MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA E SUA APLICABILIDADE NO COTIDIANO DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Alexandre Oliveira da Silva
Secretaria Estadual da Educação do Estado do Tocantins
alexandre_oliver_silva@hotmail.com

Hellena Christina Fernandes Apolinário
Universidade Federal do Tocantins - UFT
hellena@mail.uft.edu.br

Resumo:

Este artigo apresenta um estudo sobre máximos e mínimos de uma função quadrática e sua aplicabilidade no cotidiano dos alunos do ensino médio. O ensino da matemática é considerado pelos alunos como sendo uma disciplina de difícil compreensão, devido na maioria das vezes ser um ensino mecânico, fixo em um sistema arcaico e desestimulante sem fazer uma ligação com a vida prática dos alunos. Desse modo a Modelagem Matemática surge como uma proposta diferenciada de ensino que faculta, ao aluno, ser agente na construção do conhecimento. Logo o objetivo é evidenciar a praticidade do conteúdo máximos e mínimos de uma função quadrática com a realidade dos alunos fazendo-se um estudo de caso com a empresa “GGD ARTES” do município de Aparecida do Rio Negro - TO. Através desse estudo percebeu-se uma mudança de concepções com relação à matemática, além de uma melhora significativa na aprendizagem dos alunos participantes.

Palavras-chave: Função Quadrática; Máximos e Mínimos; Aplicabilidade; Cálculo Diferencial

1. Introdução

A Matemática ao longo dos anos vem sendo considerada como uma disciplina de difícil compreensão com predominância de um modelo educacional rudimentar e tradicional. Isso acontece devido esse ensino matemático está sendo exposto de uma forma mecânica, arcaica e desestimulante, sendo desenvolvido a partir de uma exposição formal e discursiva dos conteúdos pelos professores sem fazer ligação com a vida prática dos alunos.

Assim percebe-se que os alunos vivem em mundo limitado, isso quando faz-se a ligação com o conhecimento matemático, onde exige-se dos mesmos apenas as habilidades de memorização e reprodução. Logo essa educação tradicional apresentada pelos professores se contrapõe aos valores que a sociedade vem adquirindo com esse mundo globalizado. Para mudar essa realidade o professor necessita criar uma metodologia que desperte o interesse dos alunos. Como exemplo pode-se citar o tema do presente artigo, Máximos e Mínimos de uma Função Quadrática, que é trabalhado no Ensino Médio sem ser feita uma demonstração de como chegou-se nas fórmulas utilizadas e muito menos com a vivência dos alunos.

Desse modo, cabe salientar que as funções quadráticas aparecem com frequência na resolução de problemas em outras áreas do conhecimento, tais como: física, biologia, química, economia e outras. Ela está ativamente presente no nosso cotidiano, contribuindo para explicar vários exemplos que são utilizados no decorrer de nossa vida. Assim o professor deve buscar cada vez mais elementos motivadores que proporcionem um maior entusiasmo nos alunos para que ocorra uma aprendizagem de qualidade, haja vista, que a matemática é uma disciplina considerada de difícil compreensão pelos alunos.

Assim para realização desse artigo utilizou-se a Modelagem Matemática como uma proposta diferenciada de ensino que faculta, ao aluno, ser agente na construção do conhecimento, superando, com motivação e descontração, as dificuldades que a Matemática apresenta. Logo é necessário salientar que o aluno deve perceber que a matemática é um conhecimento vivo, produzido historicamente por diferentes sociedades para atender às necessidades concretas da humanidade e não um saber pronto e acabado.

Desse modo o presente estudo apresentará um breve histórico sobre vértices de uma função quadrática, utilizando o Cálculo Diferencial para encontrar os valores de máximos e mínimos com a aplicação de derivadas. O objetivo, portanto, é evidenciar, de maneira mais adequada a praticidade desse conteúdo com a realidade dos 35 alunos do 1° ano do Ensino Médio da Escola Girassol de Tempo Integral Meira Matos no ano de 2015, através da modelagem matemática, onde estaremos traduzindo a arte da produção de telas, que é um tema presente no dia a dia desses alunos uma vez que há muitos ateliês no município, em uma linguagem matemática.

