

ANÁLISE DE INVARIANTES OPERATÓRIOS DOS ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO EM SITUAÇÕES DE PROBABILIDADE

Lemerton Matos Nogueira
Universidade de Pernambuco- Campus Petrolina/PE
lemerton.nogueira@upe.br

Robson dos Santos Ferreira
Universidade Anhanguera – UNIAN/SP
robsonlsantos@yahoo.com.br

Resumo:

Temos como objetivo neste artigo analisar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes do Ensino Médio brasileiro em seus esquemas de resolução de situações envolvendo conceitos básicos de Probabilidade (cbP). O design do estudo consistiu na aplicação da Sequência de Ensino Passeios Aleatórios da Carlinha (SE PAC) cujos dados foram analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Essa Teoria concebe os invariantes operatórios dos esquemas como as propriedades, relações ou técnicas manifestadas pelos sujeitos explicitamente e/ou implicitamente na resolução de uma situação. Os resultados mostraram avanços progressivos na mobilização destes invariantes (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) pelos sujeitos envolvidos, ao longo das situações da SE PAC. Acreditamos que este estudo pode oferecer contribuições para a disseminação de práticas investigativas em matemática que explorem os invariantes operatórios mobilizados por estudantes.

Palavras-chave: Invariantes operatórios; Esquemas; Probabilidade.

1. Introdução

A discussão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de Probabilidade vem ganhando espaço no âmbito das pesquisas em Educação Matemática, mais especificamente no campo da Educação Estatística. Grande parte dessa discussão tem raízes na abordagem teórico-metodológica dos conceitos probabilísticos em sala de aula, no entanto ainda há carências de estudos que investiguem o pensamento probabilístico de estudantes da educação básica frente à resolução de situações-problema, principalmente no Ensino Médio.

Esta investigação se insere no domínio do desenvolvimento conceitual e da aprendizagem da matemática, como postula a Teoria dos Campos Conceituais proposta por

Gérard Vergnaud. Nesta teoria busca-se explicitar “como crianças e adolescentes adquirem e desenvolvem conceitos matemáticos, concebendo-os como sujeitos epistêmicos dotados de esquemas de pensamento e significações” (MUNIZ, 2009, p. 37).

Nesse bojo, o design do presente estudo consistiu na aplicação da Sequência de Ensino Passeios Aleatórios da Carlinha (SE PAC), a qual explora situações que envolvem os conceitos de espaço amostral, evento, evento simples, situação determinística, experimento aleatório, frequência relativa e Probabilidade.

Para a análise utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, por entender que essa valoriza a análise da atividade em situação (VERGNAUD, 2009) e mais especificamente proporciona a investigação da forma operatória do conhecimento na resolução dessas situações. Nesse contexto, há uma preocupação com as propriedades, as relações e técnicas manifestadas pelos estudantes de forma (explícita ou implícita) na resolução de uma situação, representando o que Vergnaud (1996) denomina de invariantes operatórios dos esquemas. Esses invariantes se manifestam sobre a forma de conceitos-em-ação ou teoremas-em-ação.

Nessa perspectiva nos propomos a discutir a seguinte questão de pesquisa: *que invariantes operatórios são mobilizados nos esquemas de estudantes do Ensino Médio ao resolverem situações de Probabilidade, presentes na Sequência de Ensino Passeios aleatórios da Carlinha?*

2. Quadro teórico

A Teoria dos Campos Conceituais postula que o conhecimento está organizado em Campos Conceituais, entendido como um “conjunto de problemas e situações, que requer o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas diferentes, mas intimamente relacionados” (VERGNAUD, 1996, p. 41).

Nesse bojo, Vergnaud (1996, 2009) define o conceito (C) como um conjunto de três elementos distintos, tal que $C = (S, I, R)$ e:

S é conjunto de *situações/tarefas* que dão sentido ao conceito; I é conjunto de *invariantes operatórios* que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações; R conjunto de *representações linguísticas e simbólicas* (algébrica, gráfica...) que permitem representar os conceitos e suas relações e, conseqüentemente, as situações e os esquemas que eles evocam (VERGNAUD, 2009, p. 29).

