

A NOÇÃO DE ECOLOGIA DO DIDÁTICO APLICADA AO CONCEITO DE SIMETRIA ORTOGONAL

Cleusiane Vieira Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
cleusianesilva@gmail.com

Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
saddoag@gmail.com

Resumo:

Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado já concluída, nele utilizamos a noção de Ecologia do Didático para fazer um estudo do ponto de vista didático sobre a simetria ortogonal, com o objetivo de compreender, em parte, como esse conteúdo se configura no sistema de ensino brasileiro. Tal estudo passa pela análise dos referenciais curriculares, numa discussão sobre a simetria ortogonal e as condições de sua existência no sistema de ensino. Como resultado desta investigação, observamos que, tanto em âmbito nacional como no Estado da Bahia, a simetria ortogonal é tratada como “simetria no objeto” (em que aparece como ferramenta para o ensino de outros objetos matemáticos) e não o objeto matemático simetria ortogonal em que seu ensino é focado em sua definição e propriedades.

Palavras-chave: Transformações geométricas. Simetria Ortogonal. Ecologia do Didático.

1. Introdução

A noção de transposição didática introduzida por Chevallard é definida como sendo a transformação do saber científico para o saber a ensinar. Ao fazer uma análise sobre os processos de transposição didática e sua teorização Chevallard (1994) avalia que a inserção da problemática ecológica trouxe consigo uma enxurrada de questões, impulsionando uma verdadeira desconstrução da realidade. Segundo esse mesmo autor,

os ecologistas distinguiram, tratando-se de um organismo, seu habitat e nicho. Para dizer em uma linguagem deliberadamente antropomórfica, o habitat é de alguma sorte um endereço, lugar de residência do organismo. No nicho estão as funções que o organismo preenche, isto é, alguma forma de profissão que ele exerce. (CHEVALLARD, 1994, p.4, tradução nossa)

De acordo com Almouloud (2007), Chevallard fundamenta-se numa ideia ecológica, buscando apoio em conceitos como nicho ecológico, habitat, cadeia alimentar e ecossistema para explicar as relações entre os objetos e no estudo do objeto em si mesmo (aqui, objeto

toma diferentes sentidos como, por exemplo: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições).

Segundo Artaud (1988, p.101, tradução nossa) “a problemática ecológica apresenta-se como um meio de questionar o real”. Sendo assim, propomos, neste artigo, discutir as seguintes questões: A simetria ortogonal faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Como é apresentada e com qual finalidade?

Essas questões nos aparecem como guia na perspectiva apontada por Artaud (1988, p.101, tradução nossa) e gira em torno das seguintes perguntas: – O que existe, e por quê? – O que não existe e por quê? – O que não existe poderia existir? Sobre quais condições?

Ainda de acordo com Artaud (1988), a ecologia permite englobar o domínio da realidade do pesquisador em didática da matemática de maneira adequada, munindo o pesquisador de um meio de se desprender de certa ilusão de transparência e de ser atento às dependências dos objetos que ele estuda.

2. A noção de ecossistema aplicada à simetria ortogonal

De acordo com Artaud (1988), a ecologia do didático foi inspirada na ecologia biológica, desenvolvida pouco antes do fim do século XIX. Ela ainda afirma que, no progresso dessa ciência, o conceito de ecossistema foi particularmente importante. Paul Colinvaux, citado por Artaud (1988, p. 102, tradução nossa) afirma que o

ecossistema descreve uma ideia, uma criação do homem na qual se define uma parcela de terra de tamanho conveniente e se estuda o funcionamento da vida considerando o conjunto inerte e o vivo para ver como eles interagem. O conceito de ecossistema constitui uma maneira de observar a natureza.

Em outra perspectiva, Loreau (2010) pontua que um ecossistema ecológico está preocupado, principalmente, com o funcionamento do sistema como um todo, composto de organismos biológicos e seu ambiente abiótico; seu ponto de partida é o fluxo de matéria ou energia entre os compartimentos funcionais.