2. Contextualização histórica

A Modelagem Matemática surgiu na busca da intervenção ao ensino tradicional, onde o problema passa a ser o ponto de partida para a construção do modelo matemático. Esse modelo matemático compreende o resultado de uma série de relações, situações e interpretações do mundo real que envolve o cotidiano. Segundo Bassanezi (1994, p.01) a Modelagem Matemática:

> É um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem, que denominamos Modelo Matemático, pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão.

Desse modo a Modelagem Matemática surge como uma alternativa de ensino que leva o aluno a construir seu próprio conhecimento. Ela é uma prática que propõe mudanças e superação de algumas ações pedagógicas tradicionais, bem como no ensino, pode ser um caminho para despertar, no aluno, o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece.

Através da Modelagem Matemática tem-se que são gerados inúmeros benefícios, onde segundo Gazetta (1989) são:

- Motivação por parte de educando e educador.
- Facilidade de aprender - o conteúdo matemático passa de abstrato a concreto.
- Devido à interatividade de conteúdos, preparação para futuras profissões nas mais diversas áreas do conhecimento.
- Desenvolvimento do raciocínio lógico.
- Oportuniza o aluno a ser um cidadão crítico e transformador de sua realidade.
- Compreensão do papel sócio-cultural da Matemática, tornando-a assim, mais importante.

Dessa forma a Modelagem Matemática serve para fazer com que os alunos possam aprender e construir seus próprios conhecimentos, no que se diz respeito ao tema máximo e mínimos de uma função quadrática. Segundo PAIVA (2003), função é caracterizada como:

> Uma relação entre dois conjuntos, onde há uma relação entre cada um de seus elementos. Também pode ser uma lei que para cada valor *x* é correspondido por um elemento ***y***, também denotado por ***f*(x)**. Ou seja, sendo **A** e **B** conjuntos diferentes do vazio, uma relação ***f*** de **A** em **B** é função se, e somente se, todo elemento de **A** estiver associado, por meio de f, a um único elemento de **B**.

Desse modo, cabe salientar que esse conceito de função levou vários anos para se desenvolver, necessitando de inúmeros estudos para que chegasse ao que hoje é trabalhado em sala de aula. Essas definições partem de estudos que vem desde os babilônios, os Pitágoricos, Descartes, Kepler, Galileu, Pierre Fermat, do matemático alemão Leibniz e Leonard Euler. Segundo ROCHA (2008, p.46):

> Foi Leibniz (1646 – 1716) quem primeiro usou o termo “função” em 1673 no manuscrito Latino Methodus tangentiun inversa, seu de fuctionibus. Leibniz usou o termo apenas, em termos muitos gerais a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as sub tangentes e sub normais. Introduziu igualmente a terminologia de “constante”, “variável” e “parâmetro”.

Com René Descartes tem-se uma evolução do estudo de função ao ser utilizado o plano cartesiano para a representação das mesmas. Logo ficou possível transformar problemas geométricos em algébricas, além de estudar funções. Já Leonard Euler trás a definição de função e utiliza na sua denominação a notação f(x). Desse modo o conceito de função que hoje aparece de um modo simples e de fácil compreensão, foi resultado de uma evolução histórica conduzindo sempre cada vez mais a abstração.

Na Matemática as Funções é um dos conteúdos com várias aplicações, destacando-se entre todas, as Funções Quadráticas tema desse presente trabalho. Logo segundo Paiva (2003) função quadrática é: “Toda função do tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, com **{a, b, c}** está contido nos **IR e** $\mathbf{a \neq 0}$, é denominada função do 2° grau ou função quadrática”. Ainda segundo Paiva (2003):

- O gráfico da função quadrática tem uma curva denominada parábola;
- Ela é denominada quadrática ou do 2° grau devido seu maior expoente ser o número 2;
- Seu coeficiente “a” tem que ser diferente de zero, $a \neq 0$;
- O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é chamado vértice da parábola;
- Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo;
- Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para o sentido negativo do eixo;
- Para resolver uma função quadrática utiliza-se a fórmula de Bhaskara.

