

UTILIZANDO PARÂMETROS NO GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA COM ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Marciane Linhares Carlos
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – PPGEMAT/UFRGS
marciane.carlos@gmail.com

Márcia Rodrigues Notare
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – PPGEMAT/UFRGS
marcia.notare@ufrgs.br

Resumo:

Este artigo apresenta uma pesquisa de dissertação do mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática feita com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada da região metropolitana de Porto Alegre, na qual o objetivo foi analisar as contribuições do GeoGebra no estudo da circunferência, transitando entre diferentes registros de representações semióticas, algébrica e geométrica e utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados. Para a realização desta pesquisa, foi utilizado o estudo de caso como metodologia. A coleta de dados se deu por meio de observações da professora/pesquisadora, questionamentos sobre as atividades trabalhadas no GeoGebra, registros escritos feitos pelos alunos e dos arquivos .ggb. Foi criado um website com a sequência didática aplicada em sala de aula e com os trabalhos finais produzidos pelos alunos.

Palavras-chave: Circunferência; GeoGebra; Registros de Representação Semiótica; Generalização.

Introdução

A geometria analítica é um dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio que exige dos alunos a transição entre pelo menos dois tipos de registros de representação: a algébrica e a geométrica. Para que o aluno desenvolva uma compreensão global dos conceitos abordados e sinta-se seguro para expressar seus conhecimentos tanto de forma algébrica, quanto de forma geométrica, o propósito desta pesquisa foi trabalhar com estas duas representações, de forma que a conversão entre estes dois tipos de registros fosse enfatizada.

O trabalho aqui apresentado é resultado de uma pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio, no qual o objetivo foi investigar *as contribuições do GeoGebra no estudo da geometria analítica, em específico no estudo da circunferência, utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados*. Para conduzir a pesquisa, foi desenvolvido um website com as atividades propostas durante a coleta de dados e as produções finais dos alunos.

A pesquisa realizada teve como metodologia o estudo de caso, baseado nos estudos de Ponte (2006) e, comumente utilizado nas investigações em Educação Matemática. Foi tomado como principal referencial teórico a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), no qual ajudou-nos a compreender a importância da mobilização de diferentes registros de representações de um mesmo objeto matemático para que haja compreensão ampla do objeto de estudo.

Para auxiliar neste processo de aprendizagem, para trazer mais dinamismo às aulas e para proporcionar a compreensão dos conceitos trabalhados, bem como para desenvolver um raciocínio generalizador, foi feito uso do GeoGebra, um software de geometria dinâmica que pode provocar nos alunos reflexões que conduzam à compreensão dos diferentes registros de representações de um mesmo objeto.

1. Os registros de representação semiótica

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), que norteiam o trabalho do professor da educação básica em sala de aula, recomendam trabalhar no processo de ensino e aprendizagem diferentes representações de um mesmo objeto matemático para aumentar o campo de visão do aluno sobre o mesmo objeto e possibilitar uma compreensão mais global sobre o mesmo. Segundo os PCN's (2000, p.42), deve-se “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”.

Para compreender como se dá este processo de reconhecimento de diferentes registros de representações de um mesmo objeto e, mais do que isso, compreender as complexidades inerentes ao processo de conversão entre os registros, foi utilizada a teoria de Duval (2009, 2011 e 2012).

Na teoria de Duval (2009), os sistemas de representação semiótica são considerados importantes para o processo de aprendizagem de Matemática. Na Matemática, estas representações podem se dar por meio de representações algébrica, gráfica, geométrica, simbólica ou discursiva. Neste trabalho, no qual o objeto de estudo foi a circunferência e suas diferentes representações, os alunos tiveram a possibilidade de transitar entre duas de suas representações: a algébrica e a geométrica.

Duval (2009) em sua teoria define um conceito importante, que é o de transformações de registros. Para Duval (2009), as transformações podem ser de dois tipos: tratamento e conversão, onde o tratamento é uma transformação dentro de um mesmo registro e a conversão é uma transformação entre, no mínimo, dois registros de um mesmo objeto. É na conversão que se apresentam as maiores dificuldades de compreensão dos alunos, pois não é trivial para os alunos reconhecerem um objeto matemático nas suas diferentes representações semióticas.

