

## DEMONSTRAÇÃO DA LEI DOS SENOS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA: POTENCIALIDADES E DESAFIOS ACERCA DO ENSINO DE GEOMETRIA.

*Sebastião Wesley Freitas da Silva*  
*IFCE – Campus de Cedro*  
*wesley.freitas@outlook.com*

*Marcos Antônio Macedo*  
*IFCE – Campus de Cedro*  
*marcos.k28@gmail.com*

### **Resumo:**

Esta pesquisa tem por objetivo apresentar, por meio de uma demonstração geométrica, as potencialidades do *software* GeoGebra, como ferramenta auxiliar no processo do ensino de geometria. Para tanto, o estudo consiste de uma possível abordagem da demonstração da “lei dos senos”, em que os procedimentos metodológicos delinearam-se inicialmente sobre um levantamento bibliográfico a respeito do *software*, evidenciando suas potencialidades e desafios na utilização em demonstrações geométricas. Logo em seguida, apresentou-se a demonstração da “lei dos senos”. Além disso, a escolha deste *software*, deve-se ao fato de possuir recursos que permitem ao professor organizar uma sequência didática que possibilite uma aprendizagem significativa. Dito isso, os achados da pesquisa apontam para uma notória relevância do uso do *software* GeoGebra em demonstrações de teoremas da Geometria Plana, contribuindo para uma melhor compreensão dos conceitos, permitindo inferir que este ambiente de geometria dinâmica surge como forte aliado, potencializando o processo de ensino aprendizagem.

**Palavras-chave:** GeoGebra; Ensino de geometria; Demonstrações geométricas; Lei dos Senos.

### **1. Introdução**

O objetivo deste artigo foi apresentar por meio de algumas demonstrações geométricas as potencialidades e desafios da utilização do *software* GeoGebra, no intuito de evidenciar questões relacionadas ao seu uso, identificando vieses que pudessem perpassar essa temática, destacando aqueles de maior relevância para o ensino de geometria mediante as abordagens realizadas no estudo.

A questão norteadora do trabalho buscou responder quais contribuições na utilização do *software* no ensino de geometria, apresentando aspectos que fortalecem seu uso, assim como os que o inviabilizam, os quais estão em evidência nos estudos selecionados para a

construção da proposta temática, considerando que o *software* está relacionado a uma série de fatores determinantes para seu uso efetivo, como veremos mais a frente.

A motivação para a realização do estudo constrói-se na necessidade latente de compreender os mecanismos do *software* em sua amplitude, por entender que é um conjunto de inúmeras ferramentas facilitadoras do processo de ensino e aprendizagem, que trazem como plano de fundo a melhoria da qualidade do ensino.

Na perspectiva da melhoria da qualidade de ensino, tendo em vista que, o atual cenário educacional está marcado pela sua inevitável relação com universo tecnológico da informática, as discussões a respeito do uso dessas tecnologias tornam-se cada vez necessárias, pelo fato de possibilitarem debates e reflexões, contribuindo para a criação de novas metodologias de ensino que atendam a demanda do ensino e aprendizagem e, que embora não seja nova, possui outros fatores determinantes para seu atendimento.

Os temas pontuais encontrados por ocasião do presente estudo são apresentados elucidando-se a visão identificada nos textos lidos, propondo um diálogo entre os mesmos e com a demonstração realizada com auxílio do *software* GeoGebra.

Os achados indicam que, diante dos procedimentos metodológicos utilizados, há variados aspectos relevantes acerca das potencialidades e desafios do uso do *software* no ensino de geometria, dentre os quais foram evidenciados mediante a realização da demonstração da lei dos senos.

## 2. Procedimentos metodológicos

Buscamos responder a questão problemática circundante da importância do uso do desse *software* no ensino de geometria com foco em demonstrações geométricas. O estudo assinala-se como uma pesquisa de cunho qualitativo-exploratório, desenvolvido em dois momentos: pesquisa bibliográfica, para um maior aprofundamento das reflexões acerca da problemática proposta, de modo que, permita um diálogo com a demonstração realizada, possibilitando responder a questão problema, caracterizando o segundo momento deste estudo.

