

ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM UTILIZAÇÃO DE GEOPLANOS NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Sandra Aparecida Fraga da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo
sfraga@ifes.edu.br

Lauro Chagas e Sá
Instituto Federal do Espírito Santo
lauro.sa@ifes.edu.br

Sabrine Costa Oliveira
Instituto Federal do Espírito Santo
binecosta@gmail.com

Resumo:

O texto em tela apresenta uma experiência de ensino de trigonometria com auxílio de geoplanos. A dinâmica foi realizada com estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública, no Laboratório de Ensino de Matemática do Ifes/Vitória, no contexto da disciplina de Tópicos Especiais em Educação em Ciências e Matemática do Programa Educimat/Ifes. Durante essa experiência, utilizamos três instrumentos para coleta de dados: a observação participante, o uso dos registros escritos dos alunos e a coleta de áudio por meio de gravação. Ao longo deste relato, apresentamos a experiência e, *pari passu*, tecemos reflexões sobre a utilização de materiais manipulativos na perspectiva da investigação matemática, no cenário de Laboratório de Ensino de Matemática. Ao final, concluímos que os alunos conceituaram e determinaram as razões trigonométricas dos ângulos notáveis do triângulo retângulo com auxílio dos geoplanos quadrangular e isométrico.

Palavras-chave: Razões Trigonométricas; Geoplano; Investigação Matemática; Laboratório de Matemática.

1. Introdução

O estudo da trigonometria é fundamentado nas relações existentes entre ângulos e medidas. No triângulo retângulo, essas relações são constantemente trabalhadas e alguns ângulos presentes nesse tipo de triângulo são usados com maior frequência. Eles recebem o nome de ângulos notáveis e seus valores são de 30° , 45° e 60° . Mas como determinar junto a alunos de ensino fundamental o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos? Para

responder a esta reflexão, propusemos uma atividade em Laboratório de Ensino de Matemática, utilizando geoplanos.

Os significados para Laboratório de Ensino de Matemática (Lem) que aparecem na literatura atual são referência a um lugar físico ou a um processo escolar. Quando considerado como lugar, refere-se a uma sala (ou outro local físico) para guardar materiais essenciais, tornando acessíveis as aulas, nesse caso seria um depósito de arquivos e/ou instrumentos (LORENZATO, 2006). Como processo escolar, descreve um processo didático que se desenvolve diferente daqueles realizados em aulas expositivas. Nessas ocasiões, o professor e os alunos tem mais liberdade para seleção de materiais e de métodos que serão utilizados, e a construção dos conhecimentos acontece por meio da interação entre o professor, o aluno e o material, em um trabalho colaborativo com vistas à descoberta para a aprendizagem significativa de conceitos e relações matemáticas (KALEFF, 2008). Nesse sentido, uma sala de aula em que acontece um processo de ensino de um Lem, pode ser considerada como um laboratório.

Segundo Lorenzato (2006), o Lem é uma visão atual da educação matemática e, é uma ferramenta indispensável nas escolas, tanto de educação infantil, ensino fundamental e médio quanto nas instituições de formação de professores, pois permite atender as necessidades especiais presentes na matemática no que abrange os recursos visuais utilizados. De modo geral, no laboratório de ensino de matemática deve conter coleções de livros didáticos, livros sobre temas matemáticos, jogos, figuras, sólidos, materiais didáticos industrializados e também aqueles produzidos pelos professores e alunos, software e computadores.

Esse artigo versa sobre uma experiência didática realizada em novembro de 2015, desenvolvida no contexto da disciplina de Tópicos Especiais em Educação em Ciências e Matemática oferecida como optativa no curso de mestrado profissional em Educação em Ciências e Matemática no Instituto Federal do Espírito Santo (Educimat/Ifes). Essa disciplina, realizada quinzenalmente no segundo semestre de 2015, teve como objetivo principal discutir práticas de ensino de matemática tendo como foco o uso e a importância do Laboratório de Ensino de Matemática.

No decorrer da disciplina, discutimos sobre diversas concepções de laboratório de ensino de matemática, sobre desafios na implementação de um Lem em escolas e instituições de ensino superior e sobre diferentes tipos de jogos e materiais didáticos para ensino de

matemática. Durante os debates, surgiu a necessidade de validar as discussões por meio de práticas com grupos de alunos da educação básica. Planejamos então ações com uma turma de jovens e adultos do Ifes, com alunos do ensino fundamental e com alunos do ensino médio. Contudo, esta última ação não pode ser efetivada. Nesse contexto, o presente artigo tem como objetivo analisar uma experiência de ensino sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo com uma turma de 9º ano ensino fundamental da rede pública de Vila Velha/ES, no Laboratório de Ensino de Matemática do Ifes/Vitória.

