

O ENSINO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO ENVOLVENDO O PENSAMENTO INTUITIVO E VISUAL

*André Lúcio Grande
Faculdade de Tecnologia de Mauá (FATEC-MAUÁ)
andreluciogrande@gmail.com*

Resumo:

Este trabalho objetiva apresentar e discutir alguns aspectos ligados ao ensino do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), especificamente sobre o papel e a importância do pensamento intuitivo e visual na construção do conhecimento matemático, buscando elucidar e trazer à tona elementos essenciais para a compreensão do referido teorema. A partir dos resultados obtidos em nossa tese de doutoramento sobre um estudo epistemológico do TFC voltado ao seu ensino, analisaremos uma sequência didática por nós elaborada evidenciando os principais conceitos envolvidos no seu estudo. Como referencial teórico, foram empregadas as ideias ligadas ao uso da intuição na gênese e no desenvolvimento dos conceitos matemáticos defendidas por Henri Poincaré (1995), bem como a importância da visualização no ensino do Cálculo segundo David Tall (2002). Como resultados, podemos inferir que uma abordagem que leva em consideração elementos predominantemente intuitivos e visuais pode colaborar em grande medida no entendimento da essência do TFC.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Visualização; Intuição; Rigor.

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) vêm apresentando nos últimos anos alguns temas e questões norteadoras que alavancaram sobremaneira o desenvolvimento de diversas pesquisas em Educação Matemática voltadas ao Ensino Superior.

Essas pesquisas são embasadas e justificadas pelas dificuldades e pela incompreensão por parte dos estudantes dos conceitos básicos do CDI tais como: função, limite, derivada, integral e continuidade, dentre outros. Tais problemas ligados ao ensino e aprendizagem desses conceitos envolvem questões que merecem uma maior reflexão por parte de professores e educadores matemáticos, com o intuito de procurar entender quais são os elementos envolvidos nesse contexto no sentido de procurar minimizar esses problemas.

Dentre os temas abordados num curso de CDI, destacamos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que estabelece a relação existente entre as operações de derivação e integração como inversas uma da outra. Essa relação pode ser entendida da seguinte maneira: dada uma função contínua f definida num intervalo $[a, b]$, pode-se determinar uma função F definida no mesmo intervalo pela expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, com $x \in [a, b]$, que é derivável e $F'(x) = f(x)$.

A integral fundamenta-se no cálculo do limite da soma de quantidades infinitamente pequenas, enquanto a derivada está ligada basicamente ao estudo de taxas de variação para valores também infinitamente pequenos.

Pode-se efetuar uma comparação de que a operação de integração está para a adição, visto que apresenta em sua gênese o conceito da soma de parcelas infinitamente pequenas, assim como a derivação está para a subtração, por tratar de problemas que envolvem taxas de variação, sendo a relação mútua e recíproca entre essas operações dada por um teorema. Portanto, a integração e derivação são operações inversas uma da outra.

A gênese do estudo dos problemas ligados às operações de integração e derivação pode ser encontrada desde o período da antiguidade, nos trabalhos de Arquimedes (século III a. C.), na resolução do cálculo de áreas e do traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva. Pode-se creditar em grande medida a importância da concepção que Newton e Leibniz, de maneira independente, tiveram de relacionar derivação e integração como processos inversos entre si.

Todavia, de um modo geral, para os estudantes de CDI a relação entre as operações de integração e derivação passa despercebida ou pouco compreendida. Isso é evidenciado em pesquisas na área de Educação Matemática voltada ao Ensino Superior, em que se observa a incompreensão por parte de alunos desse teorema, com o indício da pouca exploração desses elementos por parte dos professores.

Essa constatação é enfatizada na pesquisa de Segadas Vianna (1998), por exemplo, que investigou a compreensão dos alunos sobre o TFC, com o objetivo de procurar identificar as dificuldades que eles manifestaram no tocante aos conceitos envolvidos no teorema, como continuidade de uma função, que interferem segundo a autora em sua compreensão de maneira explícita ou implícita. Essa constatação sucinta a discussão da questão da visualização gráfica do teorema.

Thompson (1994) procurou descrever o conhecimento produzido pelos alunos nos aspectos relacionados ao TFC por meio de um ensino experimental, assim como Carlson et al. (2007), ao investigarem a eficiência dos estudantes do primeiro ano de um curso na área de ciências exatas em uma universidade norte-americana sobre a compreensão do significado do TFC. Os autores, por meio de um ensino experimental sobre o significado e a utilização do

teorema, sugerem uma abordagem do curso de Cálculo com ênfase na questão de acumulação e a taxa de variação dessa acumulação.

