

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O ZERO NA RETA NUMÉRICA

Odirley Ferreira da Silva

Michel Silva dos Reis

Nazaré do Socorro Moraes da Silva

Resumo:

Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com objetivo de identificar os obstáculos dos discentes referentes à compreensão do zero na reta numérica. Para alcançar tal objetivo realizamos o trabalho em três momentos: o desenvolvimento de uma atividade com os alunos; Levantamento bibliográfico sobre obstáculos e sobre estudos que abordam tal conteúdo; análise do obstáculo identificado a luz teórica selecionada e estudada e por fim proposta de abordagem do conteúdo. Observamos que o obstáculo identificado se remete ao epistemológico em duas situações: Uma se remete a transição do conhecimento dos números do campo dos naturais para os números do campo dos inteiros. Outra se refere quando, o aluno confunde o valor numérico do zero, que preenche uma casa decimal vazia e não possui valor numérico, contudo o aluno não consegue perceber que o zero possui valor posicional na reta numérica.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Reta Numérica; O Zero; Obstáculo Epistemológico.

1. Introdução

Um dos conteúdos matemático trabalhado no ensino fundamental, que mais apresenta dificuldade pelos alunos, segundo nossas práticas e alguns estudos são os números inteiros, principalmente os números negativos. Tal dificuldade, que no decorrer da pesquisa denominaremos de obstáculos, deve-se a relação do zero na reta numérica. Em que nos leva as seguintes questões: qual a função do zero na reta numérica? Quais os conceitos necessários para a compreensão da função do zero na reta numérica?

De acordo com Nascimento (2002) e Pommer (2010) apud Souza et. al. (2013), essas dificuldades são comuns com estudantes de diferentes regiões e ocorrem a partir do momento que os discentes passam a conhecer os números inteiros negativos, uma vez que, acabam de internalizar o conjunto dos números naturais, e se deparam com uma situação nova, em que precisam compreender a ordenação dos valores numéricos na reta numérica, o valor do zero não como ausência, mas como resultado da operação de dois valores opostos, ou como valor

que representa a separação numérica dos positivos e dos negativos na reta, dentre outras. Correlacionado com esses autores Nascimento (2002) apud Nascimento 2004 pontua algumas dificuldades apresentadas pelos professores ao introduzir o conceito de números negativos no 7º ano como: admitir algo menor que zero, aceitar a representação (-4), uma vez que sua ideia de número positivo está atrelada a cardinalidade e identificar, na ordenação dos números negativos.

Diante da análise dos artigos supracitados, do relato da atividade desenvolvido por um professor do ensino modular do município de Abaetetuba-PA e nossas experiências docentes, essas dificuldades são denominadas de obstáculos. Segundo Brousseau (1983) apud Almouloud (2010, p.133) um obstáculo se manifesta pelos erros, e estes ocorrem, não pela falta de conhecimento e, sim por um conhecimento anterior que, por um tempo, era suficiente, mas que se revela falso ou inadequado em um contexto novo ou amplo. E esse obstáculo não desaparece com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, opõe resistência a sua aquisição, a sua compreensão, retarda sua aplicação, perdura em estado latente e reaparece subitamente, em especial no contexto anterior, quando as circunstâncias o permitem.

Os obstáculos ocorrem devidos os conhecimentos construídos pelos alunos que geralmente são locais. O conhecimento local é um conhecimento correto com algumas limitações, em que o aluno ignora a existência dessas limitações Almouloud (2010), e com isso podem constituir fontes de dificuldades, ou erros, na ocasião da aprendizagem de novos conhecimentos.

Para Brousseau (2008) há diferentes tipos de obstáculos identificados na didática da matemática, caracterizados em psicológicas e ontogênicas, epistemológicas, didáticas, sendo os dois últimos correlacionados ao nosso estudo.

Psicológico: surge no momento que a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou seja, derrubada de crença do sujeito. Um exemplo: a lógica matemática (ferramenta produzida na ciência) não é a lógica da vida do dia a dia.

