

UM ESTUDO ANALÍTICO ACERCA DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS ENVOLVENDO PROFESSORES E ESTUDANTES¹

Regina Lucia da Silva

SEE/SP – UFABC

regiluciasilva@hotmail.com

Etienne Lautenschlagem

SME/SP - UFABC

elautens@yahoo.com.br

Josevaldo de Almeida Lago

UFABC

josevaldolago@gmail.com

Alessandro Jacques Ribeiro

UFABC

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

Neste artigo apresentamos algumas análises desenvolvidas a partir de registros das soluções de estudantes e de professores acerca de situações matemática envolvendo conceitos algébricos. Este estudo teve por objetivo identificar e analisar as diferentes concepções de Álgebra desencadeadas pelas respostas de estudantes e de professores da Educação Básica. O trabalho foi desenvolvido com alunos dos nono ano do Ensino Fundamental, do terceiro ano do Ensino Médio e professores da Educação Básica da rede pública estadual do estado de São Paulo. A análise dos protocolos dos alunos nos revelou uma predominância em procedimentos processuais, bem como uma diversidade de registros empregados pelos alunos quando tentam representar uma equação ou um sistema linear, por exemplo. Por outro lado, os protocolos dos professores revelaram pouca preocupação em elaborar as resoluções para transitar em uma abordagem algébrica e o foco principal das resoluções está centrado nos procedimentos aritméticos.

Palavras-chave: Educação Algébrica; Concepções de Álgebra; Formação de Professores.

1. Introdução

Este trabalho foi delineado no decorrer dos estudos realizados no projeto do Observatório da Educação (Obeduc), da Universidade Federal do ABC (UFABC), financiado pelo Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior

¹ Trabalho desenvolvido no âmbito do projeto de pesquisa “Conhecimento Matemático para o Ensino: uma abordagem baseada em perfis conceituais”, financiado pela Capes no âmbito do Programa Observatório da Educação (www.comea.net.br), desenvolvido na Universidade Federal do ABC (UFABC).

(Capes). Verifica-se nos resultados de macroavaliações como a Prova Brasil e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por exemplo, um avanço favorável com relação ao desempenho dos alunos em Matemática. Contudo, as lacunas evidenciam a necessidade de que (outras) competências sejam trabalhadas de uma forma eficiente na escola para avançar em relação ao desenvolvimento de procedimentos e manipulações pouco significativas. Em nosso caso, o olhar voltou-se para as lacunas identificadas no campo da Álgebra. Na medida em que os estudos teóricos de nosso grupo de pesquisadores/estudantes foram ocorrendo, percebemos a complexidade de se “definir” o que é Álgebra e, sobretudo, a relevância de se entender quais conhecimentos algébricos são necessários e adequados para a prática profissional do professor de matemática.

Com isso, decidimos discutir neste artigo como os alunos e os professores resolvem situações matemáticas que envolvem conceitos algébricos, e quais concepções de álgebra estão inseridas nas soluções apresentadas por eles.

2. Metodologia

Nossas escolhas metodológicas nos levaram por um caminho que remete às pesquisas de natureza qualitativa. O estudo em questão necessita de descrição com riqueza de detalhes com relação aos dados recolhidos. Destacamos Creswell que descreve:

A pesquisa qualitativa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano. O processo de pesquisa envolve (...) a análise dos dados indutivamente construída a partir das particularidades para os temas gerais e as interpretações feitas pelo pesquisador acerca do significado dos dados (CRESWELL, 2010, p. 25).

Considerando nosso interesse estar focado na superação de problemas detectados nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra e, assumindo nosso posicionamento de ampliar as compreensões da Álgebra (escolar) circulantes na literatura, nosso grupo tem desenvolvido um trabalho de categorização da Álgebra escolar, sistematizado em um “quadro de referência” que vem sendo arquitetado e ampliado desde o início de nosso projeto (SILVA; SAITO; SOUZA; BEZERRA, 2015). Nesse sentido, utilizaremos tal quadro de referência para identificar e analisar os

registros escritos produzidos por professores e por alunos acerca de suas concepções de Álgebra que foram declaradas. Do ponto de vista teórico, tal quadro de referência será melhor explorado na próxima seção de nosso artigo.

