

UM ESTUDO DAS FRAÇÕES PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS NA PERSPECTIVAS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Angélica da Fontoura Garcia Silva
Universidade Anhanguera de São Paulo
angelicafontoura@gmail.com

Joelma Cruz de Oliveira Freire
Universidade Anhanguera de São Paulo
joelmac7s@hotmail.com

Raquel Factori Canova
Universidade Anhanguera de São Paulo
fraelc@yahoo.com.br

Resumo:

Esta comunicação tem o objetivo de analisar livros destinados ao 6º e 7º anos do Ensino Fundamental de duas coleções aprovadas pelo PNLD 2014 acerca dos significados de fração e procuramos relacioná-los com suas representações e invariantes. Trata-se de uma pesquisa documental, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais e na classificação dos significados proposta pelos PCN. Para analisar as informações selecionou-se 319 questões e criou-se uma grade para esse fim. Observou-se que na primeira coleção as frações foram introduzidas depois do trabalho com os números decimais, já na segunda, logo após os Números Naturais. Percebeu-se que, o maior percentual de situações envolvia o significado parte-todo. Além disso, esse tipo de situação aparece mais no 6º ano com representação icônica envolvendo, sobretudo, grandezas contínuas cujo invariante é o procedimento de dupla contagem. O significado razão é o segundo mais apresentado, seguido do significado operador e por último quociente.

Palavras-chave: Livro Didático, Números Racionais, Situações, Representações.

1. Introdução

Para esta comunicação temos o propósito de apresentar como são desenvolvidos os significados¹ das frações² e procurar relacioná-los as suas representações e invariantes em duas coleções de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2014, adotados em duas escolas na cidade de Fortaleza, Ceará. Para apresentar a investigação que será discutida nessa comunicação, nomeadamente, de caráter

¹Os diferentes significados (ou situações) que envolvem o conceito de fração estão descritos no quadro 1.

²Neste artigo consideraremos o termo fração como a representação fracionária de número racional. Esse conjunto numérico, segundo Kieren (1993), é composto por números do tipo $\frac{a}{b}$ em que a e b são Números Inteiros, sendo $b \neq 0$.

bibliográfico/documental, apresentamos a relevância do estudo, a fundamentação teórica, a metodologia de pesquisa, uma síntese da discussão dos dados e nossas considerações finais.

2. Relevância do estudo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais evidenciam, desde o final dos anos 90, a importância do ensino de frações desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, além de explicitar a necessidade de se trabalhar com diferentes significados (BRASIL, 1998). Nesse sentido, consideramos ser necessário analisar as abordagens presentes, sobretudo nos livros já aprovados pelo Programa Nacional de Livro Didático – PNLD, uma vez que esse material pode ser utilizado nas escolas públicas de todo o país .

Concordamos com Garcia Silva (2007) quando afirma ser esse um, se não o único, recurso de apoio ao ensino disponível ao professor, e dessa forma esse tipo de material passa a exercer certa influência sobre sua prática pedagógica. Assim sendo, apresentaremos para essa comunicação resultados observados em uma pesquisa de mestrado a qual investigou duas coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD 2014. Aliado a isso, estudos como os de Cavalcanti e Guimarães (2007), Garcia Silva, Canova e Campos (no prelo), por exemplo, discutem acerca da necessidade de se fazer mais pesquisas com relação ao tema dos significados das frações. As autoras, referenciadas em diversas pesquisas brasileiras, ressaltam a importância de compreender o currículo apresentado aos professores para que os estudos sobre o assunto possam avançar.

3. Fundamentação Teórica

Inspiramo-nos estudos de Vergnaud, sobre o impacto que as situações têm no desenvolvimento de conceitos matemáticos e em resultados de pesquisas como, por exemplo, Nunes e Bryant (2009). Nosso marco teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990). Seus estudos chamam a atenção para o fato de que, por meio de resoluções de uma diversidade de situações, um conceito adquire sentido. Além disso, o autor afirma que para cada situação há, também, uma variedade de conceitos envolvidos.

Vergnaud (1990) define o conceito por meio da descrição de uma terna de conjuntos, representadas como $C = (S, I, R)$, em que: S – é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I – é um conjunto de invariantes, nos quais repousa a operacionalidade do conceito (objetos, propriedades, relações) e R– é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para representarem simbolicamente o conceito, suas propriedades e as situações.

