UM ASPECTO DA INCERTEZA: LÓGICA DIFUSA NO AMBIENTE R

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
sigliori@pucsp.br

Péricles César de Araújo
Universidade Estadual de Feira de Santana
pericles@uefs.br

Resumo:

Este artigo apresenta aspectos da diferenciação da incerteza, no âmbito da pesquisa em Educação Matemática. Essa diferenciação foi admitida, por Keynes em 1936 e estudada por Zadeh em1965. Nessa perspectiva são apresentados, neste artigo, alguns resultados relevantes da diferenciação da incerteza, de maneira intuitiva e exemplos ilustrativos, como: Lógica dos Conjuntos Difusos, no ambiente software livre e gratuito R e, a interpretação da Metáfora Conceitual, no âmbito dessa Lógica dos Conjuntos Difusos. Os argumentos aqui apresentados foram constituídos em pesquisa teórica a partir da análise de documentos. Como resultado busca-se evidenciar que a Lógica dos Conjuntos Difusos é importante para modelar, de maneira formal, a imprecisão da informação advinda de dados colhidos no âmbito da pesquisa em Educação Matemática e que o uso do programa R pode contribuir com esse modelamento, já que é uma linguagem livre, orientada a objetos. Nessa perspectiva entende-se que este artigo traz uma contribuição, quando apresenta uma alternativa da modelagem da imprecisão, aspecto qualitativo das observações, por meio do programa R.

Palavras-chave: Incerteza, Lógica dos Conjuntos Difusos, Pesquisa em Educação Matemática, Imprecisão dos Dados.

1. Introdução

Em 1936, Keynes já considerava a necessidade de diferenciar incerteza da probabilidade, isto é, a incerteza exclui a possibilidade de medir confiavelmente uma distribuição de probabilidade, enquanto, o risco se refere a uma situação em que é possível medir probabilidade, conforme MOREIRA(2009). Em 1965, Zadeh apresenta uma solução ao problema da incerteza, considerando duas abordagens: a variabilidade que tem com medida a probabilidade e a imprecisão, o aspecto difuso da incerteza, que é analisada por meio da Lógica dos Conjuntos Difusos.

Viertl (2011) observa que esse tratamento difuso da incerteza é diferente de erros, isto é, os erros do processo de média, que se apresentam sob a forma de números: erros sistemáticos ou erros aleatórios.

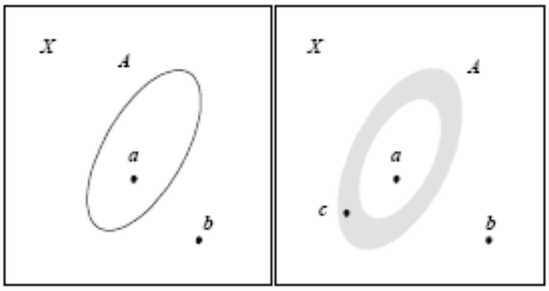
Neste artigo, abordamos a Lógica dos Conjuntos Difusos em continuidade ao que apresentamos em Araújo (2013), trazendo alguns resultados relevantes de maneira intuitiva, e exemplos ilustrativos, entre os quais: a interpretação da Metáfora Conceitual no âmbito da Lógica dos Conjuntos Difusos; Lógica dos Conjuntos Difusos no ambiente software livre R;

um importante instrumento computacional para análise estatística, manipulação e apresentação de dados por meio de gráficos, como apresenta Verzani(2010).

É importante destacar que o R além de ser um programa livre, que pode ser obtido gratuitamente, é uma linguagem de programação orientada a objetos. Como exemplos desse último aspecto do R, mostraremos que para viabilizar o uso da Lógica fuzzy na pesquisa no âmbito das Ciências Sociais, Huang (2012) desenvolveu um programa QCA3 .