Participaram dessa pesquisa 14 professores de Matemática de escolas públicas estaduais paulistas. A pesquisa foi desenvolvida em três etapas, quais sejam: (i) na 1ª etapa elaboramos questionário de identificação do perfil dos professores; (ii) na 2ª etapa preparamos um roteiro para entrevistas composto por oito questões que abordaram as concepções de Álgebra e sobre os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino. As entrevistas desta fase foram agendadas, gravadas e posteriormente transcritas para as análises; (iii) na 3ª etapa utilizamo-nos de um questionário com cinco situações matemáticas relacionadas a conceitos algébricos. Foi solicitado aos professores que em algumas questões eles resolvessem e, em outras, apenas interpretasse as situações propostas. O questionário foi entregue aos entrevistados na etapa anterior, tendo sido estabelecido um prazo de quinze dias para devolução. Após o prazo 14 questionários respondidos nos foram devolvidos.

Com relação a participação dos alunos na pesquisa tivemos duas fases: na primeira foi feito com os alunos um *Brainstorming*² e, em seguida, entregamos um questionário de identificação. Na segunda fase utilizamos questionário composto de cinco situações matemáticas relacionadas, mais especificamente, à Álgebra. Para a realização desta fase, nossa opção foi formar grupos com 4 alunos para resolver as questões e, assim, obtivemos 15 grupos de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 12 grupos de alunos do 3º ano do Ensino Médio. Os alunos pertenciam a três escolas públicas estaduais paulistas, não necessariamente as mesmas dos professores participantes deste estudo.

Neste artigo, as situações matemáticas por nós escolhidas têm por objetivo compreender as formas como os estudantes e os professores solucionam as situações apresentadas e, se possível, estabelecer algumas relações entre as diferentes maneiras

²Atividade realizada na sala de aula na qual um dos integrantes do grupo de pesquisa escreveu na lousa a palavra “equação” e, em seguida, os alunos foram escrevendo o que pensavam sobre este conteúdo.

apresentadas por estes. Vale destacar que, embora as situações matemáticas utilizadas nos instrumentos de coleta de dados com os estudantes e com os professores fossem semelhantes, a principal diferença entre eles residia no objetivo de cada questão dentro da pesquisa. As situações apresentadas para os alunos tinham por objetivo compreender suas concepções de Álgebra. Por outro lado, quando utilizadas com professores, buscávamos, além de suas concepções de Álgebra, também identificar e compreender aspectos do conhecimento profissional docente destes professores. Análises e conclusões acerca deste último objetivo podem ser observados em outras produções de nosso grupo.

3. Fundamentação teórica

As diferentes Concepções de Álgebra

Alguns dos autores que alicerçaram nossos estudos no cerne do projeto são: Usiskin (1995), Lee (2001), Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lins e Gimenez (2001) e Ribeiro (2013). Tais autores e suas pesquisas têm sido, via de regra, amplamente utilizados e fundamentados outros estudos de nossa área.

Usiskin (1995) faz considerações acerca das diferentes compreensões dos significados das letras. Na primeira concepção as variáveis traduzem uma regra, um modelo, e assim, tem o papel de generalizar, tendo sido denominada por ele como “*A álgebra como aritmética generalizada*”. Na segunda concepção o foco é resolver uma situação que pode ser traduzida por uma equação, sendo as variáveis *incógnitas* ou *constantes*. O autor chama tal concepção de “*A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*”. A terceira concepção, “*A álgebra como estudo de relações entre grandezas*”, tem por característica o uso de fórmulas que podem desembocar para a ideia de *função*. Neste caso, o papel da letra é de um argumento ou um parâmetro. Na última concepção, “*A álgebra como estudo das estruturas*”, toma-se o estudo de estruturas como anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais – pertencentes ao ensino superior – mas que se ligam ao ensino básico.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) apresentam três concepções que exerceram influência na educação algébrica no Brasil, a saber: (a) *Linguístico-pragmática*,

concepção pela qual prevalece a crença da aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo “transformismo algébrico”; (b) *Fundamentalista-estrutural* quando ocorre à introdução de propriedades estruturais das operações, as quais justificam logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico; (c) *Fundamentalista-analógica* é a síntese entre as duas anteriores e busca enfatizar recursos analógicos (blocos de madeira, figuras geométricas) ou físico (balança) para visualização das justificativas.