Tomando como base esse tripé, a Teoria dos Campos Conceituais postula que a apropriação do conceito depende da inter-relação desses elementos na ação do sujeito/estudante. Assim Vergnaud (ibid.) coloca que o conjunto de situações envolve uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações em estreita conexão.

A noção de esquema é essencial dentro da Teoria, pois se constitui como ferramenta de análise em que se investiga a organização invariante da atividade matemática para uma classe de situações exploradas por estudantes. Mas, o esquema “não organiza somente a conduta observável, mas também o pensamento subjacente” (VERGNAUD, 2009, p. 21) e por isso eles podem ser movimentados por regras de ação mentais advindas, por exemplo, dos conteúdos dos diálogos (esquemas enunciativos).

Conseqüentemente, Vergnaud (2009) entende que os invariantes operatórios correspondem a um dos componentes cognitivos essenciais dos esquemas, uma vez que eles permitem a “identificação de objetos materiais e de suas relações pela percepção e interpretação das informações em situações que envolvem a incerteza, hipóteses, e raciocínios que repousam sobre os objetos sofisticadamente elaborados pela cultura”. (VERGNAUD, 2009, p. 23).

Os invariantes são manifestados, por exemplo, no desenvolvimento de um determinado cálculo realizado pelo estudante quando este não compreende de forma consciente as raízes conceituais que explicam tal procedimento ou técnica. Deve-se considerar que os invariantes quase sempre se manifestam de forma implícita na ação dos estudantes e, portanto, muitas das conclusões surgem de modo intuitivo.

Tendo em vista que essa manifestação dos invariantes pode ocorrer de forma diferente Vergnaud (1996, 2009) estabelece os termos “conceitos-em-ação” e “teoremas-em-ação” como os tipos dos invariantes operatórios. Neste contexto, os conceitos-em-ação tem foco na ação do estudante, quando, por exemplo, ele mobiliza conceitos matemáticos implícitos numa determinada situação, enquanto os teoremas-em-ação seria uma proposição tida como verdadeira ou falsa na ação. Eles ainda podem ser definidos como “relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver determinado problema” (GITIRANA et al, 2014, p. 22). Entretanto, estas escolhas quase sempre são despercebidas pelo estudante.

Em linhas gerais, os dois tipos de invariantes estão imbricados dialeticamente na ação do estudante, já que “os conceitos-em-ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas-em-ação necessários ao cálculo” (VERGNAUD, 2009, p. 22).

3. Material e Método

O delineamento metodológico deste trabalho configurou-se na perspectiva de um estudo de natureza qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994) e é nesta perspectiva que são justificadas as nossas interpretações dos dados, a fim de descrevê-los com fidedignidade.

Ressaltamos que os dados fazem parte dos resultados da pesquisa de Ferreira (2011), no qual buscou investigar a aprendizagem de conceitos probabilísticos de estudantes do 3º ano do Ensino Médio. O estudo foi realizado com sete estudantes de uma escola do interior de São Paulo.

Neste artigo discutiremos os mesmos dados da pesquisa de Ferreira (2011), sendo que serão analisados à luz da Teoria dos Campos Conceituais, com foco nos invariantes operatórios dos esquemas.

A Sequência de Ensino

A SE PAC foi proposta por Cazorla, Kataoka e Nagamine (2010), a partir de uma versão adaptada da atividade “Passeios Aleatórios da Mônica” (CAZORLA e SANTANA, 2006), na qual vai analisar as chances de Carlinha visitar os seus amigos.

A sequência é composta de 24 tarefas/situações, divididas em quatro seções. Em cada uma delas, as questões devem ser respondidas baseadas numa ação solicitada. Existe uma pergunta chave que se repete nas três primeiras sessões: “*Todos os amigos tem a mesma chance de ser visitado?*” () Não. Quais são as chances? () Sim. Qual é a chance? cuja ideia é verificar se desde o início o estudante tem o entendimento que as chances são diferentes, ou se apenas após a experimentação, ou após o cálculo da probabilidade teórica.

A Análise dos dados

Discutiremos aqui os dados mais importantes que figuraram em cada uma das quatro seções da sequência. Na primeira, os alunos leem a seguinte estória:

A Carlinha costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Luiz; terça-feira, Felipe; quarta-feira, Fernanda; quinta-feira, Alex e sexta-feira, Paula. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Carlinha. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Carlinha deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Carlinha deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos (Figura 1).