As representações semióticas são classificadas por Duval (2009, 2012) como congruentes ou não congruentes. São congruentes quando existe a conversão entre duas representações de um mesmo objeto, ou seja, quando a passagem de uma representação a outra acontece espontaneamente e preenchem as seguintes condições:

[...] correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significativa da representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada. (DUVAL, 2009. p.18).

Quando não há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, Duval (2012) observa um isolamento de registros de representação, ou seja, os alunos não reconhecem o mesmo objeto representado em sistemas semióticos diferentes. Isso quer dizer que não houve uma total compreensão do objeto estudado. Esta compreensão parcial, apenas de um registro de representação, faz com que o aluno fique limitado em seus conhecimentos referentes ao objeto de estudo, dificultando assim a aplicação destes conhecimentos em outras situações.

Pensando na teoria de Duval (2009), a tecnologia foi utilizada para desencadear o processo de conversão dos registros de representações semióticas (algébrica e geométrica) ao ser trabalhado com os alunos a parametrização e o raciocínio generalizador.

2. As atividades práticas: um estudo sobre a circunferência

As atividades práticas deste trabalho foram aplicadas em uma escola particular da região metropolitana de Porto Alegre, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio que, no início da pesquisa, contava com dezessete alunos e, no decorrer da pesquisa, chegaram mais

dois alunos novos nesta turma. Os alunos fizeram as atividades em duplas e um trio, formando assim oito grupos. Ao todo, foram utilizados catorze períodos de 45 minutos para aplicação das atividades. Neste trabalho, foram analisados quatro grupos (A, C, E e H) que desenvolveram e entregaram todas as atividades.

A metodologia utilizada foi o Estudo de Caso e teve como referência os estudos de Ponte (2005). Foi escolhida esta metodologia por se tratar de uma investigação em Educação Matemática que tem como propósito estudar uma situação específica e que, segundo Ponte (2005), o objetivo da investigação num estudo de caso é entender e compreender o “como” e os “porquês” de uma entidade que pode ser uma pessoa, instituição, disciplina na área da educação ou de outra área de conhecimento.

Ponte (2005) acredita que os estudos de casos podem ter alguns propósitos bem específicos, como: ser exploratório e servir para obter informações preliminares; ser descritivo e relatar como é o caso estudado; e ser analítico construindo ou desenvolvendo uma nova teoria ou então confrontar com uma que já existe.

Para atender os objetivos deste trabalho, foi elaborada uma sequência de dez atividades disponibilizadas em um website (<http://marcianecarlos.wix.com/matematica>).

A coleta de dados se deu por meio de questionamentos sobre as atividades que estavam sendo trabalhadas no GeoGebra, registros escritos feitos pelos alunos, observações da professora/pesquisadora, e arquivos do GeoGebra.

Na primeira aula, após ser apresentado o website para os alunos, foi acordado que todas as circunferências deveriam ser construídas pelo campo de entrada do GeoGebra, para provocar a elaboração da equação da circunferência.

A atividade 1 tinha por objetivo recordar noções básicas do GeoGebra. A atividade 2 tratava da construção de circunferências variando o centro e/ou o raio por meio de controles deslizantes. A atividade 3 (Figura 1) tinha como objetivo construir circunferências a partir de suas posições relativas (concêntricas, internas não-concêntricas, externas, tangentes externas) com o intuito de compreender os papéis das coordenadas do centro e da medida do raio na equação e suas relações com o registro gráfico. Os grupos apresentaram dúvidas iniciais sobre a ideia de posição relativa, mas ao entenderem o significado de cada uma das posições,

conseguiram representar graficamente as respectivas circunferências, evidenciando uma situação de transição da representação gráfica para a algébrica e, conseqüentemente, de controle e compreensão das variáveis da equação da circunferência.

Atividade 3

Construindo circunferências conforme suas posições relativas

Vamos construir pares de circunferências no GeoGebra levando em consideração suas posições relativas.

