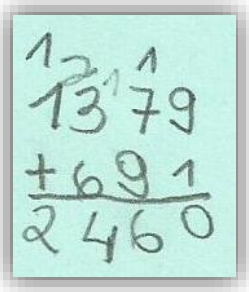


Figura 5: Produção de aluno do 5º ano: ignora uma das ordens ao adicionar as parcelas, sem concluir a operação

- Repetir o algarismo que está nas parcelas: na ordem da unidade, copiar a unidade da última parcela; na ordem da dezena, copiar a dezena da primeira parcela, e assim sucessivamente.

3	4	
4	2	+
4	2	

No algoritmo da subtração com desagrupamento ('empréstimo'), quando o algarismo do subtraendo é maior que o do minuendo e o aluno deve recorrer à ordem imediatamente superior para fazer as trocas (desagrupamento), ou 'empréstimo', foram observados os seguintes erros:

- Subtrair o minuendo do subtraendo, às vezes em todas as ordens, ou apenas em uma delas, como em:

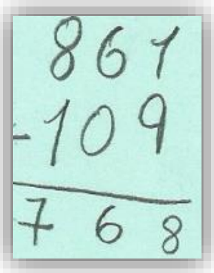


Figura 6: Produção de aluno do 5º ano: subtrai o minuendo do subtraendo

- Desconsiderar o 'empréstimo'(desagrupamento) feito a uma determinada ordem, ao realizar a subtração dos números dessa ordem:

3		
$\cancel{4}$	1	
2	5	-
2	6	

[11]A explicação anotada no texto foi a dada pelo aluno após a realização do algoritmo.

Outro aspecto que os alunos demonstraram dificuldade em compreender está relacionado ao papel do zero na composição do número. Visto, em geral, como ‘não vale nada’, no sentido de que não há valor algum naquela ordem, não sabem como operar quando ele está presente, como observamos no diálogo com uma aluna ao tentar resolver o algoritmo 30 - 13:

> *P[12]: O que quer dizer essa ‘conta’?*
> *A: Que de 30 eu tenho que tirar 13.*
> *P: Muito bem, pode fazer.*
> *A: Mas como? Do zero não dá para tirar 3. (Aluna do 4º ano da Escola A)*

Operar com números que tenham zero em uma das suas ordens foi outra das dificuldades apresentadas pelos alunos, tanto na adição como na subtração. Por exemplo, ao registrarem a diferença ou a soma, os alunos o copiam na coluna em que ele aparece:

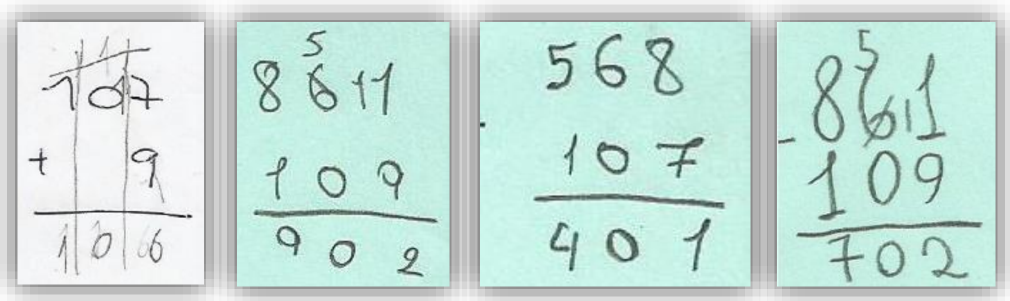


Figura 7: Produções de alunos dos 4ºs e 5ºs anos: desconsideram a operação quando o zero aparece em uma das ordens.

Nessas produções constatamos a dificuldade dos alunos em compreenderem a estrutura decimal do Sistema de Numeração Decimal (SND): por exemplo, perceber que um determinado número pode ser composto e decomposto de diferentes maneiras, ou seja, que 36 são três dezenas e seis unidades, ou 3 dúzias e ainda 36 unidades.