As Funções Quadráticas estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e logo não devem ser percebida em sua aplicação como um conjunto de fórmulas prontas, pois modelam matematicamente diversas situações que auxiliam os seres humanos em suas atividades do dia-a-dia. Para exemplificar essa sua ligação com a realidade dos seres humanos pode-se citar: quando se lança um objeto no espaço (pedra, tiro de canhão, uma bola no basquete, e etc) visando alcançar a maior distância, tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerar que a resistência do ar não existe ou é pequena. Logo o lançamento de projéteis é modelado por uma função quadrática.

A parábola é a curva de um gráfico da Função Quadrática e ela é encontrada em diversos ambientes ao nosso redor, como nas pontes, quadras, antenas parabólicas, ventilador e etc. Quando um goleiro coloca a bola em jogo com um chute forte, essa bola sobe até atingir um ponto máximo e começa a descer descrevendo, assim, uma curva que recebe o nome de parábola.

ISSN 2178-034X

Ainda pode-se salientar que na história da Função Quadrática e sua ligação com a realidade das pessoas, vários estudos foram realizados chegando a criação e utilização da fórmula de Bhaskara, que segundo Ribeiro (2010):

> É atribuída ao matemático hindu Bhaskara (1114-1185), e denominada em alguns livros como fórmula de Bhaskara. Mas é importante dizer que essa fórmula tem origem em um método já utilizado pelos babilônios por volta de 2000 a.c. No entanto, cada equação era resolvida particularmente, sendo uma resolução especifica. O que Bhaskara fez foi generalizar o método de resolução utilizado pelos babilônios para equações do 2° grau, uma vez que nenhum matemático havia feito isso, e publicá-lo em seu livro Lilavati.

Assim, tem-se que a fórmula estruturada por Bhaskara através de métodos utilizados pelos babilônios é: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $\Delta = b^2 - 4.a.c$ e $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, aonde x são os valores das raízes da equação quadrática que zera essa equação, e o número dessas raízes dependem do discriminante que é o radicando da fórmula e é representado por Δ. Se o discriminante for maior que zero existe dois valores reais e diferentes para as raízes da equação; se for igual a zero existe duas raízes reais e iguais e por fim se for menor que zero, não há valores reais para as raízes da equação.

3. Máximos e Mínimos de uma Função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ através de Derivadas

Quando trata-se do valor máximo e do valor mínimo de funções, tem-se que seu conceito é de grande valia em várias outras áreas: na economia trabalha com o custo mínimo, que como exemplo tem-se que a indústria busca sempre o custo mínimo de produção; em balística, calcula-se a altura máxima e a distância máxima que deverá atingir um projétil; nas Ciências Atuárias, determina-se o preço mínimo que deve ter uma apólice de seguros etc.

Desse modo a derivada de uma função é considerada a ferramenta mais importante do cálculo diferencial. Essa popularidade é resultado das inúmeras aplicações dessa poderosa ferramenta. Para encontrarmos os valores de máximo ou mínimo de uma função, primeiramente deve-se encontrar a função que nos leva a solução do problema, calcular sua derivada, obtendo assim uma função dependendo somente de uma variável. Em seguida, igualamos a zero, obtendo uma equação. Agora é só calcular seu valor e obteremos o valor de máximo ou de mínimo.

Para demonstração do vértice como ponto de máximo ou mínimo, cabe salientar que o vértice V da parábola é o ponto em que o gráfico muda sua monotonicidade: de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente. É também ponto de mínimo para a função caso a > 0, ou ponto de máximo da função caso a < 0. Logo o vértice é definido como sendo o ponto crítico da função quadrática aonde $f'(x_0) = 0$. Assim a reta tangente a função $f(x)$ no ponto x_0 tem inclinação nula, caracterizada na horizontal.

Logo para encontrarmos os candidatos a pontos extremos da função (máximos ou mínimos), que são os pontos críticos, deve-se derivar a função quadrática $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ com $a \neq 0$ e igualar a zero.

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} \text{ com } a \neq 0$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{ax} + \mathrm{b}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$$

$$2\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$$

$$\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{2.\mathrm{a}}$$

Assim $x = -b/2a$ é um candidato a máximo ou mínimo de uma função, chamado vértice da parábola. Desse modo tem-se que para determinar se esse ponto encontrado é máximo ou mínimo utiliza-se o critério da 1° e 2° derivada de acordo com os seguintes casos:

- Se $a > 0$:

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{ax} + \mathrm{b}$$

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 2\mathrm{a}$$

Como $a > 0$, então pelo critério da segunda derivada, para qualquer x, em particular quando $x = -b/2a$, temos que$f''(x) = 2a > 0$, daí conclui-se que $x = -b/2a$ é ponto de mínimo.