1.
 - a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.
 - b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?
 - c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?
 - d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.
 - e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?
 - f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.
2.
 - a) Digite as equações de duas circunferências que são tangentes externas.
 - b) Registre a maneira como você pensou para garantir a posição de tangentes externas destas circunferências.
 - c) O que você mudaria na(s) equação(ões) de modo a torná-las tangentes internas?
 - d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências tangentes internas.
3.
 - a) Digite as equações de duas circunferências que são secantes.
 - b) Registre a maneira como você pensou para garantir que as duas circunferências sejam secantes.

Figura 1: Atividade 3.

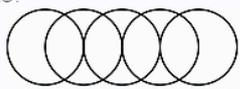
No item 2, uma menina da dupla C, ao ver os colegas da dupla E não conseguindo transformar as circunferências tangentes externas em tangentes internas, orientou para que estes colegas fossem testando valores para as circunferências, pensassem nestes valores e se eram coerentes: - *Vocês não estão parando para pensar nos valores e sim chutando. Pensem nos valores do centro e o raio das equações e nas circunferências que estão vendo!* Assim, a dupla E passou a alterar os valores do centro de uma das circunferências até conseguirem chegar no objetivo da atividade, que era tornar as circunferências tangentes internas. Percebe-se que, a visualização das circunferências criadas no GeoGebra, foi importante para estes alunos atingirem o objetivo desta atividade, poderem manipular os valores das equações e terem o retorno desta manipulação através da representação gráfica, os auxiliou para chegarem nas equações desejadas.

As atividades 4 e 5 foram realizadas pelos alunos no mesmo dia e encontram-se nas Figuras 2 e 3.

Atividade 4

Construir seqüências de circunferências

Vamos construir uma seqüência de circunferências conforme o desenho:



1. Pensando na equação da circunferência para criar esta seqüência de circunferências, o que você acha que deve variar de uma circunferência para outra da seqüência?
2. Como podemos criar uma seqüência de circunferências conforme a figura acima?
3. Digitar no campo de entrada a palavra "seqüência" e escolher como mostra a imagem:

Seqüência[<Valor Final>]
 Seqüência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]
 Seqüência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>, <Incremento>]

Entrada: seq

Em "expressão", digitar a circunferência que queremos criar;
 Em "variável", digitar a variável que deve mudar para gerar a seqüência;
 Em "valor inicial" e "valor final", digitar os valores inicial e final da variável;
 Em "incremento", digitar o valor que queremos que a variável propague.

Figura 2: Atividade 4.

Atividade 5

Construir seqüências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra

1.
 - a) Crie, no GeoGebra, uma seqüência de circunferências externas a partir de uma única relação.
 - b) Como você pensou para criar esta seqüência de modo a garantir que são externas?
 - c) Analisando a expressão criada para a seqüência de circunferências externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências secantes?
2.
 - a) Crie, no GeoGebra, uma seqüência de circunferências tangentes externas a partir de uma única relação.
 - b) Como você pensou para criar esta seqüência de modo a garantir que são tangentes externas?
 - c) Analisando a expressão criada para a seqüência de circunferências tangentes externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências concêntricas?
3. Escrever a expressão que generaliza a seqüência de circunferências da imagem abaixo:



Figura 3: Atividade 5.

Na atividade 4 (Figura 2), os alunos deveriam construir uma seqüência de circunferências conforme representação geométrica dada, percebendo que, na equação da circunferência, mudaria somente o valor da abscissa do centro. Para responderem aos itens 1 e 2 da atividade 4, os grupos C e H não conseguiram, de imediato, identificar quais elementos da equação permanecem iguais e quais devem variar, o que revela, neste momento, ainda uma falta de compreensão da circunferência e as relações existentes entre os registros gráfico e algébrico. Para solucionar o problema, os alunos construíram cinco circunferências semelhantes às circunferências propostas pela atividade e, a partir da observação de suas equações, constataram que o elemento variável na equação era a abscissa do centro. Percebe-se, neste caso, a necessidade dos alunos em apoiarem-se nos recursos do software para solucionar a questão, sendo ainda incapazes de antecipar e estabelecer os valores para centro e raio da equação a partir da representação gráfica. Os alunos do grupo A criaram controles deslizantes para o centro e o raio com o intuito de explorarem e visualizarem o que estava

variando e, a partir desta exploração, concluíram que a abscissa do centro deveria ser variável. Percebe-se que estes alunos estão utilizando o GeoGebra como uma ferramenta para pensar em Matemática e para auxiliar no processo de reconhecimento e generalização da equação da circunferência.