Contudo, vários autores, como Matos (2005, p.3), salientam que dominar as características do nosso sistema de numeração é uma tarefa bastante complexa, que envolve uma construção social influenciada por diversos fatores, entre os quais o mundo profissional, da tradição familiar, dos matemáticos, dos fazedores de opinião pública, dos formadores de professores, etc.

Pesquisas apontam que a aprendizagem do número não se configura como uma tarefa fácil, visto que ela depende da aquisição de um campo de conceitos organizados a partir de um determinado sentido e que envolve representações gráficas arbitrárias. Isso pressupõe que essa aprendizagem se faz ao longo de um caminho e, portanto, não se inicia e nem se esgota na escola.

[12]A letra P indica a fala da pesquisadora e a letra A, a fala da aluna

Um desses aspectos está relacionado aos códigos simbólicos que utilizamos, ou seja, os números, que como aponta Fayol (2012, p.27), são arbitrários, ou seja, "os significantes que eles empregam não têm semelhança alguma com aquilo a que remetem (os significados)".

Esse autor aponta a simplicidade do código indo-arábico que utilizamos, visto que este possui apenas dez elementos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e o princípio da notação posicional, mas observa que, no trabalho sistemático realizado pela escola, essas notações escritas "são em geral descobertas mais tardiamente do que as formas verbais dos nomes dos números". Não obstante, em face da disponibilidade de recursos e tecnologias com as quais as crianças se defrontam diariamente: celulares, relógios, painéis, etc., estas descobertas são cada vez mais precoces.

O trabalho de Hughes (*apud* FAYOL, 2012, p. 32) possibilitou se perceber que a notação posicional gera problemas com crianças de 4-5 anos que, entretanto, não mostram dificuldade em associar algarismos a quantidades de objetos, inclusive no caso do zero. Os obstáculos aparecem e se acentuam quando da passagem de números de um algarismo para os de dois, depois de três e por fim de *n* algarismos, pois essa passagem exige a ativação de um novo mecanismo: o valor posicional dos algarismos.

Com relação ao valor posicional dos algarismos, Fayol (2012, p. 32) salienta que sua compreensão envolve o conhecimento de que o valor de posição cresce da direita para a esquerda em potências de 10; que pode se obter o valor de um algarismo multiplicando-o pela potência da base correspondente à posição que ele ocupa e ainda que o valor de um número é igual à soma dos valores representados por todos os algarismos.

Com relação à numeração escrita, Lerner e Sadovsky (1996, p. 95) salientam que ela é mais regular que a numeração falada, mas é muito mais hermética "porque nela não existe nenhum vestígio das operações aritméticas racionais envolvidas [...] (que) só podem ser deduzidas a partir da posição que ocupam nos algarismos".

Assim, para conciliar esses dois aspectos da escrita numérica – o nome dos números e a posicionalidade – é preciso experiência e esforço cognitivo, visto que seu significado não é transparente, tanto na sua forma verbal como na simbólica, e os erros apresentados pelos alunos refletem essa dificuldade, em especial quando se faz necessário o uso do zero, como, por exemplo, ao escrever o número três mil quatrocentos e nove as crianças podem fazê-lo, tanto escrevendo 30004009, como

3004009 ou, ainda, 349, isto é, as crianças colocam zeros a mais ou a menos.

Ao apropriar-se do sistema de numeração, as crianças precisam "descobrir o que ele oculta" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 111) e isso se inicia na interação social quando se possibilita à criança tomar consciência do procedimento que utiliza, pela confrontação que se faz no coletivo dos diferentes procedimentos utilizados. Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009, p. 43) ressaltam que a compreensão desses conceitos básicos não se configura como um pré-requisito para a aprendizagem, mas se desenvolve à medida que a criança pensa e resolve problemas.

Assim, operar algoritmicamente requer que os alunos conheçam as características do SND e os conceitos subjacentes às ações desenvolvidas nessa operação.