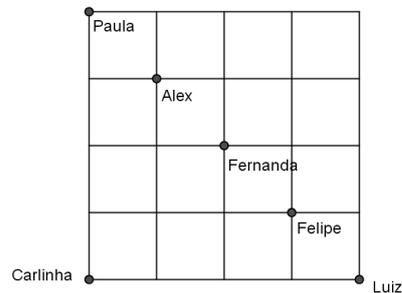


Figura 1 – Ilustração dos caminhos

Fonte: Ferreira, 2011, p.88.

Nessa seção o objetivo foi avaliar os conhecimentos dos estudantes acerca de suas concepções intuitivas de probabilidade, bem como as diferenças entre um experimento determinístico e um aleatório. Os sete estudantes foram agrupados em três grupos denominados de D1, D2 e D3. Das cinco situações presentes nesta seção, uma delas figura enquanto pergunta cerne: “*Todos os amigos têm a mesma chance de serem visitados?*” () Não. Quais são as chances? () Sim. Qual é a chance?

Na resposta dos alunos a pergunta principal, constatou-se que os três grupos visualizaram que os amigos não tinham a mesma chance de serem visitados. Nas justificativas notou-se que nenhum dos grupos usou-as baseadas no conceito formal de probabilidade e nem naquelas baseadas em crenças. Enquanto D1 e D3 justificaram que um amigo pode ser visitado mais de uma vez na semana dependendo da face da moeda que sair; D2 relatou que, se no primeiro sorteio sair a face cara, Paula não poderá ser visitada.

Contudo, percebemos que os invariantes operatórios utilizados pelas duplas frente à resolução dessa situação correspondem a conceitos-em-ação, já que tais justificativas perpassam por vertentes pertinentes acerca de alguns conceitos probabilísticos e desta maneira

é possível inferir que, os conceitos de chance, aleatoriedade e possibilidade figuraram nos esquemas de resolução dos três grupos.

Na seção II, os alunos simulam o lançamento de uma moeda auxiliado pelo software R. Percebemos uma evolução na mobilização de invariantes operatórios nos esquemas de resolução dos estudantes/grupos, pois de maneira geral foi possível notar que eles refletiram sobre a resposta apresentada na seção I a partir dos resultados obtidos na experimentação. Entretanto, em algumas situações as respostas dadas divergiram das conclusões consensuais entre os grupos.

Em relação a pergunta principal: Existe a chance da Carlinha não visitar algum amigo? () Não () Sim . Por quê? D2 e D3 identificaram que há a possibilidade de algum amigo não ser visitado. D2 usa como exemplo Paula, “*que no caso de sair apenas faces coroa não será visitada*”; D3 relata que apesar de não ter acontecido em sua simulação de algum amigo não ser visitado, esse é um resultado possível. Já o grupo D1 parece que não respondeu com base nos possíveis resultados de uma simulação, mas sim pensando na probabilidade teórica, uma vez que, na sua justificativa, alegam que qualquer sequência vai levar à casa de um amigo (Figura 1).

4) Existe a chance da Carlinha não visitar algum amigo? () Não () Sim
Por quê? <i>Porque qualquer sequência que der vai cair na casa de um amigo.</i>

Figura 2 – Resposta de D1 na seção II

Fonte: Ferreira, 2011, p.107

Mesmo com o avanço das situações colocadas e com os resultados advindos da simulação, essa justificativa mostra que esse grupo não se convenceu da impossibilidade de visita de algum amigo. A resposta do grupo D1 dão indícios de que não detêm conhecimentos intuitivos para a resolução dessa situação.

Pensando nos invariantes operatórios, é possível inferir que nesse caso a dupla mobilizou conceitos-em-ação referente à noção de probabilidade teórica e não foi possível perceber indícios de teoremas-em-ação, uma vez que não utilizaram relações matemáticas para justificar suas respostas, e mesmo expressando as respostas por meio de palavras essas não sinalizam a mobilização de uma propriedade ou uma técnica. Essa constatação corrobora

com as palavras de Vergnaud (2009) ao afirmar que os invariantes são explicitados quando estão ligados a uma concepção do sujeito, neste caso à concepção teórica de probabilidade.