Ontogênico: obstáculo já existente pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito no momento do seu desenvolvimento;

Didático: são os obstáculos que parecem depender das escolhas feitas no processo de ensino e provocadas por uma transposição didática, que professor dificilmente poderá renegociar no quadro restrito de classe. (AMOULOULD, 2010, p.141). Entre eles:

- Na escola do ensino fundamental menor, um quadrado não é retângulo;
- A descoberta das frações a partir da partição de figuras, faz com que uma fração é sempre uma parte da unidade (uma parte e um todo);
- Introdução dos números negativos a partir de uma escala de temperatura (positiva e negativa), extrato de conta bancárias ou jogo (lucro e prejuízo). Exemplos que permite ensinar a adição, todavia provoca um obstáculo para o uso correto da regra dos sinais para multiplicação.

Epistemológicos: são aqueles não podem, nem devem ser evitados, pois são constitutivos do conhecimento propriamente dito. Esses obstáculos são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram na história, para a compreensão e utilização desses conceitos. Obstáculos epistemológicos, ainda hoje, percebido em nossos alunos. Entre eles, segundo Almouloud (2010):

- O estatuto de números, em que Kronecker no fim do século XIX, rejeita a fração como sendo um número e anuncia que “Deus criou os números e o resto são obras dos homens”;
- A associação de zero com “nada” que move o obstáculo epistemológico para um aspecto psicológico, provocando numerosos erros;
- A dificuldade em aceitar a existência dos números negativos, explicitada no início do século XIX por Carnot e Stendhal.

Sendo o último o ponto reforçado por Nascimento (2004) em seu artigo que retrata os obstáculos apresentados pelos os alunos ao realizarem adição e subtração de números inteiro relativos.

Várias pesquisas apontam as causas para tais erros cometidos pelos alunos quando realizam adição e de subtração com inteiros relativos. Causas essas que têm origem em conhecimento prévio do aluno, tal como o conflito que ele estabelece entre o “significado prático de magnitude ou associação de quantidades com número anterior ao ensino da aritmética e o conceito de número negativo” (FISCHBEIM, 1987; HEFENDEHL-HEBEKER, 1991) apud Nascimento (2004).

O autor evidencia que até o 6º ano, os alunos chegam a compreender as operações do tipo: $a + b = e a - b =$ com $a > 0$ e $b > 0$ quando se tem $a > b$. Agora quando essas operações sofrem algumas modificações, em que se tem $b > a$, é onde se inicia os conflitos geralmente evidenciados no 7º ano do ensino fundamental, a partir da abordagem dos números inteiros. Problema percebido por nós professores, durante nossa longa experiência em sala de aula. Esses obstáculos ocorrem devido a limitação do conhecimento anterior desenvolvido com os alunos, que os impedem a compreensão do novo conhecimento. Para o aluno só pode-se realizar operações tipo: $7 - 3 = 4$, não se pode realizar $3 - 7$. A partir desse momento a necessidade do professor explicitar a existência de números menores que zero. Mas para se estabelecer essa existência precisamos evidenciar a função do zero e seu valor posicional na reta numérica.

2. Relato de Experiência

Diante de tal dificuldade, relatamos uma atividade sobre números inteiros, desenvolvida por um professor SOME (Sistema de Organização Modular de Ensino), no terceiro módulo com alunos do 7º ano do ensino fundamental em uma comunidade ribeirinha pertencente ao município de Abaetetuba – Pará.

A comunidade é conhecida pelo nome de Maracapucu Santa Maria e faz parte do conjunto de ilhas pertencente ao município de Abaetetuba, o acesso a comunidade é feito por embarcações, pois a mesma é circundada pelo rio Maracapucu. No início de sua ocupação, a região caracterizava-se por uma história econômica peculiar com as demais comunidades próximas ao município, economia centralizada no cultivo de cana de açúcar para a produção da cachaça Abaeté, porém com a produção da cachaça em escala industrial na região Sudeste do país, não houve mais possibilidade da cachaça Abaeté se manter no mercado, a atividade foi substituída pelas olarias, onde se produzia telhas e tijolos, porém atualmente a principal atividade econômica da comunidade é o plantio de açaí, contudo a pesca de peixe e camarão, também faz parte do repertório de atividades econômica da comunidade.

Como podemos perceber, trata-se de um espaço dinâmico, onde as pessoas, cerca de 90 famílias e aproximadamente 750 habitantes, fazem o possível para garantirem sua sobrevivência, e é claro que reflexos desse espaço, são perceptíveis na clientela de alunos que frequentam a escola Municipal Santa Maria, pensando nisso, o professor realizou uma atividade prática com os alunos do 7º ano, com o intuito de amenizar a alta temperatura existente na área em frente à escola, devido a falta de arborização, e desenvolver um trabalho que utilizasse de maneira prática a reta numérica.