Dos conceitos subjacentes aos algoritmos de adição e subtração

Uma das formas de calcular o resultado das operações elementares é mediante o uso dos algoritmos, procedimentos que apresentaram variadas forma entre as sociedades e ao longo do tempo. Mas, quaisquer que sejam os escolhidos como referência para o ensino, as ações neles envolvidas podem evidenciar ou ocultar os conceitos subjacentes a sua utilização.

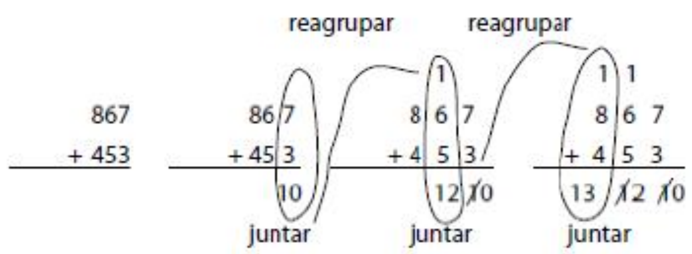
O cálculo realizado mediante os algoritmos não impede ou se sobrepõe a outras formas possíveis de sua realização, como por exemplo, com a utilização de uma calculadora, ou ainda, mentalmente, tanto utilizados isoladamente ou de forma combinada.

Parra (1996, p. 189) evidencia que o cálculo mental é um conjunto de procedimentos que se articulam para a obtenção de um resultado exato ou aproximado, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido. A autora aponta, ainda, que os procedimentos do cálculo mental "se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números". (PARRA, 1996, p. 189).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, p. 74) apontam que adquirir habilidade em cálculo "depende de vários fatores entre os quais o domínio de certos processos aritméticos conhecidos como tabuadas, listas de fatos fundamentais, leis, etc" e que a construção desse repertório básico é o que subsidiará a ampliação dos diferentes tipos de cálculo (mental ou escrito, exato ou aproximado) visto que esses diferentes tipos são complementares e estão relacionados, de modo que, por exemplo, "o cálculo escrito, para ser compreendido, apoia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações" (BRASIL, 1997, p. 75).

No nosso caso, os algoritmos, de acordo com Van de Walle (2009, p. 254,) são estratégias de cálculo tradicional e que devem ser ensinados depois do trabalho com "estratégias inventadas". O autor considera que os algoritmos tradicionais da adição e da subtração exigem a compreensão do reagrupamento, que os termos 'vai um', 'empresta 10' são conceitualmente enganosos e que o termo reagrupamento tem pouco significado para crianças pequenas, motivo pelo qual, se deveria usar 'trocar' preferivelmente.

No caso do algoritmo habitual da adição utilizamos as ações de agrupar elementos de uma determinada ordem e reagrupá-los em uma nova ordem. Outro de seus aspectos é que ele se inicia pela ordem das unidades, ou seja, da direita para a esquerda, evitando retornarmos ao já somado cada vez que tivermos que realizar um transporte para controlar o resultado obtido. Assim, por exemplo, o cálculo de 867 + 453 passa pelos movimentos de agrupar e reagrupar como se observa na Figura 8:



Fonte: LOUREIRO, 2004, p.24.

Figura 8 : Algoritmo habitual da Adição

Vale a pena explicitarmos alguns aspectos referentes aos procedimentos utilizados nesse algoritmo que podem ocasionar os equívocos observados na produção dos alunos. O primeiro deles está relacionado à direção a ser seguida para a sua resolução: da direita para a esquerda. Esse sentido acaba sendo de difícil compreensão para os alunos, considerando que este é o primeiro algoritmo ensinado na escola e que, até esse momento, a direção utilizada pelos alunos era a da esquerda para a direita, tanto na leitura como na escrita de palavras e números.

Podemos até manter a ordem da esquerda para a direita, mas isso nos faria retornar ao já somado cada vez que tivéssemos que realizar um transporte para controlar o resultado obtido, procedimento esse que contraria também o objetivo do algoritmo, que é o de se poder fazer cálculos de uma forma mais econômica.