A pesquisa bibliográfica analisou trabalhos que versam sobre as funcionalidades, características e viabilidade do *software* GeoGebra, não obstante, também foram analisados os

que discutiam suas potencialidades e desafios, contemplando a importância para o ensino de geometria, de modo que favoreça o processo ensino-aprendizagem, possibilitando uma (re)ação para desmistificação e concretização do conhecimento matemático.

No que diz respeito a demonstração matemática realizada com o auxílio do *software*, foi selecionada uma demonstração de um dos teoremas de maior relevância da geometria, sendo este a “lei dos senos”, buscando esclarecer aspectos que potencializam e limitam o seu uso efetivo nas aulas de matemática, ampliando assim, o debate acerca da sua utilização como ferramenta de ensino aprendizagem. Tendo em vista que o objetivo de nosso trabalho foi realizar uma possível abordagem da demonstração da lei dos senos já produzida no GeoGebra, não apresentamos o passa-a-passo da construção desta demonstração. Entretanto fizemos um breve comentário acerca do processo de construção desta demonstração, pois configura-se como um dos principais fatores responsáveis pela não utilização do *software GeoGebra*.

Neste escrito é apresentada uma possível abordagem da demonstração geométrica da lei dos senos com o uso do no *software* de tal modo a evidenciar o leque de oportunidades que o mesmo possui para com o ensino de geometria, partindo do pressuposto de que demonstrações matemáticas e em específico as geométricas, muitas vezes não são de fácil assimilação, sendo necessário um olhar atento a cada passo realizado. Diante disso, tais demonstrações estarão dialogadas com as discussões teóricas selecionadas para esse estudo.

### 3. O *software* GeoGebra

O *software* GeoGebra é programa de geometria dinâmica de código fonte aberto, permitindo o seu aperfeiçoamento e redistribuição sem fins lucrativos, por qualquer pessoa que tenha interesse. Estando disponível para computadores, tablets e smartphones, objetiva auxiliar o professor na construção de aulas mais dinamizadas dos conteúdos relacionados a Geometria, Funções, dentre outros. (PIMENTA 2013)

Após a execução no computador, o programa apresenta em sua parte superior uma barra de menu responsável pela sua configuração. Além disso, também é encontrado uma

barra de ferramentas que possibilita o acesso rápido a inúmeras funções responsáveis pelo manuseio dos conceitos matemáticos<sup>1</sup>.

Ainda se tratando da descrição do programa, este apresenta em sua parte inferior a barra “campo de entrada” de comandos, responsável por auxiliar ao usuário a encontrar outras funções que não estão presentes na barra de ferramentas. Por fim, ao centro da tela encontram-se as janelas de álgebra que contém a forma algébrica das manipulações realizadas pelo usuário, as quais são mostradas na janela de visualização.

Diante disso, é notório as inúmeras oportunidades por trás do *software* GeoGebra, considerando que, sua utilização contribui em muitos fatores para o processo de ensino aprendizagem em geometria, em particular na visualização geométrica, que por sua vez, pode ser desenvolvida, “à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.” (NASCIMENTO, 2012, p. 127)

A utilização de *softwares* de geometria dinâmica no ensino e aprendizagem de Geometria tanto pode ser mais uma ilustração para a aula como um rico material didático que instiga a curiosidade dos alunos e aguça seu espírito investigativo, levando-os a elaborar conjecturas sobre situações diversas. O professor desempenha um importante papel nestas duas opções, pois é ele quem decide o tipo de abordagem dessas atividades. Se o professor objetiva que o aluno seja apenas um telespectador da aula, ele explorará tais *softwares* como meros ilustradores para as propriedades das figuras geométricas. Mas, ao contrário, se o professor encaminha os alunos para tarefas de observações, a formulação e testagem de conjecturas em ambientes de geometria dinâmica, estes estarão sendo utilizados como instrumentos de suporte ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo. (OLIVERO, PAOLA e ROBUTTI, 2003, apud DIAS, 2009, p. 49)

A argumentação construída, permiti-nos inferir que existe um grande potencial no uso do GeoGebra, uma vez que, este permite realizar inúmeras tarefas mobilizadoras do pensamento crítico/curioso. Por outro lado, para que se consiga tais resultados, requer do professor um certo domínio na manipulação das ferramentas do *software*, evitando, dessa forma, que o programa seja utilizado como um mero ilustrador de figuras.

