A CONSTRUÇÃO DOS CAMPOS NUMÉRICOS: UMA ABORDAGEM PARA COMPREENSÃO DA DEFINIÇÃO DE NÚMEROS REAIS

Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
rodolfochaves20@gmail.com

Mariana dos Santos Cezar
Instituto Federal do Espírito Santo
marianascezar@hotmail.com

Resumo:
Esse minicurso é fruto da pesquisa de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática realizado no Instituto Federal do Espírito Santo, com uma proposta pautada na construção dos números reais. Desenvolvida em turmas de Licenciatura em Matemática, essa pesquisa possibilitou discussões relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem relativos à definição dos números reais. Com o intuito de refletirmos sobre como esse ensino tem sido abordado na Educação Básica e na formação do professor de Matemática, e de como podemos desenvolvê-lo por meio de sua construção, descrevemos o problema da medida que ocasionou na constituição do campo racional, a descoberta de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão para o campo irracional, e os cortes de Dedekind que buscou uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais. Destacamos também a importância de se utilizar esses procedimentos na formação de professores de Matemática, visando uma melhor compreensão dos porquês de tais definições.
Palavras-chave: Construção; Números reais; Formação de professores.

1. Introdução

A área da Educação e da Educação Matemática atualmente tem realizado pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem na formação do professor de Matemática. Muito tem se discutido sobre a adaptação da teoria concebida na formação inicial à prática docente dos professores de Matemática, em especial, na Educação Básica.

Nessa perspectiva, como professores de Matemática, durante toda a jornada de ensino, tanto no Fundamental quanto no Médio, e nos cursos de formação continuada que participamos, nos deparamos com incoerências e circularidades em relação ao ensino de números reais. Advindas de alunos e professores de Matemática, muitas dúvidas surgem quanto à definição dos números, segundo a classificação dos conjuntos numéricos aos quais pertencem. Comprovamos tal problemática em nossa sala de aula, pela dificuldade que encontramos de adaptar as definições que estudamos em nossa formação inicial para nossos alunos na Educação Básica. Essa perspectiva contribuiu para a constituição deste minicurso.

Diante disso, propomos desenvolver de forma dialógica, com a colaboração dos participantes desse estudo, a construção dos números reais, tendo como base as obras: Caraça (1989) e Ávila (2006). Buscamos construir os campos dos números racionais, irracionais e reais, com o intuito de compreendermos como suas definições foram constituídas. Para tal, partimos de um breve relato histórico baseado nas de obras de Boyer (2003), Bentley (2009) e Roque (2012), para entendermos como se deu essa construção ao longo do tempo.

Nesse viés, propomos a estrutura desse estudo por meio de quatro tópicos. O primeiro intitulado *"A Construção dos Números Reais: breve abordagem histórica"*, destaca fatos históricos que permitem entendermos como se deu a construção dos números, por meio de situações cotidianas. O segundo *"Construção do Campo Racional",* descreve a construção do campo racional via medição de segmentos e apresenta reflexões acerca desse processo. O terceiro "*Construção do Campo Irracional"* descreve essa construção por meio da descoberta de segmentos incomensuráveis que proporcionaram uma extensão para o campo irracional. O quarto "*Construção do Campo Real"*, descreve essa construção por meio dos cortes de Richard Dedekind com uma fundamentação mais rigorosa para a definição de números reais.

Durante o desenvolvimento de cada tópico, interações e discussões serão realizadas com os participantes do minicurso, onde os mesmos serão envolvidos no processo de construção dos campos numéricos por meio de atividades. Na finalização do quarto tópico um momento será direcionado a sugestões e reflexões em relação ao processo adotado.

2. Objetivos do minicurso

Propomos como objetivo geral:

Promover discussões acerca dos processos de ensino e de aprendizagem da construção dos números reais de forma a viabilizar reflexões sobre seu ensino na formação inicial e continuada do professor de Matemática.