Para esse estudo nos apoiaremos nas indicações curriculares oficiais apresentadas no âmbito federal. Os PCN consideram que as frações assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte-todo, quociente, razão e operador.

A relação *parte-todo*, segundo o documento, se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais. Para os autores dessas orientações, a interpretação da fração como relação parte-todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo, compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com diferentes tipos de grandezas.

Outra interpretação do número racional é dada como *quociente* de um inteiro por outro ($a : b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$). Uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como *razão*. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com situações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes e se conclui que $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes. Outras situações são as que envolvem probabilidades, escalas em plantas e mapas e a exploração da porcentagem. Existe ainda uma quarta interpretação que atribui ao número racional o significado de um *operador*, ou seja, quando ele desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, em problemas do tipo “que número devo multiplicar por 5 para obter 2”.

Quando se trata do ensino, o documento aponta para a necessidade de o professor trabalhar esses significados em conjunto. Além disso, chamam a atenção do educador para o fato de haver a necessidade de realizar um trabalho sólido nos terceiro e quarto ciclos, para que o aluno possa analisar e comparar diferentes situações-problema. Nesse sentido, verificaremos se as duas coleções tratam desse espectro amplo de significados da fração. Reiteramos que neste estudo nosso foco é investigar os significados das frações apresentado nas coleções, todavia também analisaremos as representações e invariantes encontrados nas duas coleções. Procuraremos nas diferentes situações verificar se a representação fracionária, pictórica e decimal, percentual, número misto e linguagem natural apareceram nos diferentes significados.

Da mesma forma, fundamentados nas ideias de Vergnaud, analisaremos os invariantes utilizáveis na ação ordenação, equivalência, unidade de referência, densidade e procedimento

de dupla contagem presentes nas diferentes situações.

4. Procedimentos Metodológicos

Trata-se de uma pesquisa qualitativa com foco na análise documental conforme definição de Ludke e André (1986). Analisamos duas coleções de livros adotados em duas escolas de Fortaleza. O enfoque será dado na análise de como os significados de fração, representações e invariantes são abordados nessas coleções. Para essa escolha, seguimos alguns critérios: (i) coleções de livros que foram aprovados pelo PNLD e (ii) coleções de livros que apresentam formas diferenciadas de desenvolver o conceito de fração.

Na primeira coleção selecionada, Souza e Pataró (2012), os autores utilizam-se da forma clássica, isto é, apresentam a representação fracionária dos Números Racionais para os estudantes do 6º ano depois do trabalho com os Números Naturais e, em seguida, trabalham com os números decimais. As frações são retomadas no 7º ano, na perspectiva dos Números Racionais Relativos. Já na coleção de Imenes e Lellis (2012) a proposta é diferente, as frações são apresentadas aos estudantes a partir da representação decimal por meio de análise de frações decimais.

Essa investigação foi desenvolvida por meio de análise de grade construída por nós para esse fim. Assim, para a Grade de Análise consideramos as categorias apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 1 – A Grade de Análise

Significado: parte-todo, quociente, razão, operador.

Representação: pictórica, relaciona fração com número decimal, fração, número misto, porcentagem, linguagem natural.

Invariante: ordenação, equivalência, unidade de referência, densidade e procedimento de dupla contagem.

Fonte: Acervo Pessoal

A definição dos significados, foco deste estudo, foi baseada nas orientações contidas nos PCN. Quanto a representação procuramos ampliar as indicações dos PCN, observando também a representação como número misto, a pictórica e a em linguagem natural, tais categorias emergiram da nossa análise.

Procuramos também outras propriedades dos Números Racionais que permitiriam ao estudante operacionalizar o conceito: a relação de ordem e equivalência presentes nesse

conjunto numérico; além da unidade de referência, uma vez que aluno sente que para resolver a situação é necessário identificar e reconstruir a unidade de referência; quando realiza o procedimento de dupla contagem, ou quando se busca reconhecer a existência de outros números entre duas frações.

5. Discussão e análise dos dados

Reiteramos que analisamos quatro livros das coleções “*Matemática Imenes e Lellis*” e “*Vontade de saber Matemática*”: dois volumes de cada coleção. A seguir apresentamos um quadro comparativo contendo o número de questões encontradas, nos dois volumes de cada coleção, a cerca de cada significado.