A Teoria dos Conjuntos Difusos é uma ramificação da Teoria Clássica dos Conjuntos. Para este artigo destacamos alguns resultados que consideramos relevantes da Teoria dos Conjuntos Difusos, ou Lógica Difusa, de uma maneira intuitiva resultados esses encontrados em Zadeh (1965, 1968, 1971, 1975, 1975, 1978, 1995) e em Nguyen & Walker (1997). O conceito de conjunto difuso (fuzzy) foi definido por Zadeh (1965). Zadeh observou que, na maioria das vezes, os objetos encontrados no mundo real não satisfazem, de modo preciso, a critérios de pertinência previstos na Teoria Clássica dos Conjuntos. Nesse sentido Abar (2010, p. 2) afirma que: A teoria dos conjuntos "fuzzy" se baseia no fato de que os conjuntos do mundo real não possuem limites precisos. De forma alternativa à Teoria Clássica, nasce a noção de conjunto difuso (fuzzy) para a qual se define uma relação de graus de associativismo e não de pertinência na relação elemento conjunto. A Figura 1, como apresenta Ross (2010, p. 26), citado por Baleeiro (2007, p.7), ilustra a diferença entre a relação de pertinência ao um conjunto na Teoria Clássica dos conjuntos e a relação de associatividade na Teoria dos Conjuntos Difusos (Fuzzy).

Figura 1 - Conjunto Clássico e Conjunto Difuso



Fonte: Ross (2010, p. 26), citado por Baleeiro (2007, p.7).

Como analisa Baleeiro (2007, p.7):

> A Figura 1 ilustra essa diferença entre os conjuntos clássicos e difusos. Observa-se que para conjuntos clássicos as únicas possibilidades para um elemento são pertencer (elemento a) e não pertencer (elemento b) ao conjunto A. Já no caso de um conjunto difuso as fronteiras do conjunto A são mais amenas, o que permite incluir a ideia de se ter um elemento como parcialmente membro do conjunto A.

Bassanezi (2004), numa proposta de elaboração de um modelo no âmbito das modelagens como método de ensino de Matemática, considera que a teoria dos conjuntos difusos é uma alternativa aos modelos estocásticos para modelar populações cujos elementos são heterogêneos relativamente a algumas características no processo evolutivo.

Spagnolo e Gras (2004) consideram a teoria dos conjuntos difusos como uma nova abordagem para a classificação no âmbito da Análise Estatística Implicativa, isto é, uma implicação difusa (*fuzzy*). Ou seja, Bassanezi (2004) utiliza a teoria dos conjuntos difusos para o ensino de Matemática por meio da modelagem, Spagnolo e Gras (2004) utilizam num método de pesquisa em Educação Matemática, representado pela Análise Estatística Implicativa.

Na Teoria Clássica dos Conjuntos, conjuntos não difusos, a associação dos elementos a um conjunto é binária, isto é, um elemento pertence ou não ao conjunto, enquanto que na Teoria dos Conjuntos Difusos há uma avaliação gradual da adesão do elemento ao conjunto, como foi considerado por Suleman (2009, p.20).

A Lógica de Conjunto Difuso, ou simplesmente Lógica Difusa, tem como objetivo representar o pensamento humano, ou seja, dar a ele uma representação mais aproximada, ou melhor, liga-la à linguística e à inteligência humana.

Inicialmente, destacamos que algumas áreas de conhecimento privilegiam o uso de metodologias quantitativas em suas pesquisas de conjuntos difusos. Em outras, aquelas ligadas às Ciências Humanas, como a Educação Matemática, por exemplo, têm ultimamente privilegiado o uso de metodologias qualitativas para analisar conjuntos de dados difusos, isto é, aqueles cujas fronteiras são tênues e quase imperceptíveis.

No âmbito da Teoria dos Conjuntos Difusos (*fuzzy*), ou utilizando a Lógica *Fuzzy*, não precisamos de um valor exato definido por uma variável, como por exemplo, a velocidade. Classificamos a velocidade por meio de um conjunto formado pelos elementos: baixa, média e alta. Tal classificação representa valores *"fuzzificados"* dos valores exatos de cada velocidade. A operação de tradução sistemática dos termos *fuzzy* da comunicação humana por meio de um número real, é chamado de *"desfuzzificação"* (SULEMAN, 2009). Também, na Teoria de Conjuntos Difusos, temos o conceito de partição difusa o qual permite relativizar a heterogeneidade individual, posicionar cada indivíduo em função de sua distância a uma estrutura de perfis e por meio de um mecanismo de compensação. Isto é, uma maior pertença a um dos perfis implica menor pertença aos outros (SULEMAN, 2009).

