

UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO ESTADO DE PERNAMBUCO

André Pereira da Costa
Universidade Federal de Pernambuco
andre.pcosta@outlook.com

Marilene Rosa dos Santos
Universidade de Pernambuco
rosa.marilene@gmail.com

Resumo:

Esta pesquisa analisou os níveis de pensamento geométrico dos estudantes de uma turma de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior no Estado de Pernambuco. O campo teórico do estudo constitui-se pela teoria de Van-Hiele, em que discute sobre os níveis de pensamento geométrico. Nossa metodologia de abordagem qualitativa consistiu na aplicação de um teste, como instrumento de coleta de dados, composto por cinco itens sobre o conceito de quadriláteros notáveis. No entanto, aqui, discutimos sobre os dados produzidos com a primeira questão do teste. Os resultados evidenciam que quase a metade da turma se localiza no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele. Temos estudantes classificados no segundo nível, na transição entre os dois primeiros níveis e um décimo da turma no terceiro nível de Van-Hiele. Portanto, reforçamos a necessidade de se investigar mais sobre conceitos geométricos, tanto na formação inicial, como na formação continuada de professores que ensinam Matemática.

Palavras-chave: Quadriláteros notáveis; Van-Hiele; Formação de professores.

1. Introdução

Ao longo dos últimos vinte anos, a Geometria tem sido considerada o objeto de investigação de inúmeras pesquisas no país que discutem aspectos referentes ao ensino e a aprendizagem desse campo da Matemática, em todas as fases do ensino básico brasileiro, com a finalidade de melhorar esses dois processos.

Tais pesquisas, em geral, são motivadas pelos baixos desempenhos apresentados pelos estudantes nos itens que exploram conceitos geométricos, em avaliações de larga escala, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE) e também pelos dados produzidos em pesquisas da Educação Matemática (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015a; 2015b). Insatisfeitos com esses resultados, os educadores matemáticos brasileiros se questionam sobre os reais motivos geradores desses desempenhos, conjecturando que existem dificuldades conceituais e de aprendizagem, em decorrência, por exemplo, da natureza dos objetos que estão em jogo

(COSTA,

2016) e ainda pela forma como certo conceito é trabalhado em sala de aula (IBIDEM, 2014). Costa Júnior (2015) discute que, apesar dos importantes avanços obtidos com o desenvolvimento da Educação Matemática no Brasil no campo da Geometria, percebem-se poucas mudanças.

Nesse contexto, temos como problema dessa pesquisa, analisar os níveis de pensamento geométrico dos estudantes de uma turma de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior no Estado de Pernambuco. Vale salientar que esses estudantes já cursaram disciplinas relacionadas à Geometria antes dessa pesquisa. Nesse sentido, apoiamo-nos na teoria de Van-Hiele, em que, além de discutir sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, trabalha com os processos de ensino e de aprendizagem da Geometria.

Portanto, apresentaremos, a seguir, o referencial teórico adotado, os procedimentos metodológicos e as análises dos nossos resultados. Por fim, nossas considerações finais e referências.

2. Referencial Teórico: a teoria de Van-Hiele

A teoria em pauta foi produzida pelos educadores matemáticos Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geldof, na Holanda em 1957. Esses pesquisadores investigaram acerca do pensamento geométrico de seus alunos do ensino básico, todavia, o resultado de seus estudos só foi disponibilizado a comunidade acadêmica internacional no final de década de 50. Em decorrência do falecimento prematuro de Dina, Pierre promoveu o aperfeiçoamento da teoria em pesquisas desenvolvidas *a posteriori* (CROWLEY, 1994).

Com base nessa teoria, o professor de Matemática pode compreender melhor os níveis de pensamento geométrico dos estudantes, guiando-o, assim, nas tomadas de decisões em sala de aula e na organização das situações didáticas. Nesse sentido, a teoria vanhieliana volta-se tanto para o ensino como para a aprendizagem da Geometria (COSTA, 2016). Dessa forma, é constituída por um total de cinco níveis, organizados por meio de uma sequência hierárquica. Logo, para um estudante alcançar um nível de pensamento mais elaborado, ele passou, obrigatoriamente, por níveis de pensamento anteriores, menos elaborados (GUTIÉRREZ, 1992).