Outro aspecto a ser observado é que os alunos somam sem necessidade de usar o algoritmo, em especial quando se trata de pequenas quantidades, como por exemplo, 2 + 5. Esse fato impede que eles compreendam o valor da utilização dessa ferramenta, em função também de que para “facilitar” a compreensão da conta “armada”, os professores iniciam o seu ensino a partir de quantidades que os alunos calculam mentalmente, inicialmente com 1 dígito, depois 2, 3 e assim por diante.

Nessa “organização didática” comumente utilizada pelos professores, as contas propostas aos alunos de início não necessitam da realização de agrupamentos, como observado abaixo, o que faz com que estes tenham dificuldades em compreendê-los quando essa surgir essa necessidade:

$$\begin{array}{rr} & 6 \\ + & \underline{\;\;3} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 1\,2 \\ + & \underline{1\,1} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3\,4\,1 \\ + & \underline{2\,3\,6} \end{array}$$

No algoritmo da subtração duas ações são habitualmente utilizadas: separar e reagrupar. O reagrupamento precede a separação por ser preciso que, para cada ordem, se tenha um número de unidades igual ou superior ao número que se deve separar para realizar a ação (LOUREIRO, 2004, p.25), como se pode observar na Figura 9:

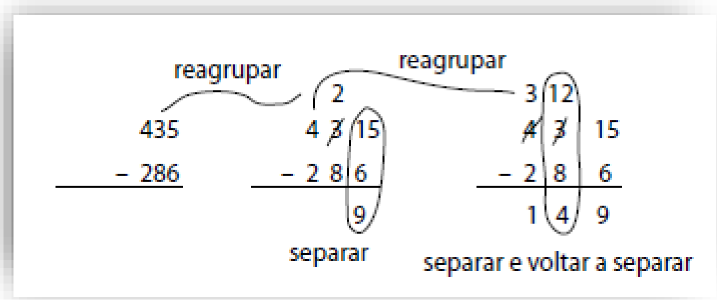


Figura 9 Algoritmo da subtração com decomposição.
Fonte: LOUREIRO, 2004, p.25.

Independente de qual seja o algoritmo utilizado no ensino é preciso ter claro que estaremos evidenciando e ocultando simultaneamente algumas das características do sistema de numeração. Embora nem todas as possibilidades algorítmicas deem conta de explicitar essas características, acreditamos que compete ao professor conhecê-las para ter instrumentos para analisar os erros na produção dos alunos e buscar alternativas para intervir no sentido de superá-los.

Do processo de reflexão empreendido

O processo de reflexão que empreendemos com as nossas professoras considerou o observado por Brousseau (2008) acerca da Teoria das Situações Didáticas, ou seja, de que há três tipos delas: aquelas que nos colocam em ação, as que nos possibilitam formular ideias e colocá-las à prova e aquelas nas quais discutimos as estratégias de resolução com o grupo. Nesse percurso, o erro deixa de ser um 'desvio' para ser um obstáculo valioso e parte do processo de aquisição de conhecimentos.

Tendo esse pressuposto, discutimos com as professoras os erros cometidos pelos alunos na avaliação diagnóstica procurando compreender o porquê dessas ocorrências e levantar hipóteses sobre o que poderia nortear as ações dos alunos.

Nesse primeiro momento, as explicações delas se basearam em aspectos atitudinais, tais como o fato de os alunos fazerem tudo com pressa, de não prestarem atenção ao que deveriam fazer, entre outros, ao invés de relacioná-los à compreensão dos conceitos envolvidos nesse conhecimento. Atribuímos a dificuldade das professoras em relacionar as ações dos alunos ao conhecimento subjacente ao conteúdo trabalhado a uma possível ausência de compreensão da articulação entre as ações dos algoritmos e as características do SND. Passamos, então, a discutir essa questão de modo a poder realizar a análise da produção dos alunos a partir de uma referência que articulasse os aspectos práticos aos aspectos teóricos do conhecimento.

