XXI EBEM
BARREIRAS
XXI ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
13 a 16 de agosto de 2025
ISSN 2175-1668

Uma proposta de introdução da soma de Riemann

Daniel Sales da Conceição
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA – Brasil
http://orcid.org/0000-0001-8314-3207
danielsalesc358@gmail.com

Isabelle Oliveira Pereira
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA – Brasil
http://orcid.org/0009-0006-6516-0445
isabelle.teof02@gmail.com

Ana Maria Mota Pereira Silva
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA – Brasil
http://orcid.org/0009-0000-5693-4820
anamariamotaps16@gmail.com

Ana Beatriz Lima Cerqueira
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA – Brasil
http://orcid.org/0009-0009-6826-062X
anablcerqueira@gmail.com

Eliene Barbosa Lima
Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA – Brasil
http://orcid.org/0000-0001-6928-5217
eblima@uefs.br

Recebido • 04/04/2025
Aprovado • 05/06/2025
Publicado • 08/08/2025

Minicurso

Resumo:
Esta oficina tem como objetivo introduzir a soma de Riemann para estudantes da graduação que lidam com o estudo do Cálculo Integral. Sua realização ocorrerá em quatro momentos. Nos dois primeiros, serão abordados os seguintes pontos: breve apresentação do matemático Bernhard Riemann, o aspecto teórico e a contextualização do conceito de quantidades infinitesimais, além das aproximações de áreas de curvas desconhecidas. Em seguida, por meio da aplicação de situações problemas do mundo físico, os participantes irão explorar a aproximação de áreas sob curvas utilizando retângulos, integrando teoria e prática. Por último, será abordado o conceito formal de integral, com uma interpretação de sua relação com a derivada. Dessa forma, espera-se que a oficina contribua para que os participantes compreendam e atribuam significação ao estudo da soma de Riemann, possibilitando-os aplicá-la em diversos contextos, inclusive na educação básica.

Palavras-chaves: Soma de Riemann. Aplicações. Figuras Planas.

Ementa

Contextualização histórica sobre o porquê do conteúdo ser denominado soma de Riemann; articulação entre a teoria e a prática do conceito de quantidades infinitesimais, explorando as aproximações de áreas de curvas desconhecidas. Aplicação de situações problemas numa postura reflexiva objetivando aos participantes compreenderem e atribuírem significação ao estudo da soma de Riemann. Análise e formalização da definição de Integral, utilizando exemplos do cotidiano e explicando sua relação com a derivada de forma intuitiva.

Justificativa

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025

Esta oficina está inserida em um trabalho de Iniciação Científica[1] em desenvolvimento, de um dos autores, cujo objetivo é fazer uma análise histórica sobre o ensino cálculo diferencial por meio do livro Piskunov. Trata-se de uma obra que foi bastante utilizada em cursos superiores, inclusive na UEFS em um determinado tempo histórico. Essa discussão integra o projeto de pesquisa denominado *O Cálculo Diferencial e Integral: uma análise das tentativas de sua escolarização* que visa "[...] analisar debates que intentaram incluir o Cálculo Diferencial e Integral como conteúdo escolar a partir da Reforma Benjamin Constant[2] até os dias atuais." (Lima *et al.*, 2021, p.1).

Inicialmente, este trabalho foi pensado como estande para ser apresentado na Feira de Graduação na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), ocorrida em 2024. Posteriormente, após boas repercussões nesse evento, produzimos um minicurso com esta temática, o qual foi realizado na XX Semana de Matemática (SEMAT), também na UEFS.

O estudo do Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, vinculado à área da Análise Matemática, possibilita entender e modelar tanto fenômenos naturais como estruturas abstratas. Em específico, o Cálculo Integral visa determinar áreas e volumes, entre outras grandezas, a partir de acumulação de quantidades infinitesimais.