- Se $a < 0$:

Como $a < 0$ e $f''(x) = 2a$, pelo critério da segunda derivada, tem-se que $f''\ (x) = 2a < 0$, e portanto, $x = -b/2a$ é ponto de máximo para a função.

Já para determinar a ordenada do vértice utiliza-se o valor da abscissa do vértice através do cálculo de sua imagem. Assim o vértice da parábola que é o ponto de máximo ou de mínimo, dependendo do sinal de , é dado por $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

4. Aplicabilidade dos pontos máximos e mínimos na economia: estudo de caso na empresa "GGDArtes"

Para a realização dessa aplicação foi utilizada a Modelagem Matemática como ferramenta primordial, fazendo-se uma ligação entre a Economia e a Matemática na criação do modelo. Segundo Scheffer (1995) Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.

Já segundo Biembengut (1990), a criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Assim a Modelagem Matemática é o processo que descreve um fenômeno para melhor compreendê-lo e estudá-lo, refletindo sobre ele, a fim de obter um modelo matemático.

Partindo desse pressuposto, para a realização dessa aplicação será utilizado um cenário pautado pela concorrência perfeita, a onde o objetivo de uma empresa é a obtenção do máximo possível de lucro. Segundo VASCONCELLOS (2008): "O modelo de concorrência perfeita descreve um mercado no qual nenhum agente tem capacidade para influenciar os preços (poder de mercado nulo)".

Desse modo cada empresa age individualmente, sem precisar levar em conta as decisões das outras. Observando o preço do mercado, decide que quantidade pretende vender a esse preço. Cabe salientar também que tanto compradores quanto vendedores são tomadores de preço.

Ainda segundo VASCONCELLOS (2008, p.163) as condições sob os quais podemos esperar que compradores e vendedores ajam como tomadores de preços são:

- O mercado é atomizado, ou seja, ele é composto de um número muito grande de compradores e de vendedores e esses são tão pequenos que nenhum deles tem condição de isoladamente afetam o preço do produto transacionado;
- Produto homogêneo, ou seja, os compradores são indiferentes quanto à firma que fabricou o produto, de modo que o produto com o preço mais baixo sempre é preferido aquele com o preço mais elevado;
- Há perfeita informação no mercado e as firmas e os compradores sabem a que preço está sendo vendida cada unidade do produto, de modo que todas as unidades devem ser vendidas a um único preço. Supõe-se também que as firmas conhecem suas funções de custo, de modo que saibam o que devem fazer para obter o lucro máximo e que os consumidores conhecem sua função de utilidade de modo que saibam o que fazer para maximizar essa utilidade.

Nessa perspectiva cabe destacar que na economia a função custo está relacionada com o custo de produção de um produto; Já a função receita está ligada ao dinheiro arrecadado pela venda de um determinado produto e a função lucro é a diferença entre a função receita e a função custo. Desse modo, caso o resultado seja positivo, houve lucro; se negativo, houve prejuízo.

O objetivo de uma empresa é maximizar o seu lucro. Logo em concorrência perfeita como o preço é independente da quantidade, a receita total é linear. Assim, $LT(q) = RT(q) - CT(q)$, onde a receita total é representada pelo preço vezes a quantidade.

A condição de máximo de primeira ordem para essa função é:

$$\frac{dLT\ (q)}{dq} = 0$$

$$\frac{dLT\ (q)}{dq} - \frac{dCT(q)}{dq} = 0$$

$$Rmg = Cmg$$

Assim, o lucro máximo é obtido quando o custo marginal se iguala à receita marginal; graficamente, isto ocorre no ponto de cruzamento das curvas da receita marginal e de custo marginal.