Quadro 2 – Significados das frações

	Parte / Todo	Quociente	Razão	Operador	Total
Matemática – 6º ano	36	09	15	13	073
Matemática – 7º ano	10	13	15	3	041
Total	46	22	30	16	114
Vontade de saber – 6º ano	73	18	09	14	114
Vontade de saber – 7º ano	22	10	25	24	081
Total	95	28	34	38	195

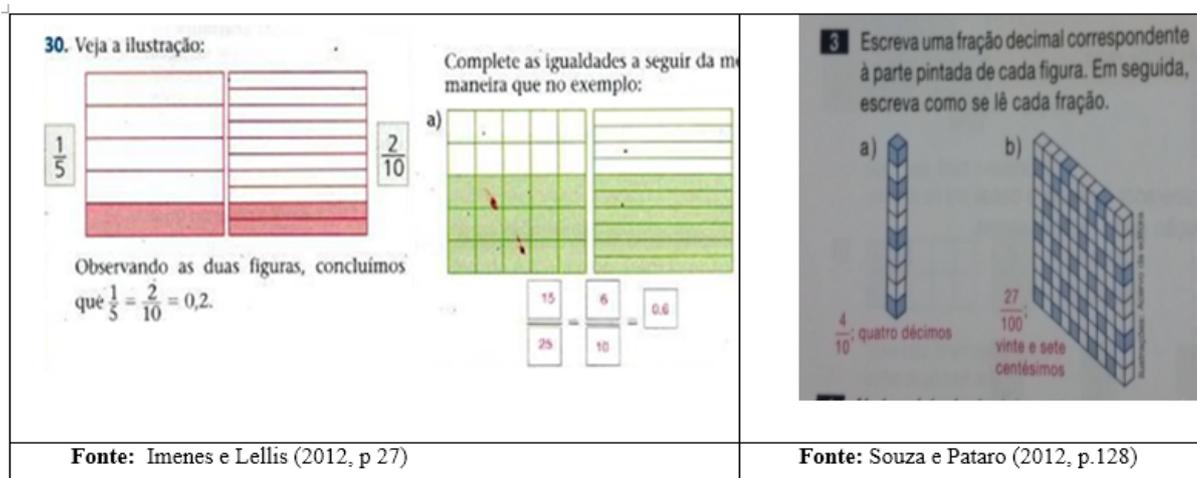
Observando o quadro 2 percebemos que, em termos absolutos, a quantidade de questões no LD “*Vontade de Saber Matemática*” é bem maior que a quantidade apresentada no LD “*Matemática Imenes e Lellis*”. Em termos proporcionais a quantidade de questões parte-todo representa a maioria nas duas coleções (40,4% no LD “*Matemática Imenes e Lellis*” e 48,7% no LD “*Vontade de Saber Matemática*”). Analisando as questões apresentadas nos livros do 6º ano percebemos a grande presença de situações parte-todo com representação icônica com grandezas contínuas cujo invariante é o procedimento de dupla contagem. Segundo Nunes e Bryant (1997), normalmente esse tipo de questão é resolvida com certa facilidade pelos estudantes, uma vez que o procedimento de dupla contagem é o suficiente para respondê-la. Os autores descrevem uma pesquisa realizada por Campos e colegas e afirma que “os alunos desempenharam ... igualmente bem com os [dois] itens”

para os autores o “desempenhonestes itens estava perto do teto (...)” (NUNES E BRYANT, 1997, p. 192).

Entretanto, vale ressaltar que pesquisas como as de Nunes e Bryant (1997), Garcia Silva (2007) e Pinheiro (2014), por exemplo, apontam a necessidade de além de se trabalhar com os diferentes significados, também de se ampliar a compreensão do significado parte-todo. Nesse sentido, procuramos questões que envolvessem diferentes graus de dificuldade e encontramos propostas que também envolviam o significado parte todo com grandezas contínuas e representação pictórica com maior grau de dificuldade. Uma das questões encontradas solicitava ao estudante a representação de número misto. Esse tipo de questão não é tão comum, e com isso os alunos costumam apresentar um pouco mais de dificuldade para resolver essas questões.