Na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, vigente desde 2018, a disciplina Cálculo *Integral* está contida no rol de componentes curriculares obrigatórios do terceiro semestre integrantes do Eixo do Conhecimento Matemático (ECM). Seu objetivo é desenvolver conhecimentos teóricos e práticos para a formação do professor. Isto porque, conforme o Plano de Ensino da disciplina produzido para o segundo semestre de 2024:

> O Cálculo permite uma base teórica sólida e uma diversidade de aplicações nas áreas do conhecimento; uma maior percepção, ampliação, e compreensão dos conteúdos de funções, taxa de variação, área e volume; Além de que através da noção de integral o aluno pode articular problemas e exemplificar situações que irá confrontar na prática escolar, além de relacionar conteúdos que ministrará no ensino básico. Assim, o docente se tornará mais crítico, completo e pronto para atuar na sala de aula (UEFS, 2024, p. 1)

Sob esta perspectiva, o programa desse componente curricular engloba alguns conteúdos, dentre eles: Soma de Riemann, Definição da Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, em convergência aos estudos de Macedo *et al*. (2013), os alunos que cursam essa disciplina, em geral, não conseguem associar a resolução analítica da integral com o cálculo da área presente na Soma de Riemann, baseada "[…] pela soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelos" (Roque, 2012, p. 347), utilizando o método dos indivisíveis (retângulos infinitamente finos).

[1] Aprovado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq) da Universidade Estadual de Feira de Santana, sob orientação da Profa. Dra. Eliene Barbosa Lima.

[2] Essa Reforma foi implementada por meio do Decreto n.º 981, de 8 de novembro de 1890, que regulamentou a instrução primária e secundária do Distrito Federal (Brasil, 1890). Na atualidade, tais níveis de ensino podem ser equiparados aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025

Por este prisma, faz-se necessário mais ações para que este quadro comece a ser modificado. Dessa forma, justifica-se a realização dessa oficina. Espera-se contribuir para que os participantes compreendam e atribuam significação ao estudo da soma de Riemann, possibilitando-os aplicá-la em diversos contextos, inclusive na educação básica

Público

Estudantes da Licenciatura em Matemática e de cursos que apresentam a disciplina de Cálculo Integral na grade curricular.

Conteúdo programático

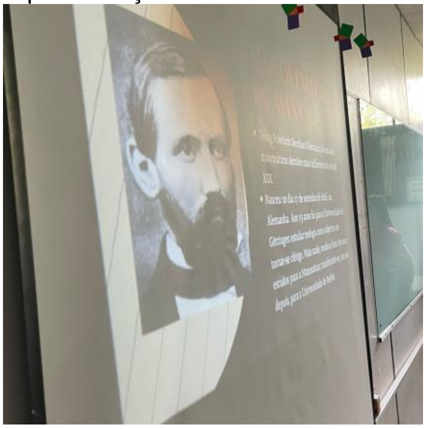
1. Contextualização histórica sobre o nome soma de Riemann;
2. Conceito dos infinitésimos;
3. Cálculo de áreas de figuras desconhecidas;
4. Definição formal de Integral;
5. Relação da definição de Integral com a derivada de forma intuitiva.

Metodologia

1° MOMENTO

Primordialmente, é pertinente apresentar a história e os feitos do matemático alemão Bernhard Riemann (1826 - 1866). Sendo assim, será feita uma breve introdução da sua biografia para contextualizar os alunos e fazer com que conheça um dos colaboradores do método de somas de infinitésimo que inspirou a produzir o minicurso.

Figura 1- Apresentação de Bernhard Riemann



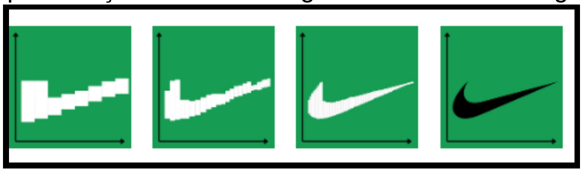
Fonte: Moreno (2024)

2° MOMENTO

A oficina prosseguirá abordando um aspecto teórico e contextualizado sobre os conceitos de quantidades infinitesimais e aproximações de áreas de curvas desconhecidas, as quais não apresentam áreas triviais. Para isso, serão expostas quatro imagens que representam o símbolo da “Nike”, porém formada com quantidades de retângulos e variações dos seus tamanhos.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025

Figura 2 - Aproximação da área da figura através de retângulos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

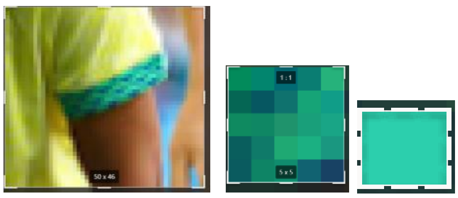
Nessa exposição, faremos os seguintes questionamentos aos participantes: “O que aconteceu com os retângulos ao longo das imagens?”, “Qual área em branco está mais próxima da área do símbolo?”, “Se aumentarmos cada vez mais a quantidade de retângulos, o que acontece?”, “E se imaginarmos uma quantidade tão grande que se aproxima cada vez mais do infinito, a imagem se torna cada vez mais nítida ou deformada?”. Com essas perguntas, é possível introduzir a ‘noção de tender ao infinito’.