Na atividade 5 (Figura 3), os grupos deveriam criar sequências de circunferências com uma única expressão, generalizando as equações, a partir das posições relativas entre estas circunferências e depois o processo contrário, a partir de uma representação gráfica da sequência de circunferências, escrever a expressão que generaliza esta sequência. Isso para provocar nos alunos a necessidade de realizar a conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa, levando ao entendimento mais global da circunferência. O grupo A criou circunferências tangentes externas no item 1 ao invés de circunferências externas, mas perceberam que mudando o incremento poderiam torná-las externas, conforme registro feito pelo grupo: *Digitamos incógnitas na fórmula da circunferência de maneira que as mesmas pudessem ser alteradas mas na primeira vez deu errado pois a distância entre os centros eram iguais a soma dos dois raios, por isso alteramos o incremento para dar certo. A primeira vez que deu errado ficou uma tangente externa.* Percebe-se que os alunos conseguiram compreender as relações relativas das circunferências quando visualizaram a representação gráfica da sequência de circunferências criadas, mostrando a importância da manipulação do objeto estudado em suas diferentes representações.

Na atividade 6, foi solicitado aos alunos que construíssem circunferências que giravam em torno de um ponto (Figura 4), depois em torno de uma circunferência, primeiro uma a uma para entender o processo de criação, depois generalizando.

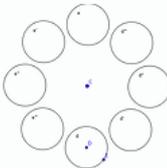
A dupla E não sabia qual era o objeto que deveriam escrever no item 2.c) e foi necessário explicar que o centro da circunferência deveria estar em função de um ponto, conforme a equação $(x - x(B))^2 + (y - y(B))^2 = r^2$. A dupla C teve a mesma dificuldade que a dupla E em entender qual era o objeto do item 2.c), foi pedido para a dupla ler e tentar entender o que estava escrito. Após a leitura feita com atenção chegaram na equação $(x + x(A))^2 + (y + y)^2 = r^2$, ao movimentar o controle deslizante, os alunos perceberam que o centro ficou diferente e que girou em torno de outro ponto, então modificaram as coordenadas do centro corretamente e conseguiram fazer a circunferência girar. Os demais grupos tiveram

dificuldade para dar início à construção, faltando autonomia para experimentarem e explorarem as possibilidades sobre o que fazer. Foram necessárias orientações como: Qual objeto vai girar? Olhando para a figura, em torno de qual ponto gira? A partir destas provocações, conseguiram avançar na atividade.

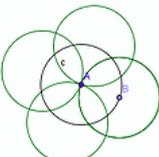
Atividade 6

Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência

Vamos criar uma sequência de circunferências que giram primeiramente em torno de um ponto e depois em torno de uma circunferência. Em um primeiro momento criaremos as circunferências uma a uma e, em um segundo momento, criaremos várias através de uma expressão.



1.
 - a) Construir um ponto qualquer e uma circunferência qualquer. Queremos que esta circunferência rotacione/gire em torno do ponto por um ângulo de 45° . Para tanto, selecionamos o comando "rotação em torno de um ponto" localizado na barra de ferramentas no nono ícone e depois selecionamos o ponto, a circunferência e o ângulo que queremos que a circunferência rotacione/gire em torno do ponto.
 - b) Continuar rotacionando circunferências em torno do ponto até chegar na circunferência onde começou a rotação.
2. Vamos construir sequências de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência, para tanto:



 - a) Determinar uma circunferência de centro definido e marcar um ponto sobre a circunferência.
 - b) Criar controles deslizantes para duas variáveis: "i", que representa a distribuição equidistante das circunferências em torno de um ponto e "k", que apresenta a quantidade de circunferências que serão criadas.
 - c) Usar o comando "girar". Após digitar sequência no campo de entrada, em "expressão", digite "girar" e selecione: "[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]", como mostra a imagem:


```
Girar[ <Objeto>, <Ângulo> ]
Girar[ <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto> ]
Girar[ <Objeto>, <Ângulo>, <Eixo de Rotação> ]
Girar[ <Objeto>, <Ângulo>, <Ponto sobre O Eixo>, <Eixo de Direção ou Plano> ]
GirarTexto[ <Texto>, <Ângulo> ]
```

O objeto a ser girado será uma circunferência criada com base no ponto sobre a circunferência. Exemplo: Ponto B sobre a circunferência de centro A. Em "ângulo", digitar "i 360°/k".