Em minha prática docente percebi que não somente o TFC, mas também outros temas abordados num curso de Cálculo, como limite e continuidade de uma função, não são interpretados graficamente pelos alunos, e que essa prática pode auxiliar sobremaneira a compreensão de tais assuntos.

Motivados por essas questões, realizamos em nossa tese de doutoramento um estudo epistemológico do TFC voltado ao seu ensino. A proposta da mesma foi desenvolver uma sequência de ensino com o intuito de explorar situações-problema que auxiliassem na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, que constitui a essência do teorema. Tal intervenção de ensino privilegiou, por meio da resolução de algumas questões propostas, a exploração de aspectos ligados ao raciocínio intuitivo e do pensamento visual dos estudantes, como a elaboração de conjecturas, hipóteses e analogias.

Neste artigo apresentaremos algumas reflexões sobre os principais resultados encontrados em nossa pesquisa dessa intervenção de ensino e suas possíveis implicações, procurando elucidar aspectos ligados ao ensino do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), bem como o papel e a importância do pensamento intuitivo e visual na construção do conhecimento matemático, buscando emergir elementos essenciais para a compreensão do teorema.

2. Alguns elementos envolvidos no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo

O estudo do TFC engloba muitos outros assuntos a ele relacionados, tais como os conceitos de continuidade, integrabilidade e diferenciabilidade de uma função.

O conceito de integral, por exemplo, traz no seu bojo a noção de acumulação ou de somar quantidades infinitamente pequenas, assim como o conceito de derivada está relacionado com o cálculo de variações dessas quantidades.

Pode-se efetuar uma comparação de que a operação de integração está para a adição, visto que apresenta em sua gênese o conceito da soma de parcelas infinitamente pequenas, assim como a derivação está para a subtração, por tratar de problemas que envolvem taxas de variação. Nesse sentido, pode-se conjecturar que as operações de integração e derivação são inversas entre si. Porém essa hipótese parece não ser tão natural assim para os estudantes, pois

muitas vezes a operação de integração, por exemplo, é definida *a priori* como a inversa da derivação, não se enfatizando a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ com a noção de acumulação.

Ressaltamos que no ensino do TFC seria plausível destacar quais são as condições que devem ser satisfeitas para que seja estabelecida pelo teorema a relação em que se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $F'(x) = f(x)$. Para que isso seja possível, a função f deve ser contínua e limitada (portanto integrável) num intervalo $[a, b]$; essa condição é primordial para a existência de uma função primitiva F definida no mesmo intervalo e dada pela expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, com $x \in [a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ e, conseqüentemente, a diferenciabilidade da função F .

Além disso, alertamos que a expressão $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, com $F'(x) = f(x)$ é uma consequência da essência do teorema exposta anteriormente, ou seja, da relação inversa e recíproca entre as operações de derivação e integração e que a mesma não deve se limitar a uma ferramenta para se calcular integrais definidas.

Destacamos também que a compreensão do significado e a utilização do TFC requer a manipulação de algumas habilidades envolvidas em questão, tais como a noção de acumulação e da taxa de variação dessa acumulação, privilegiando o raciocínio intuitivo e o pensamento visual, por meio de representações gráficas e não se limitando apenas às técnicas algébricas. Essa abordagem do teorema enaltecendo tais elementos visa também auxiliar um melhor entendimento na notação e simbologia utilizadas, sobretudo no significado da expressão $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ como acumulação de uma função, e que sem dúvida nenhuma é uma das ideias centrais para a compreensão do teorema.

Sendo assim, apresentaremos a seguir algumas ideias sobre a importância da intuição e da visualização na construção do conhecimento matemático, particularmente no ensino e aprendizagem do Cálculo.

3. O papel do pensamento intuitivo e visual

Apesar de diversas concepções, pontos de vista e interpretações, o uso da intuição, imaginação, o raciocínio dedutivo e a visualização geométrica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática vêm sendo defendido e estudado por muitos pesquisadores.

Para o matemático e filósofo francês Henri Poincaré (1854 – 1912) a intuição é uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento. O autor faz críticas

à ciência concebida como absoluta e inquestionável, e discute em suas principais obras, como *A Ciência e a Hipótese* (1984), *O Valor da Ciência* (1995) e *Ciência e Método* (2004), a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção do conhecimento matemático.