Artaud (1988) pontua que, seguindo o tipo de regime epistemológico ao qual é submetido o saber matemático, os pesquisadores em Didática da Matemática identificaram quatro tipos de ecossistemas:

- Ecossistema do saber: no qual se produz a matemática;
- Ecossistema didático escolar: no qual se estuda a matemática;
- Ecossistema profissional: no qual se utiliza a matemática para concretizar algumas tarefas;
- Ecossistema noosferiano: no qual a matemática é manipulada para fins de transposição.

Segundo essa mesma autora, os objetos matemáticos e os objetos didáticos “vivem” em associação, desde que as organizações matemáticas iniciaram suas “vidas”, por meio de pessoas ou instituições, por um processo de estudo. Seguindo essa visão, um questionamento que surge é: – Como a simetria ortogonal está presente em cada um desses ecossistemas?

No ecossistema do saber, a importância da simetria ortogonal pode ser observada na construção de conhecimentos geométricos relacionados ao desenvolvimento dos métodos de transformações de figuras, principalmente ao levar em conta a invariância de propriedades geométricas.

Já no ecossistema didático escolar, percebemos, por intermédio de outros estudos (SILVA, 2015) sobre o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas, em especial a simetria ortogonal, que ainda existe grande dificuldade para que esse conteúdo “sobreviva” no sistema de ensino brasileiro como objeto matemático a ser estudado.

No ecossistema profissional, esse conhecimento pode ser utilizado, principalmente na área técnica, uma vez que as transformações geométricas podem ser incorporadas como linguagem básica nos programas de computação gráfica. Por fim, no ecossistema noosferiano a simetria ortogonal está presente com especial destaque nas recomendações e diretrizes curriculares.

Na próxima seção, apresentaremos uma investigação acerca das recomendações de conteúdos relacionados às transformações geométricas no plano, em documentos curriculares oficiais. Tomamos como base o conceito de “cadeia alimentar” que, segundo Loreau (2010, p.79, tradução nossa),

[...] descreve a rede de interações tróficas entre espécies, isto é, quem come quem, em um ecossistema. Uma vez que interações tróficas são ambas os veículos de transferência de energia e de materiais e uma das mais significativas maneiras pelas quais as espécies interagem, elas sempre têm ficado na confluência de comunidades e de ecossistemas ecológicos.

Observamos que, nesse estudo, espécies tomam o sentido de objetos matemáticos. Sendo assim, procuramos os objetos que podem contribuir para que a simetria ortogonal possa “viver” no sistema de ensino servindo-lhe como fonte de energia.

3. Os documentos curriculares oficiais e o ensino da simetria ortogonal no ensino fundamental

A portaria nº. 5.872 de 15 de julho de 2011, da Secretaria Estadual de Educação da Bahia, aprova o Regimento Escolar das unidades escolares integrantes do sistema público estadual de ensino da Bahia. Esse regimento, em seu artigo 35, estabelece que a organização curricular de tal sistema seja construída a partir das orientações postas pelas diretrizes, parâmetros e referenciais curriculares nos contextos nacional e estadual. Consideraremos como documentos curriculares oficiais os descritos acima no referido artigo. Por isso, os documentos de que trataremos neste trabalho serão os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1988) e as Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado da Bahia – DCMEF (BAHIA, 1994).

A simetria ortogonal tem como habitat mais propício para “viver” no Ensino Fundamental as transformações geométricas no plano. Faremos, a seguir, um estudo numa visão ampla, por acreditar que os objetos, os quais subsidiam sua “sobrevivência” no sistema de ensino, interagem dentro de um ecossistema maior.