Lins e Gimenez (2001) seguem o caminho de caracterizar as atividades algébricas para depois introduzir uma nova visão sobre Álgebra. Um aspecto destacado por eles é que uma atividade algébrica procura dar ênfase em cálculo com letras. A primeira concepção de Álgebra apresentada pelos autores é que possui tendência *letrista*, cuja a ideia está em “calcular com letras”. A segunda concepção adota o uso de letras por meio de abstrações para a resolução de situações concretas (com foco no cotidiano do aluno), a qual é classificada por eles como *Letrista Facilitadora*. Uma terceira concepção, denominada *Modelagem Matemática*, consiste em ter início com o “concreto” a partir de uma abordagem com situações reais.

Lee (2001) fornece um modelo sobre visões de Álgebra, destacando-a dentre suas compreensões, a Álgebra como: (i) *Linguagem* para desenvolver a comunicação em uma linguagem algébrica; (ii) *Caminhos de Pensamento*, ou seja, pensamentos sobre relações matemáticas em lugar de objetos matemáticos; (iii) *Atividade* como modelo de construção de atividades; (iv) *Ferramenta* para resolver problemas de modo a veicular e transformar mensagens; (v) *Generalização* ou estudo das estruturas da aritmética; e (vi) *Cultura* cuja linguagem de comunicação é a algébrica.

Ribeiro (2013) discorre sobre perfil conceitual e o ensino de matemática e, após isso, anuncia algumas zonas de um perfil conceitual de equação, as quais foram concebidas a partir de reflexões e análises propiciadas por estudos envolvendo pesquisas de seu grupo. Até aquele momento, em 2013, o autor fazia referência às seguintes zonas que estruturam um perfil conceitual de equação: *Pragmática* - Equação interpretada a partir de problemas de ordem prática cuja solução é predominantemente aritmética; *Geométrica* – Equação interpretada a partir de problemas geométricos e a

busca por uma solução é, predominantemente, geométrica; *Estrutural* – Equação interpretada a partir de sua estrutura interna e a solução é predominante algébrica; *Processual* – Equação interpretada a partir de processos de resolução, podendo a busca pela solução ser tanto aritmética como algébrica; *Aplicacional* - Equação a partir de suas aplicações, tendo as soluções enfoque aritmético ou algébrico.

“Quadro de Referência”: um modelo em construção

Partindo dos estudos teóricos durante o desenvolvimento de nosso projeto, constatou-se a necessidade de uma melhoria e organização de nossos estudos de base, de modo que pudéssemos analisar e agrupar as concepções e delinear um caminho que atendesse ao objetivo de ampliarmos a nossa própria visão do que se estende por Álgebra. Assim, discutimos e mapeamos as concepções de Álgebra, por meio de organogramas, surgindo então seis categorias que denominamos: Manipulação, Estruturação, Recurso Visual, Generalização, Modelagem, Relações. O princípio básico para tal categorização foi procurar reunir as concepções por suas semelhanças. Logo, depois conseguimos construir um “quadro” composto com as seguintes novas categorias: *Pré-Álgebra*, *Generalizações*, *Relações*, *Estruturação*, *Modelagem*, *Manipulação*, *Não Aplica e Não Respondeu*. Esta categorização será o apoio conceitual ao desenvolvimento do nosso projeto de pesquisa. O “quadro de referência” (Quadro 1) é apresentado mais à frente.

4. Análise de Resultados

i) Como os professores resolvem as situações

Na terceira etapa de nossa coleta de dados com os professores da Educação Básica (PEB), como já abordado anteriormente, foram entregues a eles cinco situações matemáticas. No entanto, neste trabalho, apresentaremos e analisaremos apenas duas dessas situações. Assim temos:

Situação 2 (professores)

Figura 1: área do retângulo

• Observe essa situação matemática:

- Represente a área do retângulo abaixo:

Alternativa de resolução contendo um possível erro do aluno:

Área do retângulo: largura \times comprimento

$$A = p \times a + m$$

Quais as estratégias que você utilizaria para que o aluno superasse esse tipo de erro?