Poincaré considerava a Matemática como uma construção mental em que os objetos são elaborados; o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais a partir de uma percepção imediata, uma intuição, sendo que há uma participação do sujeito na construção do conhecimento.

No tocante às características do raciocínio intuitivo, o autor classifica a intuição basicamente em dois tipos: a *sensível* ou *geométrica* e a intuição ao *número puro*.

A intuição sensível ou geométrica está ligada ao apelo aos sentidos e à imaginação e ao uso de representações geométricas, por exemplo. Esse tipo de intuição, segundo o autor, não pode nos dar a certeza, entretanto ela possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático. Para Poincaré (1995), a intuição não se baseia apenas na imagem geométrica, mas também física. A analogia física, segundo o autor, permite obter a solução que um matemático não poderia estabelecer pelo raciocínio dedutivo na busca de uma solução. A intuição física, portanto, não pressente a solução, mas sugere o raciocínio necessário para encontrá-la.

Já para a intuição ao número puro, Poincaré (1995) pondera que o número é desprovido de qualquer característica geométrica, de onde se origina a generalização por indução e pode-se encontrar de forma explícita nas ciências experimentais. Esse tipo de intuição apresenta a propriedade de invenção em menor grau, sendo o instrumento da lógica formal, da demonstração.

O cuidado, segundo o autor, que se deve tomar reside no fato de que o uso da intuição pode trazer resultados inesperados, pois algumas afirmações podem ser consideradas verdadeiras por uma simples ideia ou esquema mental criado na tentativa de provar tal afirmação e que nem sempre condiz com a demonstração. Isso acaba criando um conflito cognitivo com aquilo que se acredita intuitivamente por meio de representações geométricas, ou o apelo aos sentidos e a visualização para a sua demonstração formal.

Sobre a questão da visualização observamos que a mesma está ligada, por exemplo, com a ideia do uso da intuição e do rigor na descoberta e construção do conhecimento matemático.

Para Davis e Hersh (1989, p. 487), o intuitivo significa visual, sendo que a abordagem intuitiva possui um correspondente no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que está excluído da versão rigorosa (isto é, formal ou abstrata).

A importância do pensamento visual no ensino do Cálculo e as possíveis inter-relações com a intuição e o rigor são discutidas e apresentadas nos trabalhos de David Tall (2002). Para o autor, refutar a importância da visualização é negar as raízes de muitas das mais profundas ideias matemáticas, pois nas fases iniciais do desenvolvimento da teoria das funções, limite e continuidade, o pensamento visual se tornou uma fonte essencial de ideias e que o mesmo associado ao raciocínio intuitivo foi responsável pela elaboração de muitos conceitos que contribuíram em grande medida para diversas descobertas, assim como levou os matemáticos a resultados enganadores. Para o autor:

Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p. 20 – tradução nossa).

Segundo o autor, os alunos apresentam uma compreensão tipicamente algébrica dos principais conceitos relacionados ao TFC, pois eles se utilizam apenas de algoritmos e técnicas memorizáveis, e quando necessitam de uma interpretação ou visualização geométrica são utilizados esquemas ou imagens interiorizadas pelos mesmos que nem sempre correspondem com a definição formal de um conceito.

Podemos considerar que a visualização, em linhas gerais no ensino e aprendizagem do Cálculo, permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais utilizando, por exemplo, softwares dentre outros recursos didáticos. Esses elementos foram levados em consideração e utilizados na elaboração de uma sequência de ensino objetivando emergir as principais ideias ligadas ao TFC, como será descrito a seguir.

4. Uma sequência de ensino do Teorema Fundamental do Cálculo

Para a elaboração da intervenção de ensino, a questão que colocamos inicialmente foi: qual situação-problema pode ser criada e quais conceitos devem ser explorados inicialmente nessa situação para auxiliar a compreensão das relações presentes no TFC?

A utilização de sólidos geométricos nos pareceu ser mais “intuitivo” para os alunos, por isso empregou-se para a exploração das noções de acumulação e variação os conceitos de volume e área da seção transversal de um sólido geométrico.

Deve-se refletir que as noções de acumular e variar são consideradas “dinâmicas” e não estáticas, sendo que uma manipulação dinâmica e interativa por parte dos alunos com o objeto de estudo pode facilitar sua compreensão. Esse fato nos fez refletir sobre a utilização da representação gráfica para explorar os conceitos de acumulação e variação de duas grandezas, pois acreditamos que essa representação nos parece mais intuitiva no estabelecimento da relação existente entre as operações de integração e derivação.