4. As transformações geométricas segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais

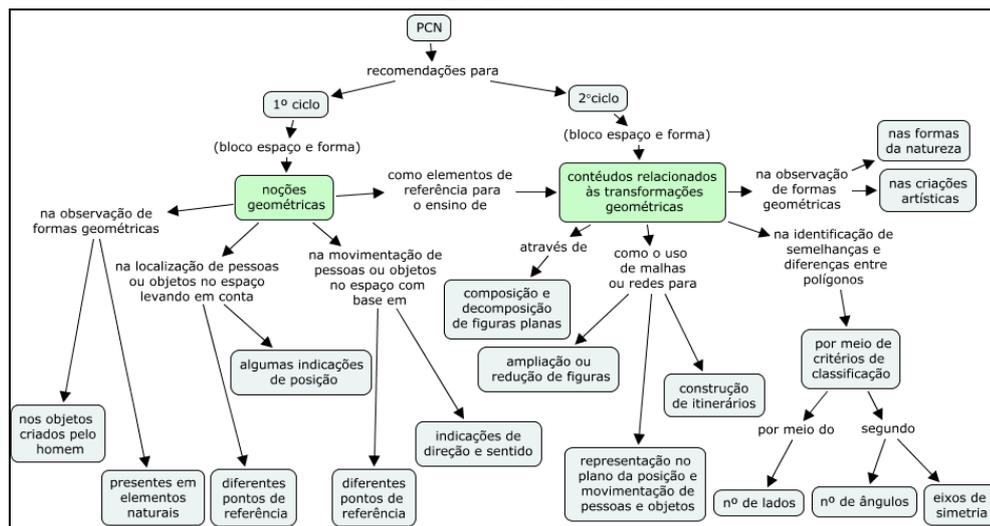
As transformações geométricas aparecem na seleção de conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental, dentro do bloco espaço e forma dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998). Esse bloco trata, particularmente, dos conceitos geométricos a serem ensinados, a justificativa para sua presença no currículo é a de que,

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p.39).

Esses conceitos, na maioria das vezes, são ensinados de forma tímida e dissociados de outros conteúdos matemáticos na escola. A necessidade e importância do ensino dos conteúdos de geometria, especificamente, das transformações geométricas, são explicitadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental.

Visando responder ao questionamento: – Qual é o ecossistema, em termos de cadeia alimentar, no qual o professor pode buscar estabelecer inter-relações entre os conteúdos geométricos trabalhados em sua prática e a noção de simetria ortogonal visando à construção de conhecimento por parte dos alunos? – construímos a figura 1, elaborada a partir das orientações propostas nos conteúdos conceituais e procedimentais para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental apresentados nos PCN.

Figura 1. Integração entre os objetos envolvidos no desenvolvimento do pensamento geométrico para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental.



Fonte: figura elaborada pelos autores com auxílio da ferramenta Cmap Tools.

A finalidade desse mapa conceitual é estabelecer conexões entre as recomendações de noções geométricas para serem trabalhadas no 1º ciclo e no 2º ciclo do Ensino Fundamental. Por meio da figura 1, podemos visualizar a possibilidade de integração entre os conteúdos relacionados à geometria nos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental, além da proposta de continuidade entre esses conteúdos. Observamos que as orientações curriculares sugerem que as noções geométricas, detectadas com base nas experiências dos alunos e trabalhadas no primeiro ciclo, sejam utilizadas como referência para o trabalho no 2º ciclo relacionado às transformações geométricas.