Observamos ainda a presença de situações parte-todo relacionando a representação fracionária com a decimal.

Figura 2 – Questões parte-todo com representação fracionária e decimal nas duas coleções

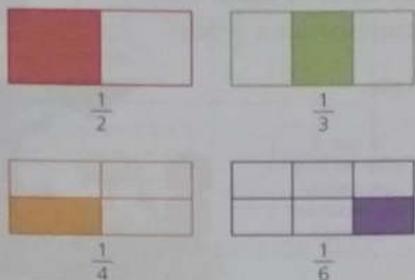
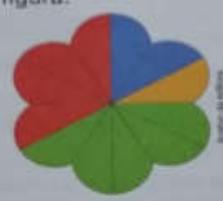


Analisando as duas questões observamos nas duas coleções preocupação de relacionar frações decimais com a sua representação decimal. No livro *Matemática* os decimais são apresentados a partir da compreensão de frações decimais. No documento curricular do estado de São Paulo, divulgado nos anos 80 e 90 havia essas indicações. Nesse documento seus autores sugerem que:

A representação decimal pode ser tratada simultaneamente: como decorrente dos princípios do SND, como também em decorrência das frações decimais. As ideias devem ser trabalhadas sempre com apoio de materiais concretos, como fichas, palitos, material dourado, papel quadriculado, etc. (SÃO PAULO, 1987, p. 49)

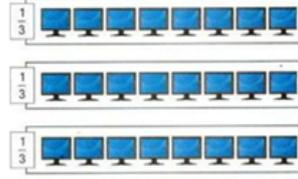
Observa-se especialmente na questão do LD Matemática de Imenes e Lellis (2012) a preocupação em trabalhar com o invariante equivalência. Sobre a equivalência o PCN chama atenção para o fato do conceito de equivalência e a construção de procedimentos para obtenção de frações equivalentes são fundamentais para que o aluno possa resolver problemas que envolvem a comparação dos Números Racionais sob a forma fracionária.

Figura 03 – Questões parte-todo cominvariante ordem nas duas coleções

<p>Três quintos de meu dinheiro correspondem a R\$ 540,00. Quanto eu tenho? R\$ 900,00</p> <p>Nas figuras, estão destacadas frações de um mesmo retângulo. Por isso, você pode comparar essas frações.</p> 	<p>21 Observe a figura.</p>  <p>a) Escreva uma fração para representar a parte da figura em:</p> <ul style="list-style-type: none"> • amarelo $\frac{1}{12}$ • verde $\frac{5}{12}$ • azul $\frac{2}{12}$ • vermelho $\frac{4}{12}$ <p>b) Escreva as frações obtidas no item a em ordem crescente utilizando o símbolo <.</p> <p>$\frac{1}{12} < \frac{2}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$</p> <p style="text-align: right;">17</p>
<p>Fonte: Imenes e Lillis (2012, p.127)</p>	<p>Fonte: Souza e Pataro 2012, p.17)</p>

Analisando as duas questões observa-se a preocupação em questionar a relação de ordem de frações utilizando a ideia de parte-todo. Considerando resultados de pesquisas como as de Rodrigues (2005), Oliveira Filho (2012) e Pinheiro (2014), as quais apontam a tendência dos professores brasileiros em iniciar o ensino utilizando-se somente do significado parte-todo, observamos que os livros conservam a cultura de priorizar o trabalho por meio desse significado. Entretanto, parece que esses LD já mostram sinais de romper essa cultura. Concluímos isso uma vez que outras ideias relativas a esse significado estavam presentes nas duas coleções. Retomando a análise do quadro 2, podemos perceber que o significado operador é o segundo mais apresentado (64 questões), delas algumas envolviam o cálculo da fração correspondente.