Propomos como objetivos específicos:

- Destacar alguns aspectos históricos sobre a evolução dos números reais e a formulação de sua definição;

ISSN 2178-034X

- Definir os campos dos números racionais, irracionais e reais, como consequência de suas construções;
- Evidenciar os significados produzidos pelos participantes do minicurso acerca do tema e a partir deles promover discussões sobre o tema na formação do professor de Matemática.

3. Metodologia do minicurso: a abordagem dos tópicos

3.1. Primeiro Tópico - A Construção dos Números Reais: breve abordagem histórica

Nesse tópico abordaremos elementos históricos que relatam o desenvolvimento da ideia de número para o homem primitivo e para o desenvolvimento da civilização humana. Aqui, faremos uma breve introdução ao minicurso para posteriormente tratarmos das construções numéricas. Segue um pouco desse relato histórico que vai culminar na construção do campo racional.

Os números fazem parte de nossa vida. Vivemos cercados por eles seja em uma simples contagem de elementos, seja nas programações computacionais, na música, nas propriedades da luz, no movimento dos planetas, no corpo humano, na simples compra do mercado, enfim, os números constituem boa parte do que usamos e vivenciamos, permeando o universo. Como destaca Bentley (2012, p. X) “os números não eliminam nossa capacidade de nos maravilhar com o mundo, eles a aumenta”.

A civilização humana, com suas necessidades habituais, precisou desenvolver procedimentos de contagem para resolver problemas cotidianos, antes mesmo da constituição dos números e dos sistemas numéricos. Um método de contagem utilizado foi o de estabelecer uma correspondência entre ovelhas e pedras, onde cada ovelha correspondia a uma pedra que era guardada em saco, quem nunca ouviu falar dessa história? Roque (2012) relata outra forma de contagem: a utilização de *tokens* – “objetos de argila que representavam diversos formatos: cones, esferas, discos, cilindros etc.” (ROQUE, 2012, p. 41). Os *tokens* eram usados nas atividades de economia pois mantinham o controle sobre produtos agrícolas e bens manufaturados. Colocados em potes de argila, parecidos com bolas, representavam quantidades que eram simbolizadas por riscos na superfície dos potes. Cinco *tokens* dentro dos potes correspondiam a cinco riscos na superfície e representavam cinco elementos como: jarras de óleo, quantidades de grãos, dentre outros; a forma dos *tokens* estava associada ao tipo de elemento; a esfera, por exemplo, representava grãos. Com o tempo o homem percebeu que poderia aprimorar sua maneira de contar, assim começou a associar ovelhas, quantidade de grãos, jarras de óleo a riscos em galhos de árvores, ossos de animais, tabletes de argila, ou ainda, por meio de nós em cordões de cipó. “Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado” (ROQUE, 2012, p. 43).

Uma história interessante contada por Bentley (2012) evidencia a importância da contagem e da utilização de instrumentos que possibilitaram essa representação. Ele conta que há muito tempo atrás os chefes das tribos ao enviarem seus guerreiros para batalhas em tribos vizinhas precisavam saber se todos haviam voltado, pois, para cada guerreiro morto, a tribo vizinha tinha que pagar um búfalo como recompensa. Assim, o chefe da tribo precisava registrar o número de guerreiros que haviam saído para a batalha para que pudesse verificar, ao retornarem, quantos havia perdido, para poder buscar sua recompensa. O truque utilizado era: cada guerreiro que saía deveria depositar uma pedra num monte e, ao retornar, cada guerreiro deveria retirar uma pedra do monte. Dessa forma o chefe saberia quantos búfalos iria receber da tribo vizinha. Ao buscar sua recompensa trocava as pedras que sobravam por varinhas, pois seria mais fácil de carregar. Dessa maneira, era possível contar sem mesmo utilizar sistemas numéricos. Se pensarmos nesse contexto, até hoje utilizamos formas de contagem primitiva, por exemplo: em uma turma de alunos que estão realizando uma votação para a escolha do líder da turma, observamos representações de contagem através de traços que são agrupados de cinco em cinco.