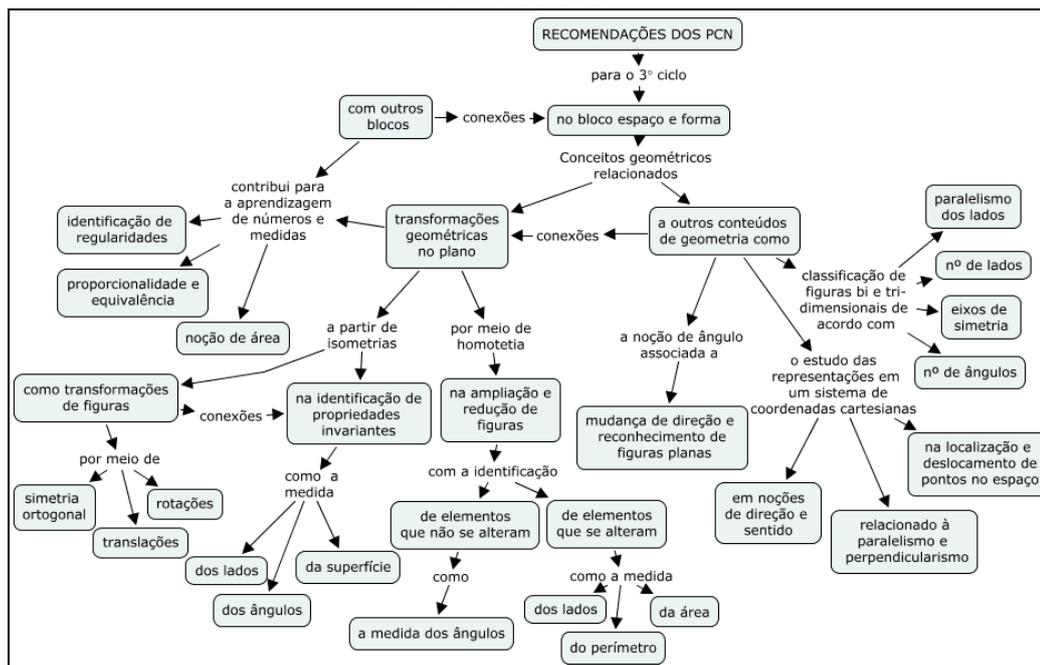
Nos dois primeiros ciclos, fica explícita a orientação de utilização de atividades que tenham como base a visualização e o reconhecimento. Por intermédio de diferentes atividades – trabalhos com dobraduras, recortes ou espelhos e que incluam a observação de obras artísticas – a noção de simetria ortogonal pode ser introduzida com o objetivo de estimular o aluno a discernir características entre figuras e a utilizar propriedades com a finalidade de classificar e conceituar formas geométricas.

Nos 3º e 4º ciclos, a recomendação dos PCN com relação às transformações geométricas é ainda mais específica, pois esclarece que:

deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias) de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51).

Com a finalidade de entender as conexões que podem ser feitas entre os conteúdos de geometria e as transformações geométricas, dentre elas a simetria ortogonal, elaboramos um mapa conceitual (figura 2), a partir das orientações propostas nos conteúdos conceituais e procedimentais, apresentados nos PCN para o 3º ciclo do Ensino Fundamental.

Figura 2. Mapa conceitual sobre a relação entre os conteúdos que envolvem a simetria ortogonal no 3º ciclo do Ensino Fundamental.

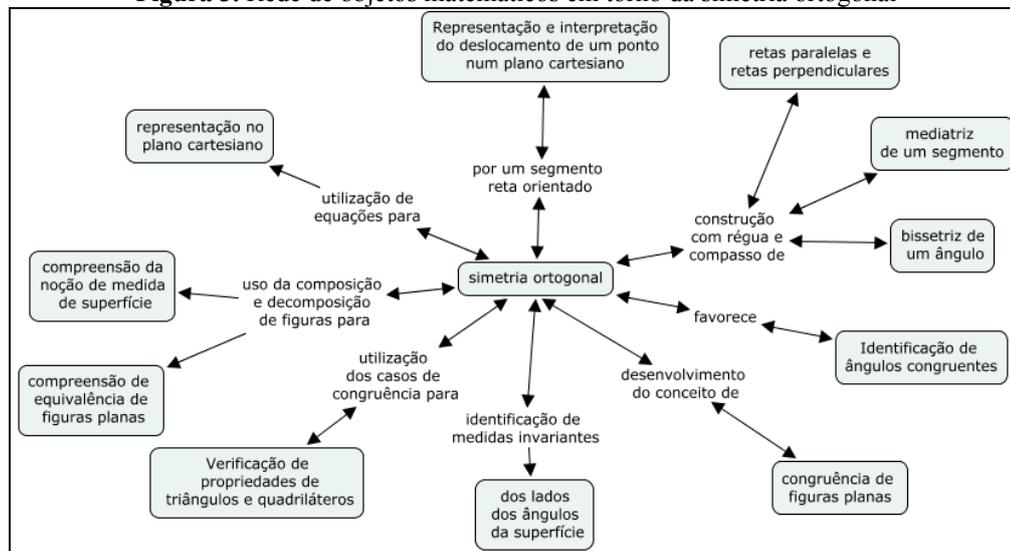


Fonte: figura elaborada pelos autores com auxílio da ferramenta Cmap Tools.