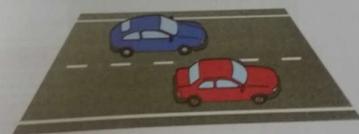
Figura 04 – Questões Operador nas duas coleções

<p>29. Faz parte do regulamento de um clube a seguinte norma:</p> <p>Artigo 15 — Para alterar qualquer artigo deste regulamento, é necessária a aprovação de, no mínimo, $\frac{2}{3}$ dos sócios.</p> <p>Quantos votos são necessários para alterar o regulamento se o clube tiver:</p> <p>a) 405 sócios? b) 500 sócios?</p>	<p>Em um cibercafé, $\frac{2}{3}$ dos 24 computadores têm microfones. Quantos computadores desse cibercafé têm microfones?</p>  <p>Para resolvermos essa questão, representamos os 24 computadores em 3 grupos com a mesma quantidade de computadores, pois 3 é o denominador da fração $\frac{2}{3}$.</p>  <p>Como cada grupo contém 8 computadores, temos que $\frac{1}{3}$ dos 24 computadores corresponde a 8. Dessa forma, $\frac{2}{3}$ dos computadores correspondem a 2 grupos, ou seja, 16 computadores ($2 \cdot 8 = 16$).</p> <p>Agora, calcule quantos computadores têm fone de ouvido, sabendo que $\frac{5}{8}$ dos computadores do cibercafé têm fone de ouvido.</p> <p>20 computadores</p> <p>Cibercafé é estabelecimento que, além de funcionar como lanchonete, propicia a seus clientes o uso de computadores e acesso à</p>
<p>Fonte: Imenes e Lellis (2012, p.93)</p>	<p>Fonte: Souza e Pataro (2012, p.12)</p>

Além disso percebemos haver questões com esse mesmo significado, nas duas coleções, que envolvem números mistos, invariantes equivalência e ordem.

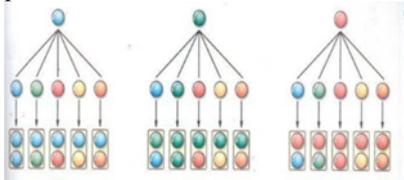
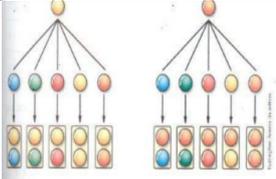
Na figura 5 a seguir destacamos duas questões envolvendo o invariante ordem, uma questão de cada coleção.

Figura 05 – Questões Operador com invariante ordem nas duas coleções

<p>e- Compare o triplo da quarta parte de uma quantia com a quarta parte do triplo da mesma quantia. Qual é maior?</p>	<p>53 Dois carros de modelos diferentes possuem os tanques de combustível com a mesma capacidade. Para fazer uma mesma viagem, o carro A consumiu combustível equivalente a $\frac{5}{6}$ do tanque e o carro B, a $\frac{14}{18}$ do tanque.</p>  <p>a) Qual dos carros consumiu menos combustível na viagem? carro B b) Sabendo que a capacidade dos tanques de combustíveis é de 54 L, determine quantos litros cada carro consumiu. carro A: 45 L; carro B: 42 L.</p>
<p>Fonte: Imenes e Lellis (2012, p.92)</p>	<p>Fonte Souza e Partaró (2012, p.141)</p>

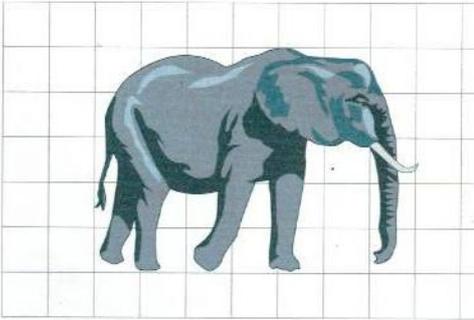
Para resolver a questão do LD Vontade de Saber Matemática o aluno necessita compreender o conceito de operador e a partir do cálculo da fração correspondente comparar as frações. Retomando a análise do quadro 2, observamos que quase com a mesma quantidade de questões envolvendo o significado operador encontramos outras que envolviam a ideia de razão (64 delas). O significado razão envolve outras ideias matemática como a probabilidade e escala, por exemplo. Quanto a probabilidade encontramos propostas como as seguintes:

Figura 06 – Questões Razão Apresentadas nas duas Coleções

<p>No lançamento de um dado comum a probabilidade de se obter como resultados divisores de 27 é:</p> <p>a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$</p>	<p>Em uma caixa de papelão foram colocadas as 5 bolinhas representadas a seguir. Uma bolinha foi sorteada e sua cor foi anotada. Em seguida a bolinha sorteada foi colocada novamente na caixa e outro sorteio foi realizado, anotando também a cor da bolinha sorteada.</p>  <p>O esquema a seguir apresenta todas as possibilidades de sorteio</p> 	  <p>Qual a probabilidade de no sorteio obter:</p> <p>a) Pelo menos uma bolinha azul? b) Uma bolinha vermelha e uma amarela? c) Duas bolinhas de mesma cor?</p>
<p>Fonte: Imenes e Lellis (2012, p.289)</p>	<p>Fonte: Souza e Pataro (2012, p.147)</p>	

Esse tipo de questão pode auxiliar o estudante, segundo orientações dos PCN, a ampliar a exploração das possibilidades de quantificar o incerto, para esse segmento de ensino (anos finais) os autores desse documento afirmam que isso ocorre por meio da vivência por parte dos estudantes de noções elementares de probabilidade. Dessa forma, segundo esse documento: “os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana” (BRASIL, 1998, p. 70). Outra ideia desenvolvida por meio do significado razão foi a escala:

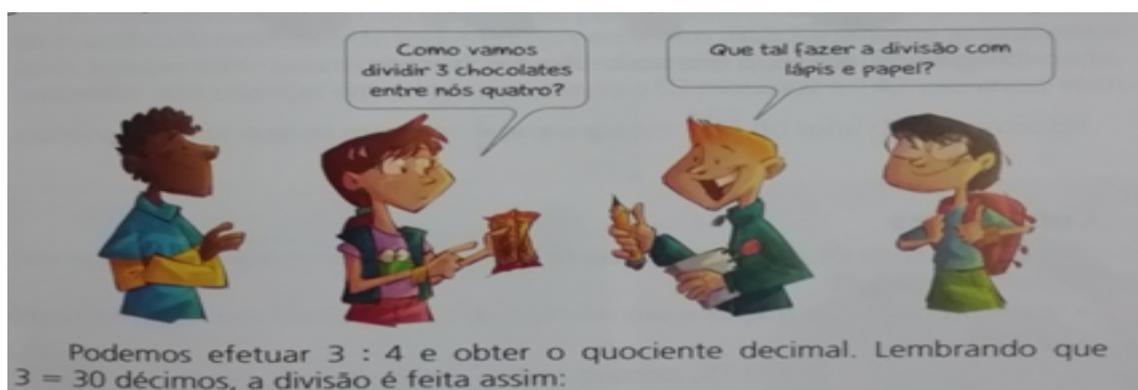
Figura 7 – Significado Razão com escala nas duas coleções

<p>Observe o elefante africano, que foi desenhado na escala 1:60. Qual é a altura dele na realidade (dica régua)</p> 	<p>No encarte de propaganda do lançamento de um condomínio residencial, foi apresentada a planta baixa de um apartamento</p>  <p>De acordo com as informações, resolva as questões:</p> <p>a) Qual a escala utilizada na planta baixa? b) Nessa planta baixa, 5 cm correspondem a quantos metros do apartamento? c) Para representar 5,2 m do apartamento, quantos centímetros da planta baixa são utilizados? d) Com uma régua, meça o comprimento e a largura (externos) da planta baixa e calcule, em metros, o comprimento e a largura do apartamento.</p>
<p>Fonte: Imenes e Lellis (2012, p.156)</p>	<p>Fonte: Souza e Pataró (2012, 259)</p>

Os PCN consideram que a razão como “uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão” (BRASIL, 1998, p.102) e apresentam a escala como uma das formas de apresentá-la. Nos livros aqui analisados encontramos 64 questões envolvendo essa ideia.

Analisando ainda o quadro 2 observamos que ideia que pouco aparece nas duas coleções é o quociente, entretanto ele tem um percentual maior na coleção “Matemática” e nessa mesma coleção há uma predominância maior desse significado no 7º ano, 31,7%, índice maior que o do significado parte-todo. Nesta coleção, por exemplo a representação dos números fracionários é apresentada por meio de uma situação quociente.

Figura 8 – Questão Quociente apresentada em uma das coleções.



