PROBLEMAS PARA ENSINAR EQUAÇÕES OU EQUAÇÕES PARA RESOLVER PROBLEMAS?

Gilda Maria Quitete Portela
Projeto Fundão, IM - UFRJ
gilda@quiteteportela.com.br

Andressa Bittencourt Barbosa
Projeto Fundão, Licencianda IM - UFRJ
andressa-bittencourt@hotmail.com

Lennon de Aguilar Pereira
Projeto Fundão, Licenciando IM - UFRJ
lennon_021@hotmail.com

Lucia A. de A. Tinoco
Projeto Fundão, IM - UFRJ
luciaatinoco@gmail.com

Luciana Maria L. da Silva
Projeto Fundão, IM - UFRJ
lmls03@gmail.com

Maria Palmira da C. Silva
Projeto Fundão, IM - UFRJ
mariapalmirasilva@gmail.com

Resumo:

O tópico equações do primeiro grau é ensinado pela quase totalidade dos professores do Ensino Fundamental. Ele está presente em todas as propostas de programas de sistemas de ensino deste nível, inclusive na proposta preliminar das Bases Nacionais Comuns Curriculares (BNCC) do Ministério da Educação (MEC), bem como nos livros didáticos. O minicurso ora proposto tem como objetivo compartilhar com os participantes ideias sobre a relação do tópico de equações com o desenvolvimento do pensamento algébrico de um estudante desse nível escolar e de como o ensino de equações pode se dar, de modo significativo, a partir da resolução de problemas, como um instrumento a mais para resolvê-los. Particularmente, a sequência de estratégias de resolução de equações a ser discutida valoriza a participação dos estudantes, possibilita a apropriação da linguagem algébrica por parte dos mesmos, levando em conta o seu conhecimento prévio a respeito das operações elementares.

Palavras chaves: resolução de equações; linguagem algébrica; resolução de problemas.

I. Introdução

O presente trabalho tem como público alvo professores e futuros professores do segundo segmento do Ensino Fundamental, com os seguintes objetivos: ressaltar o papel das equações para resoluções de problemas, relacionar o desenvolvimento do pensamento algébrico com as equações; explicitar a relação entre os problemas e as equações que possam permitir a sua resolução; valorizar a leitura e a escrita significativas das equações e apresentar proposta de sequência de métodos para resolvê-las. Ele é baseado no livro *Equações: ler, escrever, resolver, utilizar...* (Tinoco, 2015), publicado pelo grupo de álgebra do Projeto Fundão.

Como indicam os objetivos, reflexões a respeito da familiarização com a linguagem algébrica, aliada à resolução de problemas, permeiam todo o trabalho. Com base nos seus estudos, o grupo considera que os alunos devem ter um contato significativo com a álgebra, antes de tratar de *como resolver equações*, familiarizando-se com expressões algébricas e procedimentos simples.

A esse respeito, Abraham Arcavi (1995) afirma:

> Até mesmo aqueles estudantes que executam a manipulação das técnicas algébricas com êxito, frequentemente não veem a álgebra como instrumento para a compreensão, expressão e comunicação de generalizações e de formulação de argumentações matemáticas (provas). O ensino nem sempre oferece oportunidades para os estudantes não apenas memorizarem, mas também para 'esquecer' as leis e os detalhes e serem capazes de ver através deles de modo a pensar, abstrair, generalizar e planejar estratégias de solução (ARCAVI, 1995, p.39).

Atividades específicas, envolvendo situações do dia a dia dos alunos, jogos e desafios representam tais oportunidades. Dentre elas, destacam-se o registro e a compreensão de leis gerais em linguagem corrente, aritmética, algébrica, geométrica e outras. Segundo João Pedro da Ponte: "uma das vias privilegiadas para promover o pensamento algébrico é o estudo de padrões e regularidades" (PONTE, 2005, p. 37).

II. Os problemas e o ensino de equações

Historicamente, as equações surgiram como ferramenta para resolução de problemas, alguns ligados à realidade e outros em contexto puramente matemático. No entanto, a ênfase

ISSN 2178-034X

excessiva no estudo da classificação das equações e das regras para sua resolução, dissociadas de desafios que mobilizem o estudante e o façam atribuir significado a tudo isso, geram incompreensão e desinteresse. Ao tratar da relação entre problemas e equações, vale apontar três questões que vêm sendo objeto de reflexão dos autores deste texto.