De forma semelhante o homem aprendeu a medir sem utilizar instrumentos precisos de medição (como os que possuímos hoje) e sem uma unidade de medida estabelecida. Eles mediam terras utilizando pedaços de cipó, que convencionavam como elementos de medição. Como exemplo, Bentley (2009) retrata que as enchentes, causadas pelas cheias do rio Nilo, que retiravam os limites das fazendas e lotes, faziam com que os egípcios realizassem cuidadosas medições de terra, utilizando instrumentos como pedaços de cipó, e isso proporcionou um desenvolvimento dos processos de medição e contribuiu para o aprimoramento da Geometria. Outro fator importante, destacado por Bentley (2009), foi a descoberta dos números irracionais, pois com o reconhecimento desses números foi possível descrever formas como triângulos, quadrados e círculos, além disso, o número passou a ser usado para representar linhas e formas feitas por linhas. Como explica Roque (2012, p. 101) isso é possível porque “a medida é um

ISSN 2178-034X

procedimento que permite reduzir grandezas a números. Dado um segmento podemos medir seu comprimento".

Sobre o processo de medir Caraça (1989, p. 29) relata que "*medir* e *contar* são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência". Em nosso cotidiano, nas mais variadas circunstâncias, existe a necessidade de medir. A costureira, o engenheiro, o agricultor, e em outras diversas profissões trabalha-se a ideia de medir e contar. Como destaca Caraça (1989) medir é comparar duas grandezas da mesma espécie. Foi assim, através de medições realizadas por vários séculos, que o homem constituiu os números racionais: por meio de comparação de segmentos de reta, cuja ideia é verificar quantas vezes um determinado segmento cabe em outro. Dessa forma, o homem evidenciou através da subdivisão da unidade de medida um número da forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números inteiros, com n $\neq$ 0. Esse número, da forma $\frac{m}{n}$, ocasionou na extensão dos campos numéricos, constituindo assim o campo racional.

3.2. Segundo Tópico: Construção do Campo Racional

Nesse tópico abordaremos a construção do campo racional. Será estudado a ideia de medidas, de unidades e de subunidades de medidas por meio de segmentos. Essa atividade oportunizará os participantes a conhecerem o porquê da definição de números racionais ser expressa por: "Todo número racional pode ser escrito na forma, $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros e $n \neq 0$".

Para esse estudo adotaremos como procedimento o problema da medida descrito por Caraça (1989), que optamos por nomear como a solução do problema da medida. Como ponto de partida suponhamos que uma pessoa que construiu conhecimento acerca dos números naturais quer contar uma coleção de objetos; como procede? Conforme destaca Caraça (1989), esse é o princípio da extensão.

> [...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA,1989, p.10).

Dessa forma, pensando em campos numéricos, como generalizar a forma de escrever um número racional? Isto é, como definir um número racional? Para respondermos a tais questionamentos abordaremos a solução do problema da medida.

A partir desses questionamentos prosseguiremos o minicurso com atividades que permitem a medição de segmentos comensuráveis, até o momento que nos deparamos com segmentos não comensuráveis. Aí, temos o dilema: *i*) ou renunciamos o que foi descrito e colocamos como falso; *ii*) ou admitimos e temos que reconhecer a insuficiência dos inteiros.

Se considerarmos o dilema i estaremos renunciando a possibilidade de medição de segmentos comensuráveis, que é uma verdade. Logo só nos resta admitirmos a existência de um novo campo numérico e é por meio do *princípio da extensão* que faremos isso, com a construção do campo irracional.

3.3. Terceiro Tópico: Construção do Campo Irracional

Neste tópico descrevemos a construção dos números irracionais por meio da existência de segmentos não comensuráveis que será tratada no quadrado de lado 1 (uma) unidade, relacionando a medida do lado desse quadrado com sua diagonal. Para tal, utilizaremos o teorema de Pitágoras e chegaremos na crítica do problema da medida descrita por Caraça (1989).