O mapa conceitual ilustrado na figura 2 apresenta as conexões que podem ser estabelecidas entre as transformações geométricas e outros conteúdos de geometria no bloco espaço e forma, ao mesmo tempo em que expõe as correlações que podem ser estabelecidas com alguns conteúdos de outros blocos. Ainda é possível observar nessa figura uma cadeia de objetos que servem de “alimento” uns para os outros, no sentido de formar uma rede de conhecimentos inter-relacionados. A forma de relacionar esses objetos vai depender dos conhecimentos prévios dos alunos e dos tipos de situações--problema que o professor apresentará aos estudantes.

Para o 4º ciclo, os PCN orientam que sejam desenvolvidas “atividades que permitam ao aluno perceber que, pela composição de movimentos, é possível transformar uma figura em outra”. (BRASIL, 1998, p.86). Na figura 3, apresentamos um esquema baseado nessas orientações, com o intuito de destacar a rede de objeto que pode ser formada em torno da simetria ortogonal.

Figura 3. Rede de objetos matemáticos em torno da simetria ortogonal



Fonte: figura elaborada pelos autores

O esquema acima foi construído com a finalidade de mostrar para quais conteúdos a simetria ortogonal pode servir de “alimento” e aqueles que servem de “alimentos” para ela. Observamos que muitos desses conteúdos aparecem em dois ou mais ciclos do Ensino Fundamental, isso porque a proposta dos PCN é a de que os conteúdos introduzidos em um ciclo sejam consolidados nos ciclos seguintes.

A importância de propiciar ao aluno condições que lhe permitam estabelecer relações é explicitada nos PCN, não só entre os conteúdos de Matemática, mas também com outras áreas de conhecimento. O documento orienta que “é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento”. (BRASIL, 1998, p.51)

5. A simetria ortogonal segundo as Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado da Bahia

Por não existir outro documento oficial a respeito do currículo na Bahia, utilizamos as Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental desse Estado, apesar de o documento datar de 1994. Uma preocupação, expressada nesse documento em relação aos conteúdos, está direcionada aos “eixos ou núcleos temáticos essenciais, considerando-se os aspectos intuitivos, formais, a verticalidade e as interfaces com outras áreas” (BAHIA, 1994, p.17), o que mostra uma consonância com as recomendações apresentadas nos PCN.

Entre os objetivos gerais do Ensino de Matemática apresentados no documento, destacamos um que trata especificamente da aprendizagem de geometria. De acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental do Estado da Bahia, o ensino de geometria deve proporcionar condições para que os alunos “identifiquem corpos e figuras geométricas na análise de objetos, formulando hipóteses sobre o seu comportamento, a partir das propriedades e relações geométricas implicadas” (BAHIA, 1994, p.31).

Os conteúdos são estruturados em três temas fundamentais: Números, Geometria e Medidas. Apresentamos, no quadro 1, os conteúdos de Matemática para o ensino de geometria, sugeridos pelo referido documento. Pelo fato de levar em consideração a Lei 5.691/1971, de Diretrizes e Base para o ensino de 1º e 2º graus, os conteúdos são apresentados numa estrutura para oito anos de Ensino Fundamental, e na forma de listas por série como podemos observar no quadro a seguir.

Quadro 1. Conteúdos de geometria listados por série (1ª a 4ª série)

Conteúdos da 1ª série	Conteúdos da 2ª série
Formação de conceitos referentes à: -Posição (acima de/abaixo de, em	Sólidos geométricos: -Corpos redondos (cone, cilindro e esfera) -Corpos retilíneos-poliedros (primas e pirâmides)