Com relação aos alunos, era imprescindível que empreendêssemos um processo reflexivo que os auxiliassem a perceber o que o SND oculta. Contudo, era necessário retomar o ensino a partir das considerações de Van de Walle (2009) acerca das 'estratégias inventadas', ou seja, de possibilitar explicitar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos algoritmos, visto que o fato das professoras atribuírem os erros dos alunos às questões atitudinais não se sustentava pelo que observamos no registro a partir da Figura 1.

Como estratégia, utilizamos a comunicação matemática que é uma das capacidades transversais à aprendizagem da Matemática e que envolve dois aspectos que consideramos importantes: a capacidade de trabalhar em grupo e a concepção de tarefas.

A comunicação traz implícita a importância da reflexão em um determinado grupo, em um determinado contexto, a partir de um objeto codificado em uma tarefa no que Brousseau (2008) denominou de situação didática, na qual o estudante aplica e explicita os procedimentos e raciocínios utilizados com vistas a sua apropriação de maneira significativa.

Para essa explicitação utilizamos tanto o desenho, como a linguagem oral, bem como materiais manipuláveis, no caso o ábaco de pinos e o material dourado.

Dos dados coletados a partir das produções dos alunos e das dificuldades apresentadas pelas professoras, nosso objetivo foi que os alunos compreendessem as ações de agrupamento (‘vai um’) e a de desagrupamento (‘empresta’) ou, mais precisamente, as ‘trocas’ que o nosso SND opera, além do papel do zero, do valor posicional dos números em nosso sistema e o porquê do procedimento de resolução dos algoritmos ocorrer da esquerda para a direita.

Para não corrermos o risco de que a utilização dos materiais manipuláveis acabasse se pautando apenas em procedimentos, em especial no que se refere à possibilidade de materializar as ações de agrupar e desagrupar com vistas à compreensão da posicionalidade do sistema, consideramos o que está posto por Hatano (1977, 1987, 1997 *apud* FAYOL, 2012, p. 36) quando afirma que não se deve associar, por exemplo, a manipulação, mesmo que habilidosa, do ábaco a uma apreensão conceitual, visto essa manipulação poder ocorrer de forma automática, não se transferindo para outras situações, tal e qual ocorre com a resolução das operações, nas quais o indivíduo faz corretamente as transformações, mas é incapaz de justificá-las ou de informar que o valor está associado a um determinado algarismo numa determinada posição.

Iniciamos o trabalho com o jogo dos feijões. Nesse jogo os alunos deveriam retirar feijões de um pote de acordo com a quantidade que obtinham a partir do lançamento de dois dados. A cada cinco ou dez rodadas, contavam a quantidade de feijões que haviam ganhado. Ao final de uma série de jogadas, deveriam contabilizar o ganho total. Nesse processo observamos como as crianças realizavam essas contagens parciais, como somavam as quantidades de um determinado grupo de rodadas a outro já anotado, etc.

Percebemos que em geral, partiam da quantidade já agrupada anteriormente, somando dezenas às dezenas, transformando unidades em dezenas e, por fim, chegavam a um resultado final. Nesse processo não havia a preocupação em se somar primeiro as unidades e posteriormente as dezenas. Observamos, ainda, alguns registros feitos por eles em uma folha das jogadas: representavam por riscos ou bolinhas os pontos obtidos nos dados ou anotavam a quantidade de pontos com números. Em alguns casos, para efetuar a soma, o faziam contando nos dedos ou fazendo riscos no papel correspondendo à quantidade obtida nos dados. Em nenhum dos registros apareceu o algoritmo.

Todas essas anotações foram apresentadas aos grupos, analisadas e comentadas, com a preocupação de mostrar os diferentes procedimentos possíveis para se agrupar quantidades, incluindo aí o uso dos algoritmos. Os alunos foram unânimes em dizer que achavam mais fácil o 'jeito deles' ao invés do apresentado pela professora, e alguns disseram até que não sabiam como fazer, e ainda, que ficavam na dúvida se 'dava o mesmo resultado' que o utilizado por eles.