Com base nesse relato e alguns obstáculos enfrentadas em sala de aula sobre o ensino e aprendizagem dos números inteiros, em particular, os negativos, pretendemos discutir e analisar os conceitos necessários para compreender a relação do posicionamento dos valores numéricos na reta numérica, em particular o zero. O presente estudo versará por meio das seguintes etapas: um levantamento bibliográfico sobre o ensino dos números inteiros e reta numérica; uma análise sobre as dificuldades levantadas pelos alunos em relação à reta numérica nos registros e na observação do professor do relato supracitado; coleta e organização das informações supracitadas; análise dos dados levantados e discutidos e divulgar os resultados desse estudo para apontar possíveis caminhos que possibilitem aos alunos do 7º ano do ensino fundamental a compreensão dos conceitos que se insere na relação dos números inteiros com a reta numérica.

Inicialmente o professor apresentou uma situação problema, com o objetivo de mostrar a existência dos números inteiro negativos, de acordo com a realidade dos estudantes da comunidade, com intuito de diminuir a distância entre o conteúdo escolar e as suas práticas sociais, destacando elementos matemáticos no seu cotidiano. Com isso utilizou exemplos do comercio local, como: o ato de comprar fiado, por ser uma prática bastante comum na região.

Em seguida revisou o conjunto dos números naturais e apresentou os mesmos na reta numérica, pois os alunos identificam esses números naturais a partir de um processo de contagem de sequência crescente: 0,1, 2, 3,..., dando continuidade, o professor indicou que o conjunto dos números inteiros é uma extensão dos números naturais, iniciando com o zero para destacá-lo como um número central, que divide os infinitos positivos e negativos, esclarecendo o valor de uma unidade positiva para direita e unidade negativa para esquerda, dando uma noção introdutória de simetria.

Após o desenvolvimento e explicitações de alguns exemplos relacionados a práticas do cotidiano dos alunos, como compra de mercadorias em pequenos comércios, feitas na modalidade de fiado, foi possível explorar a noção de saldo positivo e negativo que ocorre no ato da negociação. Verificou-se que os discentes conceberam a noção do zero devido a familiaridade com os números naturais, e nos problemas, os mesmos compreenderam o número, sendo a representação da ausência de crédito ou débito na mercearia, a partir disso, o professor percebeu que os discentes haviam compreendido e conseguiam identificar os números negativos na reta numérica. Importante ressaltarmos, que o foco do professor eram os números inteiros negativos, uma vez que, os alunos tinham a percepção da relação dos inteiros positivos com os números naturais.

Com intuito de proporcionar aos alunos uma maneira, dos mesmos construir a compreensão sobre tal conteúdo, o professor propôs uma atividade extraclasse. Sugeriu a resolução de um problema: arborizar a área em frente à escola para amenizar o calor, que era demasiadamente elevado para dentro de um ambiente escolar, considerando que a escola seja na região das ilhas e na mesma não existe a disponibilidade de energia elétrica constante, portanto a ausência de ar condicionado ou mesmo ventiladores, prejudicava muito os alunos durante o processo de ensino e aprendizagem.

Para tentar solucionar o problema, os discentes teriam que relacionar os valores numéricos na reta numérica desencadeando alguns conceitos como: ordenação dos números inteiros, posicional dos números inteiros na reta numérica, saber a função da origem na reta entre outros. Pois além de escolher a árvore para promover uma arborização adequada, a quantidade de mudas era necessária medir a frente da escola e o instrumento utilizado foi a reta numérica com o zero na origem de simetria, localizando o infinito negativo para esquerda e o infinito positivo para direita. Contudo os alunos não conseguiram solucionar o problema, então o professor explicou novamente o conjunto dos números inteiros, sua representação e posição na reta numérica. Foi destacado o ponto chave da discussão, que se referia ao posicionamento do zero, por mais que o professor fale de todo o conjunto numérico, a dúvida em relação ao zero não se resolvia, pois seu valor numérico estava claro, porém seu valor posicional não. Os alunos só chegaram à solução, quando foram utilizados apenas os números inteiros positivos. Com isso percebemos que os discentes não aprenderam relacionar os números inteiros negativos na reta numérica.