Van-Hiele

(1957) discute que os aspectos referentes à maturação biológica e à idade do aluno não influenciam no desenvolvimento do pensamento geométrico, mas, sim, as atividades que são exploradas na classe de Matemática. Nasser (1992) amplia essa discussão ao afirmar que as experiências dos estudantes, os fatores sociais, o intercâmbio com os pares, o número de aulas dedicadas a Geometria, tudo isso influencia no avanço entre os níveis. Ainda conforme a teoria, o professor de Matemática ocupa um papel extremamente importante nesse processo, pois é ele quem orquestra contextos de aprendizagem na sala de aula.

Nesse sentido, as experiências de ensino, as metodologias, as intervenções pedagógicas, os recursos didáticos empregados, os instrumentos avaliativos adotados e as temáticas trabalhadas em sala de aula, constituem aspectos fundamentais dos processos de ensino e de aprendizagem. Além disso, o docente deve considerar o nível de pensamento do estudante no processo de organização, planejamento e de construção desses aspectos (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015b, p.4).

Como é possível observar no Quadro 01, elaborado a partir do texto de Nasser (1990), a teoria é formada por cinco níveis de compreensão, em que abrange desde a identificação dos objetos geométricos por meio de sua aparência física até mesmo o estudo de várias geometrias.

Quadro 01 – Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele

NÍVEL	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
Primeiro nível	O aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não identifica explicitamente suas propriedades	O aluno identifica a figura de um quadrado e ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado"
Segundo nível	O aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si	O aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos
Terceiro nível	O aluno relaciona as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não domina o processo dedutivo	O aluno sabe que todo o quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo
Quarto nível	O aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, as condições necessárias e suficientes, mas não sente necessidade de usar rigor matemático	O aluno entende por que o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos de um triângulo seja de 180°
Quinto nível	O aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações e é capaz de analisar outras geometrias	

Fonte: NASSER (1990, p.1-2).

Esses níveis explicam o comportamento do pensamento geométrico dos estudantes à medida que eles aprendem conceitos geométricos, isto significa que a passagem entre os níveis vanhielianos ocorre quando os discentes têm contato com atividades relevantes à sua

aprendizagem

. Além disso, cada nível possui sua linguagem própria e os objetos matemáticos também ocupam *status* diferentes.

Para Van-Hiele (1957), um estudante, ao concluir um curso superior de Matemática, deve ser capaz de realizar o estudo de definições, provas, teoremas, axiomas e postulados da Geometria (característica do quarto nível de pensamento geométrico) e o estudo da Geometria Abstrata (aspecto do quinto nível vanhieliano), dependendo de suas vivências com esse campo matemático durante o curso.

3. Procedimentos Metodológicos

Este estudo, que apresenta uma abordagem qualitativa, contou com a participação de 34 estudantes de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior, situada no Estado de Pernambuco. No período da coleta de dados, a turma estava cursando o 6º período do curso e todos os estudantes já tinham cursando disciplinas relacionadas à Geometria na licenciatura. Como nosso objetivo não foi avaliar o curso e nem a instituição (campo de pesquisa), decidimos não mencionar o nome da universidade e nem da cidade a qual se localiza, preservando, assim, o anonimato.

O instrumento de coleta de dados empregado nesse estudo foi um teste composto por cinco itens que abordaram o conceito de quadriláteros notáveis. Esse teste foi desenvolvido por Câmara dos Santos (2001), tendo como base a teoria de Van- Hiele. O teste buscou analisar os níveis de pensamento geométrico dos estudantes. No entanto, nesse artigo, discutimos sobre os dados produzidos com a primeira questão do teste, compreendida em dois momentos.

No primeiro momento, a questão solicitou que os discentes produzissem um retângulo, e, em seguida, deveriam construir uma figura de quatro lados que não se configurasse como um retângulo. No segundo momento, os estudantes deveriam justificar suas produções. O objetivo, aqui, foi verificar os critérios utilizados pelos participantes na diferenciação das duas figuras. Nesse sentido, analisamos essas explicações a partir das categorias de Câmara dos Santos (2001) que organizaram os estudantes em três grupos: pragmático – os alunos utilizam apenas a aparência física da figura em sua justificativa; aplicativo – o estudante faz referência somente da definição usual da figura em sua explicação; e relacional – o estudante aplica as

figuras produzidas em suas explicitações. Portanto, a análise completa da mencionada questão é apresentada no tópico que segue.