Fonte: Situação adaptada de BOOTH (1995)

Quadro 1: Quadro de Referência

Categoria de Álgebra	Principais Ideias
1. Pré-Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Manipulação de somas, produtos e potências aritméticos; ❖ Resolução de problemas aritméticos para a introdução do pensamento algébrico
2. Generalizações	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Aritmética generalizada; ❖ Estrutura de representação formal do concreto (através da abstração); ❖ Atribuir grau de abstração e generalidade aos símbolos linguísticos
3. Relações	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Estudo das relações entre grandezas
4. Estruturação	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Estudo das estruturas e propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios; ❖ Linguagem simbólica/variável como símbolo arbitrário
5. Modelagem	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta; ❖ Construção da atividade e exercícios de modelagem; ❖ Modelagem de situações a partir de situações-problema
6. Manipulação	<ul style="list-style-type: none"> ❖ Conjunto de técnicas ou procedimentos específicos para abordar problemas por métodos algorítmicos; ❖ Capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas primordialmente simbólicas; ❖ Atividades que envolvam incógnitas com o objetivo de simplificar ou resolver

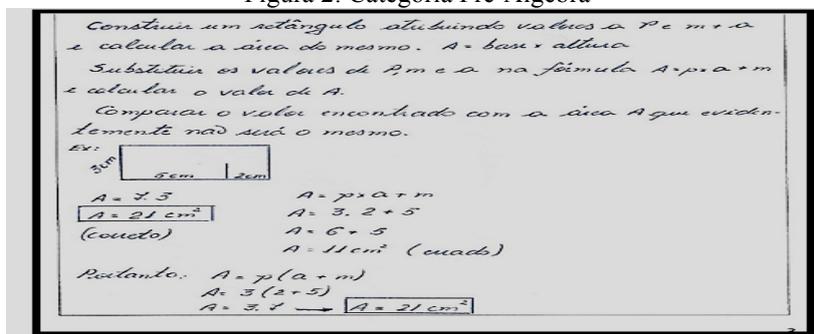
Fonte: elaborado pelos autores e pelo Grupo de Pesquisa FORMATE³

Em relação à situação apresentada na Figura 1, os professores descrevem que deveriam rever as noções sobre áreas por meio de aula expositiva; retomariam os conceitos de área e perímetro e se utilizariam da análise de erros para ajudar os alunos. Quanto ao enquadramento em nosso referencial teórico as nossas análises se voltaram para a categoria “Pré-Álgebra”, uma vez que, alguns docentes, se utilizaram de um

³ FORMATE – Formação Matemática para o Ensino: conhecimento profissional docente e desenvolvimento curricular. Disponível em <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/8814738426604861>

enfoque aritmético não conduzindo para um procedimento algébrico. Notamos também que somente um dos professores fez referência a propriedade distributiva.

Figura 2: Categoria Pré-Álgebra



Fonte: Protocolo do PEB 7

Situação 3 (professores)

Figura 3: “Galinhas”



Fonte: Adaptada de BRANCO; PONTE (2011)

- a) Você trabalharia com esta situação no 6º ano? Se sim, quais seriam os conceitos matemáticos trabalhados? Se não, justifique.
- b) Você trabalharia com esta situação no 9º ano? Se sim, quais seriam os conceitos matemáticos trabalhados? Se não, justifique

Ao responderem sobre o “item a”, percebemos no protocolo abaixo (Figura 4), uma tendência a não apresentar este tipo de questão aos alunos do sexto ano por acreditarem que os alunos ainda não adquiriram os conhecimentos necessários para a resolução desta questão, ou seja, os docentes parecem possuir uma visão linear sobre o currículo. Quanto questão 3b, com relação as soluções, as propostas dos professores para as resoluções destas atividades conduzem a uma linguagem simbólica sendo traduzida por uma equação ou um sistema de equação de 1º grau. Assim, se utilizam de propriedades e técnicas necessárias para a solução. Classificamos a questão 3b dentro da categoria de “Manipulação”.

Figura 4: Situação 3a “Galinhas”

Com o 6º ano não, porque o exercício é bem elaborado para a idade dos alunos do 6º, pois dá três valores a serem descritos.

Fonte: Protocolo do PEB 8

ii) Como os alunos fazem estas situações

A atividade desenvolvida com os alunos, e que optamos por apresentar e analisar neste artigo, foi adaptada a partir da mesma situação desenvolvida com os professores. No caso dos professores, as questões que foram feitas se referiam aos seus conhecimentos profissionais docentes. Já, quando utilizamos a situação com os alunos, apresentamos a eles da mesma forma como foi originalmente criada.

Situação 1 (alunos)

Nesta atividade utilizamos a mesma “atividade das galinhas”, já citada acima, na situação 3 dos professores, mas com os seguintes questionamentos:

- a. Quanto pesam as três galinhas? b. Quanto pesa cada galinha?