2. Conjuntos difusos (Fuzzy): função de grau associativismo

Lotfali Askar Zadeh (nascido em 4 de fevereiro de 1921), mais conhecido como Lotfi A. Zadeh, é um matemático, engenheiro elétrico, cientista da computação, pesquisador de inteligência artificial e professor emérito de ciência da computação na Universidade da Califórnia, Berkeley. O seu artigo Fuzzy Set, publicado em 1965 na Information and Control (8,338-353), é considerado o artigo precursor da formalização da Teoria de Conjunto Difuso (fuzzy), um quadro teórico para lidar com problemas nos quais a fonte de imprecisão advém da ausência de definição de critérios de pertença a uma classe e não à presença de variáveis aleatórias, citado por Suleman (2009, p. 23).

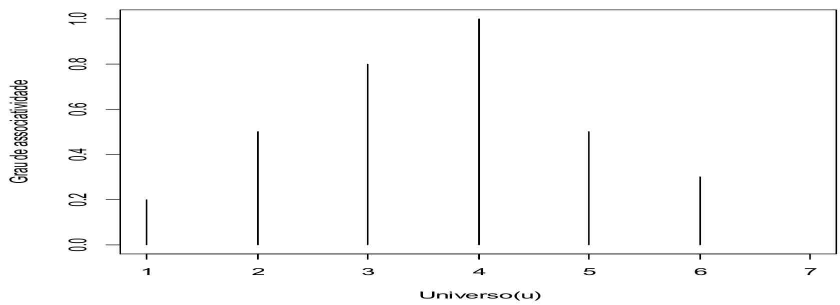
Seja X um espaço de pontos (objetos) e x um elemento genérico. Um conjunto difuso (*fuzzy*) A contido em X é um conjunto caracterizado por uma função de associatividade μ_A, que associa a cada ponto x em X um número real μ_A (x) pertencente ao intervalo [0,1]. O valor de μ_A (x) é o "grau de associatividade" de x em A. Esse grau de associatividade μ_A.(x) é tal que: μ_A.(x) = 1, se x $\in$A; μ_A (x) = 0, se x$\notin$ A; e se 0 < μ_A (x) < 1 , diz-se que x pertence não totalmente ao conjunto. Quanto mais próximo de 1 for o valor de μ_A (x), maior será o grau de associativismo de x com A (ZADEH, 1965, p. 339).

Considerando a função μ_A do "grau de associatividade", vamos construir uma aplicação por meio de um exemplo adaptado de Suleman (2009, p. 42): Uma empresa de imobiliária pretende classificar as casas que disponibiliza aos seus clientes. O indicador de conforto é o número de quartos. Seja o universo $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ de tipologia de casas e $u \in U$ o respectivo número de quartos, isto é, uma coleção de objetos (pontos). Assim, o conjunto dos pares ordenados $A = \{(u,\ f_A(u))\ :\ u \in U\}$ é um conjunto difuso e a função f_A é função do "grau de associatividade" ou simplesmente *função de associativismo* (SULEMAN, 2009, p.41). De acordo com a empresa o conjunto difuso "tipologia de conforto para casal com dois filhos" a sua respectiva função do "grau de associatividade" é representado por:

$$A = \{(\ 1;0.2), (\ 2;0.5), (\ 3;0.8), (\ 4;1.0), (\ 5;0.5), (;0.3), (7;0.0)\}$$

Por meio de um gráfico, também, podemos representar o conjunto difuso A.

Figura 2 - Representação do conjunto difuso A



Fonte: Os autores por meio do programa R.