4. Análise e Discussão

Como mencionado anteriormente, a questão do teste estudada pediu que os estudantes construíssem um retângulo e, depois, uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo. Após esse momento, os sujeitos deveriam justificar porque a primeira figura construída era um retângulo e, também, porque a segunda figura não era um retângulo. Nessa etapa, o objetivo foi observar o que os estudantes consideram na explicação (se fazia referência à aparência da figura ou às suas propriedades, etc.). Na Tabela 01 encontramos as figuras geométricas consideradas “não retângulos” pelos discentes investigados (em porcentagem).

Tabela 01 – Figuras geométricas escolhidas como não retângulos

FIGURAS GEOMÉTRICAS	FREQUÊNCIA
Quadrado	40%
Trapézio	21%
Paralelogramo	18%
Losango	12%
Trapezoide	6%
Quadrilátero não notável	3%

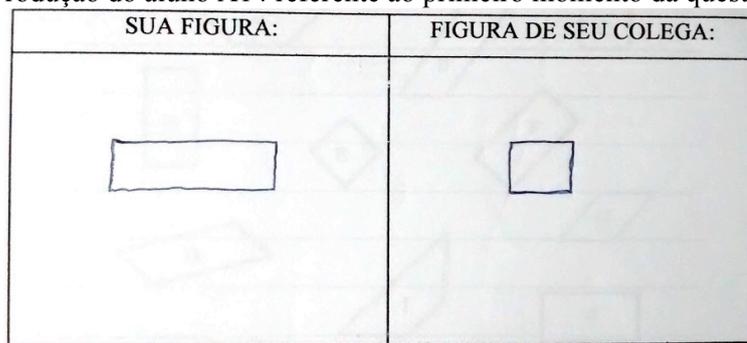
Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que dois quintos dos estudantes de Licenciatura em Matemática reconheceram o quadrado como “não retângulo”, isto é, 40% em média do total não consideram o quadrado um tipo especial de retângulo. Esse primeiro resultado parece mostrar que os participantes do estudo consideraram apenas o aspecto global na construção das figuras. Isto é, para esses licenciandos, os dois tipos de quadriláteros notáveis (retângulo e quadrado) apresentam divergência em suas aparências físicas. Tais aspectos correspondem ao primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele.

Observando os protocolos dos estudantes, percebemos que A14 produziu um retângulo e um quadrado em posição prototípica, que geralmente é mais trabalhado em sala de aula no ensino básico. Aqui fica bastante evidente que esse aluno não conseguiu verificar que o quadrado é um retângulo, pois apresenta ângulos retos, como podemos perceber na Figura 01.

Figura 01 –

Produção do aluno A14 referente ao primeiro momento da questão

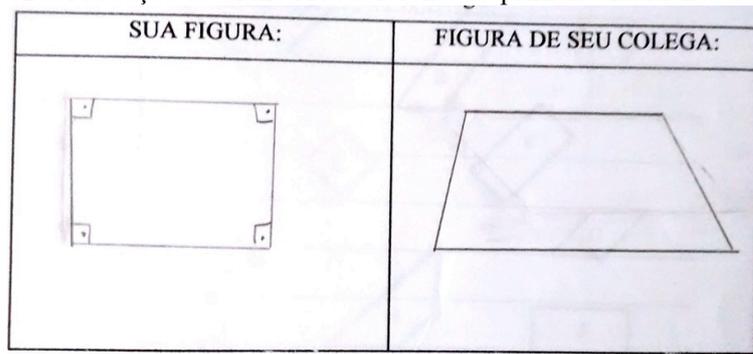


Fonte: Dados da pesquisa

Esse resultado também foi percebido em estudos realizados com alunos da educação básica, sobretudo, com os estudantes do 6º ano do ensino fundamental (COSTA; CÂMARA DOS SANTOS, 2015b) e com discentes do 1º, do 2º e do 3º ano do ensino médio (IBIDEM, 2015a). Ou seja, alunos do ensino superior apresentaram o mesmo tipo de erro que estudantes de níveis escolares inferiores. Além disso, nessa questão analisada, notamos que o quadrado foi o quadrilátero notável mais mobilizado pelos estudantes, assim como foi observado nos trabalhos de Câmara dos Santos (2001), Costa e Câmara dos Santos (2015a; 2015b).

Em segundo lugar, a figura mais presente nas produções dos estudantes como sendo “não retângulo” foi o trapézio, com uma média de 21%. Como exemplo disso, ilustramos esse tipo de resposta com a construção do aluno A06 (Figura 02).