Com relação a esta atividade, esperávamos encontrar nos protocolos dos alunos as concepções de Álgebra “Relações” e “Estruturação”.

Figura 5: Resposta à questão 1 “Galinhas”

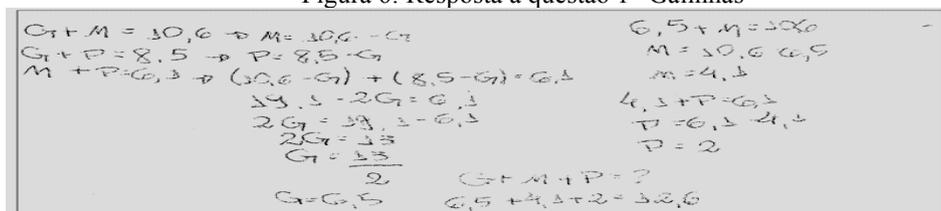
Handwritten student work showing arithmetic calculations for the 'Galinhas' problem. It includes three columns of calculations: $4,0 + 6,6 = 10,6$; $10,6 - 4,0 = 6,6$; and $10,6 - 8,5 = 2,1$. The final result is $12,7 \text{ KG}$.

Fonte: Protocolo do grupo 10 – 9º ano

Observamos que os alunos do nono ano do Ensino Fundamental não utilizam uma representação algébrica simbólica e respondem a esta questão por meio de cálculos aritméticos (soma e subtração) como ilustrados acima. Em alguns protocolos existe uma tentativa da escrita simbólica, mas, no final prevalece mesmo o registro numérico. Ressaltamos que a estratégia “tentativa e erro” está presente em vários protocolos. Percebemos, por exemplo, que um dos grupos traduz para uma linguagem simbólica própria ($g_1 + g_2 = 10,6$; $g_2 + g_3 = 6,1$; $g_1 + g_3 = 8,5$) mas, em seguida, se utiliza da linguagem formal da escola ($x + y = 10,6$; $x + z = 8,5$; $y + z = 6,1$). Este grupo denota um “não saber”, isto é, a falta de conhecimento de alguma estratégia para a resolução.

Ao realizarmos um levantamento quantitativo tivemos um número de erros significativos na questão proposta. Com este contexto e a partir de nossas análises, acreditamos que as soluções dos alunos se enquadram na categoria de “Pré-Álgebra” de nosso quadro de referência.

Figura 6: Resposta à questão 1 “Galinhas”



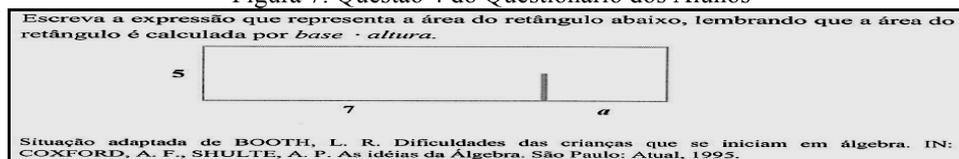
$$\begin{aligned}
 G + M &= 30,6 \rightarrow M = 30,6 - G \\
 G + P &= 8,5 \rightarrow P = 8,5 - G \\
 M + P &= 6,3 \rightarrow (30,6 - G) + (8,5 - G) = 6,3 \\
 39,1 - 2G &= 6,3 \\
 2G &= 39,1 - 6,3 \\
 2G &= 32,8 \\
 G &= \frac{32,8}{2} \\
 G &= 16,4 \\
 G + M &= 30,6 \\
 16,4 + M &= 30,6 \\
 M &= 30,6 - 16,4 \\
 M &= 14,2 \\
 G + P &= 8,5 \\
 16,4 + P &= 8,5 \\
 P &= 8,5 - 16,4 \\
 P &= -7,9 \\
 M + P &= 6,3 \\
 14,2 + P &= 6,3 \\
 P &= 6,3 - 14,2 \\
 P &= -7,9 \\
 G + M + P &= ? \\
 16,4 + 14,2 + (-7,9) &= 22,7
 \end{aligned}$$

Fonte: Protocolo do grupo 10 – 3º ano

Em relação aos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio (Figura 6), observamos que os mesmos realizam uma tradução da linguagem figural para a linguagem simbólica. Os registros algébricos mostram a representação de um sistema de equações de 1º grau, cujos os métodos de adição e substituição surgem para solucionar a questão. No entanto, existem grupos que procuram uma solução com recursos aritméticos, assim como fizeram os alunos do Ensino Fundamental. Desta forma, classificamos as soluções dos alunos do Ensino Médio dentro das concepções de “Pré-Álgebra” e “Generalizações”.