Figura 4: Atividade 6.

Na atividade 7, o objetivo era reproduzir a semente da vida, mostrada a partir de um vídeo - disponível no website e em um arquivo do GeoGebra. Os alunos precisavam utilizar as ideias exploradas no item 2 da atividade 6, que era a construção de uma sequência de circunferências girando em torno do centro da circunferência. Ao movimentar o controle

deslizante k (Figura 5), que mostra a quantidade de circunferências criadas em torno do centro de uma circunferência, teremos a sequência mostrada na Figura 6.

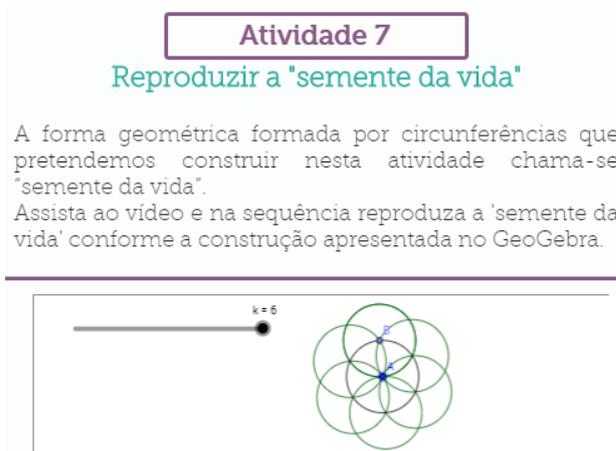


Figura 5: Atividade 7.

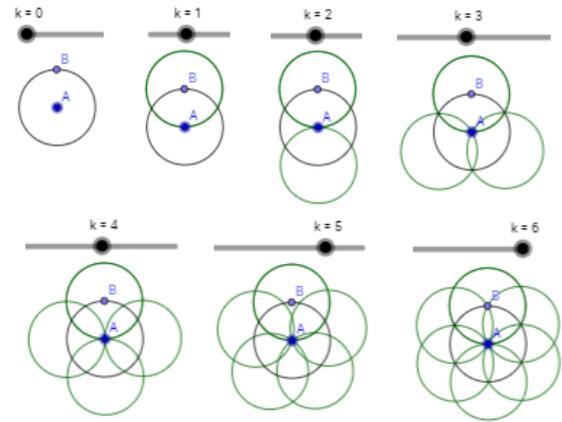


Figura 6: Semente da vida com o controle deslizante variando de 0 a 6.

A dupla E perguntou por que as circunferências criadas não tangenciavam o centro. Para provocar a reflexão da dupla, foi questionado sobre o que a construção tinha de diferente das circunferências criadas e a da construção disponível no GeoGebra. Assim, perceberam que o problema estava relacionado ao centro e então conseguiram avançar na solução da atividade.

As atividades 8 (Figura 7) e 9 (Figura 8) foram trabalhadas na mesma aula e consistiam em produzir mais uma etapa da *flor da vida*. Para replicar o início da *flor da vida* na atividade 8, foi disponibilizada uma construção no GeoGebra e solicitada aos alunos a construção e o estabelecimento de relações entre as circunferências criadas. Os grupos se ajudaram, uns perguntavam aos outros a ordem que deveriam fazer. Foi preciso ajudar alguns grupos explicando que o que girava na última sequência de circunferências era a lista 1 criada a partir do comando sequência. O comando sequência foi visto na atividade 6.