<p>cima de/em baixo de, à direita de/ à esquerda de, etc...).</p> <p>-Direção e sentido (para frente/para trás, para o lado, pela frente/ por detrás, através de, etc...).</p> <p>Comparação (maior que/menor que, igual a, mais fino que / mais grosso que, inferior a/superior a, etc,...).</p> <p>Curvas</p> <p>-curvas, não curvas, curvas abertas, curvas fechadas, interior e exterior de ramos fechados de curvas, fronteira.</p>	<p>-Identificação de faces, vértices e arestas de um poliedro. Planificação dos sólidos através do contorno de suas faces: figuras planas (triângulos, quadriláteros, círculos).</p> <p>Simetria:</p> <p>Simetria em figuras planas através de dobraduras, recortes, decalques, pinturas.</p>
<p>Conteúdos da 3ª série</p>	<p>Conteúdos da 4ª série</p>
<p>Círculos/Disco</p> <p>Polígonos</p> <p>-Classificação dos polígonos quanto ao número de lados.</p> <p>Simetria nos polígonos: identificação de polígonos regulares.</p>	<p>Entes primitivos</p> <p>- Ponto, reta, plano (retas, segmentos de reta).</p> <p>Noção de paralelismo e perpendicularidade</p> <p>-retas paralelas e retas perpendiculares.</p> <p>Polígonos</p> <p>-Classificação dos triângulos quanto à perpendicularidade entre os lados e quanto à medida de seus lados.</p> <p>-Classificação dos quadriláteros segundo: paralelismo dos seus lados, perpendicularidade entre seus lados e medidas dos lados.</p> <p>Ângulos</p> <p>-Classificação (ângulo reto, ângulo maior que o reto, ângulo menor que o reto).</p> <p>Ampliação e redução</p> <p>- Ampliação e redução de desenho em papel quadriculado.</p> <p>- Redução de objetos para a construção de maquetes.</p> <p>Simetria</p>

Fonte: quadro elaborado pelos autores com base em DCMEF (BAHIA, 1994, p. 35-43).

O quadro 1 mostra que a simetria ortogonal também consta nas Diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental do Estado da Bahia, já nas primeiras séries. A proposta é que esse conteúdo esteja ligado à visualização pelo intermédio de dobraduras, decalques, recortes e pinturas ou utilizada para a identificação e reconhecimento de polígonos. Apesar de os conteúdos serem apenas listados, sem indicação de como devem ser trabalhados, de forma que auxilie o aluno a estabelecer conexões entre os conteúdos, percebe-se convergência da seleção de conteúdos em comparação com as orientações apontadas pelos PCN.

Para ensino da 5ª a 8ª série (atualmente 6º ao 9º ano) do Ensino Fundamental nas referidas Diretrizes a simetria desaparece da lista de conteúdos. Ficando a orientação apenas para o trabalho com semelhança de figuras planas, em que se cita explicitamente a homotetia.

Outras transformações geométricas como rotação e translação também não são citadas no documento.

6. A Simetria Ortogonal e as condições de sua existência

Outras pesquisas (Mabuchi (2000), Luz (2007), Silva (2010) e Rodrigues (2012)) apontam que existem muitas dificuldades em incorporar o objeto simetria ortogonal na Educação Básica. As dificuldades persistem, mesmo que as orientações curriculares detalhem a importância desse conteúdo para a formação matemática dos estudantes. As dificuldades são identificadas por Artaud (1994) como barreira ecológica e podem estar relacionadas a uma série de restrições, como a forma com que os autores apresentam a simetria ortogonal nos livros didáticos. Segundo esta autora,

toda introdução de um objeto do saber matemático em um ecossistema didático não é automaticamente viável, e a existência deste objeto na noosfera não garante que seja implementado no sistema de ensino. Existe, assim, uma verdadeira barreira ecológica entre a noosfera e o sistema de ensino. (ARTAUD, 1994, p. 121, tradução nossa)

Em razão disso, deparamo-nos com o seguinte questionamento: – Quais são as condições para que a simetria ortogonal, “viva” não apenas no Ensino Fundamental, mas também no Ensino Médio de forma estável?