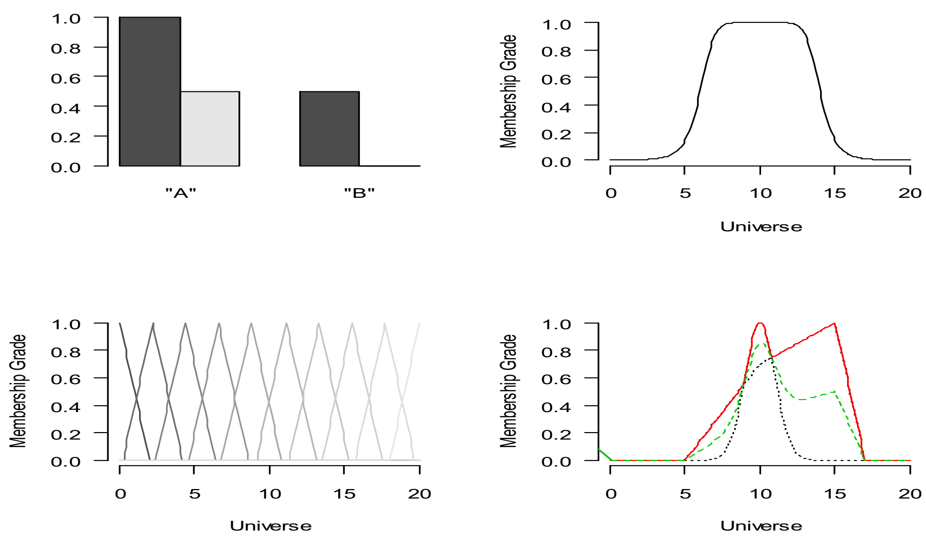
Analisemos a seguir as informações relacionadas ao conjunto A e a respectiva representação gráfica. Na opinião da empresa uma casa de 4 quartos é ideal para uma família de quatro pessoas, representada pelo grau de associatividade $f_A(4) = 1$, enquanto que uma casa de sete quartos é sobredimensionada com $f_A(7) = 0$. Como sete quartos é um elemento incompatível, na opinião da empresa, assim foi atribuída graduação nula. Também, observamos que a soma do "grau de associatividade" é igual a 3.3, isto é $\sum_{i=1}^{7} f_A(x) = \ 3.3$.

Como observa Zadeh (1965, p. 340), deve-se notar que, embora a função de associação de um conjunto *fuzzy* tenha algumas semelhanças com uma função de probabilidade quando X é um conjunto numerável (ou uma função densidade de probabilidade quando X é um continuum), existem diferenças essenciais entre esses conceitos, como, por exemplo, a soma da função do "grau de associatividade" é diferente de um, isto é $\sum f_A(x) \neq 1$. E observa, também, que a noção de um conjunto fuzzy é completamente de natureza não estatística.

Por outro lado, a função de densidade de probabilidade é diferente da função associativismo, porque mede o grau de incerteza aleatória de tal pertinência. Outro aspecto diferente entre a função de densidade de probabilidade e a função de associativismo, do ponto de vista matemático, é que a função de densidade de probabilidade é normalizada, isto é, multiplicada por uma constante para que sua área seja 1. Com isso, a função de densidade de probabilidade satisfaz: a) $f(x) \geq 0, \forall x \in R$, b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Por exemplo, podemos comparar a função de densidade de probabilidade Normal, representada por $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, com a função de associativismo Gaussiana, representada por $f_A(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, dessa forma, podemos observar que a principal diferença entre as duas funções, do ponto de vista matemático, é a constante normalizadora da função densidade de probabilidade Normal, representada por $\sigma\sqrt{2\pi}$. Também, observamos que as funções f e f_A apresentam o mesmo núcleo, isto é, *o núcleo de função é a parte principal da função, a parte que permanece quando constantes são desconsideradas*, como está definido em Casella e Berger (2010, p.58). Também, observamos que os parâmetros têm interpretações diferentes, ou seja, para função de densidade de probabilidade Normal μ e σ são média e desvio padrão, respectivamente, enquanto que na lógica dos conjuntos difusos, μ e σ representam centro e largura da função de associativismo Gaussiana.

Quanto mais próximo de 1 for o valor de $\mu_A(x)$ maior será o grau de associativismo de x com A. (ZADEH, 1965, p.339). Apresentamos na Figura 3 alguns exemplos de funções de associativismo geradas no programa R, apresentadas no artigo "*Generalized and Customizable Sets in R*" de Meyer e Hornik (2009, p.15).

Figura 3 - Funções de associativismo geradas no programa R



Fonte: "Generalized and Customizable Sets in R" de Meyer e Hornik (2009, p.15).