Posteriormente, abordaremos sobre os *pixels*, unidade de medida que se refere a menor unidade de uma imagem digital, relacionando-os com a ideia de aproximação da imagem real, uma vez que, quanto maior a quantidade de *pixels* em uma imagem, melhor é a sua definição e mais próxima do real. Para explicar o que é o *pixel*, exibiremos uma imagem da seleção brasileira e, em seguida, recortes menores da imagem até chegar em uma unidade de *pixel*.

Figura 3: Seleção brasileira feminina de futebol

Fonte: Paris (2024)

Figura 4: Percepção de Pixel

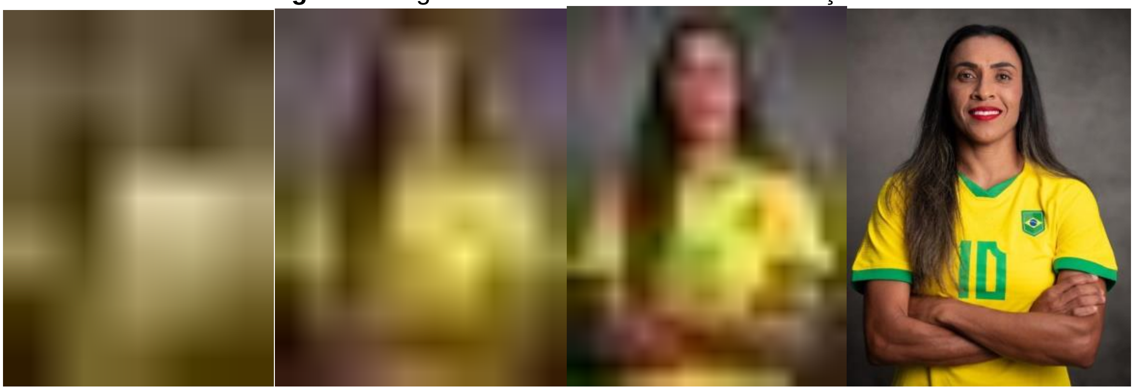


Fonte: Elaborado pelos autores

Em seguida, para relacionar com a ideia de definição maior da imagem, exibiremos a seguinte imagem:

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025

Figura 5: Jogadora Marta em diferentes resoluções.



Fonte: Gonzalez (2021)

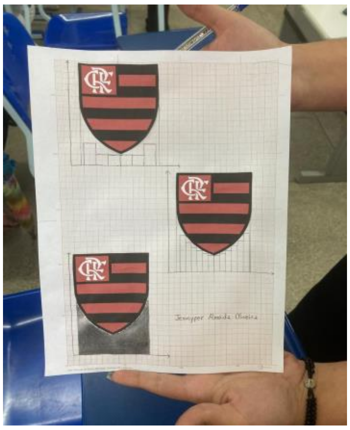
Desse modo é possível notar o aumento da resolução e definição da imagem, devido a quantidade crescente de *pixels*, se aproximando cada vez mais da imagem desejada. Isso também pode ser notado em vídeos no Youtube, os quais apresentam as opções de resolução para a imagem.