Fonte: Imenes e Lellis (2012, p.23)

Entretando é possível observar que os outros significados, quais sejam: quociente, razão e operador, são abordados em quantidades semelhantes. Principalmente no livro do 6º ano das duas coleções uma vez que o significado parte-todo representa quase que a metade do total de situações apresentadas - 49,3% no Livro “Matemática” e 64% no LD *Vontade do Saber*. Entretanto, no 7º ano o percentual deste tipo de significado diminuiu, mas ainda apresenta índices altos. Uma análise geral, também nos permite perceber que o significado razão é o segundo mais apresentado, seguido pelo significado operador.

Quanto à representação, houve incidência maior, nos dois materiais, da representação numérica – fracionária, relação a representação decimal ou porcentagem – seguido da

pictórica a qual está presente, sobretudo, em situações envolvendo a ideia parte-todo. A representação em linguagem natural foi a que teve menor incidência. O invariante equivalência predominou nas duas coleções, já o invariante unidade de referência e densidade foi verificada em somente três questões.

Considerações Finais

Analisamos qualitativamente a forma como o tema frações foi desenvolvido em cada coleção observamos que na primeira coleção, as frações foram introduzidas depois da realização do trabalho com os números decimais. Já na segunda coleção, o estudo das frações ocorreu logo após o dos Números Naturais. Investigando-se as tarefas dos dois volumes das coleções de livros, selecionou-se, inicialmente, 319 questões que foram analisadas segundo a grade criada para esse fim. Percebemos que, o maior percentual de situações envolvia o significado parte-todo, mas é preciso ressaltar que esse tipo de situação apareceu em maior número nos livros do sexto ano. Entretanto, notamos que a presença dos demais significados também foi constante.

Quanto à representação, houve incidência maior da representação numérica, ou seja, as representações fracionária, percentual e a que relaciona a fração com decimal. Encontramos também, mas em menor quantidade, representações pictóricas. Este tipo de situação foi encontrada, sobretudo, em situações envolvendo a ideia de parte-todo. A representação que apareceu em menor quantidade foi a linguagem natural.

Analisando as coleções, observa-se uma maior preocupação em levar em conta os resultados de pesquisas sobre as frações uma vez que apresentam situações envolvendo diferentes significados, mas não parece ser uma preocupação utilizar a linguagem natural em sua representação.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação de Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª)*. Brasília, DF, 1998.

_____. *Guia de Livros Didáticos PNLD 2014: Língua Estrangeira Moderna*. Brasília: MEC, 2013a. Disponível em: . Acesso em: 03 Fev. 2014.

CAVALCANTI, E.M.S. GUIMARÃES, G. Os significados de Fração em Livros Didáticos das Séries Iniciais. *Artigo apresentado 2º SIPEMAT*, 2008.

GARCIA SILVA, A. F. *O Desafio do Desenvolvimento Profissional Docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações*. Tese de Doutorado em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

GARCIA SILVA, A., CANOVA, R. F. E CAMPOS, T. M. A Fração em Livros Didáticos de Matemática para os Anos Iniciais. *Revista Acta Scientiae*. (no prelo)

GARCIA SILVA, A. F.; CAMPOS, T. M. M.; PINHEIRO, M. G. C.; SOUSA, M. *Situação quociente Limites e possibilidades*. XI ENEM, 2014.

GARCIA SILVA, A. F. DUARTE, A. R. S.; OLIVEIRA FILHO, D. *Estudo da multiplicação e divisão de números fracionários no currículo de matemática do estado de São Paulo*. Boletim GEPEM, v. 61, p. 63-78, 2012.

IMENES, L. M; LELLIS, M. *Matemática. 6º e 7º anos*. São Paulo. Editora Moderna. 2012

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: E.P.U., 1986.

NUNES, T., BRYANT, P. *Crianças Fazendo Matemática*. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Key understandings in mathematics learning, Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities*. Nuffield Foundation, 2009. Disponível em <<http://www.nuffieldfoundation.org/reports>>. Acesso em 24 de abril de 2012.

RODRIGUES, W. R. (2005), *Números Racionais: um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal*. Dissertação de mestrado em elaboração, PUC-SP.

SÃO PAULO. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o ensino de Matemática: ensino fundamental*. São Paulo. SE/CENP, 1987.

SOUSA, J. R., PATARO, P.R. M.. *Vontade de saber matemática. 6º e 7º anos. 2ª ed.* São Paulo: FTD, 2012.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 1990, p. 133-170.