ISSN 2178-034X

Analisando a Figura 3, no sentido horário, observamos as funções de associativismo. No canto superior esquerdo, temos uma função representada por um gráfico de barras. À direita, temos um gráfico em curva de sino ou Gaussiana. Canto inferior direito, temos uma sequência de funções triangulares. E no canto inferior direito, temos duas combinações de uma Gaussiana e uma função de trapézio.

Zadeh (1965, p. 340-341) estabelece relações entre os conjuntos difusos correspondentes à Teoria Clássica de Conjuntos, por meio da função de associativismo. Apresentaremos a seguir algumas destas relações:

1. Um conjunto difuso (*fuzzy*) X é vazio se e somente se sua função de associativismo é identicamente zero em X.
2. Dois conjuntos difusos (*fuzzy*) A e B são iguais, escrevendo A = B, se e somente se $f_A(x) = f_B(x),\ \forall\ x \in X$.
3. O complementar de um conjunto difuso (*fuzzy*) A é denotado por A', e definido por: $f_{A'} = 1 - f_A$.
4. A é um subconjunto difuso (*fuzzy*) de B, então: $A \subset B \Leftrightarrow f_A \leq f_B$.
5. A união de dois conjuntos difusos (*fuzzy*) A e B com repeito as funções de associativismo f_A e f_B é definida por: $f_{A \cup B}(x) = max[f_A(x), f_B(x)], x \in X$, ou de maneira abreviada; $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) \vee f_B(x)$.
6. A intersecção entre dois conjuntos difusos (*fuzzy*) A e B com relação as funções de associativismo f_A e f_B é definida por: $f_{A \cap B}(x) = min[f_A(x), f_B(x)], x \in X$ ou de maneira abreviada; $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \wedge f_B(x)$.

3. Metáfora conceitual e conjuntos difusos: funções grau de associativismo

Neste item, abordamos a noção de Metáfora Conceitual no âmbito dos Conjuntos Difusos em termos da função de "grau de associativismo" ou função de pertinência. Para tanto, apresentamos alguns resultados observados por MacCORMAC (1982) (*Metaphore and Fuzzy Sets*) que têm como principal referencial teórico Zadeh (1971) (*Quantitative Fuzzy Semantics*).

MacCORMAC (1982) observa que comentários recentes sobre Metáfora Conceitual apontam para um entendimento do processo de comparar e contrastar os traços semânticos *intencional* (*delimitada por toda definição correta do termo*) e *extensional* (*classe das coisas* *reais às quais o termo se aplica*) das referidas metáforas, pode-se recorrer ao conceito de Conjuntos Difusos. Como os Conjuntos Difusos apresentam fronteiras imprecisas, as características de uma Metáfora Conceitual podem ser parcialmente associadas com outras características, eliminando assim, as linhas precisas definidas que muitas vezes parecem ser obstáculos para a articulação entre as diferentes partes da metáfora.

Para MacCORMAC (1982), a Metáfora Conceitual sugere novas maneiras de entender as coisas. Assim, há na Metáfora Conceitual alguma analogia entre a justaposição dos dois referenciais e nossa experiência, dessa maneira, podemos compreender a metáfora. A analogia é entendida com traços semânticos em comum dos dois referentes sob a diversidade de suas aparências. Assim, os Conjuntos Difusos podem oferecer a possibilidade de ampliar a teoria semântica, o suficiente para tornar a Metáfora Conceitual uma legítima entidade linguística. Nesse sentido, MacCORMAC (1982, p. 248) afirma que: informalmente, o “universo de discurso” é uma coleção de objetos, U, que é rico o suficiente para tornar possível identificar qualquer conceito, no interior de um determinado conjunto de conceitos, como um subconjunto difuso de U.