A atividade 9 consistia na finalização da construção da *flor da vida*. Para tanto foi solicitado que os alunos observassem a construção feita no GeoGebra, movimentando primeiramente o controle deslizante ' k ' que cria circunferências em torno do centro de uma circunferência (como na Figura 5), depois o controle deslizante ' m ' que cria outra camada de circunferências em torno das circunferências já criadas (Figura 7), e por fim o controle deslizante ' n ' que cria mais uma e última camada de circunferências (Figura 8), e assim

reproduziram a sequência de circunferências e estabelecessem relações entre as circunferências criadas. Os alunos utilizaram como exemplo, para começar, a atividade 8 e entenderam que deveriam criar mais um comando sequência e que as listas giravam em torno de um ponto. Tanto na atividade 8 quanto na atividade 9, os alunos superaram as expectativas ao se ajudarem e estabelecerem relações entre as circunferências criadas, como: *Mesmo centro; todas são tangentes; quando as circunferências laterais se encontram, forma-se o centro de outra circunferência.* (grupo A – Atividade 8). *Todas possuem o mesmo raio; são secantes* (grupo A – Atividade 9).

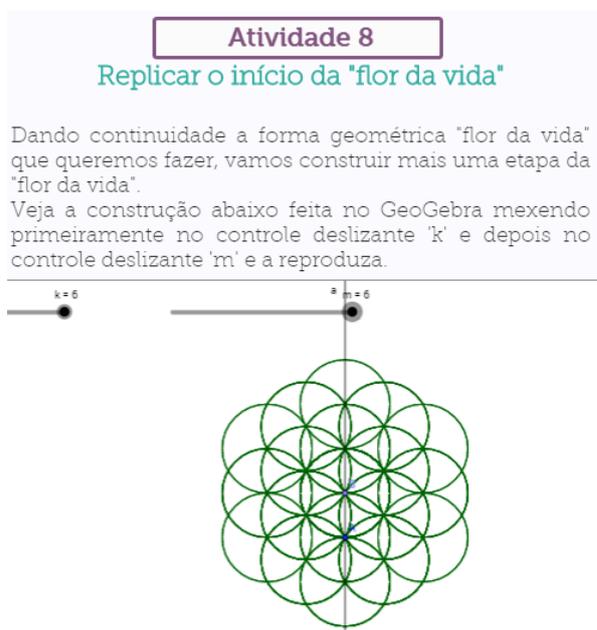


Figura 7: Atividade 8.

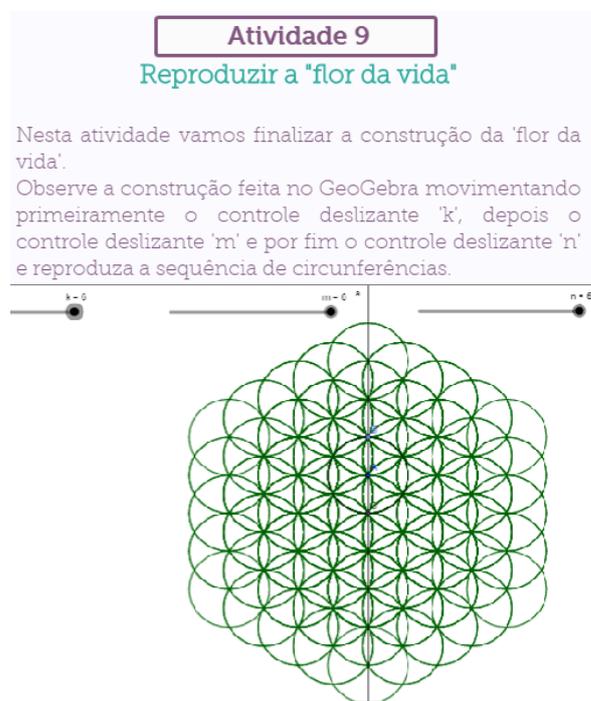


Figura 8: Atividade 9.

Na atividade 10 (Figura 9), novamente os alunos superaram as expectativas ao realizarem esta atividade com autonomia e utilizando os conhecimentos explorados nas atividades anteriores.