Além disso, a questão da continuidade de uma função se revelou um elemento importante na compreensão do TFC e, conseqüentemente, foi analisada nessa sequência a forma como os estudantes interpretam esse conceito, assim como outros elementos tais como, variáveis dependentes e independentes de uma relação ou função, além da questão da continuidade destas.

Utilizou-se nessa tarefa um *software* como recurso auxiliar no intuito de observar, por meio da manipulação dinâmica a variação das grandezas envolvidas adotando-se simultaneamente dois ou mais registros de representação do objeto matemático como, por exemplo, o geométrico, gráfico ou o algébrico.

Sendo assim, selecionou-se o *software* GeoGebra para a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, visando trabalhar com os alunos a ideia intuitiva de variação e acumulação por meio da Geometria Dinâmica, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Participaram da pesquisa 14 estudantes de um curso de graduação em Tecnologia de uma faculdade pública de São Paulo, que cursavam a disciplina de Cálculo na referida instituição e que não haviam até então estudado o TFC. Esses alunos responderam as questões propostas em duplas, que foram formadas de maneira aleatória, para que justamente pudessem ser observadas as discussões geradas pelos estudantes sobre os conceitos envolvidos na intervenção de ensino.

Como proposta, foram entregues tarefas por escrito em que se solicitou construir o gráfico que representasse o volume de um sólido em função da altura de um plano que o

secciona, assim como o gráfico da área da secção transversal obtida no sólido em função da altura desse plano. O intuito é estabelecer a relação entre o volume como a acumulação das infinitas áreas de secção transversal e a variação dessa acumulação, que no caso é igual à área da secção transversal.

O sólido, denominado de S, compõe-se de um cilindro circular reto cuja base se encontra apoiado na base de um cone, sendo essas bases concêntricas, porém de raios distintos, conforme a representação de seu modelo em 2D construído no software GeoGebra a seguir:

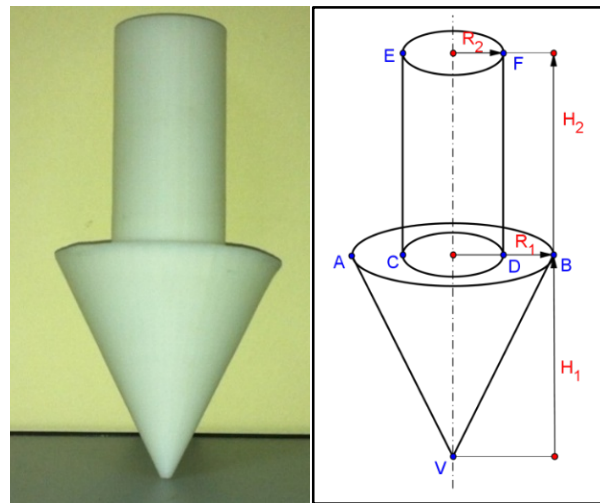


Figura 1 – Sólido S e sua representação geométrica em 2D no GeoGebra

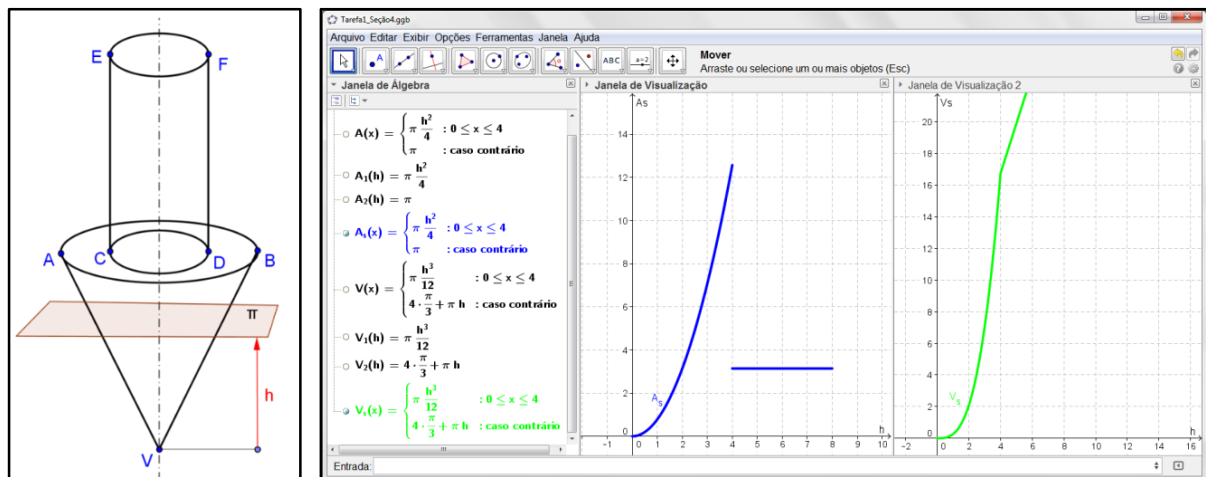


Figura 2 – Gráficos Área x h e Volume x h no GeoGebra

Os alunos receberam arquivos contendo as tarefas do sólido no software GeoGebra, em que os mesmos poderiam manipular de maneira dinâmica as propriedades do sólido em questão.

A representação em 2D do sólido no software já remetia os alunos a uma intuição e visualização geométrica na compreensão das questões propostas.

A escolha do sólido S se deve ao fato de que a área da seção varia inicialmente segundo uma função quadrática, e a seguir conforme uma função constante, e há nesse gráfico um ponto de descontinuidade. O volume do sólido S varia segundo uma função quadrática e a seguir por uma função afim, com a diferença de que o gráfico nesse caso é uma linha contínua.

5. Algumas reflexões sobre os resultados obtidos

Destacamos inicialmente que as duplas por meio manipulação dinâmica dos objetos representados no GeoGebra da possibilitou elaborar conjecturas, hipóteses sobre a relação entre a área da seção transversal do sólido e o volume do mesmo, o que se configurou como um rompimento dos alunos com o “ensino tradicional”.

Quanto à construção dos gráficos, uma resolução inusitada foi apresentada por uma das duplas, com relação à descontinuidade do gráfico da área da seção transversal. Por considerar o gráfico uma linha contínua, o gráfico foi elaborado de maneira separada, para respeitar a continuidade, conforme representação a seguir:

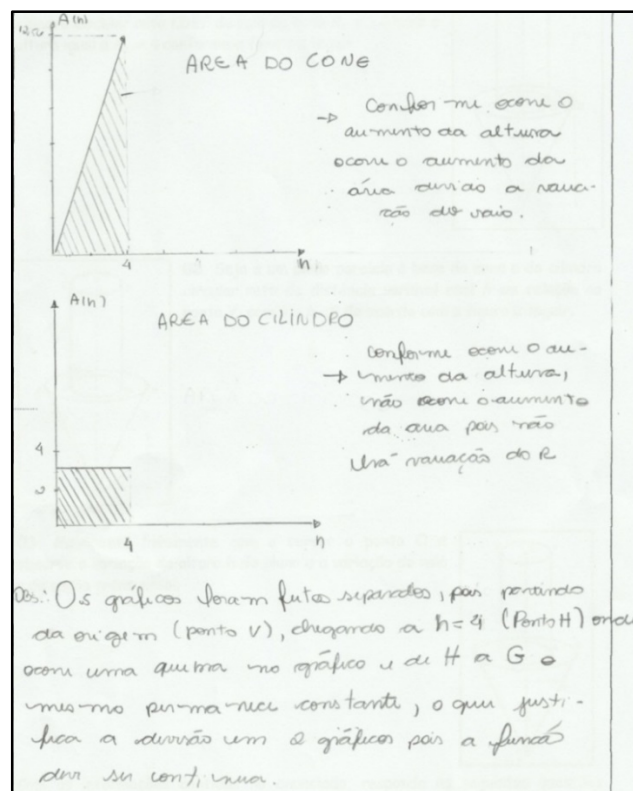


Figura 3 – Questão da continuidade do gráfico

Essa resolução apresentada por uma das duplas nos remete a refletir sobre uma maior abordagem por parte dos professores do conceito de continuidade de uma função, considerada condição necessária para o estabelecimento do TFC, no sentido de procurar abordar durante as aulas exemplos de situações que envolvam essa noção.

Sobre as questões propostas na intervenção de ensino, as duplas deveriam de um modo geral redigir de forma resumida uma conclusão provisória sobre os resultados inferidos observando o aspecto acumulativo do volume dado pela soma de camadas “infinitamente pequenas”, que no caso correspondem à área da seção transversal.

Essa conclusão poderia ser intuída pela relação entre os dois gráficos construídos em que para se obter a soma das áreas em um dado intervalo bastava calcular a variação de volume nesse mesmo intervalo e vice-versa, e o volume poderia ser obtido por uma acumulação e a área da seção transversal por uma diferença dessa acumulação.