2. Materiais Manipulativos e ensino de Matemática: suscitando reflexões

A importância dos materiais didáticos tem sido objeto de estudo de muitas pesquisas na área da Educação Matemática. Há uma preocupação sobre as contribuições desses materiais no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois alguns professores acreditam que a utilização desses materiais causa dependência e dificulta a abstração de conceitos matemáticos. Ainda existe outro grupo de professores que não utiliza nenhum material didático por causa do custo ou ainda alegam que possuem pouco conhecimento sobre como utilizá-los em sala de aula.

Segundo Vale (2002) materiais didáticos são todos os recursos a que recorremos durante o processo de ensino-aprendizagem. Nessa perspectiva, consideram-se material didático o livro didático, a calculadora, o computador e os materiais manipulativos. Essa autora corrobora das ideias de Serrazina (1991, *apud* VALE, 2002) que define materiais manipulativos como objetos ou instrumentos que ajudam o aluno a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais em diversas fases de aprendizagem. Vale (2002) ainda argumenta que é comum confundir material didático com material manipulativo, porém ela acrescenta que a diferença principal entre esses materiais é que o material manipulativo deve ser tocado ou manipulado pelo aluno. A autora divide os materiais manipulativos em três tipos: materiais concretos, materiais pictoriais e materiais simbólicos, e ainda divide os materiais concretos em: materiais comuns e materiais educacionais. Os materiais comuns são objetos reais que têm aplicação no cotidiano e os materiais educacionais são aqueles construídos especificamente para fins educativos, como, por exemplo, geoplano, material dourado, discos de fração e algeplan.

A utilização de materiais manipulativos em aulas de matemática para auxiliar a compreensão de conceitos abstratos é recomendada por Lorenzato (2006, p. 22) ao afirmar que:

[...] os conceitos evoluem com o processo de abstração e esta ocorre pela separação mental das propriedades inerentes a objetos [...]. Esse processo começa com o apoio dos nossos sentidos e, assim, ele é aparentemente paradoxal, porque para se chegar ao abstrato [considerado, como o isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível do objeto], é preciso se partir do concreto.

Ao fazer uso de um material manipulável não há garantias de um aprendizado significativo, pois outros fatores influenciam nesse processo como o conteúdo envolvido, os objetivos a serem atingidos, a metodologia utilizada e principalmente o papel do professor. Afinal, cabe a ele a escolha do material e como deve ser utilizado, além disso, a mediação no desenvolvimento da aula também é guiada pelo professor, logo ele necessita conhecer bem o material e saber quais são suas limitações. E ainda, deve propor atividades específicas para que a manipulação do material auxilie na construção do conceito. A seleção de bons materiais manipuláveis faz parte de um processo reflexivo por parte do professor sobre como trabalhá-los e como conduzir o processo para que não fique apenas na manipulação do material.

Um dos materiais manipulativos que são amplamente referenciadas na literatura da educação matemática é o geoplano. Este é um recurso didático-pedagógico que consiste, normalmente, num pedaço de madeira com pregos representando os pontos no plano, formam uma malha padronizada e pode ser utilizado com atilhos de borracha que permitem construir várias figuras geométricas, possibilitando discussões sobre os diversos conteúdos matemáticos. Esse material foi criado pelo professor de matemática Caleb Gattegno, em 1961, como um material manipulativo indicado para trabalhar a construção de conceitos de geometria plana e outros conteúdos relacionados a álgebra e aritmética. Há diferentes tipos de geoplano, destacamos os tipos que foram utilizados nessa atividade: o quadrado, em que os pregos dispostos em linhas e colunas equidistantes, formando uma malha quadriculada, e os isométricos ou treliçados, em que seus pregos são equidistantes de todos os outros adjacentes a ele.