Confrontando com este relato, destacamos uma situação de aprendizagem de Borba e Guimarães (2009) que evidencia a compreensão de números inteiros por meio de um estudo desenvolvido por Davidson (1987) com crianças de sete anos de idade para combinarem números negativos e positivos, antes da introdução formal do conceito de tal conteúdo. No jogo do carteiro os números positivos e negativos eram tratados como movimentos em sentidos opostos em uma rua em que as casas tinham numeração de (-4) a $(+4)$. O objetivo do jogo era que as crianças pudessem encontrar a distância e o endereço, o qual as cartas foram destinadas, de acordo com as instruções dadas nos cartões que indicavam direção e o número de passos a serem dados ao longo das casas. De acordo com os autores, apenas 40 % das crianças, foram capazes de encontrar a distância solicitada. Para os autores isso ocorreu devido um erro comum das crianças – de não considerar o zero como uma posição válida e assim pulavam esta “casa” ao tentarem localizar o endereço. Fato que nos chama atenção, pois mais uma vez percebemos, a importância de se estabelecer a razão do zero, pois neste exemplo está claro que as crianças consideraram zero como sem valor, em vez de ter compreendido como posição.

Essa relação do zero como “nada”, existe à muito tempo atrás, desde os babilônios em que desenvolviam um sistema de valor por posição para escrever os números, com base em agrupamentos de 60. A partir das transformações dessa base, o zero começou sua vida como ocupante de lugar, enveredando para valor posicional. Esse obstáculo epistemológico enfrentado pelas crianças ocorreu antigamente, segundo a história da matemática. Para Chevallard et. al (2001) o obstáculo epistemológico pode manifesta-se de erros reproduzíveis e também podem ser rastreados na gênese histórica dos conceitos em questão.

Como propostas aos conceitos indicarão: unidade-módulo, sequência crescente e decrescente, simetria – espelhamento e sentido – vetores.

Conceitos necessários para compreender a relação do posicionamento dos valores numéricos na reta numérica: Unidade, sequência, simetria e sentido. Nos desenhos abaixo apresentamos a reta numérica de forma orientada, pois possui um ponto de referência, considerado a origem O, uma direção e dois sentidos: de O para a direita, onde são posicionados os valores positivos e de O para a esquerda, onde são considerados os valores negativos.

Considera-se como forma de conteúdos ditos por excelência, o estudo de elementos conceituais necessários para representar os números inteiros, mas podemos ampliar para qualquer número na reta numérica:

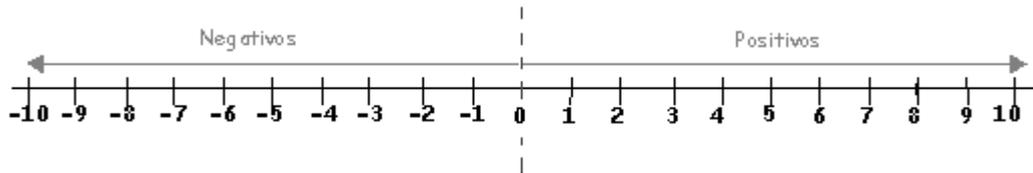


Figura 1: Reta Numérica.

Unidade: é o espaço comum entre cada número da reta numérica (é o módulo). A unidade é necessária que seja sempre a mesma para os intervalos entre dois números inteiros consecutivos. Módulo, é a distância de qualquer ponto da reta numérica ao ponto de origem (zero), onde $A = B = C = D$.

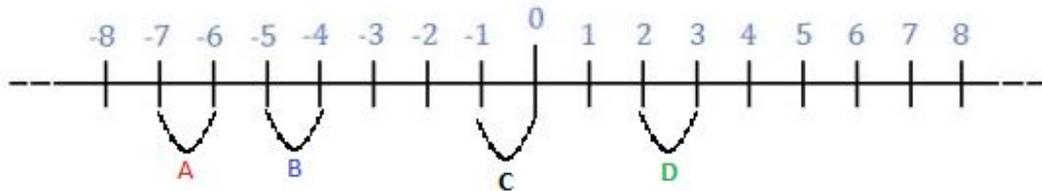


Figura 2: Unidades.

Sequência: a partir de um ponto, podem admitir a existência de sequências numérica, que podem ser de dois tipos: *Crescentes e Decrescentes*.