A primeira diz respeito à dificuldade dos alunos iniciantes em álgebra ao traduzir um problema para a linguagem algébrica e à necessidade de que o mesmo adquira desde cedo algum domínio dessa linguagem. que, insistimos, deverá ser aprofundado continuamente ao longo do trabalho com equações e outros tópicos de álgebra, valorizando sempre as oportunidades de os alunos escreverem expressões e equações, atribuindo assim significado a elas.

A segunda é a falta de consciência de alunos sobre o que a equação que resolve um problema representa: sua estrutura matemática. Destacando tal questão, cita-se Arcavi.

> Indivíduos que sabem como executar as manipulações algébricas, mas não consideram a possível relevância dos símbolos para revelar a estrutura do problema que despertou sua curiosidade, não desenvolveram integralmente seu sentido de símbolo. (ARCAVI, 1995, p.43).

Observa-se, neste sentido, que nem sempre é claro para os estudantes de álgebra que há uma infinidade de problemas associados a uma mesma equação. A elaboração de problemas pelos estudantes, seguida de reflexão, como a pedida na atividade seguinte, é um meio eficaz para minimizar essa dificuldade.

Quadro 1 – Relação Problema-equação
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

Pedir aos alunos que criem um problema que possa ser representado por meio da equação: $0{,}50n + 0{,}30 = 22{,}80$. *Colocar alguns deles no quadro da sala de aula e promover discussão sobre a diversidade dos problemas escritos e o que há em comum entre eles.*

Por meio de problemas como o que se segue, pode-se também permitir que os alunos compreendam outro aspecto importante: que, dependendo do que se escolhe como sendo a incógnita a determinar, um mesmo problema pode ser resolvido por meio de equações distintas, não equivalentes, dependendo da incógnita escolhida.

Quadro 2 – Problema *As figurinhas*
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

Maria e Joana têm juntas 30 figurinhas. O número de figurinhas de Joana é a terça parte do de Maria. Quantas figurinhas tem cada menina?

Em terceiro lugar, ressalte-se a necessidade de conscientizar os alunos sobre o fato de que nem todo problema precisa ser resolvido por meio de equações. Mais detalhes a esse respeito encontram-se no livro do mesmo grupo (Tinoco, 2011). Outras estratégias para resolução de problema são sempre bem-vindas; não é porque as equações foram ensinadas ao aluno, que ele tem de usá-las sempre, sem pensar em outras opções. E essa afirmação não diminui em nada a importância do estudo das equações.

III. Usando problemas para apresentar equações

O grupo autor deste trabalho optou pela seguinte estratégia: iniciar o ensino de resolução de equações do 1º grau, apresentando problemas que não pudessem ser trivialmente resolvidos pelos alunos com o uso dos recursos aritméticos de que dispunham, e incentivá-los a criar estratégias de solução para os mesmos. Em seguida, apresentar equações associadas a esses problemas, e resolvê-las, destacando a utilidade do aprendizado da resolução dessas equações. Segue-se exemplo.

Quadro 3 – Problema *A Fila de Cubos*
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

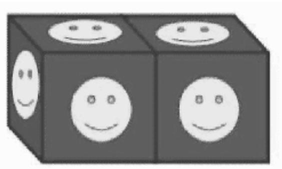

Fig. 1 – Fila de cubos

A professora Joana está construindo um jogo com cubos e adesivos. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um dos adesivos em cada uma das faces. A figura mostra a construção que ela fez com 2 cubos, na qual ela usou 10 adesivos.

i) Descubra quantos adesivos Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta cubos.
ii) Descubra, também, qual a regra que permite saber quantos adesivos a Joana usa numa construção desse tipo com um número qualquer de cubos. Explique como você pensou.
iii) Represente essa regra por uma igualdade.
iv) Se Joana tem 198 adesivos, qual o maior número de cubos que ela pode colocar na construção?

Este problema mobilizou bastante os estudantes. Alguns, para raciocinar, recorreram à reprodução da situação apresentada com objetos semelhantes a cubos. A maioria concluiu a lei geral que relaciona o número de adesivos com o número de cubos da estrutura afirmando, por exemplo: "*quatro vezes o número de cubos mais dois*" ou "*dez mais quatro vezes o número de cubos menos os dois das pontas*", mesmo sem representar esta lei algebricamente: $A = 4c + 2$.