Ainda nesta seção, em relação à pergunta central “*Todos os amigos têm as mesmas chances de serem visitados*”, foi notório perceber que a dupla D1 não mudou de opinião (Tabela 1).

Tabela 1 – Justificativas das duplas para a pergunta central.

Grupo	Tarefa	Justificativa
D1	4 – Seção I	Nem todos os amigos têm a mesma chance de ser visitada, porque “ela pode visitar um amigo duas vezes na semana, dependendo do lado que cair a moeda”.
	4 – Seção II	Não mudaria de opinião, porque “dependendo da sequência que cair algumas sempre caem no mesmo amigo”.
	6 – Seção II	Não mudaria de opinião, pois tem amigos que foram visitados 12 vezes e outro apenas uma.

Fonte: Ferreira, 2011, p.108

Sobre o aspecto de D1 não ter mudado de opinião, inferimos que as justificativas dadas pelo grupo, mesmo após a simulação e as discussões tecidas entre eles, ocorreu, pois segundo Vergnaud (1996) os invariantes operatórios podem estar atrelados aos objetos (conhecimentos) elaborados pela cultura ao qual o estudante esta inserido e isto permite que o estudante cristalice algumas concepções intuitivas, como o ocorrido neste caso.

A seção III objetivou proporcionar reflexões sobre as diferenças entre a Probabilidade frequentista e teórica. O grande trunfo desta seção é a construção da árvore de possibilidade cujo preenchimento dependia dos dados obtidos na simulação (seção II). Com isto, esperava-se que a construção da árvore permitisse que os grupos mudassem de opinião em relação à chance de visita de cada amigo.

Inicialmente, D1 conseguiu montar a árvore, mas apresentou dificuldades no momento de contabilizar os amigos visitados. Com a ajuda do professor-pesquisador a dupla conseguiu concluir esta tarefa (Figura 3).

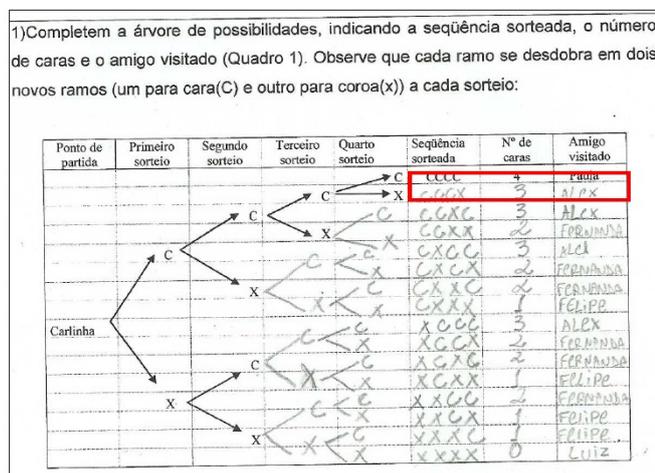


Figura 3- Exemplo utilizado para a realização da tarefa 1.
Fonte: Ferreira, 2011, p.112.

De acordo com Vergnaud (1996), não poderíamos considerar este erro como decorrente da mobilização equivocada de invariantes operatórios, pois refere-se a um erro de ordem apenas do esquema perceptivo-gestual de resolução, referente à percepção da regularidade de preenchimento da árvore. Notou-se que todos os grupos conseguiram perceber que só existem 16 caminhos, mobilizando implicitamente conceitos-em-ação como espaço amostral e evento.

Na última seção era solicitado que os grupos descobrissem, se existia uma relação comum a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos. Os grupos D1 e D2 executaram a tarefa sem apresentar dificuldades, ou seja, perceberam que a visita de cada amigo pode ser determinada pelo número de vezes que aparece a face cara, associando esse fato à soma obtida em cada combinação.

D3 apresentou respostas vagas que não atenderam aos objetivos esperados para a tarefa. Eles relataram, por exemplo, que Alex tem menos chance de visitas, uma vez que poucas combinações levam a seu nome e que Fernanda é a que tem mais chances, porque existem várias combinações que levam a seu nome. Nesse sentido, inferimos que D3 utilizou conceitos-em-ação relativos à noção de evento e espaço amostral, por exemplo, possibilitando assim a constatação de que Fernanda teria mais chances de ser visitada, pois quanto maior os casos possíveis, maior a probabilidade considerando o espaço amostral, em questão.