A Sequência *Crescente* é aquela onde a partir de um determinado ponto na reta numérica, temos uma sequência crescente quando nos deslocamos para valores maiores que o inicial.

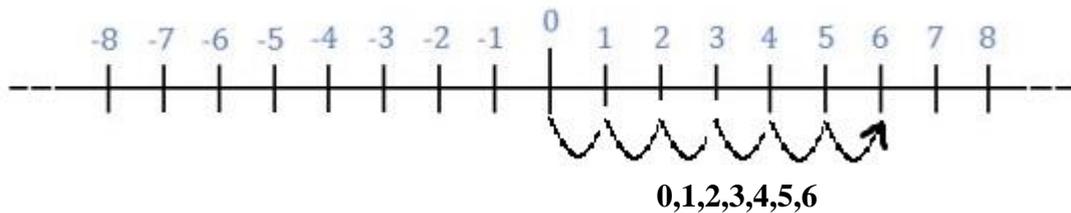


Figura 3: Sequências Crescentes I.

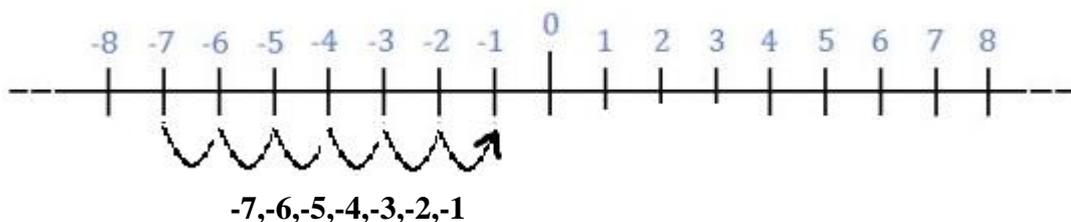


Figura 4: Sequências Crescentes II.

Na Sequência *Decrescente*, a partir de um determinado ponto na reta numérica, temos uma sequência decrescente quando nos deslocamos para valores menores que o inicial.

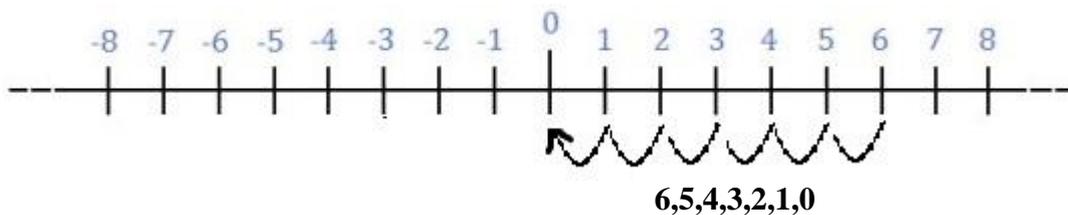


Figura 5: Sequências Decrescentes I.

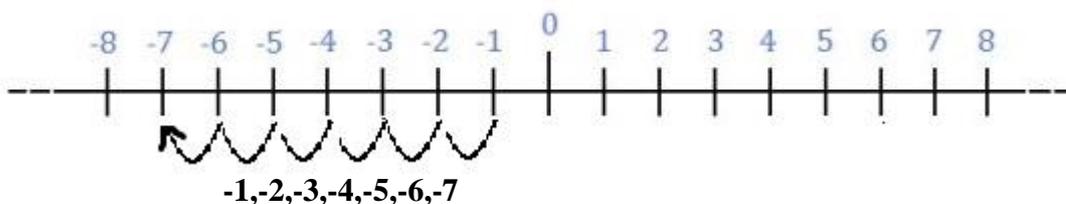


Figura 6: Sequências Decrescentes II.

Simetria: a palavra “simetria” é um termo originário do grego que significa “justa proporção”, mas comumente definida como “harmonia”, resultante de certas combinações e proporções regulares. A simetria é por vezes definida como proporções perfeitas ou uma estrutura que permite que um objeto seja dividido em partes de igual formato e tamanho. Embora seja fácil reconhecer e compreender simetrias intuitivamente, é um pouco mais difícil defini-la em termos matemáticos mais precisos. No plano, a ideia básica é bastante clara: uma figura no plano é simétrica se podemos dividi-la em partes, de tal modo que as partes resultantes desta divisão coincidam perfeitamente quando sobrepostas.