ISSN 2178-034X

Na exploração desse e de outros problemas, com turmas de 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, os alunos foram incentivados a resolvê-los como quisessem e tentar traduzir o enunciado algebricamente. Depois de bem explorar cada problema, os professores apresentaram a respectiva equação e a resolveram. O interesse provocado pelos problemas e pela busca de soluções criou entre os alunos um ambiente favorável à apresentação das equações e ao acompanhamento das suas soluções.

IV. Leitura significativa das equações

No processo de resolução de equações, destaca-se a importância da leitura significativa das mesmas. A leitura cuidadosa da equação, antes de qualquer cálculo, permite muitas vezes ao aluno resolvê-la e desenvolve o *sentido do símbolo*, como destacado por Arcavi (1995).

Tabela 1 – Atividades de leitura significativa de equações

(a) Em cada linha da tabela, observe as semelhanças e diferenças entre as igualdades e complete as da segunda coluna.		*(b) Observe cada igualdade e determine os valores de x que as tornam verdadeiras ou explique por que não existem tais valores.*
i) $a + b = 43$	$a + b + 2 =$	i) $3x + 2 = 4x$
ii) $e + f = 8$	$e + f + g =$	ii) $3x - 2 = 16$
iii) $n - 246 = 762$	$n - 247 =$	iii) $x + 2 = x + 3$

Atividades como as anteriores, propostas pelo grupo do Projeto Fundão no livro *Álgebra: pensar, calcular, comunicar...* (Tinoco, 2011), podem e devem ser exploradas, antes de ensinar qualquer método de resolver equações. Observe-se que algumas delas envolvem mais de uma variável. O seu objetivo é que o estudante leia e releia cada equação, usando seus conhecimentos de aritmética para obter as respostas.

V. Como determinar a raiz de uma equação

Os métodos sugeridos a seguir para resolver equações do primeiro grau foram baseados no texto de Bernard, J. E. e Cohen, M. P. (1994): *Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado.* A ideia que os orienta é utilizar ao máximo a leitura significativa e os conhecimentos já construídos pelos alunos, para resolver equações de tipos variados, antes de apresentá-los aos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade. Os autores do artigo mencionado enfatizam que: “para algumas equações é possível determinar a incógnita apenas pensando sobre o que a equação diz, sobre o que ela pede” (BERNARD e COHEN, 1994, p. 115). Os princípios da igualdade e a noção de equações equivalentes são, portanto, a última etapa desse processo. O grupo comprovou a eficácia dessa postura em experiências com alunos de 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

I) Gerar e avaliar

Após a leitura significativa da equação, os alunos devem ser orientados a pensar em vários valores para serem testados na equação dada, tentando descobrir a raiz por tentativa e erro e usando seu conhecimento das operações. Exemplos: $5x - 2 = 18$ ou $\frac{x}{3} = 4$. Alunos que dominam as operações elementares serão capazes de resolver essas equações, sem que qualquer regra neste sentido tenha sido apresentada a eles. No experimento, a equação $x - \frac{x}{4} = 8 + \frac{x}{4}$ foi resolvida por um grupo, por tentativa e erro.

II) Esconder

Este método consiste em "esconder" uma parte da equação, considerando-a como incógnita, e recorrendo ao método anterior "gerar e avaliar", para determinar seu valor na equação. Por exemplo, para resolver a equação $3(7 - y) = 12$, a ideia é esconder a expressão $(7 - y)$ e descobrir o número que multiplicado por 3 resulta 12, concluindo que $7 - y = 4$. Escondendo o y, ou pelo método anterior, determina-se $y = 3$.

III) Desfazer

Esse método é bastante utilizado e baseia-se nas operações inversas. As equações que podem ser resolvidas pelo método de esconder podem também ser resolvidas pelas operações inversas. No artigo referido, Bernard e Cohen afirmam:

> Mesmo com suas limitações, o método desfazer é importante e deveria estar no currículo. Ele oferece uma oportunidade de integração em matemática, na medida em que conecta a resolução de equações a aprendizados anteriores, inclusive o emparelhamento de operações inversas....concomitantemente, fornece pré-requisitos que podem ser usados na aprendizagem no método das equações equivalentes. (BERNARD e COHEN, 1994, p.118).