Observamos que os alunos sabem somar, e pelas conversas deram exemplo de situações que resolvem no dia a dia utilizando a soma.

Passamos então para o jogo do 'Nunca DEZ', cujo objetivo foi o de ser possível compreender o procedimento de 'troca' ou agrupamento de dez em dez. Nesse jogo, resolvemos inserir os dois tipos de registros usados pelos alunos: o desenho e os números para anotarem os pontos obtidos a partir do lançamento dos dados. Os registros deveriam, ainda, possibilitar aos leitores observarem a quantidade de pontos obtidos em cada uma das jogadas, a quantidade de jogadas realizadas e o processo de agrupamento feito.

Depois dos registros serem finalizados, estes foram trocados entre os grupos para que cada um analisasse os registros dos colegas, buscando as seguintes informações: é possível apontar qual a sequência do percurso dos colegas? Quantas jogadas foram realizadas? Como os grupos somaram os pontos?

Comparamos os diferentes registros e verificamos o que tinham em comum, o que tinham de diferente, qual o registro mais viável, se a diferença estava no resultado ou na forma de fazê-lo, etc. Para além dos aspectos conceituais envolvidos nas ações, tínhamos como objetivo trabalhar o processo de comunicação matemática com os alunos, cuja voz tem sido apagada pelo ensino procedimental.

Na discussão desses registros, observamos que os alunos nomearam os grupos de 'dezenas' e 'unidades' como, por exemplo: o grupo tem dois grupos de 10 e mais cinco, ou dois grupos de 10 e mais cinco unidades, ou ainda, vinte e cinco.

Inserimos, então, o quadro de valor posicional ou quadro de valor lugar para esses registros no jogo do 'Nunca DEZ' e nas discussões focamos nas diferentes representações de um mesmo número, observando que seu valor é determinado pelo lugar que ocupa no número, ou seja, seu valor posicional, enfim, na compreensão da base decimal do nosso sistema.

Esses procedimentos foram também desenvolvidos com a operação de subtração, partindo de uma determinada quantia de feijões da qual os alunos deveriam retirar a quantidade obtida no lançamento dos dados. Posteriormente, introduzimos o quadro de valor posicional ou valor lugar para o aperfeiçoamento dos registros.

Além dos feijões utilizamos, tanto na adição como na subtração, o material dourado para a realização destes jogos o que facilitou aos alunos encontrarem mais facilmente o resultado final em função da visualização das quantidades, já agrupadas em dezenas ou centenas.

Nessas discussões nosso objetivo foi possibilitar aos alunos a compreensão das ações de agrupar e desagrupar, ou seja, o 'vai' e o 'empresta' utilizado nos algoritmos da adição e da subtração.

Passamos posteriormente a incluir o ábaco vertical em nossos jogos para enfatizarmos o fato de que o valor de um determinado número (valor absoluto) está relacionado ao lugar que ele ocupa no número (valor relativo). Em nossa trajetória, essa inclusão se configurou como mais uma ferramenta para que os conceitos subjacentes ao SND pudessem ser explorados, bem como a utilização de fichas com os números de 0 a 9.

Ficou também evidente aos alunos a importância do 'zero' para registrar o número de elementos do conjunto. Por exemplo, no número 30 o zero representa que todas as unidades foram agrupadas em dezenas e não há outras unidades a serem contabilizadas. Assim, caso não houvesse o zero, poderíamos supor que o número representado é três ao invés de trinta.

Até esse momento a direção da direita para a esquerda a ser considerada na resolução dos algoritmos não havia sido explorada. Dividimos novamente a classe em grupos, de modo a termos, em um mesmo grupo, alunos que resolviam de forma diferenciada as adições e subtrações nos jogos propostos: com ênfase nas dezenas ou nas unidades. Propusemos então a eles que resolvessem algumas adições utilizando o ábaco e registrassem os percursos dessas resoluções. O mesmo foi sugerido com a subtração.