Para Devlin (2010, p. 120):

Para um matemático, a simetria de uma figura é uma transformação que deixa a figura invariante. “Invariante” significa que, tomada como um todo, à figura parece a mesma que antes da transformação, em termos de posição, forma e orientação, mesmo que os pontos individuais da figura possam ter se deslocado.

Quando se trata do estudo de Matemática relacionamos logo com a utilização de números, pois bem, os números inteiros negativos {..., -3, -2, -1} resolvem o problema da assimetria dos números naturais {0, 1, 2, 3...} que têm começo e não têm fim. Acrescentando-se os inteiros negativos, o novo sistema de números se torna simétrico em relação ao zero, considerando, assim o zero como centro ou origem da simetria entre os números da esquerda

e da direita de zero, diferenciando-se apenas pela utilização de sinais: positivos (+) e negativo (-) para indicarem sentido sequencial.

Imaginemos a representação dos números inteiros como pontos de uma reta. Escolhemos um ponto e o associamos com o número 0. Em seguida, marcamos o 1 à direita do 0, guardando uma certa distância. Com essa mesma distância, marcamos o -1 à esquerda do 0. Depois o 2 à direita do 1, o -2 à esquerda do -1, e assim por diante. O ponto $-n$ é, portanto o ponto situado à esquerda do 0 a uma distância que é n vezes a distância do 0 ao 1.

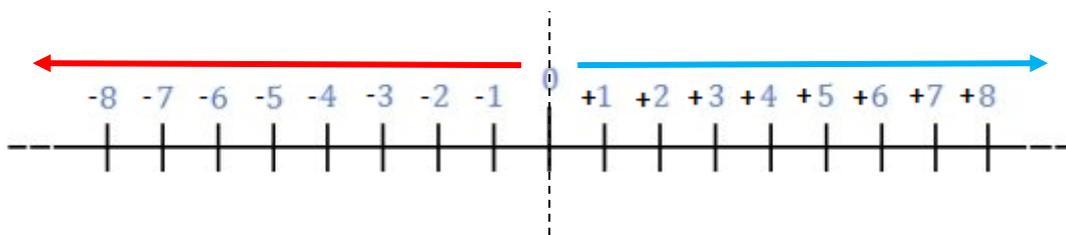


Figura 7: Centro ou Origem da Simetria.

Matematicamente é natural imaginar o sistema numérico a partir de uma reta, escolhendo-se um ponto qualquer para representar o zero. Para René Descartes, o filósofo e matemático francês que introduziu a ideia de representação de números numa reta, criou a Geometria Analítica, e introduziu o zero como centro de simetria entre os positivos e negativos; contudo, verifica-se a inexistência de abordagens adequadas para melhor explicitar o posicionamento e compreensão da utilização do ZERO como eixo de simetria. Logo, a partir da ORIGEM, temos uma ideia de simetria, de “espelhamento” onde todos os valores dispostos a direita de zero estão dispostos a esquerda em uma mesma distância (unidade).

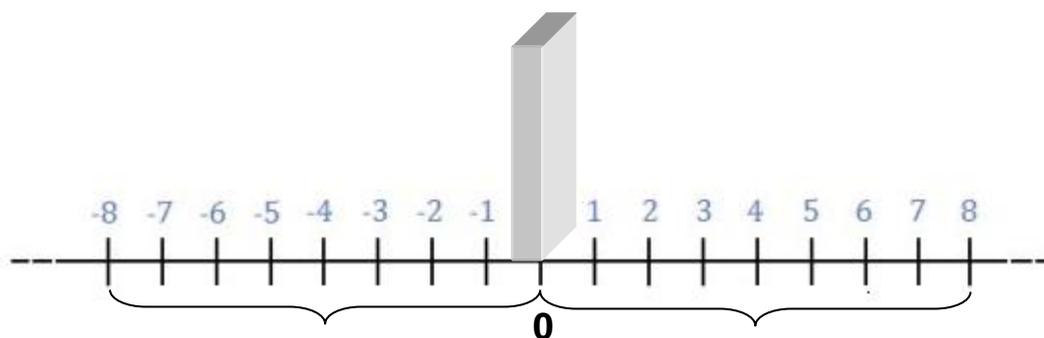


Figura 8: Espelhamento.