Para Amado, Sanchez e Pinto (2015, p. 646), “um dos aspectos que merece particular destaque no trabalho com o GeoGebra”, é diferença entre as figuras obtidas no ambiente de geometria dinâmica e as atividades geométricas realizadas com lápis e papel. Esta quando tomada como referência ao invés das figuras construídas no ambiente do *software*, facilmente

<sup>1</sup>Por exemplo, a função ponto médio, esta permitir a construção de um ponto médio entre dois pontos escolhido pelo usuário do programa

deduz-se as dificuldades de compreensão que podem surgir. Diferentemente de quando a referência é um ambiente de geometria dinâmica, em que, feitas as figuras ou construções, estas preservam as propriedades e leis da geometria, oferecendo assim um aprendizado mais eficaz.

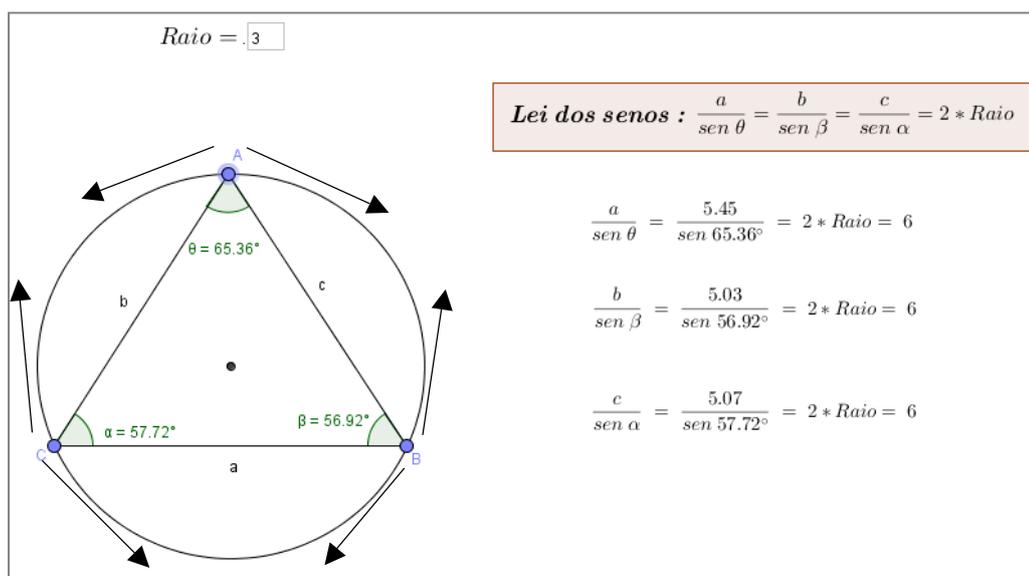
Lopes (2013) afirma que no ambiente escolar em que a informática estabelece uma relação entre alunos, professores e TIC, é oferecido ao professor uma série de oportunidades para se trabalhar a matemática, fato esse que se torna importante quando se realiza observações, investigações e análises de tal modo que se consiga estabelecer relações.

Entretanto Nascimento (2012), afirma que muitos professores não possuem o devido preparo para o manuseio de computadores, lousas digitais, dentro outros e que, além de não deterem de conhecimentos necessários da geometria para que se possa elaborar uma aula de qualidade, apegam-se apenas ao conteúdo do livro didático, em que no geral a geometria é abordada apenas como conjunto de definições e fórmulas desconexas de qualquer aplicação lógica, concreta, histórica ou cotidiana.

No construto dessa argumentação o autor destaca o despreparo de muitos professores na utilização de instrumentos da informática e até mesmo de conceitos específicos de sua área de atuação, contribuindo para o distanciamento do uso de ferramentas de ensino, como o GeoGebra.

#### **4. A lei dos senos no GeoGebra**

A lei dos senos apresenta uma ideia clara e autoexplicativa no que diz respeito a relação entre os lados e os ângulos de um triângulo. No entanto os professores, fazendo uso da metodologia tradicional e seguindo fielmente a ideia apresentada nos livros didáticos, acabam restringindo o teorema apenas aqueles triângulos que apresentam os chamados “ângulos notáveis” negligenciando, desse modo, alguns aspectos que consideramos importante como por exemplo a validade do teorema com toda generalidade do seu enunciado. Por outro lado, percebe-se que, a utilização do *software* na abordagem do teorema em questão possibilita ao professor movimentar os vértices do triângulo usufruindo de uma infinidade de triângulos permitindo, dessa forma, uma visão mais objetiva e genérica do teorema em relação os lados e ângulos, conforme a figura abaixo.