3° MOMENTO

Ademais, em um plano cartesiano, serão apresentados alguns brasões de times brasileiros que possuem curvas desconhecidas, sendo necessário, portanto, utilizar a soma de Riemann. Com esse propósito, primeiro mostraremos que é necessário calcular a área da figura inscrita no plano e, em seguida, a área da figura circunscrita. O resultado da subtração dessas áreas será o valor correspondente a área do brasão. Nesta etapa, será apresentada na oficina uma atividade prática, que tem como objetivo corroborar com a compreensão do conteúdo, sobretudo sobre a ideia de cálculo de área a partir de retângulos cada vez menores. A atividade consiste nos seguintes passos: 1º) distribuir papel milimetrado em conjunto com imagens impressas de figuras de áreas conhecidas, como o triângulo, e outras envolvendo áreas desconhecidas; 2º) com o material em mãos, os alunos devem desenhar os eixos X e Y no papel milimetrado e, em seguida, decalcar a imagem dada, de forma que o desenho fique no primeiro quadrante; 3º) depois, devem desenhar abaixo da figura retângulos de mesma largura, com o comprimento que vai do eixo X até a parte interior da figura, com o objetivo de encontrar a área aproximada sob a figura. De maneira análoga, podem desenhar retângulos sobre a figura na tentativa de estimar a sua área; 4º) por último, a resolução da atividade será socializada por todos e, assim, suponhamos que eles percebam que, quanto mais aumentamos a quantidade de retângulos e diminuímos sua largura, mais nos aproximamos da figura e, consequentemente, de sua área, tal como nos afirma a Soma de Riemann.

Figura 3- Área sob a curva do escudo do Flamengo

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025



Fonte: Minicurso XXSEMAT

4° MOMENTO

Agora, chegou a hora de fechar todos os aspectos apresentados nos tópicos 1, 2 e 3. Nesse momento, iremos formalizar o conceito de integral, explicando o surgimento do símbolo e o que cada elemento da expressão abf(x) dx significa. Além disso, será apresentada brevemente a relação entre a derivada e a integral na perspectiva geométrica, a fim de esclarecer para os participantes s o motivo pelo qual a integral é considerada uma antiderivação.

Após isso, serão feitos questionamentos sobre a oficina apresentada, tais como: é possível fazer esta atividade em outros contextos, inclusive em uma sala de aula do Ensino Médio? Quais seriam as dificuldades que os alunos e professores poderiam apresentar? Como esta oficina pode auxiliar na sua compreensão da derivada?

Recursos

Papel milimetrado, lápis, borracha, apontador, datashow, pincel de quadro branco, lousa.

Avaliação

A avaliação será processual, ou seja, ocorrerá por meio da participação e do desenvolvimento das atividades realizadas nos quatro momentos da oficina. Além disso, aplicaremos um questionário com três perguntas ao final, sendo elas: 1. Por que é fundamental que os alunos compreendam a soma de Riemann antes de avançar para o cálculo integral? 2. Como a visualização gráfica da soma de Riemann pode beneficiar o aprendizado dos alunos? 3. De que maneira a soma de Riemann ajuda os alunos a desenvolverem um entendimento mais profundo de áreas sob curvas? Isso nos permitirá identificar as dificuldades e conquistas dos participantes, bem como servir de parâmetro para possíveis ajustes na organização da oficina.

Referências

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025

GONZALEZ, M. Maior do mundo e sem patrocínio: por que Marta ainda protesta por salário? **De Universa**, São Paulo, 03 ago. 2021. Disponível em: https://www.uol.com.br/universa/noticias/redacao/2021/08/03/maior-do-mundo-e-sem-patrocinio-por-que-marta-ainda-protesta-por-salario.htm. Acesso em: 14 out. 2024.

HIGA, P.; MARQUES, A. **O que é a resolução de uma imagem digital?.** Tecnoblog, 2023. Disponível em:https://tecnoblog.net/responde/o-que-e-resolucao-de-imagem-digital/#:~:text=A%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20se%20refere%20%C3%A0,e%202.160%20pixels%20de%20altura.Acesso em: 26 fev. de 2025.

MACEDO, A. F. M. *et al*. Idéias fundamentais do cálculo integral. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba - PR. **Anais** [...]. Curitiba, PR: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013, p. 1-8.

PARIS 2024: o que o Brasil precisa para avançar no futebol feminino. **CNN: Esportes**, 27 jul. 2024. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/esportes/olimpiadas/paris-2024-o-que-o-brasil-precisa-para-avancar-no-futebol-feminino/. Acesso em: 14 out. 2024.

ROQUE, T. Um rigor ou vários? A análise matemática nos séculos XVII e XVIII. *In*: ROQUE, Tatiana. **História de Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2 reimp. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. p. 342-403.

UEFS [UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA**]. Plano de ensino da disciplina Cálculo Integral**. Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana, 2024.

MORENO, V. *et al.* **BuscaBiografáas.** 2024. Disponível em: https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/8985/Bernhard%20Riemann . Acesso em: 17 mar. 2025.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-12, 2025