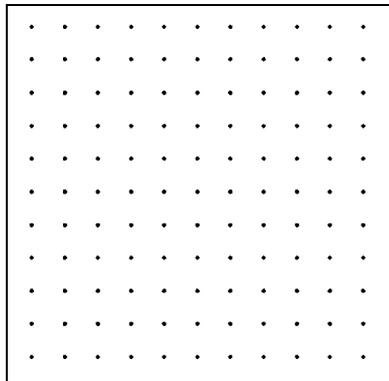


Figura 1 - Geoplano quadrangular
Fonte: Elab. pelos autores, 2015.

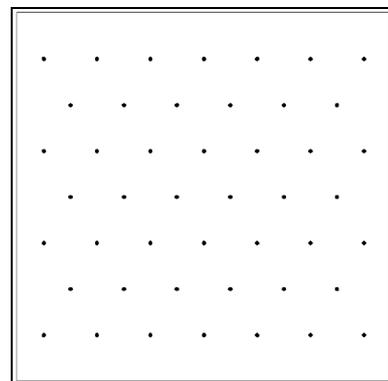


Figura 2 - Geoplano isométrico
Fonte: Elab. pelos autores, 2015.

Caleb Gattegno, em seu artigo *A pedagogia da Matemática*, ao descrever os diferentes tipos de geoplano, conclui:

Todos os geoplanos têm indubitável atrativo estético e foram adotados por aqueles professores que os viram ser utilizados. Podem proporcionar experiências geométricas a crianças desde cinco anos, propondo problemas de forma, dimensão, de simetria, de semelhança, de teoria dos grupos, de geometria projetiva e métrica que servem como fecundos instrumentos de trabalho, qualquer que seja o nível de ensino (GATTEGNO, 1961, *apud* KNIJNIK *et al.*, 1996, p. 5-6).

Os materiais manipulativos favorecem a construção de conceitos matemáticos e auxiliam na aprendizagem dos alunos. O geoplano se apresenta como um material manipulativo que oferece possibilidades de exploração em aulas de matemática.

3. Aspectos metodológicos

Além de perspectiva teórica, o laboratório se constitui como tipo de pesquisa qualitativa. Também chamados de experimentais, os estudos de laboratório “caracterizam-se pela realização de ‘experimentos’ que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação ao um fenômeno ou problema” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 104). Com efeito, este texto analisa uma experiência de ensino sobre razões trigonométricas com alunos do 9º ano, no Laboratório de Ensino de Matemática do Ifes¹. A experiência teve duração de aproximadamente três horas e contou com a presença de quinze alunos, dos

¹ É importante esclarecer que o contato foi realizado por meio da diretora da escola, que também é aluna do Programa Educimat/Ifes. Esse tipo de abordagem ocasionou distanciamento entre os pesquisadores e o professor de matemática da turma, o que comprometeu o planejamento da experiência, uma vez que os pesquisadores não conseguiram identificar conhecimentos prévios dos alunos, tendo acesso somente ao conteúdo a ser abordado.

autores dessa pesquisa, do professor de matemática da escola visitante e de outras três alunas da disciplina de Laboratório de Matemática do mestrado.

Durante a realização da dinâmica, utilizamos três instrumentos para coleta de dados considerando as orientações de Gil (1999) e Moreira e Caleffe (2008): a observação participante, não somente dos pesquisadores, mas também dos demais alunos da disciplina do curso de Mestrado; o uso dos registros escritos dos alunos, obtidos a partir do material de apoio oferecido durante a realização das tarefas com o geoplano; e a coleta de áudio por meio de gravação. Todos esses instrumentos foram utilizados mediante autorizações escritas dos responsáveis dos alunos, por meio do termo de consentimento e livre esclarecido.

Apesar de considerar as contribuições do geoplano enquanto material manipulativo para aulas de trigonometria, evidenciaremos, na próxima seção, a Investigação Matemática. Entendemos que este marco teórico oportuniza reflexões em relação a prática e sobre o papel do professor enquanto mediador do processo educativo.

4. Reflexões sobre a prática

Para determinarmos as razões trigonométricas dos ângulos 30° e 60° no geoplano, é preciso obter um triângulo que tenha esses dois ângulos. Por isso, na primeira atividade, os alunos construíram um triângulo equilátero no geoplano isométrico, representando sua construção na folha de apoio e, em seguida, determinando o comprimento da altura do triângulo formado. Durante a manipulação, os alunos criaram triângulos com lados de diversos tamanhos, mas não conseguiram representar a altura, no geoplano, em todos os casos. Em algumas ocasiões, por limitação do material, o segmento de reta não satisfazia a definição de altura, pois apesar de ser perpendicular à reta suporte de um dos lados do triângulo, não unia um vértice ao lado oposto, conforme observado no triângulo menor da figura a seguir.