Na discussão desses percursos pudemos perceber ser possível que as resoluções se efetivassem tanto a partir das dezenas como das unidades, contudo, ao iniciarmos pelas dezenas era necessário, em alguns momentos, fazer novos agrupamentos quando a soma das unidades atingisse a ordem das dezenas, ou ainda, realizar desagrupamentos em ordens que já haviam sido operadas. Na discussão, os alunos acabaram por concluir que para o procedimento ser mais econômico em termos de passos a serem executados e com menos possibilidade de erros era melhor começar as adições e as subtrações pela direita.

Vale lembrar que durante todo o processo as propostas foram selecionadas a partir da discussão com as professoras dos resultados obtidos nas produções dos alunos. As novas produções dos alunos, a cada atividade desenvolvida, eram analisadas e discutidas com as professoras que participaram de sua organização e elaboração.

Em relação às professoras, elas ressaltaram, na avaliação realizada ao final do projeto, a contribuição deste para seu conhecimento sobre o tema, para sua prática e para sua formação na docência de aspectos não explorados na formação inicial e ainda para o aprofundamento do conhecimento que lhes era necessário para o desenvolvimento dos alunos. Destacaram, ainda, que a metodologia utilizada no desenvolvimento das atividades permitiu o aprofundamento teórico necessário para a reflexão da prática docente por garantir uma maior compreensão dos conteúdos abordados e, principalmente, por proporcionar a melhoria na aprendizagem dos alunos.

Consideramos, contudo, que o ganho maior com esse processo foi as professoras perceberem o imbricamento dos processos de ensino e aprendizagem, e, mais ainda, da importância de determinados conceitos como base para outras aprendizagens. Por esse motivo, esses processos não podem ser negligenciados ou tratados aligeiradamente se queremos evitar o risco de eles persistem ao longo da escolaridade, como se pôde observar no Quadro 1.

Essa compreensão acabou interferindo na organização das atividades. Se inicialmente havia uma preocupação com a quantidade de conteúdos a serem desenvolvidos em um determinado tempo, este passou a ser secundário visto que o desenvolvimento de uma habilidade ou conceito era fundamental para a continuidade dos demais e, para tanto, se fazia necessária a sua apreensão por parte dos alunos.

Outro aspecto evidenciado pelo projeto foi a necessidade de discutir as produções dos alunos com eles, tenham elas respostas adequadas ou não. Mesmo porque a reflexão realizada com os alunos sobre suas produções evidenciou o fato de ser possível que o uso de um procedimento correto pelo aluno não garante que ele tenha apreendido os conceitos subjacentes a eles.

A nosso ver os ganhos positivos alcançados com esse projeto, podem ser atribuídos ao fato de tê-lo iniciado com a análise da produção dos alunos. Esse pode ser o ponto de partida para a mudança na prática docente, tal como aponta Guskey (2002) quando afirma que esta ocorre principalmente em função da mudança observada nos resultados de aprendizagem dos alunos.

Das considerações

De forma geral, o processo empreendido possibilitou, aos alunos e professoras, **conhecer na ação**, como os conceitos subjacentes a um determinado conteúdo são apreendidos pelos alunos, bem como a importância da **reflexão na ação** como pressuposto para a organização do trabalho.

O ensino dos algoritmos não pode desconsiderar o que os alunos sabem sobre as operações e são muitos os conhecimentos que trazem para a sala de aula, e o fato de serem ignorados desvaloriza a ação mental dos alunos, o que por vezes provoca, como eles próprios verbalizam, a sensação de que 'nada sabem' sobre o objeto de conhecimento.

Em relação às professoras, percebemos que era importante explicitar os "porquês" das atividades e qual sua relação para a construção de um determinado conhecimento matemático, sem focar unicamente nos resultados e nos procedimentos de ensino.