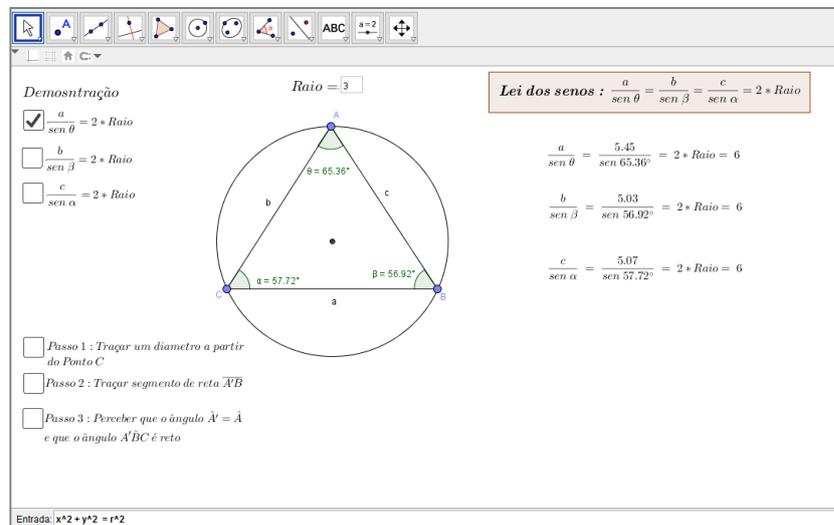
Fonte: acervo dos próprios autores

Figura 1: Explorando o teorema no GeoGebra

O professor diante desta construção consegue mostrar por meio da movimentação dos vértices do triângulo, conforme indicado na figura 1, que a lei dos senos é válida com mais generalidade. Contudo, vale salientar que, para se realizar tal construção se faz necessário o domínio de algumas ferramentas do programa tais como: Círculo dados centro e raio; Ponto; Segmento de reta; Ângulo; Texto; Controle deslizante; Campo de entrada; etc. Além disso, também é necessário um bom planejamento de como realizar a abordagem, pois só o conhecimento das ferramentas não é o suficiente para uma inserção do *software* nas aulas de matemática.

No tocante a demonstração corriqueiramente realizada, o professor constrói um desenho no quadro branco e a partir dele realiza-se a demonstração, na qual ao final obtém-se um outro desenho que, na maioria dos casos são de difíceis compreensão, uma vez que, este está repleto de rabiscos e deduções realizados durante a demonstração. Por outro lado, quando a demonstração é realizada por intermédio do *software* GeoGebra, o professor pode organizar uma sequência de passos, de modo a mobilizar o pensamento crítico/curioso do aluno motivado pelo dinamismo e a visualização proporcionada pelo mecanismo utilizado. Além disso Yang (2001) apud Amado; Sanchez e Pinto (2015, p. 639) recomenda que, “a partir da construção de figuras no GeoGebra, os alunos poderão estruturar os seus raciocínios e potencializar a utilização da lógica dedutiva através da visualização de figuras e análise das suas

propriedades, enquanto estruturas dinâmicas”. As figuras (2, 3 e 4) representam os passos efetuados na demonstração do referido teorema com o uso do programa computacional.