Figura 02 – Produção do aluno A06 referente ao primeiro momento da questão



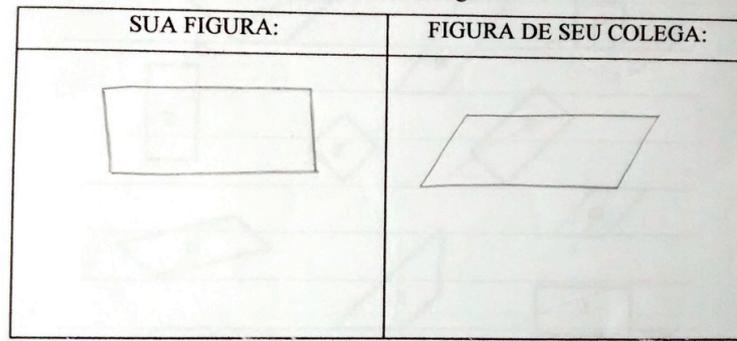
Fonte: Dados da pesquisa

A resposta de A06 parece demonstrar que esse aluno busca por características próprias do quadrilátero notável trapézio como percurso para diferenciar as duas figuras geométricas. Em terceiro lugar, o paralelogramo qualquer (com ângulos internos não retos) foi reconhecido como “não retângulo” por 18% dos participantes, como é possível observar na Figura 03.

Aqui chamamos

atenção para o fato de que o retângulo é o paralelogramo que apresenta ângulos retos.

Figura 03 – Produção do aluno A15 referente ao primeiro momento da questão



Fonte: Dados da pesquisa

O discente A15 construiu dois tipos de paralelogramos: o primeiro com todos os ângulos retos (o retângulo) e o segundo com dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos (o paralelogramo qualquer). Nesse caso, se considerarmos apenas a construção de A15, não é possível afirmarmos com certeza a hipótese de que o aluno considerou os ângulos internos dos quadriláteros notáveis como meio de diferenciação.

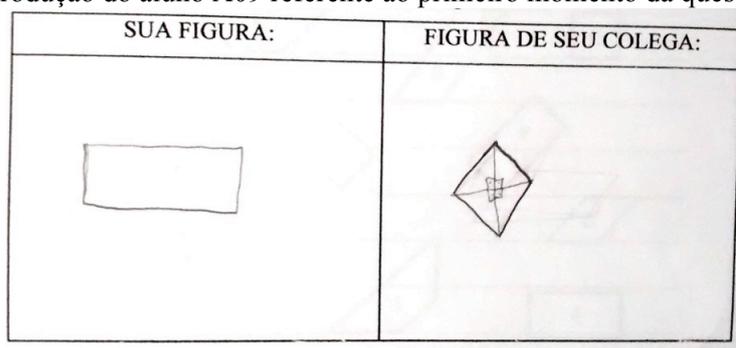
Porém, ao analisarmos os registros escritos deixados por esse estudante, verificamos a confirmação da hipótese: *“Por que um retângulo é composto por quatro lados que formam ângulos de 90° e com medidas de lados opostos iguais, porém os adjacentes diferentes”* (justificativa para o retângulo) e *“Por que apesar dos lados paralelos possuírem a mesma medida, os lados adjacentes não formam 90°”* (justificativa para o “não retângulo”).

Em quarto lugar, o losango foi escolhido por 12% dos estudantes analisados (Figura 04); em quinto lugar está a trapezoide, apresentando uma média de 6% (Figura 05); e, em sexto lugar, encontramos o quadrilátero não notável (um quadrilátero não convexo), com uma frequência de 3% do total (Figura 06). Novamente, esses dados parecem mostrar que há uma tendência entre os alunos em buscarem especificidades dessas figuras na diferenciação.

Pelas marcações deixadas pelo aluno A09, podemos verificar que ele mobilizou as diagonais do losango como caminho para diferenciar as duas construções. Parece que esse aluno percebeu que as diagonais do losango são perpendiculares (o que não ocorre no retângulo padrão). Esse comportamento é típico do segundo nível de Van-Hiele.