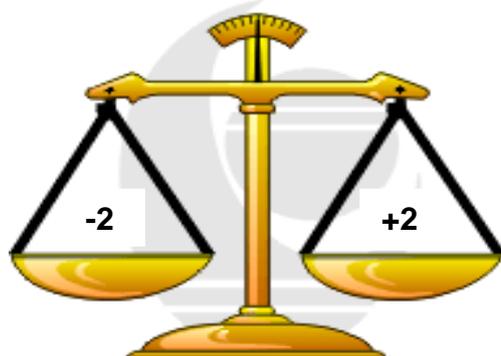


Figura 9: Balança.

Observe que neste momento estamos tratando do conceito de simetria, onde temos a mesma quantidade de valores do lado direito quanto do lado esquerdo; sendo assim, poderíamos mostrar a reta numérica sem os sinais de (+) e (-).

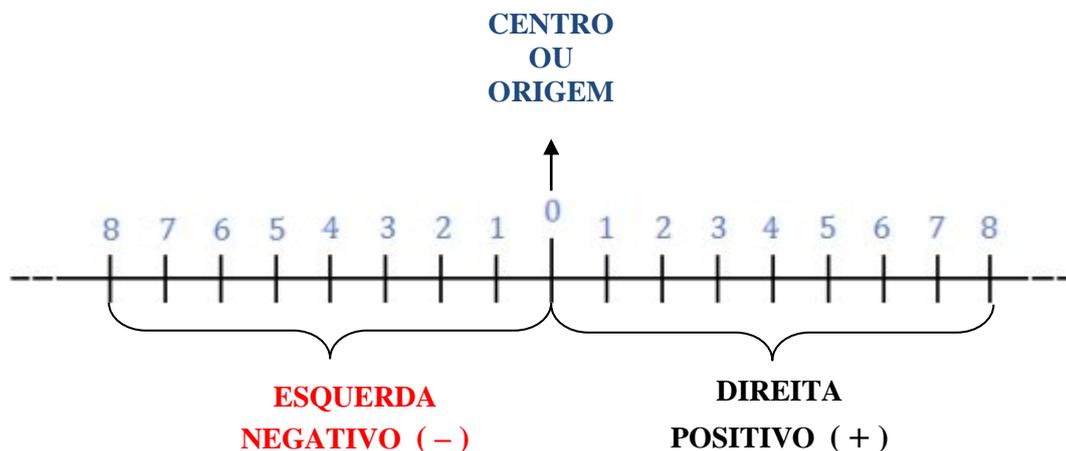


Figura 10: Reta sem os sinais.

Sendo assim, teremos uma noção de sentido, onde observamos valores positivos (+) a direita de zero (centro e origem) e valores negativos (-) a esquerda de zero (centro e origem).

3. Considerações

Segundo Gaston Bachelard, os obstáculos epistemológicos são obstáculos que os professores devem estar atentos, para que não estejam presentes em seu modo de ensinar, no ambiente da sala de aula e nos recursos didáticos usados, como por exemplo, o livro didático. O professor também precisa estar ciente do que cada um trata, pois somente assim poderá identificá-los e superá-los, ou, também, poderá ajudar os seus alunos a superá-los, caso os obstáculos estejam presentes neles próprios.

A ausência de uma abordagem adequada ao número zero gera o obstáculo, pois o mesmo é indicado como origem do conjunto dos números naturais, como termo central do conjunto dos números inteiros e como eixo de simetria, porém verificasse a falta de indicação do zero, não como valor numérico, pois para os discentes está claro seu sentido numérico. Contudo percebemos que o obstáculo epistemológico pode está no fato do aluno confundir o valor numérico do zero com o seu valor posicional na reta numérica, pois a zero expressa um valor posicional na reta para ser considerado durante a resolução de problemas, sendo talvez esse ponto, que se deva considerar para uma maior compreensão desse número.

4. Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2010.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: Conteúdos e método de ensino. Tradução: Camila Bogéa – São Paulo: Ática, 2008.

BORBA, R.; GUIMARÃES, G. A pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DEVILIN, Keith. **O Gene da Matemática**: O talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. Rio de Janeiro: Record, 2010.

NASCIMENTO, Ross Alves. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição, subtração de números inteiros. VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Federal de Pernambuco, 2002.

ROHDE, Geraldo Mario. **Simetria**. São Paulo: Húmus, 1982.

SOUZA, J. T. S.; SILVEIRA, D. S.; ALVARENGA, A. M. Obstáculos Epistemológicos com números inteiros negativos. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.