Fonte: acervo dos próprios autores

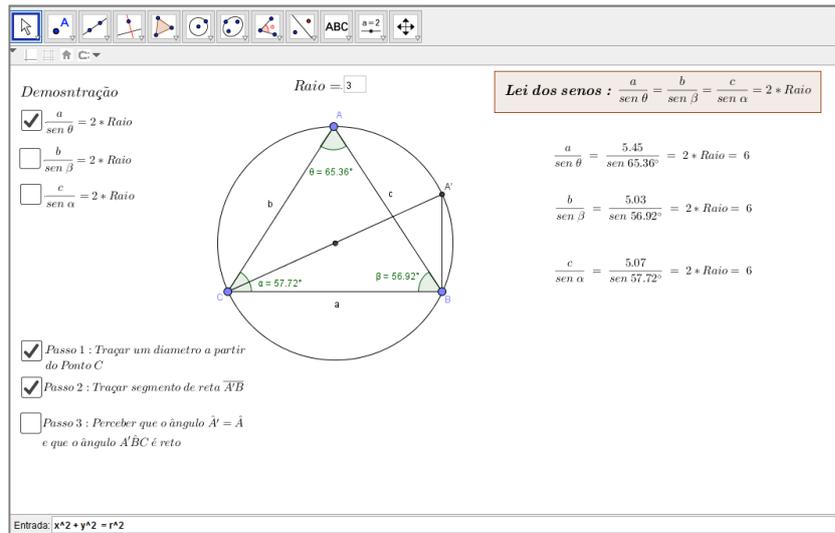
Figura 2: Início da demonstração da Lei dos Senos

Na figura 2 vemos a representação de uma situação típica da aplicação da Lei dos Senos em que é apresentado um triângulo com ângulos diferentes dos “ângulos notáveis” e ao lado as respectivas razões que caracterizam o teorema. Vemos que a praticidade e objetividade na abordagem proporcionada pela visualização e o dinamismo apresentado no processo, viabiliza um aprendizado diferenciado e com significados.

Nesse sentido, o GeoGebra torna-se uma ferramenta propícia à Investigação Matemática em sala de aula por possibilitar ao aluno analisar suas construções, experimentar, construir, comprovar ou refutar hipóteses e conseguir, na sua relação de interação com o software, edificar conceitos e formalizar as situações matemáticas. (Santos; Oliveira e Vaz, p. 160)

A figura 3 mostra a etapa da demonstração em que é utilizado o teorema do ângulo inscrito como suporte na demonstração. Uma grande vantagem da utilização do *software* nesse procedimento reside no fato de que ao deslizar os pontos A, B e C sobre a curva podemos vislumbrar de uma infinidade de ângulos que, por meio da visualização dinâmica o aluno é instigado a raciocinar de maneira lógica e dedutiva.

Desta forma, o professor ao demonstrar que  $\frac{a}{\sin \theta} = 2 * \text{Raio}$ , inicialmente irá ter de construir um triângulo auxiliar inscrito na mesma circunferência, para tanto terá que clicar no “Passo 1: Traçar um diâmetro a partir do Ponto C” e em seguida no “Passo 2: Traçar segmento de reta  $\overline{A'B}$ ”. Conforme figura abaixo.

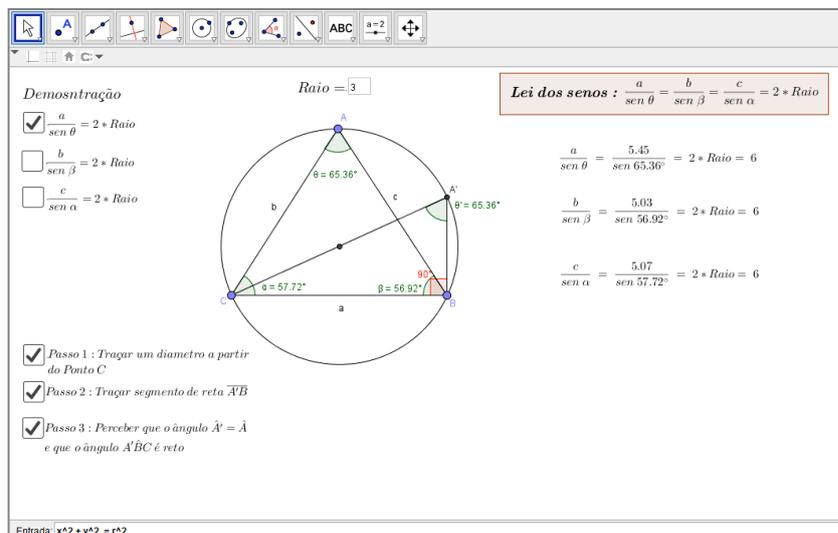


Fonte: acervo dos próprios autores

Figura 3: Realização dos passos para a demonstração

A partir disso, o professor pode realizar um resgate de conhecimento acerca de vários elementos da geometria que estão contidos nesta figura por meio de perguntas investigativas como: que elementos da geometria você consegue identificar nesta figura? Que nome eu dou ao segmento  $\overline{CA'}$ ? O ângulo  $\hat{A}$  é igual ao ângulo  $\hat{A}'$ ? Por quê? Por que o ângulo  $A'BC$  é reto?