Examinar a produção do aluno buscando compreender as respostas dadas por eles a certa atividade foi o elemento desafiador para que a mudança fosse iniciada, visto que despertou a curiosidade das professoras e trouxe o desenvolvimento do aluno para o centro da discussão. Esse exame evidenciou a necessidade da articulação entre o processo de ensino e o de aprendizagem para que a mudança das atitudes e crenças das professoras ocorresse.

Para que a mudança no processo de ensino e de aprendizagem seja efetivada, o professor precisa se sentir amparado no encaminhamento das questões que surgem nesse contexto. Para tanto se torna necessário que ele tenha apoio, tanto na análise da aprendizagem observada nas produções dos alunos, como também na organização do desenvolvimento de sua prática.

Constatamos ainda, a vontade dessas professoras em realizarem um trabalho cujos resultados fossem mais positivos, gerando com isso uma maior satisfação, o que foi determinante para o envolvimento delas no desenvolvimento das atividades e no projeto de pesquisa.

Por parte dos alunos, para além da compreensão dos conceitos subjacentes ao SND, a valorização das 'estratégias inventadas' e a utilização de diferentes registros, que, habitualmente, são pouco valorizados no ensino da Matemática, fez com que se sentissem sujeitos e valorizados no desenvolvimento de sua aprendizagem.

O trabalho em grupo possibilitou o compartilhamento de saberes, a compreensão de que há diferentes formas de resolução de uma tarefa, a aprendizagem de novas estratégias de resolução e registro do que fazemos, bem como a importância do grupo na construção do conhecimento, entre outros.

Finalmente, salientamos que a Matemática, enquanto campo de conhecimento tem muito a contribuir para a formação de um sujeito reflexivo e crítico e, para tal, tem na comunicação um importante instrumento. Mas para isso é necessário que os professores compreendam não só o conteúdo a ser trabalhado, mas sejam capazes de adotar um tratamento metodológico adequado a essa formação.

Referências

BATISTA, Cecilia Guarnieri. Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas. **Zetetiké:** Revista de Educação Matemática, Universidade Estadual de Campinas, v. 3, n. 4, p. 61-72, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matrizes de Matemática da 5° ano do Ensino Fundamental**. s/d. Disponível in: http://provabrasil.inep.gov.br/32. Acesso em 18 fev 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: conteúdo e métodos de ensino. SP: Ed. Ática, 2008.

DA COSTA, Leila Pessôa. Números e operações: as contribuições de um processo de reflexão sobre a prática docente com professoras dos 4ºs e 5ºs anos do ensino fundamental. Maringá, 2015. 286p. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática)> Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015. [Orientadora: Profª Dr. Regina Maria Pavanello].

DOCKRELL, Julie; MCSHANE, John. **Crianças com dificuldades de aprendizagem:** uma abordagem cognitiva. Artmed, 2000

FAYOL, Michel. **Numeramento:** aquisição das competências matemáticas. Traduzido por: Marcos Bagno. São Paulo: Parábola Editorial, 2012.

GUSKEY, Thomas R. Professional Development and Teacher Change. **Teachers and Teaching:** Theory and Practice, v. 8, nº 3/4, pp. 381-391, 2002.

LERNER, Délia; SADOVSKY, Patricia. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, pp. 73 – 155.

LOUREIRO, Cristina. Em defesa da utilização da calculadora: Algoritmos com sentido numérico. **Educação e Matemática**, Lisboa, nº 77, pp. 22-29, 2004.

MATOS, João Filipe. Matemática, educação e desenvolvimento social: questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática. 2005. Disponível em: < www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/comunicacoes/jfm_seminario_pa.pdf>. Acesso em: 22 out 2014.

NUNES, Terezinha, CAMPOS, Tânia Maria Mendonça, MAGINA, Sandra, BRYANT, Peter. **Educação matemática 1**: números e operações numéricas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

PARRA, Cecília. Cálculo Mental na escola primária. In: PARRA, Cecília, SAIZ, Irma. (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

SCHÖN, Donald. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, António. **Os professores e sua formação.** Lisboa: Dom Quixote, 1992.

SCHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo**: Um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.