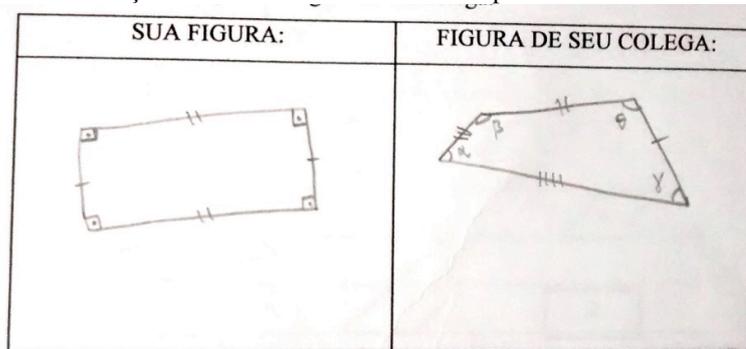
Figura 04 –

Produção do aluno A09 referente ao primeiro momento da questão



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 05 – Produção do aluno A04 referente ao primeiro momento da questão

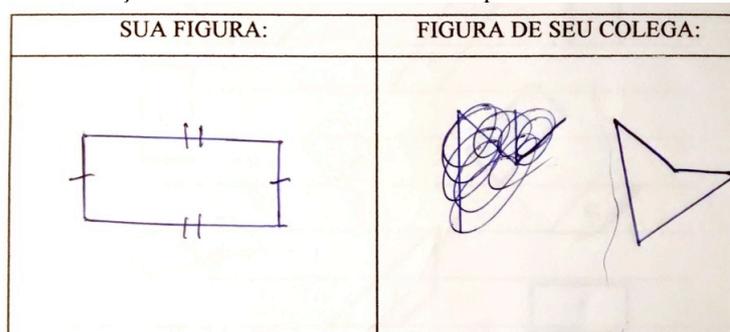


Fonte: Dados da pesquisa

No caso de A04, que construiu um retângulo e uma trapezoide, esse discente mobilizou a medida dos comprimentos dos lados dos quadriláteros, percebendo, assim, que o retângulo possui lados opostos congruentes (o que não se verifica na trapezoide). Também, considerou os ângulos das figuras: o retângulo tem ângulos retos e a trapezoide não apresenta essa característica.

Também, identificamos estudantes que produziram um retângulo e um quadrilátero não notável, aparentemente, fazendo uso da congruência dos lados das figuras para diferenciar os dois quadriláteros. A figura a seguir ilustra esse caso:

Figura 06 – Produção do aluno A07 referente ao primeiro momento da questão



Fonte: Dados da pesquisa

Em relação

ao segundo momento da primeira questão, a Tabela 02 apresenta a frequência das justificativas dos estudantes investigados.

Tabela 02 – Grupos de justificativas dos estudantes em relação às construções

GRUPOS	FREQUÊNCIA
Pragmático	32%
Aplicativo	44%
Relacional	24%

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos evidenciar que quase um terço dos estudantes de Licenciatura em Matemática, 32% em média, localiza-se no grupo pragmático, ou seja, fizeram referência apenas ao aspecto global das figuras em suas justificativas. A Figura 07 ilustra esse caso.

Figura 07 – Produção do aluno A03 referente ao segundo momento da questão

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
porque é uma figura com 4 arestas, sendo duas com tamanho maior e duas com tamanho menor.	com quatro lados, podem ser desenhados ou um quadrado ou um losango.

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar do aluno A03 ter utilizado um vocabulário típico da Geometria, o uso do termo “arestas”, em referência aos lados do quadrilátero, não é a mais apropriada. Esse estudante justificou a diferença entre as duas figuras considerando a aparência física, afirmando que o retângulo apresenta “duas arestas (lados) com tamanho maior e duas com tamanho menor”, deixando a entender que o quadrado ou um losango não apresentam essa característica. Tal aspecto é uma característica do primeiro nível vanhieliano de pensamento geométrico, em que ocorre o reconhecimento das figuras geométricas a partir de sua aparência física.

Um pouco mais de dois quintos dos participantes do estudo encontram-se no grupo aplicativo, 44% em média, pois fizeram uso apenas da definição usual das figuras em suas explicações, como elucidada a Figura 08.

Figura 08 – Produção do aluno A33 referente ao segundo momento da questão

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo:
Possui 4 ângulos retos	Não, pois não possui 4 ângulos retos.

Fonte: Dados da pesquisa

A33

construiu um retângulo e um paralelogramo qualquer, e, em sua justificativa, fez uso da definição do retângulo para diferenciá-lo do paralelogramo (não retângulo): o retângulo “possui 4 ângulos retos” e o paralelogramo “não possui 4 ângulos retos”. Aqui ficou evidente que A33 não mobilizou as propriedades desses quadriláteros notáveis em suas explicações.

Por fim, um pouco mais de um quinto dos licenciandos estavam atuando no grupo relacional, 24% em média, no qual aplicaram as propriedades das figuras como meio para diferenciação (Figura 09).