Durante esse processo de estudo relatos históricos serão mencionados até chegarmos no que Caraça (1989) descreve como encruzilhada, onde será necessário admitir como verdadeira uma das afirmações: i) Abandonar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento; ii) Abandonar o Teorema de Pitágoras; iii) Conservar sempre a possibilidade de exprimir numericamente a medida de um segmento e o teorema, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica; iv) Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser, simultaneamente, par e ímpar. Após discussões, admitimos a existência de segmentos incomensuráveis, com isso, novos números são descobertos e um novo campo numérico é constituído.

3.4. Quarto Tópico: Construção do Campo Real

Foi nos meados do século XIX que os matemáticos começaram a sentir necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos. Um desses foi o matemático alemão Richard Dedekind (1831 - 1916), que ao ensinar Cálculo Diferencial, percebeu ser necessário um tratamento rigoroso para os números reais. Assim, em 1872 publicou uma obra intitulada "*Continuidade e números irracionais",* onde buscou inspiração para sua construção dos números reais na antiga e hábil teoria das proporções de Eudoxo, por notar que o procedimento do grego levava a uma separação dos números racionais em dois conjuntos.

Dedekind fundamentou a clássica afirmação "*União dos racionais com os irracionais*" por meio dos cortes na reta. Para tal, algumas verdades são admitidas: i) admitimos a existência do campo numérico racional (Q) e do conjunto dos pontos da reta (P) e consideramos como desconhecido o campo irracional; ii) compreender as propriedades características do conjunto (P): *infinidade, ordenação, densidade* e *continuidade*. Definiremos cada uma verificando se no conjunto (Q) existe uma relação de correspondência. Por fim, Dedekind caracteriza a continuidade da reta por meio da afirmação, designada como axioma da continuidade de Dedekind: "todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)". Como conclusão a todo desenvolvimento, Dedekind (*apud*, CARAÇA, 1989, p. 62) define:

> [...] chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional separando as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.

Com isso, a natureza do problema encontrado indica a necessidade da introdução de novos números – os irracionais.

4. Algumas Considerações

Com a ministração do minicurso temos algumas expectativas que na verdade são também oriundas de resultados da pesquisa desenvolvida. É possível que o processo de construção do campo racional proporcione compreender que, o que consideramos como definição de números racionais: *"Todo número racional pode ser escrito na forma* $\frac{m}{n}$*, com m e n inteiros e* $n \neq 0$*"*, é uma generalização algébrica que permite representar qualquer número pertencente a este conjunto. Em contrapartida, a construção do campo irracional proporcione compreender que, não existe uma generalização algébrica que permita expressar o formato de um número irracional. Com isso entender que para os números irracionais não existe uma única definição.

É possível que o processo de construção do campo real proporcione entendermos o porquê da clássica afirmação "*União dos racionais com os irracionais*". Tal afirmação é utilizada nos processos de ensino e de aprendizagem, em especial na Educação Básica, como investigado por Cezar (2011 e 2014). Por isso, buscamos justificá-la a partir dos cortes de Dedekind: o corte na reta real que não constituiu um número racional é um número irracional. Tal façanha pode possibilitar à construção de conhecimento da definição de números reais.

5. Referências

ATALAY, Bulent. **A Matemática e a Mona Lisa**: a confluência da arte com a ciência. 2 ed rev. e ampl. Tradução: Mário Vilela. São Paulo: Publicações Mercuryo Novo Tempo, 2009.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para licenciatura**. 3 ed rev. e ampl. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números:** uma história ilustrada da Matemática. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2º edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Concepções acerca do conceito de Números Reais:** uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica. Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

CEZAR, Mariana dos Santos. **Produções de Significados Matemáticos na Construção dos Números Reais**. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

CEZAR, Mariana dos Santos; CHAVES, Rodolfo. **A Construção dos Números Reais**. Instituto Federal do Espírito Santo. Editora Ifes, Vitória, 2014.

CHAVES, Rodolfo. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2001.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

ISSN 2178-034X