Ao responderem a situação referente a pergunta central, D3 apresentou justificativas baseadas na probabilidade teórica, fato este potencializado pela construção da árvore de possibilidades. Os grupos D1 e D2, não mudaram de opinião, acreditando que a árvore não traz nada de novo e as visitas ainda estavam condicionadas apenas à aleatoriedade dos sorteios das moedas. Neste caso, é provável que D3 tenha utilizado conceitos-em-ação referente ao produto de $1/16$ pela quantidade de caminhos de cada amigo obtido na experimentação.

A última seção da SE (seção IV) tem como objetivo proporcionar o confronto entre as concepções de probabilidade teórica e frequentista. Desta forma, ao responderem a situação “qual a diferença entre essas duas formas de atribuir probabilidades?”, os grupos responderam:

D1: “Na primeira nos fizemos uma simulação, a segunda a gente atribui que ia ser cara ou coroa”;

D2: “uma é probabilidade feita do experimento e a outra da teórica”;

D3: “Que a prática é a que tem resultado exato, a teórico, cálculo”.

Em todas as justificativas percebemos a mobilização de invariantes operatórios (conceitos-em-ação), uma vez que os grupos implicitamente trazem a tona alguns conceitos probabilísticos como espaço amostral e evento. No que se refere a teoremas-em-ação, percebemos, por exemplo, que ambos os grupos concebem implicitamente a probabilidade teórica (P) como a razão entre os casos favoráveis (n) e os casos possíveis (U), ou seja, $P = \frac{n}{U}$.

Desta forma, sentimos falta da mobilização do conceito/noção de *amostra* pelos grupos, que os fariam provavelmente a optar pela probabilidade frequentista enquanto forma mais adequada de se atribuir probabilidade.

4. À guisa de conclusão

A importância atribuída a este trabalho justifica-se por se debruçar na investigação do sujeito em ação (estudante), valorizando e buscando compreender seus esquemas de resolução à luz da Teoria dos Campos Conceituais no que tange mais especificamente seus invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados neste processo. Com efeito, foi possível perceber a evolução progressiva dos estudantes na aquisição dos conceitos básicos de Probabilidade constantes na SE PAC.

Julgamos que conseguimos alcançar o objetivo proposto nessa investigação uma vez que, foi possível notar que os invariantes operatórios dos esquemas dos estudantes, mesmo figurando implicitamente, como aborda a teoria, são passíveis de análises e investigações profundas. No nosso caso, ao final da análise dos dados percebemos que as duplas manifestaram mais conceitos-em-ação do que teoremas-em-ação e em alguns casos percebemos que eles figuraram juntos.

Acreditamos que este trabalho se constitui em um instrumento de investigação e que pode servir de baliza para outros que se valham da análise de produções escritas, esquemas e

invariantes operatórios dos esquemas de estudantes em situações de probabilidade ou em outros Campos Conceituais da matemática.

5. Referências

BOGDAN, R. C; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos** (3ª edição). Porto: Porto Editora, 1994.

CAZORLA, I. M; SANTANA, E. R. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Itabuna-BA: Via Literarum, 2006.

CAZORLA, I. M, KATAOKA, V.Y. & NAGAMINE, C. M. L. **Os passeios aleatórios da Carlinha**. Bahia, 2010. Disponível em: <http://www.iat.educacao.ba.gov.br/avaleeb>. Acesso em: 22 Fev 2016.

FERREIRA, R.S. **Ensino de probabilidade com o uso do programa estatístico R numa perspectiva construcionista**. 155 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Bandeirante de São Paulo - São Paulo, 2011.

GITIRANA, V; CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S. M. P, SPINILLO, A.G. **Repensando multiplicação e divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais** (1ª edição). São Paulo: PROEM, 2014.

MUNIZ, C. A. O conceito de “esquema” para um novo olhar para a produção matemática na escolar: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. In: Bittar, M & Muniz, A. C (Orgs). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais** (1ª edição). Curitiba: Editora CVR, 2009.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. (Ed.) **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. O que aprender? In: Bittar, M & Muniz, A. C (Orgs). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais** (1ª edição). Curitiba: Editora CVR, 2009.