Então para demonstração da utilização do presente tema na economia, partiu-se de um cenário de concorrência perfeita, sendo utilizados dados reais de uma Micro-empresa de artes plásticas, "GGD Artes", que trabalha com a produção de telas de capim dourado e está situada no município de Aparecida do Rio Negro – TO. Porém é necessário destacar que para a realização dessa pesquisa foi utilizada os 35 alunos da turma do 1° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Girassol de Tempo Integral Meira Matos.

Assim os alunos envolvidos nessa aplicação além de aprenderem sobre a Matemática, passaram a ter conhecimento de conceitos voltados para a economia. Tal fato fez-se necessário devido os mesmos em sua vida cotidiana estarem em contato com esses conceitos, seja direta ou indiretamente.

Para iniciarmos essa pesquisa foi necessário fazer uma visita com os alunos à micro-empresa e pedir autorização aos seus proprietários para realização da pesquisa. Com a autorização, o primeiro passo foi calcular o custo de produção de uma tela de capim dourado via depoimento do empresário, sendo que a capacidade de produção da mesma é de 200 telas

ISSN 2178-034X

mensais. Assim partimos da seguinte problemática: "O custo para produzir uma tela de capim dourado é de R$ 130,00. Logo estima-se que se cada tela for vendida por x reais, o fabricante venderá por mês 200 – x ($0 \leq x \geq 200$) telas de capim dourado. Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Qual deve ser o preço de venda de modo que o lucro mensal seja máximo?"

Para calcular o custo de produção, foi feita uma pesquisa com o empresário da "GGD Artes", para saber quais itens que fazem parte do custo, tendo como referência as 200 telas produzidas por mês e quanto custará apenas uma tela. Assim obteve-se:

RELAÇÃO DE MATERIAIS POR TELA	TOTAL EM R$
Mão de obra da preparação da tela	5,00
Compra,Transporte e serragem das madeiras	10,00
Tecido	10,00
Tinta para pintura da tela branca	0,90
Pincel	1,00
Massa Corrida	0,42
Tiner	0,20
Brocha	0,016
Grampo	0,93
Secante de Cobalto	0,96
Óleo de Linhaça	0,92
Cola Branca de Cascorex	1,87
Pincel para borda	0,50
Estilete	0,10
Tecbond	0,16
Bambu	0,15
MDF – Mandala	10,00
Capim dourado	16,00
Energia	0,30
Água	0,15
Artista plástico	65,00
Outros gastos	5,424
TOTAL	130,00

Para organização dos preços referentes à produção de uma tela foi repassada pelo empresário alguns itens que o mesmo utiliza para calcular esse custo tais como: o valor da energia durante um mês é de R$ 60,00 e a água é R$ 30,00 sendo que ele divide esse valor para as 200 telas. Um saco de massa corrida custa R$ 21,00 e faz 50 telas; Uma lata de tiner custa R$ 10,00 e serve para 50 telas; Uma lata de tinta custa R$ 90,00 e pinta 100 telas; Um litro de secante de cobalto custa R$ 48,00 e serve para 50 telas; Um litro de óleo de linhaça custa R$ 46,00 e serve para 50 telas; Um litro de cola branca cascorex serve para 8 telas; 100 ml de tecbond custa R$ 32,00 e serve para 200 telas; Uma caixa de grampo custa 18,66 e serve em média para 20 telas.

Através dos valores repassados pelo empresário, os alunos elaboraram a tabela e automaticamente criaram situações problemas envolvendo outras realidades, além de participarem da resolução da função demonstrada a seguir, onde passaram a unir teoria e prática.

Já para encontrar o preço de venda e chegar ao lucro máximo, tem-se que o custo é representado pelo valor de produção de cada tela de capim dourado vezes o número de telas fabricadas, ficando: $CT(x) = 130.(200 - x)$. A receita total é o número de telas vendidas no mês multiplicado pelo valor de venda x ficando igual a: $RT(x) = (200 - x).x$.