4. Medidas de probabilidades e eventos difusos

No âmbito da Teoria da Probabilidade, Zadeh (1968, p.421) apresenta, resumidamente, a probabilidade de um evento A, membro de uma $\sigma - álgebra$, $\mathcal{A}$, em um subconjunto de espaço amostral Ω. Uma medida de probabilidade, P, é uma medida normalizada ao longo de um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$: tal que, P é um valor real de uma função que associa o evento A em $\mathcal{A}$ uma probabilidade, $P(A)$, tal que (a) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$; (b) $P(\Omega) = 1$; e (c) P é contável aditivo, isto é, se $\{A_i\}$ é uma coleção de eventos dijuntos, então: $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

Um evento é, por definição, precisamente uma coleção especifica de pontos num espaço amostral. Zadeh (1968, p.421) observa que, nas experiências do dia a dia, com frequência encontram-se situações para as quais um “evento” é antes difuso do que um conjunto de pontos bem delimitados.

A partir da noção da função “grau de associatividade”, Zadeh vai estender o conceito de probabilidade para um evento difuso (*fuzzy*). E exemplifica com os eventos em que há imprecisão nos significados das palavras e, portanto, difusos: “É um dia quente” “x é aproximadamente igual a 5", "em vinte jogadas de uma moeda há mais caras que coroas" (ZADEH, 1968, p. 421). Para Thom (1988) a afirmação "É um dia quente" é uma qualidade, representada pela categoria do adjetivo, uma forma subjetiva que afeta a percepção de um objeto ou de um processo exterior: *Duas qualidades A e B pertencem ao mesmo campo semântico se se pode imaginar uma sequência contínua de qualidades* X_t*, t variando de 0 a 1, tal que* $X_0 = A$ *e* $X_1 = B$.

A definição de campo semântico de Thom coincide com a definição de evento difuso de Zadeh, evento em que há imprecisão nos significados das palavras. Zadeh (1975, Part.3) desenvolve um quadro conceitual, no qual é chamada de variável linguística, uma abordagem para a análise de sistemas complexos ou mal definidos e processos de decisão.

5. Conjuntos difuso uma aplicação na Ciências Sociais

Os métodos de pesquisa podem ser categorizados em três grupos: qualitativos, quantitativos e mistos. Segundo Ragin (2000), os cientistas sociais enfrentam um dilema quando realizam pesquisa social, quanto ao método de pesquisa que está diretamente relacionado com a profundidade ou a amplitude do método. Os métodos de pesquisa qualitativos têm a propriedade da profundidade enquanto os métodos quantitativos a propriedade da amplitude. Ragin (2000) considera que o método de pesquisa etnográfico, um método qualitativo utilizado em pesquisa para determinar a dimensão sócio – cultural da Educação Matemática, conforme Gurgel (2012, p. 1), é uma estratégia de profundidade. Nesse sentido, Spagnolo (2003) tenta compreender como é possível analisar e estudar o fenômeno do ensino/aprendizagem da Matemática em situação multiculturais.

Ragin (2000) observa que há um meio termo entre as duas estratégias profundidade e amplitude. Dessa forma, considera que as declarações teóricas em pesquisa social, na maioria das vezes, podem ser formuladas como declarações sobre conjuntos. Ragin (2000) propôs uso de lógica difusa (*fuzzy*) ou conjuntos difusos como um caminho alternativo para análise de dados observados em pesquisas das Ciêncais Sociais. Ragin (2000, p.154) observa que a ideia básica por trás de conjuntos difusos é permitir a escala de pontuação de adesão, o que permite uma pertinência parcial.

Como, observamos o R é uma linguagem de programação orientada a objetos, assim, para viablilizar o uso da lógica *fuzzy* na pesquisa, no âmbito das Ciências Sociais, Huang

(2011) desenvolveu um programa QCA3 (QCA3: Yet another package for Qualitative Comparative Analysis. R package version 0.0-5. URL http://asrr.r-forge.r-project.org/.),

6. Considerações finais

Neste artigo apresentamos alguns aspectos teóricos da Lógica dos Conjuntos Difusos por meio do suporte computacional no ambiente *software* livre R. Como o R é um programa livre que pode ser obtido gratuitamente, ele viabiliza um recurso computacional acessível para o desenvolvimento de várias práticas da Lógica dos Conjuntos Difusos.