Após os alunos levantarem suas conjecturas, o professor poderá realizar uma revisão significativa dos conteúdos estudados anteriormente e que serão necessários para o entendimento do que se está trabalhando. Revisão esta sendo concluída ao final do “Passo 3: Perceber que o ângulo  $\hat{A}$  é igual ao ângulo  $\hat{A}'$  e que o ângulo  $A'BC$  é reto”. Conforme ilustrado na figura abaixo.



Fonte: acervo dos próprios autores

Figura 4: Conclusão dos passos da demonstração

Ao final desses três passos, o professor terá fornecido informações e “pistas” suficientes para que o aluno por conta própria chegue à seguinte conclusão:  $\text{sen } \theta = \frac{a}{CA'}$ , e a partir daí concluir que  $\overline{CA'} = \frac{a}{\text{sen } \theta}$ . Contudo ele saberá que,  $\overline{CA'} = 2 \cdot \text{Raio da circunferência}$ . É válido salientar que tais deduções não serão de imediato, pois o conhecimento matemático não se configura com algo pronto e acabado, mas sim como processo de descobertas.

## 5. Considerações finais

Com a efetivação deste estudo foi possível responder à questão problema, evidenciando a necessidade de mostrar que o leque de oportunidades que o *software* GeoGebra oferece ao ensino de geometria transcende o plano das imparcialidades que o inviabilizam, possibilitando ao aluno a uma nova percepção da disciplina de matemática, em específico a geometria. Com isso, permiti-nos inferir que seu uso correto e conciso torna-se um grande aliado às ações do professor, promovendo uma aprendizagem significativa do aluno, envolvendo-o na realização de aulas mais dinâmicas e menos monótonas.

A análise dos artigos relacionados ao uso do *software* GeoGebra contemplando suas características, potencialidades e desafios, foi de extrema importância para a elaboração desse estudo que defende a utilização do *software* GeoGebra nas aulas de matemática, com a finalidade de envolver, de maneira produtiva, o aluno no conhecimento matemático, proporcionando-lhe melhores oportunidades de desenvolvimento de sua aprendizagem, mediante aulas que não busquem apenas repassar fórmulas, mas sim que permita a compreensão das mesmas.

É importante salientar que, o *software* GeoGebra dispõe de diversas formas de abordagens, contudo, este não é a solução para os problemas inerentes ao processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista que este consiste de uma série de fatores, cuja convergência ou divergência podem contribuir positivamente ou negativamente para o aprendizado dos alunos.

Dito isso, o *software* GeoGebra surge com um grande potencial de tornar aulas de matemática mais atrativas. Entretanto, vale lembrar que a sala de aula é uma equação de múltiplas variáveis em que a solução evidentemente não é a trivial, mas com certeza o resultado que se obtém é um aprendizado significativo.

## 6. Referências

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. A Utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro - Sp, v. 29, n. 52, p.637-657, ago. 2015.

DIAS, Mônica Souto da Silva. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico.** 209. 213 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro - Sp, v. 27, n. 46, p.631-644, ago. 2013.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. AVALIAÇÃO DO USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA. In: ACTAS DE LA CONFERENCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBGRA, 1., 2012, Montevideo. **Anais.** Montevideo: Departamento de Matemática del Consejo de Formación En Educación, 2012. p. 125 - 132.

PIMENTA, Marcel Romualdo Guimarães. **Aplicação do software GeoGebra no ensino da geometria plana.** 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SANTOS, Paula Raberta dos; OLIVEIRA, Claudimary Moreira Silva; VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. O uso de investigação matemática com o GeoGebra na formalização do cálculo de áreas desconhecidas por meio da regra dos trapézios. In: CONGRESSO DE EDUCAÇÃO, V SEMINÁRIO DO ESTÁGIO E II ENCONTRO DO PIBID, Não use números Romanos ou letras, use somente números Arábicos., 2014, Goiana. **Anais.** Goiana: Universidade Estadual de Goiás, 2014. p. 157 - 175.