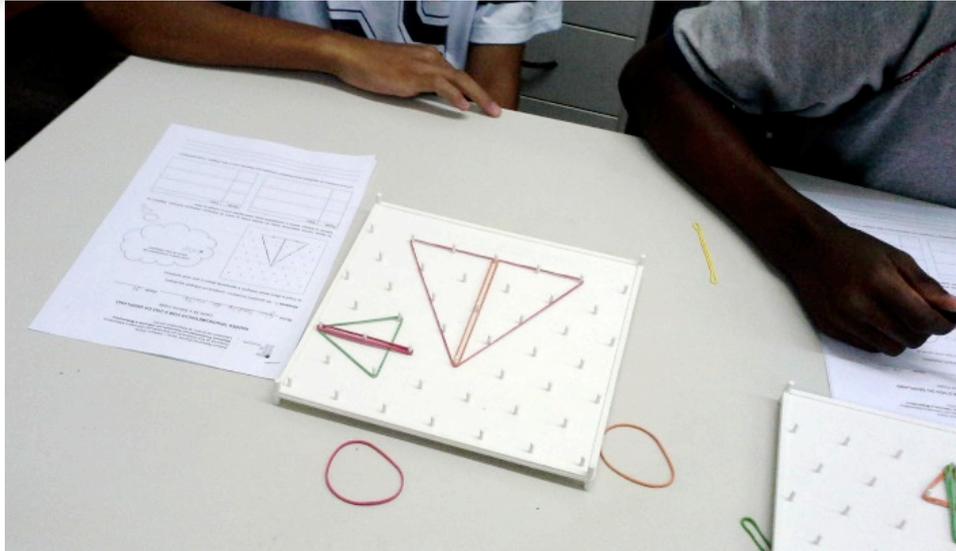


Figura 3 – Construção de triângulos equiláteros no geoplano isométrico.
Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores, 2015.

O grupo de estudantes foi questionado sobre a condição necessária para que o elástico unisse um dos vértices do triângulo ao lado oposto, como no triângulo maior da figura anterior. Nessa investigação, os alunos observaram que, nesse caso, o lado do triângulo representado no geoplano deveria ser par. Com esse episódio, verificamos que as atividades matemáticas investigativas por si só não influenciam na aprendizagem do aluno. Nesse momento é importante o papel do professor na mediação da aula, na valorização e debate das diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Nessa perspectiva, Oliveira, Segurado e Ponte (1998, p. 2), afirmam que:

O professor terá como papel fundamental iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou estimulantes e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que tem habitualmente respostas correctas ou ideias válidas.

Após as discussões de paridade, os estudantes construíram triângulos equiláteros de lado dois e quatro unidades de comprimento e procederam com a realização da tarefa, conforme representado a seguir.

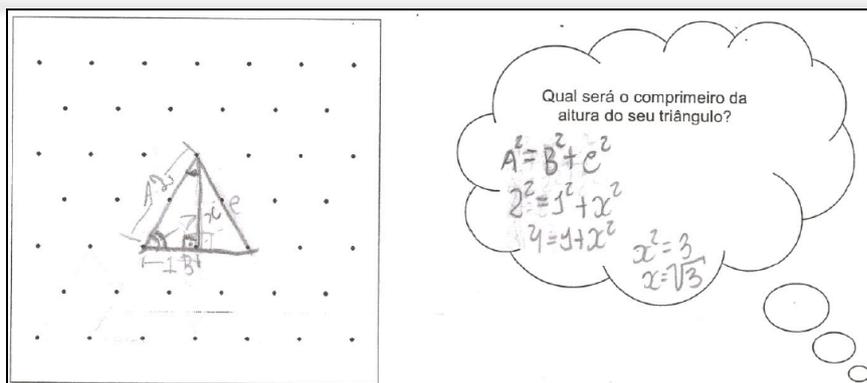


Figura 4 - Primeiras investigações no triângulo equilátero.

Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores, 2015.