Considerando as inúmeras possibilidades práticas e a subjetividade dos sistemas *fuzzy*, Ragin (2000) aplica a lógica *fuzzy* na pesquisa das Ciências Sociais. Na Educação Matemática, Bassanezi (2004) tem utilizado sistemas *fuzzy* na Educação Matemática por meio da modelagem. Este artigo tem por alvo salientar que trata-se de uma alternativa promissora a aplicação de sistemas *fuzzy* no âmbito da pesquisa em Educação Matemática. E apresentamos como reforço dessa ideia a presença de variáveis *fuzzy* na Análise Estatística Implicativa, como afirmam Réginer, Gras e Bailleul (2012).

E ainda acrescentamos a afirmação de Ragin (2000, p. 06): “Os elementos de um conjunto difuso representam mais que variáveis contínuas, porque são fortemente impregnados de conhecimento teórico [...] um conjunto difuso é mais empiricamente fundamentado e mais preciso”.

7. Referências

ABAR, C. A. A. P. **O conceito Fuzzy**. Disponível em: <http://www.pucsp.br/~logica/Fuzzy.htm>. Acesso em: 22/10/2010.

ARAÚJO, P. C. **Uma Combinação de Métodos de Pesquisa em Educação Matemática: Método Bayesiano de Dados Difusos.** Tese de doutorado defendida em 2013, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, São Paulo, 2013.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico.** Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2004.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência Estatística**. Tradução Solange A. Visconte. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

HUANG, Ronggui. **QCA3: Yet another package for Qualitative Comparative Analysis. R package version 0.0-5.** Disponível em: http://asrr.r-forge.r-project.org/. 2011. Acesso em: 05 ago. 2012.

MacCORMAC, E. R. **Metaphors and Fuzzy Sets**. p. 243-256, North-Holland Publishing Company, North-Holland, 1982.

MEYER, D., HORNIK, K. Generalized and Customizable Sets in R. **Journal of Statistical Software**, v. 31, issue 2, Aug. 2009. Disponível em: http://www.jstatsoft.org/v31/i02/paper. Acesso em: 10 out. 2010.

MOREIRA, Ricardo Ramalhete. **Validade condicional do equilíbrio na Teoria Geral de Keynes**. *Revista de Economia Política*, vol. 29, nº 3 (115), p. 153-172, julho-setembro/2009.

NGUYEN, H, T, & WALKER, E. **A First Course in Fuzzy Logic.** CRC, Press LLC, 1997.

RAGIN, C. C. **Fuzzy-set social science**. Chicago: University of Chicago Press, 2000.

ROSS, T. J. **Fuzzy Logic:** With Engineering Applications. Third Edition, John Wiley, Washington, 2010.

SPAGNOLO, F. **Fuzzy Logic, Fuzzy Thinking and the teaching /learning of mathematics in multicultural situations**. The Mathematics Education into the 21º Conference and the Undecidable in Mathematics Education Brno, Czech Republic, September 2003

SPAGNOLO, F.; GRAS, R. **A new approach in Zadeh classification: fuzzy implication though statistic implication.** In: NAFIPS-IEE 3rd Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, p. 425-429, June, 2004.

______; GRAS, R.; RÉGNIER, J. C. **Une mesure comparative en didactique des mathématiques entre une analyse a priori et la contingence.** 4º Rencontres internationales d'Analyse statistique implicative. Castellon, Espanha: ASI, 2007.

SULEMAN, A**. Abordagem Estatística de Conjuntos Difusos.** Lisboa: Sílabo, 2009.

THOM, R. Qualidade/quantidade. **Enciclopédia Einaudi,** Volume 10, Lisboa: Dialéctica, Edição Portuguesa, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1988.

VERZANI, J. **Simple R.** Disponível em: <http://www.r-project.org>. Acesso em: 15 set. 2010.

VIERTL, R. **Statistical Methods for Fuzzy Data.** John Wiley & Sons, New Delhi, India, 2011.

ZADEH, L. A. **Fuzzy sets.** Inf Control, Academic Press Inc, v. 8, p. 338-353, 1965.

______. **Probability measures and fuzzy events.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, San Diego, CA, USA, v. 23, p. 421-427, 1968.

______. **Quantitative Fuzzy Semantics.** Information Sciences 3, p. 159-176, American Elsevier Publishing Company, Inc, 1971.

______. **The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I**, Information Sciences, Part 1, 8, pp. 199-249, 1975.