Parte da resposta para a questão está na “lei do todo estruturado” que, segundo Artaud (1994), foi nomeada assim por Landy Rajoson. Segundo essa lei “um objeto não pode viver de maneira isolada; é necessário que ele tome seu lugar no seio de uma organização matemática (organização que pode ser inegavelmente desenvolvida).” (ARTAUD, 1994, p. 111, tradução nossa). A mesma autora afirma que a Teoria da Transposição Didática identificava três grandes conjuntos de condições que permitiam aos objetos matemáticos existirem no sistema de ensino:

- A matemática ensinada deveria ser compatível com o seu meio social, em particular com a esfera de produção da Matemática, por um lado com a instituição dos pares e por outro lado, externa;
- A matemática ensinada deveria poder ser apresentada sequencialmente. As noções matemáticas se sucedem sobre o eixo temporal linear do tempo didático (cronogênese).
- A matemática ensinada deveria definir duas relações institucionais, uma em posição de professor e a outra em posição de aluno (topogênese). (ARTAUD, 1994, p. 104, tradução nossa)

Construímos, na seção anterior, para os diferentes ciclos do Ensino Fundamental, esquemas de organizações matemáticas baseadas nos PCN. Esses esquemas mostram como a simetria ortogonal pode ser relacionada aos outros conteúdos de geometria. Contudo, percebemos pela análise de outras pesquisas, que tais articulações são, muitas vezes, ignoradas no sistema de ensino brasileiro. O episódio vem ao encontro de Artaud (1994), quando ela chama a atenção para o fato de que não é suficiente que exista, ao redor de um objeto, uma organização matemática compatível com as outras organizações do *corpus* ensinado, mas que essa organização matemática responda às condições didáticas determinadas, as quais têm como exigências o funcionamento didático do meio cultural no qual o sistema de ensino está imerso.

7. Resultados

Respondendo às questões elencadas no início deste artigo, afirmamos que a simetria ortogonal está presente nas recomendações curriculares para a Educação Básica, tanto em contexto nacional quanto baiano. No contexto nacional, constatamos, por meio de nossa análise, que esse documento sugere que a simetria ortogonal seja trabalhada em todos os ciclos do Ensino Fundamental, de forma que o aluno estabeleça conexões entre este conteúdo e outras áreas do conhecimento, tanto internas quanto externas à Matemática. Já no contexto baiano, o documento recomenda o ensino de simetria apenas no Ensino Fundamental I, em que as sugestões de trabalho se limitam a dar ênfase principalmente, ao ensino de simetria em figuras planas, sem a preocupação com as propriedades específicas do objeto.

Observamos ainda, que os documentos oficiais analisados focam mais o estudo da simetria no objeto, isto é, estão mais interessados na determinação do eixo de simetria de uma figura (geometria ou não) do que no estudo do objeto “simetria ortogonal” (definição e propriedades). Esse fato manifestar-se nas sugestões de ensino apresentadas nos PCN e nas Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática no Estado da Bahia, em que a simetria aparece como “alimento” para outros objetos. Inferimos que isso pode ter consequências irreparáveis no que tange à compreensão desse objeto, suas propriedades e suas relações com outros objetos. Ressaltamos que trabalhar a simetria de forma que outros objetos matemáticos lhe sirvam de “alimento” pode viabilizar a “sobrevivência” do objeto matemático simetria ortogonal no sistema de ensino.

8. Referências

- ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR, Curitiba. 2007. 218p.
- ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactiques: l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In: LA NEUVÈME ÉCOLE D'ETE DE DIDACTIQUES DES MATHÉMATIQUES, 9. 1988, Hougate, Bailleul. **Anais...** Hougate, p. 101-134. 1988.
- BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. Diretrizes Curriculares de Matemática para o Ensino fundamental: Matemática. Salvador, 1994.
- BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **Regimento Escolar**. Salvador, 2011.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática- 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental**. Brasília, 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática-5ª a 8ª série do Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.
- CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didactique et leu théorisation. In. ARSAC G., CHEVALLARD, Y., et al, (org.). **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1994. p. 135-180. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_processus_de_transposition.pdf>. Acesso 18 set. 2013.
- LOREAU, M. **From populations to ecosystems: Theoretical Foundations for a new ecological synthesis (MPB-46)**. Editor Princeton University Press. USA, 2010.
- LUZ, V. A. **Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: Da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais**. (2007). Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
- MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- RODRIGUES, C. R. F. **Potencialidades e possibilidades do ensino de transformações geométricas no Ensino Fundamental**. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012.
- SILVA, C. V. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal**. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo, 2015.
- SILVA, D. R. **Livro didático de Matemática: lugar histórico e perspectiva**. Dissertação (mestrado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo. 2010.