Nesse momento, adotamos o ângulo da base do triângulo (60°) como referência e solicitamos que os alunos listassem e calculassem todas as razões possíveis entre os lados do triângulo retângulo formado. As primeiras razões que foram listadas e calculadas foram as já conhecidas pelos alunos: seno, cosseno e tangente. Contudo, durante a socialização das respostas, procuramos explorar também as razões inversas a essas – cossecante, secante e cotangente – que também poderiam ser obtidas no triângulo retângulo. Essa ação foi importante para evidenciar junto aos alunos que algumas razões, embora não fossem estudadas naquele momento, poderiam ser obtidas do mesmo modo. As seis razões e seus respectivos valores numéricos foram sistematizados em uma tabela, preenchida pelos alunos no material de apoio e construída pelos pesquisadores na lousa:

Razão	Valor numérico	Razão	Valor numérico
$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$	$\frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$	$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$
$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$	$\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Quadro 1 - Razões trigonométricas do triângulo retângulo

Fonte: Elab. pelos autores, 2015.

Ao apresentar outras razões trigonométricas e retomar as razões conhecidas, deduzindo seu valor numérico, corroboramos o descrito por Carvalho *et al.* (1998, p. 31-32) ao afirmar que “é o professor que propõe problemas a serem resolvidos, que irão gerar ideias que, sendo discutidas, permitirão a *ampliação dos conhecimentos prévios*; promove *oportunidades para a reflexão*, indo além das atividades puramente práticas; [...]” (grifos nossos).

Após listar as seis razões e seus respectivos valores numéricos, definimos a razão seno, cosseno e tangente, reforçando que as três outras razões, embora existam, não seriam objetos de estudo no Ensino Fundamental. Dando continuidade à discussão, determinamos o seno, cosseno e tangente do ângulo de 60° e, no mesmo triângulo equilátero, deduzimos essas razões para seu complemento, o ângulo de 30° .

Como o triângulo equilátero não possui ângulo de 45° , iniciamos a segunda atividade representando um quadrado no geoplano quadrangular e traçando uma de suas diagonais para formar dois triângulos retângulos isósceles. Neste caso, a diagonal é uma bissetriz, ou seja, divide o ângulo de 90° ao meio. Com isso, a proposta no geoplano quadrado buscou investigar os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45° .

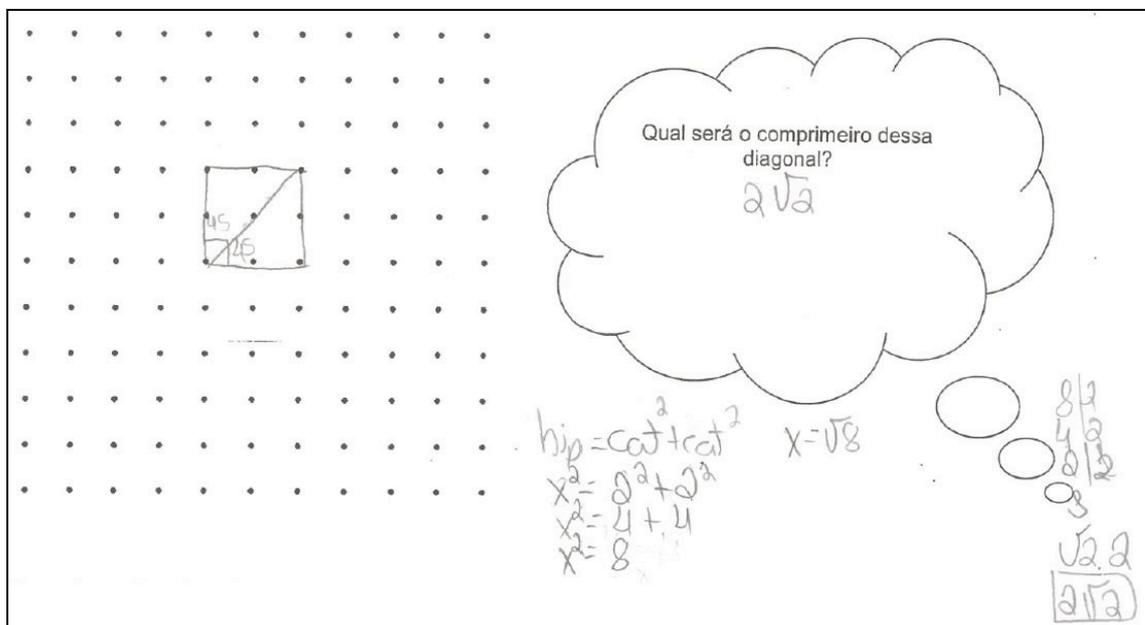


Figura 5 - Primeiras investigações no geoplano quadrangular

 Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores, 2015.