Após a formalização de uma conclusão provisória esperava-se que as duplas elaborassem uma definição sobre a relação encontrada entre a área da seção transversal e o volume do sólido S , privilegiando-se o registro algébrico para o estabelecimento dessa relação.

As duplas poderiam descrever que, se o volume V é obtido pela soma das camadas “infinitamente pequenas”, então um diferencial desse volume corresponderia à área da seção transversal A , ou seja:

$$\text{Se } V(h) = \int_0^h A(x)dx, \text{ então } V'(h) = A(h)$$

Constatou-se de uma maneira geral que o uso do *software* GeoGebra tornou-se uma prática pedagógico extremamente útil, contribuindo de maneira significativa para a exploração do pensamento intuitivo e visual dos estudantes possibilitando a formulação de conjecturas e hipóteses, que puderam ser formalizadas numa etapa posterior.

Discutindo-se sobre a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor com o desenvolvimento ou a manifestação das intuições a partir das explorações ou representações proporcionadas pela atividade com o GeoGebra, diagnosticou-se que a utilização deste permitiu explorar muitas situações, como a criação de um modelo da situação-problema proposta em um ambiente informatizado, tornando esse

modelo “concreto” e possibilitando aos alunos acessar, interagir, manipular, e que essas ações se tornaram as grandes responsáveis pela exploração das cognições intuitivas.

6. Considerações Finais

Como resultados da intervenção de ensino, observamos em grande medida uma mudança significativa apresentada pelos alunos na compreensão do conceito de integral por meio de acumulação, desprendendo-se da interpretação geométrica de integral como sinônimo de área, e conseqüentemente sua relação com a questão de variação ligada ao conceito de derivada, fato que permite inferir que esse tipo de abordagem colabora na compreensão da essência do TFC.

Uma das principais contribuições da intervenção de ensino sedimentada no pensamento intuitivo e visual que observamos foi trazer à tona algumas ideias, esquemas, conceitos formulados pelos indivíduos que possam auxiliar na construção dos demais, e colocar essas ideias sempre em questionamento para que possam ser refinadas ou refutadas.

Diagnosticamos por meio da intervenção de ensino realizada que a visualização no estágio inicial provou ser uma fonte fundamental na elaboração de ideias, conjecturas e hipóteses. Pode-se até inferir que sem a utilização do *software* nas tarefas não seria possível em grande medida explorar tantos conceitos e ideias intuitivas no sentido de buscar o formalismo necessário.

No ensino e aprendizagem do TFC, questões como função e continuidade podem ser o ponto incisivo a ser trabalhado com maior ênfase inicialmente em um curso de Cálculo, pois esses elementos interferem sobremaneira no entendimento do teorema.

Considera-se que a essência do TFC se resume justamente em relacionar a integração e a derivação como operações inversas entre si, e que essa relação mútua pode ser demonstrada a partir do conceito de integral como uma função de acumulação em que satisfeitas as condições necessárias, se $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ então $F'(x) = f(x)$. Este trabalho propiciou perceber esse cerne e não ficou arraigado com o resultado de teorema $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ que permite calcular integral definida.

Procuramos por meio desse artigo levantar alguns pontos pertinentes sobre o ensino e a aprendizagem do TFC no intuito de promover uma reflexão melhor por parte de professores e

educadores matemáticos sobre a importância do pensamento intuitivo e visual na construção do conhecimento matemático, tendo como expectativas futuras a sugestão de outros temas matemáticos, como continuidade de uma função, por exemplo, serem abordados nos cursos de Cálculo visando o uso de um recurso computacional que possa explorar cognições intuitivas e visuais por parte dos estudantes.

7. Referências

CARLSON, M. P. et al. Developing and Connecting Calculus Students 'notions of Rate-of-Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. In: **Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics**. Washington, DC: M.A.A., 2007.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. **A experiência Matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1989.

GRANDE, A. L. Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2013.

POINCARÉ, H. **Science and Method**. Translated by Francis Maitland. New York: Barnes e Noble Books, 2004.

_____. **O valor da ciência**. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

_____. **A Ciência e a Hipótese**. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984

SEGADAS VIANNA, C. C. Student's Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions, Theorems and Visual Imagery. Tese de Doutorado. Institute of Education University of London, 1998.

TALL, D. O. Using Technology to Support and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In: **Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, 2002.

_____. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: **Visualization in Mathematics** (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105 – 119, 1991.

TALL, D. O. e VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151– 169, 1981.

THOMPSON, P. W. Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 26(2-3), p. 229-274, 1994.