Como o lucro é a diferença entre a receita e o custo, tem-se que:

$$LT(x) = RT(x) - CT(x)$$

$$LT(x) = (200 - x).x - 130.(200 - x)$$

$$LT(x) = 200x - x^2 - 26000 + 130x$$

$$LT(x) = -x^2 + 330x - 26000$$

Assim, o lucro dado é representado por uma função quadrática decrescente, isto é, seu gráfico possui concavidade voltada para cima ou valor máximo. Logo para que seja determinado o preço de venda das telas de capim dourado, no intuito de obter o lucro máximo, basta calcular o valor do vértice x_v da parábola, através de derivadas com $a \neq 0$.

$$LT(x_v) = -x^2 + 330x - 26000$$

$$LT^{'}(x_v) = -2x + 330$$

$$LT^{'}(x_v) = 0$$

$$-2x + 330 = 0$$

$$2x = 330$$

$$x = 165$$

Assim para que se obtenha o lucro máximo, o preço de venda da tela de capim dourado deve ser R$ 165,00.

ISSN 2178-034X

5. Considerações Finais

O presente trabalho evidencia que as funções quadráticas são essenciais em diversas áreas do conhecimento como a física, economia, administração e várias outras. Enfatiza também que para uma melhor compreensão de máximos e mínimos pelos alunos é preciso fazer um estudo onde haja a interligação com a realidade dos alunos. A interdisciplinaridade aparece de modo marcante, sendo considerada essencial para melhorar a compreensão desse conteúdo pelos alunos.

Cabe salientar ainda que o cálculo pode ser caracterizado como o ramo da matemática que trata da variação. Ele é aplicado em diversas áreas do conhecimento, sendo que as várias invenções que atualmente nos ajudam no processo de desenvolvimento, foram construídas a partir de estudos do cálculo.

Logo é preciso fazer com que os alunos percebam que o ser humano necessita do cálculo para sua formação cientifica. Porém cabe salientar que o cálculo diferencial e integral teve um processo longo de desenvolvimento iniciado na antiguidade. Porem Newton e Leibniz foram quem mais se destacaram nesse processo de surgimento do cálculo.

Para chegar no objetivo esperado utilizou-se a Modelagem Matemática por fazer uma integração com as outras áreas do conhecimento, onde houve uma integração entre a matemática e a realidade. Desse modo o objetivo foi plenamente atendido, uma vez que através do modelo desenvolvido houve uma melhor assimilação do conteúdo pelos alunos.

Assim o que foi exposto neste trabalho, o desenvolvimento histórico aqui estudado como estratégia de ensino, tornam os conteúdos mais lógicos com teorias mais acessíveis para a compreensão dos alunos por fazer uma ligação com a realidade dos mesmos, dinamizando as ações em sala de aula e elevando a qualidade dos processos de ensino-aprendizagem da matemática. Um exemplo é o estudo de caso que foi feito com a empresa “GGD ARTES” que veio a utilizar o cálculo em exemplos reais do dia-a-dia das pessoas.

6. Referências

ALMEIDA, Suzana Gorete Monteiro. **História da Matemática:** Newton e Leibniz, 28 páginas. Monografia, Universidade Católica Portuguesa, 2003.

BASSANEZI, Rodney C. **Modelagem como estratégia metodológica no ensino da matemática.** Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.

Derivadas de Ordem Superior. Disponivel em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/arquivos/maximoseminimos.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2013.

FLEMMING, Diva Marilia; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A:** Funções, Limite, Derivação e Integração. 6° edição, Ed. Prentice Hall.

GAZETTA, Marineusa. **A Modelagem como Estratégia de Aprendizagem da Matemática em Cursos de Aperfeiçoamento de Professores.** Rio Claro/SP, 1989. Dissertação de Mestrado. UNESP.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos.**Fundamentos de Matemática Elementar 1**. Vol. 3ª Ed. São Paulo: Atual, 1997.

Máximos e Mínimos. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/ccruchinho/tpc-tarefa6.htm>. Acesso em: 16 nov. 2013.

PAIVA, Manoel. **Matemática:** volume único / Manoel Paiva. – 2. Ed. – São Paulo: Moderna, 2003. – (Coleção Base).

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia, 1: ensino médio / Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.

ROCHA, Sônia Maria Cavalcanti. **Investigação Histórica na Formação de Professores de Matemática: Um Estudo Centrado No Conceito de Função,** 188 páginas. Tese (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemáticas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

SCHEFFER, Nilce Fátima. **O.encontro da Educação Matemática com a Pedagogia de Freinet.** Rio Claro: UNESP, 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 1995.