Já familiarizados com a proposta de atividade, os alunos determinaram os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45° , observando o geoplano e a folha de registro. Finalizando as investigações, com base em algumas deduções geométricas e cálculos aritméticos, determinamos os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60° , no triângulo retângulo. A partir dos cálculos efetuados, construímos a conhecida tabela de razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

Atividade 3 – Sistematizando

A partir do que você aprendeu hoje, registre na tabela abaixo o valor das razões trigonométricas dos ângulos apresentados.

	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Figura 6 - Atividade de sistematização do conteúdo
Fonte: Acervo pessoal dos pesquisadores, 2015.

Ao final da prática realizada, percebemos como é importante dar aos alunos autonomia para refletir, discutir, explicar e defender suas estratégias de resolução (CARVALHO, *et al*, 1998). Contudo, salientamos que ao final do processo investigativo, faz-se necessária uma sistematização das discussões, como retratamos anteriormente, de modo que os alunos percebam o conhecimento matemático construído ao longo da atividade.

5. Considerações finais

Nesse trabalho, conceituamos e determinamos as razões trigonométricas dos ângulos notáveis do triângulo retângulo com auxílio dos geoplanos quadrangular e isométrico. Logo no início da experiência, os alunos demonstraram conhecer as razões seno, cosseno e tangente, sem conceitua-las adequadamente. Isto permitiu que os pesquisadores percebessem que os alunos, apesar de citarem as nomenclaturas e seus respectivos valores, não se apropriaram dos conceitos e não compreenderam a origem da tabela das razões para os ângulos de 30° , 45° e 60° .

Com o geoplano isométrico e a partir da construção de um triângulo equilátero, deduzimos os valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 60° e de seu complemento. A obtenção das razões trigonométricas para o ângulo de 45° aconteceu com a construção de um quadrado no geoplano quadrangular. Esses momentos reforçam que os materiais manipulativos auxiliam os alunos a descobrirem, entenderem e compreenderem conteúdos matemáticos, por meio da manipulação de objetos ou instrumentos educativos ou comuns, ajudando na visualização e de compreensão de conceitos. Nesse sentido, consideramos pertinente o momento inicial de familiarização com o material manipulativo pelo aluno, bem como o conclusivo em que sejam retomadas as potencialidades do recurso junto aos alunos, de modo que no discurso dos estudantes a manipulação não se reduza a um passatempo.

Sobre a utilização da investigação matemática enquanto marco teórico e metodológico, percebemos, por meio desta experiência, o quão fundamental é o papel do professor no sentido de mediar as discussões e incentivar a participação dos alunos, estimulando-os à argumentação e à apropriação dos conceitos matemáticos em suas falas. Porém, destacamos a importância de uma sistematização das discussões ao final do processo investigativo, de modo que os alunos percebam o conhecimento matemático construído ao longo da atividade. Outrossim, reforçamos a necessidade de dar aos alunos autonomia para refletir, discutir, explicar e defender suas estratégias de resolução.

Ainda sobre a utilização da investigação em aulas de matemática, destacamos que o processo de seleção ou criação de situações investigativas exige do professor uma sensibilidade no planejamento da aula. Nesse sentido, acreditamos que o distanciamento entre os pesquisadores e o professor de matemática da turma comprometeu o planejamento da atividade, uma vez que os pesquisadores não conseguiram identificar antecipadamente conhecimentos prévios dos alunos, tendo acesso apenas ao conteúdo a ser abordado.

6. Referências

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de; *et al.* **Ciências no Ensino Fundamental: o conhecimento físico**. São Paulo: Editora Scipione, 1998.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria.** Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; KLÜSENER, Renita. **Ensinando e aprendendo matemática com o geoplano.** Ijuí: Editora Unijuí, 1996.

LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Coleção formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MOREIRA, Herivelto; CALEFFE, Luiz Gonzaga. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.** 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI. **Actas.** Portalegre: SPCE-SEM, 1998 (p.107-125). Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto10.PDF>> Acesso em: 30 ago. 2014.

VALE, Isabel. **Materiais Manipuláveis.** Viana do Castelo: ESE, 2002.