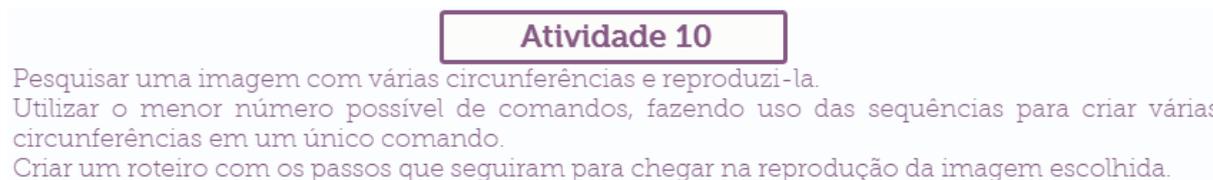


Figura 9: Atividade 10.

Segue a imagem original, a construção no GeoGebra e a descrição de como o trio H construiu.

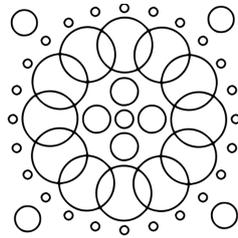


Figura 10: Imagem escolhida pelo trio H

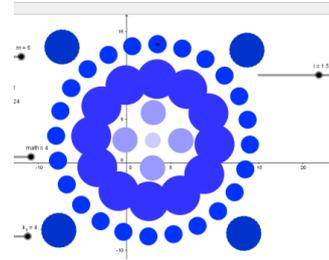


Figura 11: Imagem da reprodução feita pelo trio H

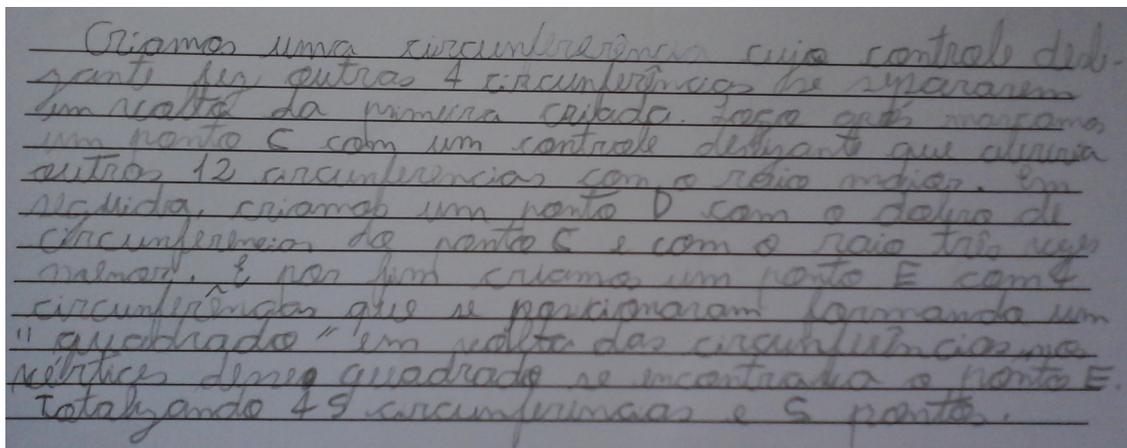


Figura 12: Descrição do trio H sobre a construção da Figura 11.

3. Considerações Finais

Baseados na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009), podemos compreender, a partir desta sequência didática, como os alunos mobilizaram diferentes registros de representações da circunferência e, consequentemente, a compreensão deste objeto de estudo de forma mais ampla, no qual os alunos fizeram o uso dos parâmetros para generalizar raciocínios na criação de "coleções de circunferências".

Percebe-se o quão importante foi o uso da tecnologia, o GeoGebra, nesta experiência para desencadear o processo de conversão entre os registros algébricos e geométricos do estudo da circunferência, auxiliando assim, o processo de aprendizagem. Esta ferramenta tecnológica, além de tornar as aulas mais dinâmicas, instigou reflexões nos alunos que os levaram à compreensão da circunferência e das relações existentes entre os registros gráfico e algébrico, tornando mais versátil as diferentes representações e o trabalho com o processo de generalização.

4. Referências

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 2000.

Duval, Raymond. *Simiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais* (fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

Duval, Raymond. *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v.6, n.2, p.96-112, 2011.

Duval, Raymond. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v.07, n.2, p.266-297, 2012.

Ponte, J. P. *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, 25, 105-132, 2006.