Situação 4 (alunos)

Figura 7: Questão 4 do Questionário dos Alunos



Fonte: Situação adaptada de BOOTH (1995)

As análises extraídas dos registros escritos dos alunos dos nonos anos indicam a não compreensão da proposta, uma vez que seis grupos não responderam e outros cinco grupos não expressaram seus pensamentos. Ao nosso ver, quando fizemos uma análise quantitativa constatamos que esta questão, ao ter um maior índice de não acertos, nos deu em indicativo de “falhas” com relação aos conceitos que a situação exigia. Destacamos que três grupos escrevem adequadamente a expressão algébrica que representa a área da figura. Sendo assim, situamos tais respostas nas categorias “Não Aplica” e “Não Respondeu”. Um exemplo de tal situação é apresentada na Figura 10.

Figura 10: Resposta à questão 4

Fonte: Protocolo do Grupo 7–9º ano

Quanto aos protocolos dos alunos dos terceiros anos do Ensino Médio nesta questão, notamos que três grupos dentre os doze grupos participantes escreveram a expressão algébrica que representa a área do retângulo. Relatamos que alguns grupos fazem uma tentativa para solucionar a questão, mas não conseguem retratar a expressão algébrica. Outros três grupos não realizam a resolução situação. A partir de nossas análises não obtivemos elementos suficientes para estabelecer relações com as concepções do nosso “quadro de referência”.

5. Considerações Finais

As respostas dos docentes revelam que há uma predominância da categoria “Manipulação” (resolver, aplicar técnicas). Observamos que eles traduziram a Situação 3, por exemplo, por meio de equações sintetizando em um sistema de equações do 1º grau. No que se refere à Situação 2, as características notadas nas respostas têm o seu percurso inicialmente por procedimentos aritméticos e parecem não possuir uma preocupação que esta situação poderia ser conduzida para recursos algébricos.

Quanto às respostas dos alunos dos nonos anos do Ensino Fundamental, as mesmas evidenciam as dificuldades da passagem da linguagem aritmética para a linguagem algébrica. As resoluções possuem um caráter estritamente aritmético. Com este aspecto, acreditamos que estes estudantes ainda não possuem em seus pensamentos alguns conceitos que deveriam estar formados. Em relação às respostas dos estudantes dos terceiros anos do Ensino Médio também pudemos observar uma predominância de recursos aritméticos.

Por fim, a análise dos protocolos dos alunos nos revelou um predomínio em procedimentos processuais, bem como uma diversidade de registros empregados pelos alunos quando tentam representar uma equação ou um sistema linear, por exemplo. Por outro lado, os protocolos dos professores revelaram pouca preocupação em elaborar as

resoluções para transitar para uma abordagem algébrica e, além disso, o foco principal das resoluções esteve sempre centrado nos procedimentos aritméticos.

6. Referências

BRANCO, N; PONTE, J. P. da. A álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos: **Uma experiência de formação**. Indagatio Didactica, v. 3, n. 1, 2011.

BOOTH, L. R. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (Orgs). Tradução de Hygino H. Domingues. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-36.

CHALOUTH, L; HERSCOVICS N. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (Orgs). Tradução de Hygino H. Domingues. **Ensino de expressões algébricas de maneira significativa**. São Paulo: Atual, 1995, p. 37-48.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e misto**. 3ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar ... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. São Paulo, v.4, n.1 [10], p. 78 – 91. mar. 1993.

LEE, L. **Early – but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra**. CIDADE: ICMI STUDY CONFERENCE, 2001.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Sobre a Álgebra. In: LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus Editora, 2001. Cap. III, p. 89 – 157.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. **Ciência e Educação**, São Paulo, v.19, n.1, p. 55-71, 2013.

SILVA, R. L.; SAITO, D. S.; SOUZA, D.; BEZERRA, F. J. B. **Concepções de álgebra: uma tentativa de construir um “quadro de referência” por integrantes de um grupo colaborativo**. In: Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4º, 2015, Ilhéus, Bahia, Brasil. p. 2612-2623.

USISKIN, Z. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (Orgs). Tradução de Hygino H. Domingues. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.