Quadro 4 – Método *desfazer*
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

Exemplo: $\frac{6(y-3)}{4} = 12$

Desfazendo a divisão por 4, encontra-se 6 (y – 3) = 48, pois 12 · 4 = 48.
Desfazendo agora a multiplicação por 6, encontra-se $y - 3 = 8$, pois 48 : 6 = 8.
Finalmente, desfazendo a subtração de 3, encontra-se y = 11, pois 8 + 3 = 11.

IV) Equações equivalentes

Quadro 5 – Problema *A Compra de Cadernos*
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

A mãe de Eva e Rui deu-lhes a mesma quantia para que comprassem cadernos. Eles foram a uma loja comprar cadernos escolares iguais. Quando saíram, cada um tinha na mão o que a figura apresenta. Quanto custou cada caderno?

Figura 2 – Preço do caderno

Esse problema é representado por uma equação simples: $x + 2{,}75 = 2x + 1{,}50$. No entanto, os métodos apresentados anteriormente não são suficientes para resolvê-la. É preciso transformá-la em outra ainda mais simples, que tenha a mesma raiz que ela, ou seja, equivalente a ela. Este procedimento é chamado de método das equações equivalentes e tem como base os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades. O princípio aditivo é apresentado a partir de uma analogia entre as equações e as balanças de dois pratos em equilíbrio.

Na resolução de outras equações, nas quais o princípio aditivo não é adequado, é aplicado o princípio multiplicativo da igualdade. O exemplo seguinte apresenta sugestão de exploração desse princípio, com perguntas.

Quadro 6 – O princípio multiplicativo da igualdade
Fonte – Elaboração dos autores a partir de (TINOCO, 2015)

Considerando a equação $x - \frac{x}{4} = 8 + \frac{x}{4}$, responda às perguntas.
a) Por qual número devem-se multiplicar os dois membros da equação para que não haja denominadores na nova equação?
b) A nova equação, $4x - x = 32 + x$, ainda pode ser simplificada? Como?
c) A solução desta nova equação é solução das equações anteriores? Explique isso.

Depois da compreensão desses princípios, os alunos devem se apropriar da noção de equações equivalentes, bem como adquirir destreza para resolver qualquer tipo de equação do primeiro grau, sendo capaz de escolher o método mais adequado para cada caso.

VI. Considerações finais

Conclui-se sublinhando ideias essenciais deste trabalho, a serem compartilhadas com os participantes do minicurso, no sentido de enriquecê-las e contribuir para o ensino significativo de um tópico que nem sempre provoca o interesse dos estudantes. Reitera-se a necessidade de relacionar esse tópico com a resolução de problemas, tanto para propiciar a familiarização dos alunos com a linguagem algébrica e com a noção de equação, como, depois, para provocar o interesse dos mesmos pela sua resolução.

Em relação aos métodos de resolução em si, o trabalho se concentra mais nas manipulações algébricas, desde que haja compreensão. No entanto, a presença dos problemas é essencial, por exemplo, em casos como a introdução aos princípios aditivo e multiplicativo das igualdades, que, insiste-se, deve ser a última etapa do ensino deste tópico.

Durante o minicurso serão trabalhadas com os participantes as atividades contidas nesse texto e outras que permitam a reflexão sobre a proposta apresentada, a sua avaliação e a análise da viabilidade da mesma na prática docente.

Referências

ARCAVI, A. O sentido do símbolo, atribuindo um sentido informal à matemática formal. Em: **Série Reflexões em Educação Matemática - Álgebra, História, Representação**, Rio de Janeiro, MEM/USU, 1995, p. 38-72.

BERNARD, J. E. e COHEN, M. P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. Em COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (Orgs) **- As idéias da álgebra**, São Paulo, Atual Editora, 1994, p. 111-134.

PONTE, J. P. **-** Álgebra no currículo escolar. Em: Revista **Educação e Matemática**, nº 85, p. 36-41, AMP, Lisboa, nov-dez 2005.

TINOCO, L. A. A. (coord). **Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar...** (2ª Ed.), Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ- Projeto Fundão, 2011.

TINOCO, L. A. A. (coord). **Equações: ler, escrever, resolver, utilizar...** Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ-Projeto Fundão, 2015.

ISSN 2178-034X