Figura 09 – Produção do aluno A08 referente ao segundo momento da questão

Sua figura é um retângulo:	A de seu colega não é um retângulo
São retângulos porque todos seus ângulos possuem 90° e os lados opostos são paralelos	(2) não é retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos e todos seus ângulos são diferentes de 90°

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A08, que fez um retângulo e um trapézio, em sua primeira justificativa utilizou a definição usual: “todos seus ângulos possuem 90° ” e uma das propriedades do retângulo: “os lados opostos são paralelos (congruentes)”. Em seguida, afirmou que o trapézio “não é um retângulo, pois apenas dois lados opostos são paralelos” (aspecto da definição) e “todos os seus ângulos são diferentes de 90° ”. Esses aspectos parecem corresponder ao segundo nível de pensamento geométrico de Van-Hiele (caracterizado pelo reconhecimento das figuras geométricas a partir de suas propriedades).

5. Considerações Finais

Os resultados produzidos na questão analisada do teste evidenciaram que quase a metade da turma de Licenciatura em Matemática investigada se localiza no primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele, em que ocorre o reconhecimento das figuras geométricas por meio da aparência física. Tal fenômeno pode ser verificado nas justificativas dos alunos que ao construíram um retângulo e um quadrado, e afirmaram que “o retângulo possui dois lados maiores e dois menores, enquanto que o quadrado e o losango não”. Isso significa que esses alunos ainda não são capazes de identificar os quadriláteros notáveis a partir de suas propriedades.

Observamos

que, em média, um terço da turma estava trabalhando no segundo nível de Van-Hiele, caracterizado pela identificação das figuras como detentoras de propriedades, e 18% da turma atuavam na transição entre os dois primeiros níveis. Tal fato foi constatado, por exemplo, quando um estudante construiu um retângulo e um quadrado, porém, na sua justificativa fez uso da definição usual desses quadriláteros como meio de diferenciação.

Percebemos que, majoritariamente, as explicações dos estudantes eram do tipo aplicação, ou seja, faz referência somente à definição usual da figura em sua explicação e com baixa frequência relacional - o estudante aplica as propriedades das figuras produzidas em suas explicações.

Constatamos, também, uma baixa frequência de estudantes trabalhando no terceiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre a ordenação das propriedades das figuras geométricas. Segundo Van-Hiele (1957), no término do curso superior em Matemática, o estudante deveria estar no quinto nível de sua teoria. Contudo, não observamos alunos atuando nesse nível.

Outro aspecto que merece destaque é que muitos desses alunos apresentam dificuldades conceituais ou de aprendizagem com os quadriláteros notáveis, pois é um conceito a ser sistematizado no 6º ano do ensino fundamental, segundo as recomendações curriculares vigentes no Brasil e no Estado de Pernambuco.

Por tudo isso, consideramos que os resultados da pesquisa revelam dados preocupantes, tendo em vista, que esses estudantes, em breve, serão professores de Matemática (licenciados) do ensino básico.

Portanto, reforçamos a necessidade de se investigar sobre a Geometria explorada no ensino superior, nos cursos de formação de professores de Matemática, buscando compreender até que ponto ela poderá (ou não) contribuir com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos nossos futuros colegas de profissão.

6. Referências

CÂMARA DOS SANTOS, M. Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement de la pensée géométrique. **Annales...** 2 Congrès International Cabri Géomètre, Montreal, 2001.

COSTA, A.

P. A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 283f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

_____. Evoluindo o raciocínio geométrico por meio de uma sequência didática: o caso dos quadriláteros. **Anais...** 18 Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Recife, 2014.

COSTA, A. P.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. **Anais...** 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática, Tuxtla Gutiérrez, 2015a.

_____. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. **Anais...** 4 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Ilhéus, 2015b.

COSTA JÚNIOR, J. R. Uma análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática: contribuições da teoria de van Hiele. **Anais...** 2 Congresso Nacional de Educação, Campina Grande, 2015.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

GUTIÉRREZ, A. Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-Dimensional geometry. **Structural Topology**, vol.1. n.8, pp. 31-48, 1992.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em geometria. **Boletim GEPEN (USU)**, Rio de Janeiro, v. 27, pp. 93-99, 1990.

_____. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil.** 1992. 397f. Thesis (PhD in Mathematics Education) – University of London, King's College, Centre for Educational Studies, London, 1992.

VAN-HIELE, P. M. **El problema de la comprensión:** en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria. 1957. 151f. Tesis (Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales) - Universidad Real de Utrecht: Utrecht, 1957.